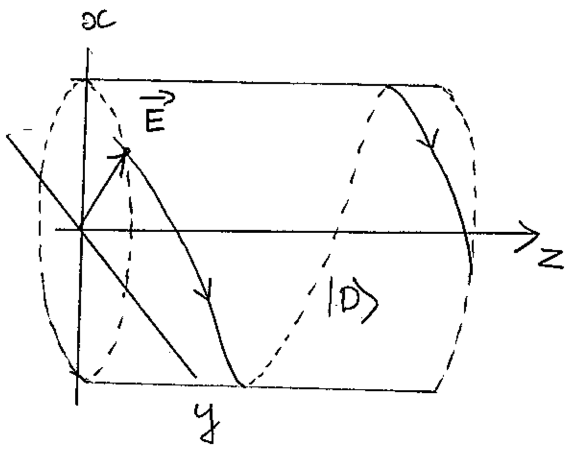
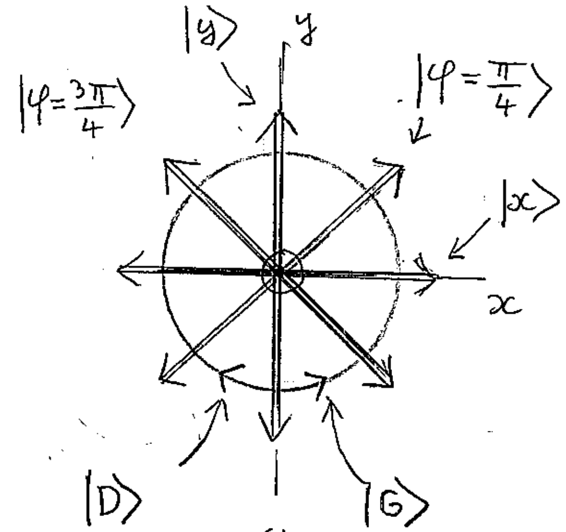
Polarisation de la Lumière



(a)



(b)

1. • L'amplitude $(A,B)=(1,0)$ donne

$$\begin{cases} E_x(z,t) = \cos(kz-\omega t) \\ E_y(z,t) = 0 \end{cases}$$

: c'est l'état $|x\rangle$

• De même $(A,B)=(0,1)$: état $|y\rangle$

$(A,B)=(\cos\varphi, \sin\varphi)$: état $|\varphi\rangle$, φ fixé.

• L'amplitude $(A,B)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i)$ donne

$$\begin{cases} E_x(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(kz-\omega t) \\ E_y(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Re}\left(e^{i(kz-\omega t-\frac{\pi}{2})}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(kz-\omega t) \end{cases}$$

qui a un mouvement dans le sens direct si z augmente, t fixé, et sens indirect si z fixé et t augmente.

C'est donc l'état de polarisation circulaire droite $|D\rangle$.

• De même $(A,B)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,i)$ est l'état $|D\rangle$.

② L'état $|D\rangle$ a pour amplitudes : $(a,b)=(1,0)$ et $(A,B)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i)$
" $|G\rangle$ " $(a,b)=(0,1)$ $(A,B)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,i)$

donc $M^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & +i\end{pmatrix}$ donc $M=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & +i\\ 1 & -i\end{pmatrix}$

et donc $|x\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|D\rangle+|G\rangle)$, $|y\rangle=\frac{i}{\sqrt{2}}(|D\rangle-|G\rangle)$, $|\varphi=\frac{\pi}{4}\rangle=\frac{1}{2}\left((1+i)|D\rangle+(1-i)|G\rangle\right)$
$|\varphi=\frac{3\pi}{4}\rangle=\frac{1}{2}\left((1-i)|D\rangle+(1+i)|G\rangle\right)$

③ $|\psi\rangle=(a,b)\in\mathbb{C}^2$

alors $\langle\psi|\psi\rangle=\bar{a}a+\bar{b}b=|a|^2+|b|^2$

$\sigma_1|\psi\rangle=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}$ donc $\langle\psi|\sigma_1|\psi\rangle=\bar{a}b+\bar{b}a$

$$\boxed{P_1=\frac{\langle\psi|\sigma_1|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}=\frac{\bar{a}b+\bar{b}a}{\bar{a}a+\bar{b}b}=\frac{\frac{\bar{a}}{\bar{b}}+\frac{a}{b}}{\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\frac{a}{b}+1}=\frac{\bar{z}+z}{z\bar{z}+1}}$$

de même

$\sigma_2|\psi\rangle=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-ib\\ia\end{pmatrix}$

$$\boxed{P_2=\frac{\bar{a}(-ib)+\bar{b}(ia)}{\bar{a}a+\bar{b}b}=\frac{\frac{\bar{a}}{\bar{b}}(-i)+i\frac{a}{b}}{\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\frac{a}{b}+1}=\frac{i(z-\bar{z})}{z\bar{z}+1}}$$

$\sigma_3|\psi\rangle=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}$

$$\boxed{P_3=\frac{\bar{a}a-\bar{b}b}{\bar{a}a+\bar{b}b}=\frac{\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\frac{a}{b}-1}{\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\frac{a}{b}+1}=\frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1}}$$

4 on a trouvé en 2 que

$$p_1 = \frac{2\,\mathrm{Re}(z)}{z\bar{z}+1}, \qquad p_2 = \frac{-2\,\mathrm{Im}(z)}{z\bar{z}+1}, \qquad p_3 = \frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1}$$

donc

$$\|\vec{p}\|^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \frac{1}{(z\bar{z}+1)^2}\left(4\,(\mathrm{Re}(z))^2 + 4\,(\mathrm{Im}(z))^2 + |z|^4 + 1 - 2\,|z|^2\right)$$

$$= \frac{1}{(|z|^2+1)^2}\left(|z|^4 + 2\,|z|^2 + 1\right) = \frac{(|z|^2+1)^2}{(|z|^2+1)^2} = 1$$

donc $\|\vec{p}\| = 1$ ce qui montre que le vecteur $\vec{p}$ est sur la sphère de rayon 1.

5 • Etat $|D\rangle$: $(a,b) = (1,0)$

donc $z = \frac{a}{b} = \infty$

donc $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 1$

$\vec{p} = (0,0,1)$

• état $|G\rangle$: $(a,b) = (0,1)$ donc $z = \frac{a}{b} = 0$

$p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = -1$

$\vec{p} = (0,0,-1)$

- <u>état $|x\rangle$</u>, $(a,b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ donc $z = \frac{a}{b} = 1$

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0$$

$$\vec{p} = (1, 0, 0)$$

- <u>état $|\varphi = \frac{\pi}{4}\rangle$</u>, $(a,b) = \frac{1}{2}\left((1+i), (1-i)\right)$

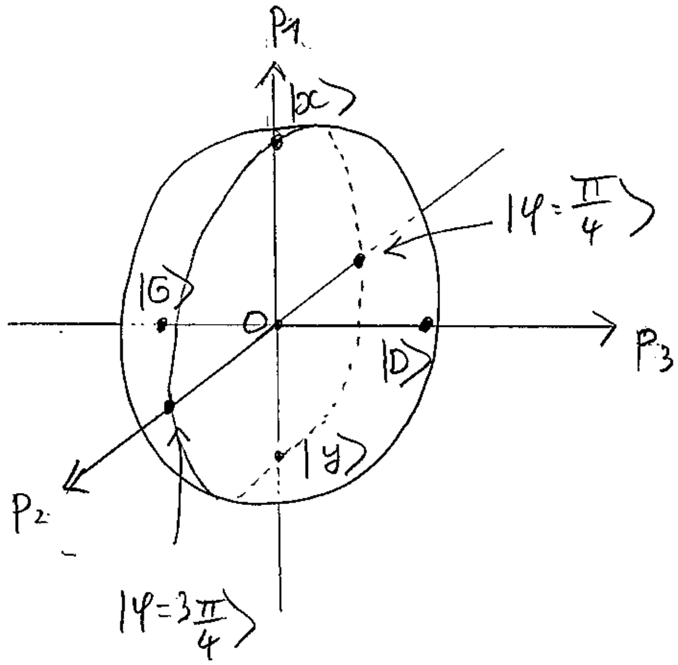
$$z = \frac{a}{b} = \frac{1+i}{1-i} = +i, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = -1, \quad p_3 = 0$$

$$\vec{p} = (0, -1, 0)$$

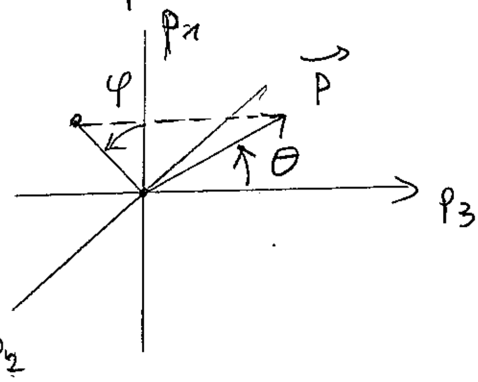
- <u>état $|\varphi = \frac{3\pi}{4}\rangle$</u>, $(a,b) = \frac{1}{2}\left((1-i), (1+i)\right)$

$$z = \frac{a}{b} = -i, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = +1, \quad p_3 = 0$$

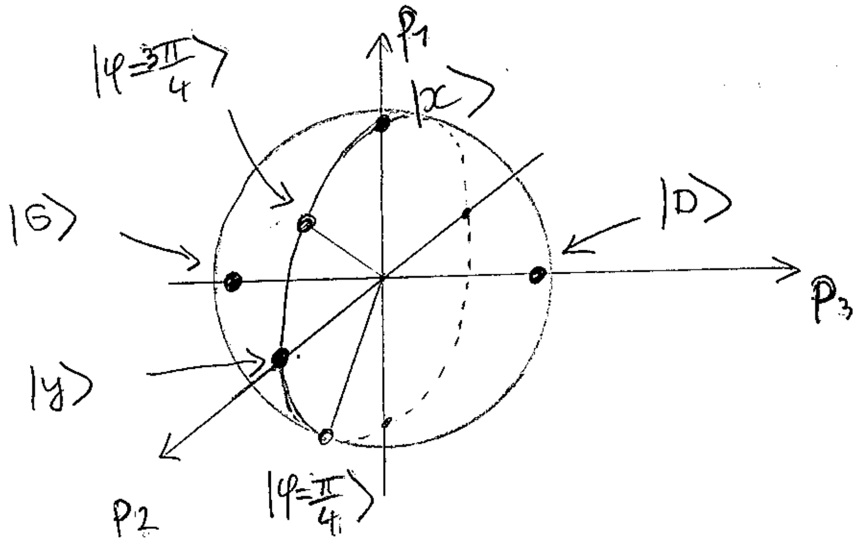
- <u>état $|y\rangle$</u>, $(a,b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(+i, -i)$, $z = -1$, $\vec{p} = (-1, 0, 0)$

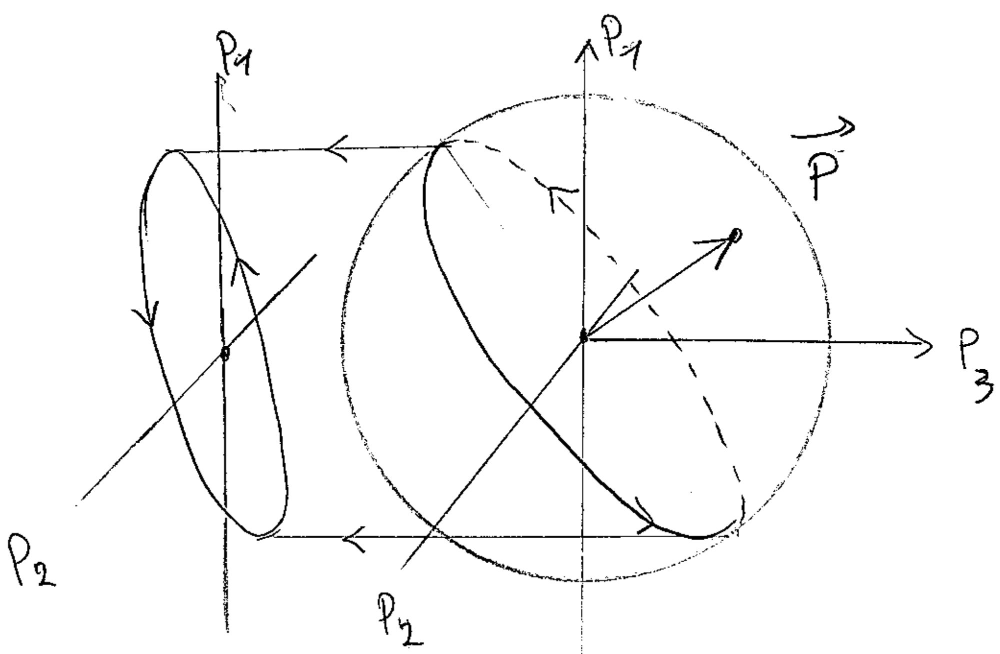


6 Les coordonnées sphériques (θ, φ) sont

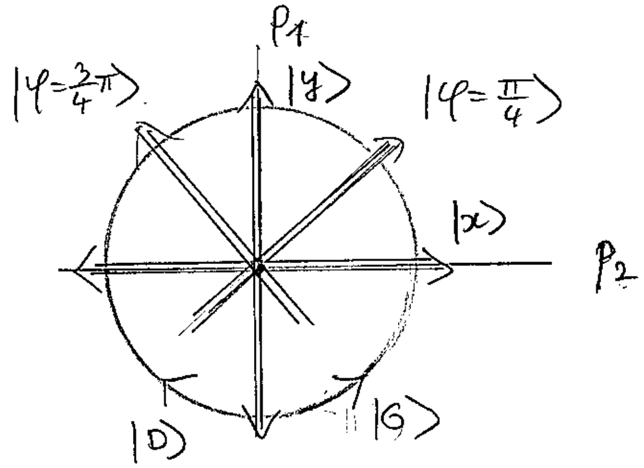


Donc en reprenant la figure de la question 5 on obtient la représentation suivante de Penrose : (on transforme $\varphi \to \frac{\varphi}{2}$)





cela donne pour les 6 états le schéma



ce qui est identique à la figure 1 à condition d'identifier $\begin{cases} \text{les axes } p_2 \text{ et } x \\ \text{les axes } p_1 \text{ et } y \end{cases}$

⑦. Cela est très général à un système quantique à 2 états (voir cours).

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left(1 + \vec{p}' \cdot \vec{\sigma}\right)$$

pour vérifier que $\vec{p}'$ coïncide avec la déf de $\vec{p}$ de la question 2, on considère le cas d'un état pur $\hat{\rho} = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}$.

Dans ce cas

$$p_1 = \frac{\langle\psi|\sigma_1|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}\,\sigma_1\right) = \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}\sigma_1 + \frac{1}{2}p_1'\sigma_1\sigma_1 + \frac{1}{2}p_2'\sigma_2\sigma_1 + \frac{1}{2}p_3'\sigma_3\sigma_1\right)$$

or $\mathrm{Tr}(\sigma_1) = 0$, $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2\sigma_1 = -i\sigma_3$, $\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$

donc

$$p_1 = \frac{1}{2}\,p_1'\,\underbrace{\mathrm{Tr}(1)}_{2} = p_1'$$

. De même pour les autres composantes : $\vec{p}' = \vec{p}$

8) Le filtre polarisant rectiligne selon φ normalisé correspond au projecteur $P_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$

ainsi

$$\frac{I_\varphi}{I} = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\, P_\varphi) = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\, |\varphi\rangle\langle\varphi|)$$

$$= \langle\varphi|\hat{\rho}|\varphi\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \vec{P}\cdot\langle\varphi|\vec{\sigma}|\varphi\rangle\right)$$

or on a vu que pour l'état $|x\rangle$, $\langle x|\vec{\sigma}|x\rangle = (1,0,0)$
donc

$$\frac{I(0)}{I} = \frac{1}{2}(1 + P_1)$$

De même,

$$\frac{I(\frac{\pi}{2})}{I} = \frac{1}{2}(1 - P_1) \quad \text{car } \langle y|\vec{\sigma}|y\rangle = (-1,0,0)$$

$$\frac{I(\pi/4)}{I} = \frac{1}{2}(1 - P_2) \quad \text{car } \langle \tfrac{\pi}{4}|\vec{\sigma}|\tfrac{\pi}{4}\rangle = (0,-1,0)$$

$$\frac{I(\frac{3\pi}{4})}{I} = \frac{1}{2}(1 + P_2) \quad \text{car } \langle \tfrac{3\pi}{4}|\vec{\sigma}|\tfrac{3\pi}{4}\rangle = (0,1,0)$$

$$\frac{I(D)}{I} = \frac{1}{2}(1 + P_3) \quad \text{car } \langle D|\vec{\sigma}|D\rangle = (0,0,1)$$

$$\frac{I(G)}{I} = \frac{1}{2}(1 - P_3) \quad \text{car } \langle D|\vec{\sigma}|D\rangle = (0,0,-1)$$

inversement :

$$P_1 = \frac{1}{I}\left(I(0) - I(\tfrac{\pi}{2})\right), \quad P_2 = \frac{1}{I}\left(I(\tfrac{3\pi}{4}) - I(\tfrac{\pi}{4})\right)$$

$$P_3 = \frac{1}{I}\left(I(D) - I(G)\right)$$

Corrections fines au spectre de l'atome d'hydrogène

1 $$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^{\,2} = (mc)^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{E}{c} = \left((mc)^2 + \vec{p}^{\,2}\right)^{1/2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad E = (mc^2) \cdot \left(1 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{(mc)^2}\right)^{1/2}$$

on pose $x = \frac{\vec{p}^{\,2}}{(mc)^2}$. On suppose $x \ll 1$.

On a $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

donc

$$E = (mc^2) \cdot \left(1 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2(mc)^2} - \frac{1}{8}\frac{\vec{p}^{\,4}}{(mc)^4} + \cdots\right)$$

$$= mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} \underbrace{- \frac{1}{8}\frac{\vec{p}^{\,4}}{m^3c^2}}_{C \cdot p^4} + O(p^6)$$

avec $C = -\frac{1}{8m^3c^2}$

La correction à l'énergie cinétique sera :

$$\hat{H}_{cin} = -\frac{1}{8m^3c^2} \cdot \vec{p}^{\,4}$$

(2) Les effets relativistes apparaissent pour :

$$|\vec{p}| \gtrsim mc$$

D'après le principe d'incertitude $\Delta x . \Delta p \approx \hbar$

cela implique des fluctuations en espace à l'échelle

$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p} \lesssim \frac{\hbar}{mc}$$

(3) D'après la formule de Taylor, posant $\vec{x} = \vec{x}_0 + (\delta\vec{x})$

$$V(\vec{x}) = V(\vec{x}_0) + (DV)(\vec{x}_0) . \delta\vec{x} + \frac{1}{2}(D^2V)(\vec{x}_0).(\delta\vec{x})^2 + O((\delta\vec{x})^3)$$

$$= V(\vec{x}_0) + \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x^i}\right)(\vec{x}_0) . \delta x^i$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j}\right)(\vec{x}_0) . \delta x^i \delta x^j + O((\delta\vec{x})^3)$$

Si on moyenne les fluctuations $\delta\vec{x}$ de façon isotrope à l'échelle ε

alors $\langle \delta x^i \rangle = 0$, $\langle \delta x^i \delta x^j \rangle = \delta_{i=j} \cdot C \cdot \varepsilon^2$,

où C est une constante (qui dépend de la façon de moyenner)

donc

$$\langle V \rangle(\vec{x}_0) = V(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}\right) . C . \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

$$= V(\vec{x}_0) + C_1 . \varepsilon^2 . (\Delta V)(\vec{x}_0) + O(\varepsilon^3)$$

avec C_1 : constante indép^t de ε.

4 Dans $\hat{H}_0$ il faut remplacer le potentiel $V(\vec{x}_0)$ par sa moyenne $\langle V\rangle(\vec{x}_0)$.

Cela rajoute le terme :

$$\hat{H}_{Darwin} = C_1\, \varepsilon^2 (\Delta V)(\vec{x})$$

$$= C_1 \cdot \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \left(\frac{+e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right) \Delta\left(-\frac{1}{r}\right)$$

$$= C_1 \cdot \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)(4\pi)\, \delta(\vec{x})$$

$$= C_2\, \delta(\vec{x})$$

avec $C_2 = C_1' \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)$

où C_1' est une constante numérique.

<u>rem</u> : avec l'équation de Dirac on montre que $C_1' = \frac{\pi}{2}$.

(5) on connaît $\hat{H}_0 \psi_{n,0,0} = E_n^{(0)} \psi_{n,0,0}$, $E_n^{(0)} = -\frac{\varepsilon_1}{n^2}$

et $\langle \psi_{n,0,0} | \frac{1}{r} | \psi_{n,0,0} \rangle = \frac{1}{a_0 n^2}$ $\qquad \varepsilon_1 = \frac{e^2}{2(4\pi\varepsilon_0)a_0}$

$$\langle \psi_{n,0,0} | \frac{1}{r^2} | \psi_{n,0,0} \rangle = \frac{2}{a_0^2 n^3}$$

on écrit :

$$\langle \psi_{n,0,0} | H_{cin} | \psi_{n,0,0} \rangle = \langle \psi_{n,0,0} | C p^4 | \psi_{n,0,0} \rangle$$

avec $C = -\frac{1}{8 m^3 c^2}$

or $\hat{H}_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)} \frac{1}{r}$

donc $p^2 = 2m \left(H_0 + \frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)} \frac{1}{r} \right)$

$$p^4 = (2m)^2 \left(H_0 + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \right)^2$$

$$= (2m)^2 \left(H_0^2 + \frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)} H_0 \cdot \frac{1}{r} + \frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)} \frac{1}{r} \cdot H_0 + \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{r^2} \right)$$

donc

$$\langle \psi_{n,0,0} | H_{cin} | \psi_{n,0,0} \rangle = C (2m)^2 \left[\left(E_n^{(0)}\right)^2 + \frac{2e^2}{(4\pi\varepsilon_0)} E_n^{(0)} \frac{1}{a_0 n^2} + \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \left(\frac{2}{a_0^2 n^3}\right) \right]$$

$$= E_n^{(0)} \cdot C (2m)^2 \left[-\frac{m e^4}{2\hbar^2 (4\pi\varepsilon_0)^2 n^2} + \frac{2 e^2 \, m e^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2 n^2} - \frac{2e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 a_0^2 n^3} \frac{n^2 \, 2(4\pi\varepsilon_0) a_0}{e^2} \right]$$

$$= E_n^{(0)} \cdot \frac{(-1)}{(8m^3c^2)} (2n)^2 \left[-\frac{me^4}{2\hbar^2 (4\pi\varepsilon_0)^2 n^2} + \frac{2me^4}{\hbar^2 (4\pi\varepsilon_0)^2 n^2} - \frac{4e^4 m}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2 n} \right]$$

$$= E_n^{(0)} \frac{(-1)}{2(mc^2)} \frac{(-me^4)}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2} \left[\frac{1}{2n^2} - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n} \right]$$

$$= E_n^{(0)} \frac{\alpha^2}{2} \frac{1}{n^2} \left(-\frac{3}{2} + 4n \right)$$

$$= E_n^{(0)} \frac{\alpha^2}{n^2} \left(2n - \frac{3}{4} \right)$$

Pour le terme de Darwin,

$$\langle \psi_{n,0,0} | H_{Darwin} | \psi_{n,0,0} \rangle = C_2 \langle \psi_{n,0,0} | \delta(\vec{x}) | \psi_{n,0,0} \rangle$$

$$= C_2 \, |\psi_{n,0,0}(0)|^2$$

$$= C_1' \frac{\hbar^2}{(mc)^2} \frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)} \cdot \frac{m^3 e^6}{\pi (4\pi\varepsilon_0)^3 \hbar^6 n^3}$$

$$= -E_n^{(0)} \cdot \frac{C_1' n^2 \, 2 \, (4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2 \, \hbar^2 e^2 m^3 e^6}{e^2 \, m e^2 \, m^2 c^2 \, (4\pi\varepsilon_0) \, \pi \, (4\pi\varepsilon_0)^3 \hbar^6 n^3}$$

$$= -E_n^{(0)} \cdot \frac{C_1' 2 e^4}{\pi n (4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2 c^2} = -E_n^{(0)} \frac{C_1' 2 \alpha^2}{\pi n}$$

D'après la théorie des perturbation au 1er ordre (pour niveaux non dégénérés car les perturbations commuttent avec $\vec{L}$), on a

$$\Delta E_{n,0,0} = \langle \psi_{n,0,0} | H_{cin} | \psi_{n,0,0} \rangle + \langle \psi_{n,0,0} | H_{Darwin} | \psi_{n,0,0} \rangle$$

donc

$$\frac{1}{E_n^{(0)}} \Delta E_{n,0,0} = \frac{\alpha^2}{n^2}\left(2n - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{C_1' \, 2}{\pi}\right)\frac{\alpha^2}{n^2}$$

$$= \frac{\alpha^2}{n^2}\left[2n - \frac{3}{4} - \frac{2C_1'}{\pi}\right]$$

rem : avec l'équ. de Dirac on montre que $\frac{2C_1'}{\pi} = 1$.

rem : pour les états $l \neq 0$, il y a aussi la "correction spin-orbite".

(6) Pour $n = 1$,

$$\frac{\Delta E_{n,0,0}}{E_n^{(0)}} = \frac{\alpha^2}{n^2}\left(2n - \frac{3}{4} - 1\right) = \frac{\alpha^2}{4} = \frac{1}{4(137)^2}$$

$$= 1{,}3 \cdot 10^{-5}$$

Couplage Spin - Orbite

1. $\hat{H}_0 = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_\ell} \otimes \sigma_z = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_\ell} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

qui a deux valeurs propres $E_\pm = \pm 1$.

avec multiplicité $g_\pm = 2\ell + 1 = \dim \mathcal{H}_\ell$.

2. $\hat{H}_1 = \frac{1}{\ell} \vec{\sigma} \cdot \vec{L}$

Soit $\vec{J} = \vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\sigma}$

donc $\vec{J}^2 = \left(\vec{L}^2 + \frac{1}{4}\vec{\sigma}^2 + \vec{L} \cdot \vec{\sigma} \right)$

or $\vec{\sigma}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = 3 . Id$

et $\vec{L}^2 = \ell(\ell+1) . Id$

donc

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{\ell} \left(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \frac{1}{4}\vec{\sigma}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{\ell} \left(\vec{J}^2 - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right)$$

or d'après la théorie du couplage du moment angulaire ℓ avec le spin $\frac{1}{2}$,

$j = \ell + \frac{1}{2}$ ou $j = \ell - \frac{1}{2}$, chacun avec multiplicité $(2j+1)$.

or $\vec{J}^2 = j(j+1)$ donc les valeurs propres de $\hat{H}_1$ sont :

- pour $j = l + \frac{1}{2}$,

$$E_+ = \frac{1}{l}\left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{l}\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{3}{2}\right) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{l}\left(\cancel{l^2} + 2l + \cancel{\frac{3}{4}} - \cancel{l^2} - l - \cancel{\frac{3}{4}}\right)$$

$$= 1$$

avec multiplicité :

$$g_+ = 2j+1 = 2l+2$$

- pour $j = l - \frac{1}{2}$,

$$E_- = \frac{1}{l}\left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{l}\left(\left(l-\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{1}{2}\right) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right)$$

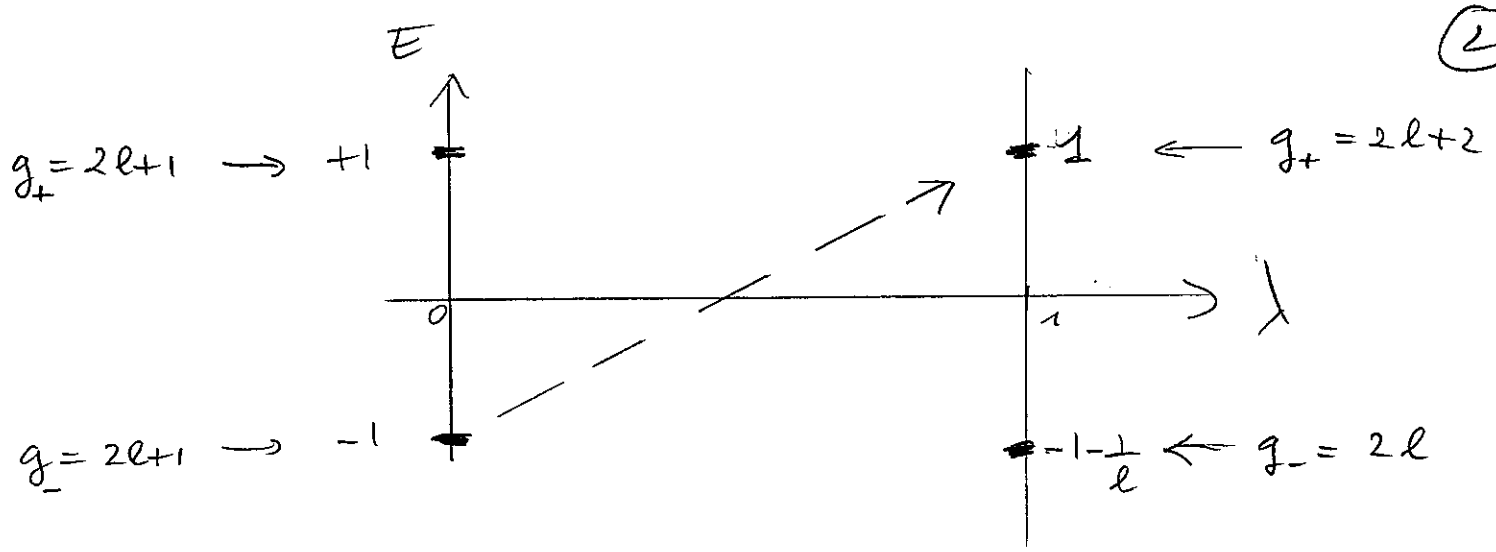
$$= \frac{1}{l}\left(\cancel{l^2} - \frac{1}{4} - \cancel{l^2} - l - \frac{3}{4}\right)$$

$$= -1 - \frac{1}{l}$$

avec multiplicité

$$g_- = 2j+1 = 2l$$

si $l \gg 1$ alors $E_\pm \approx \pm 1$ comme pour $\hat{H}_0$ mais la multiplicité a changé. Un niveau d'énergie a transité de (-1) vers $(+1)$ pour $\lambda = 0 \to +1$



3. $H_\lambda = (1-\lambda)\,\hat{H}_0 + \lambda\,\hat{H}_1$

$$[\hat{H}_0, J_z] = 0$$

et $\hat{H}_1 = \frac{1}{\ell}\left(\vec{J}^2 - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}\right)$

donc $[\hat{H}_1, J_z] = 0$

donc $[\hat{H}, J_z] = 0$

<u>Conséquence</u> : $\hat{H}$ laisse invariant chaque espace propre de J_z.
Il suffit de diagonaliser $\hat{H}$ dans ces sous espaces propres.

<u>Espaces propres de J_z</u> :

Considérons les vecteurs de base : $|m\rangle \otimes |\pm\rangle = |m, \pm\rangle \in \mathcal{H}_{tot}$

on a $J_z |m, \pm\rangle = \underbrace{\left(m \pm \frac{1}{2}\right)}_{\tilde{m} = m \pm \frac{1}{2}} |m, \pm\rangle$: vecteur propre.

avec $m = -\ell, \ldots, +\ell$

Donc • pour une valp : $\tilde{m} \in \{-\ell-\frac{1}{2}+1, \cdots, \ell+\frac{1}{2}-1\}$

les vect. propres associés sont $|m, \pm\rangle$

avec $m = \tilde{m} \mp \frac{1}{2}$

$\longrightarrow$ multiplicité 2 : espace propre $\mathcal{H}_{\tilde{m}}$ de dim 2

et • pour $\tilde{m} = -\ell-\frac{1}{2}$, le vecteur propre est $|-\ell, -\rangle$ (multiplicité 1)

• pour $\tilde{m} = \ell+\frac{1}{2}$, le vect. propre est $|\ell, +\rangle$ (multiplicité 1)

• Calcul de $\hat{H}_\lambda$ restreint à l'espace propre $\mathcal{H}_{\tilde{m}}$, à $\tilde{m}$ fixé.

on a $\hat{H}_0 |m, \pm\rangle = \pm |m, \pm\rangle$

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{\ell} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} = \frac{1}{\ell}\left(\sigma_x L_x + \sigma_y L_y + \sigma_z L_z\right)$$

$$= \frac{1}{\ell}\left(\frac{1}{2}\sigma_+ L_- + \frac{1}{2}\sigma_- L_+ + \sigma_z L_z\right)$$

avec $\sigma_+ = \sigma_x + i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_- = \sigma_x - i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$L_\pm = L_x \pm i L_y$

on a $\sigma_+|-\rangle = 2|+\rangle$, $\sigma_+|+\rangle = 0$, $\sigma_-|-\rangle = 0$, $\sigma_-|+\rangle = 2|-\rangle$

$$L_+|m\rangle = \left((\ell-m)(\ell+m+1)\right)^{1/2}|m+1\rangle$$
$$L_-|m\rangle = \left((\ell+m)(\ell-m+1)\right)^{1/2}|m-1\rangle$$

donc

$$H_1 |m,-\rangle = \frac{1}{\ell}\left(\frac{2}{2}\left((\ell+m)(\ell-m+1)\right)^{1/2} |m-1,+\rangle - m\ |m,-\rangle\right)$$

$$H_1 |m-1,+\rangle = \frac{1}{\ell}\left(\frac{2}{2}\left((\ell-(m-1))(\ell+(m-1)+1)\right)^{1/2} |m,-\rangle + (m-1)\ |m-1,+\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\ell}\left(\left((\ell-m+1)(\ell+m)\right)^{1/2} |m,-\rangle + (m-1)\,|m-1,+\rangle\right)$$

- Donc dans la base $|m-1,+\rangle, |m,-\rangle$, en supposant $-\ell < m \leq \ell$

$$H_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_1 \equiv \frac{1}{\ell}\begin{pmatrix} (m-1) & \left((\ell+m)(\ell-m+1)\right)^{1/2} \\ \left((\ell-m+1)(\ell+m)\right)^{1/2} & -m \end{pmatrix}$$

$$H_\lambda = (1-\lambda)\ H_0 + \lambda H_1$$

$$\equiv \begin{pmatrix} (1-\lambda) + \frac{\lambda}{\ell}(m-1) & \frac{\lambda}{\ell}\left[(\ell+m)(\ell-m+1)\right]^{1/2} \\ \frac{\lambda}{\ell}\left[(\ell+m)(\ell-m+1)\right]^{1/2} & -(1-\lambda) - \frac{\lambda m}{\ell} \end{pmatrix}$$

Matrice "2x2" qu'il faut diagonaliser. Matrice $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On a

$$a-d = 2(1-\lambda) + \frac{\lambda}{\ell}(2m-1)$$

$$bc = \frac{\lambda^2}{\ell^2}\left[(\ell+m)(\ell-m+1)\right]$$

$$a+d = -\frac{\lambda}{\ell}$$

alors

$$\Delta = (a-d)^2 + 4bc$$

$$= 4(1-\lambda)^2 + \frac{4\lambda}{\ell}(1-\lambda)(2m-1) + \frac{\lambda^2}{\ell^2}(2\ell+1)^2$$

Les deux val. p. sont :

$$d_\pm = \frac{a+d \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$ difficile à exprimer.

dans le cas $\lambda = 0$, cela donne : $d_\pm = \pm 1$

" $\lambda = 1$, " $d_\pm = \begin{cases} \ell \\ -\ell-1 \end{cases}$

. Il reste le cas de l'état $|-\ell,-\rangle$ donnant

$$\begin{cases} H_1 |-\ell,-\rangle = |-\ell,-\rangle \\ H_0 |-\ell,-\rangle = -|-\ell,-\rangle \end{cases}$$

et de l'état $|\ell,+\rangle$ donnant

$$\begin{cases} H_0 |\ell,+\rangle = |\ell,+\rangle \\ H_1 |\ell,+\rangle = |\ell,+\rangle \end{cases}$$

On a donc :