Université Joseph Fourier, grenoble.
Master 1 Physique-recherche 2003-04,
Examen novembre 2003,

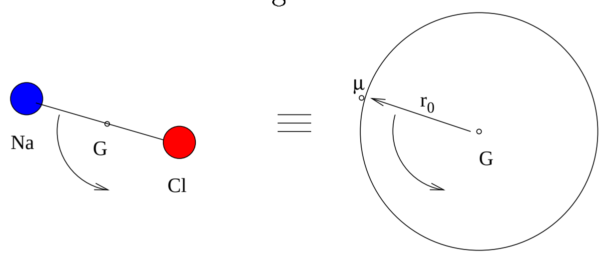
Mécanique quantique

Durée 3 heures.
Documents interdits. Calculatrice autorisée. Une feuille manuscrite autorisée.

1 La molécule NaCl en champ électrique (10 points)

Dans ce problème nous négligeons les mouvement de vibration de la molécule Na-Cl. Seule la rotation rigide de la molécule est considérée. Le mouvement est donc celui d'un point de masse $\mu = (M_{Na}M_{Cl}) / (M_{Na} + M_{Cl})$ (la masse réduite), sur une sphère de rayon $r_0 = |\vec{r}_{Na} - \vec{r}_{Cl}|$, autour du centre de gravité G.

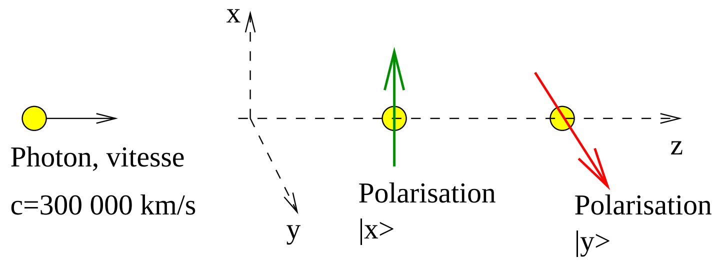
L'état classique de la molécule est donc caractérisé par un point sur la sphère, alors que **l'état quantique** est caractérisé par une fonction d'onde $\psi(\theta, \varphi)$ sur cette sphère S^2 (en coordonnées sphériques). L'espace de Hilbert des états quantiques est $\mathcal{H} = L^2(S^2)$.

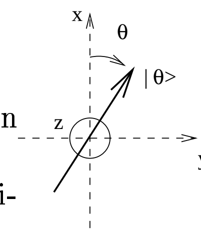


1. Soit $I = \mu r_0^2$ le moment d'inertie, et $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \wedge \hat{\vec{p}}$ le moment angulaire de la molécule. Montrer que le Hamiltonien décrivant ce mouvement de rotation libre est $\hat{H}_0 = \hat{\vec{L}}^2 / (2I)$.
2. Sachant que les harmoniques sphériques $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$, aussi notée $|l, m\rangle$, forment une base de $L^2(S^2)$, avec $l = 0, 1, \ldots$ et $m = -l, \ldots, +l$, et que
$$\hat{L}_z|l, m\rangle = \hbar m|l, m\rangle, \qquad \hat{\vec{L}}^2|l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l, m\rangle,$$
déduire le spectre de $\hat{H}_0$ (c'est à dire les niveaux d'énergie, et la multiplicité et base des espaces propres d'énergie).
3. La molécule NaCl possède un moment dipolaire électrique permanent $\vec{D}$. L'énergie d'interaction de la molécule avec un champ électrique externe $\vec{\mathcal{E}}$ selon z est donc $\hat{H}_1 = -\hat{\vec{D}}.\vec{\mathcal{E}}$. Ecrire le Hamiltonien $\hat{H}$ de la molécule en présence de ce champ en faisant apparaitre $D = \left|\vec{D}\right|$, $\mathcal{E} = \left|\vec{\mathcal{E}}\right|$ et $\cos\theta$?
4. Montrer que $\left[\hat{H}, \hat{L}_z\right] = 0$. Comment pourra t-on utiliser cette propriété pour chercher le spectre de $\hat{H}$, plus facilement que dans l'espace $L^2(S^2)$ entier ?
5. On suppose $\vec{\mathcal{E}}$ faible, et l'on traite $\hat{H}$ en théorie des perturbations. Doit-on utiliser ici la théorie des perturbations pour niveaux non dégénérés ou dégénérés ?
6. Calculer la correction des niveaux d'énergie $E^{(1)}$ au premier ordre ? Aides : Pour un opérateur de perturbation $\hat{H}_1$, et un spectre non perturbé d'énergie ϵ_n et vecteur propre $|n\rangle$, alors $E^{(1)} = \langle n|\hat{H}_1|n\rangle$. La fonction $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ a la parité $(-1)^l$, c'est à dire $(\mathcal{P}Y_{lm})(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Comment obtenir $E^{(1)}$ sans calcul, avec un argument de symétrie ?
7. Calculer la correction des niveaux d'énergie $E^{(2)}$ au deuxième ordre ? Aides : Pour un opérateur de perturbation $\hat{H}_1$, et un spectre non perturbé $|n\rangle, \epsilon_n$, la correction au deuxième ordre à ϵ_n est $E_n^{(2)} = \sum_{n' \neq n} \frac{\left|\langle n|\hat{H}_1|n'\rangle\right|^2}{\epsilon_n - \epsilon_{n'}}$. Utiliser : si $l' = l \pm 1$ alors $\langle l, m|\cos\hat{\theta}|l', m\rangle = 0$. Et $\langle l, m|\cos\hat{\theta}|l+1, m\rangle = \sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+3)}}$. La dégénérescence du spectre est-elle levée par $\vec{\mathcal{E}}$?

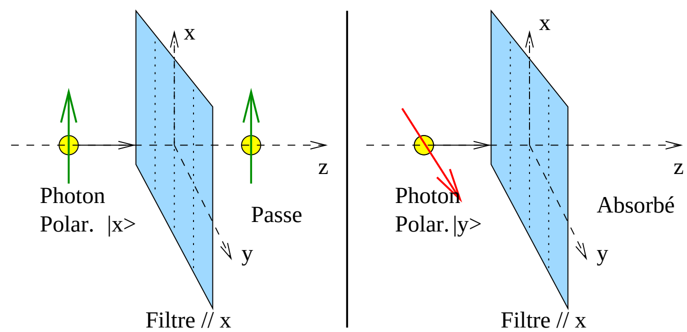
2 Inégalité de Bell et non localité de la mécanique quantique mesurée avec le photon (10 points)

Considérons un photon se déplaçant selon z. Il a deux états quantiques de polarisations $|x\rangle, |y\rangle$, correspondant aux axes x, y et formant une base orthonormée de l'espace quantique de polarisation.





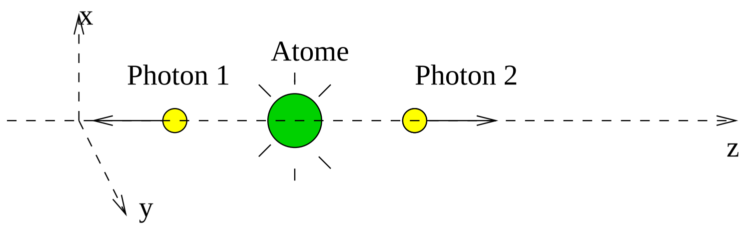
1. Donner l'expression générale d'un état quantique quelconque de polarisation noté $|P\rangle$.
   Donner en particulier l'expression de l'état de polarisation rectiligne $|\theta\rangle$, faisant un angle θ avec l'axe x, dans le plan (x, y).

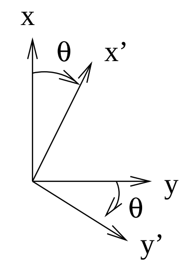


2. Un filtre polarisant orienté selon l'axe x agit comme un appareil de mesure parfait : il laisse passer un photon dans l'état $|x\rangle$ avec probabilité 1, et absorbe un photon dans l'état $|y\rangle$ avec probabilité 1. D'après le postulat de la mesure, quelle est l'action de ce filtre sur un photon dans l'état général $|P\rangle$? (Préciser en particulier l'état du photon après la mesure.)
   Préciser votre résultat pour le cas d'un photon dans l'état $|\theta\rangle$?
3. Comment préparer un photon dans l'état $|\theta\rangle$ (avec θ arbitraire) à l'aide d'un filtre et d'un faisceau de photons non polarisé (c'est à dire mélange statistique équiprobable des deux états de polarisation), ?
4. Un faisceau lumineux non polarisé d'intensité I_0 traverse deux filtres faisant un angle θ entre eux. Quelle est l'intensité I_1 à la sortie ?
5. Pour un filtre orienté selon x, on code $A_x = 1$ si le photon est passé et $A_x = -1$ s'il est absorbé. On note $\langle A\rangle$ la valeur moyenne, c'est-à-dire :

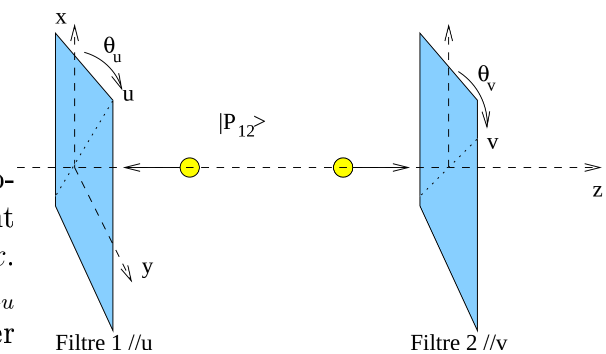
$$\langle A\rangle = (+1) \times \text{Proba.(passe)} + (-1) \times \text{Proba.(absorbé)}$$

   On définit l'observable $\hat{A}$ associée à cette mesure par $\hat{A}|x\rangle = (+1)\,|x\rangle$ et $\hat{A}|y\rangle = (-1)\,|y\rangle$. Pour un état de polarisation $|P\rangle$ général, exprimer $\langle A\rangle$ à partir de $|P\rangle$ et $\hat{A}$ (justifier).

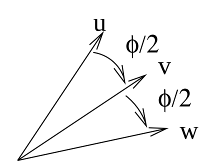
6. On considère un dispositif expérimental, où un atome se désexcite et émet deux photons (1 et 2) décrits par l'état total (enchevétré) :
$$|P_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_1\rangle|y_2\rangle - |y_1\rangle|x_2\rangle\right)$$




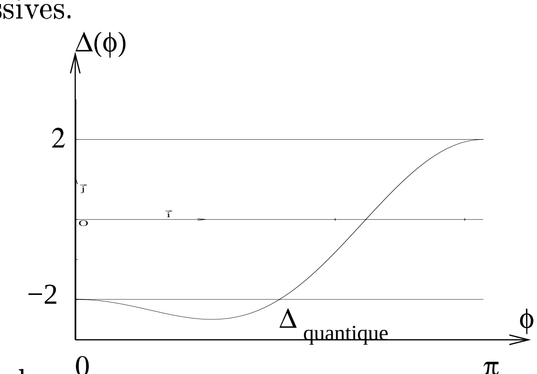
Exprimer le même état $|P_{12}\rangle$ par rapport à une autre base $|x'\rangle, |y'\rangle$ correspondant à un autre système d'axe (x', y') faisant un angle θ avec (x, y) ?



7. On effectue une mesure de polarisation sur chaque photon séparément, avec des filtres orientés respectivement selon les axes u, v faisant un angle θ_u, θ_v avec l'axe x. Le résultat de la mesure sur le photon 1 est noté A_u ($A_u = \pm 1$) et celui sur le photon 2 est noté B_v. Montrer que $\langle A_u B_v\rangle = -\cos\left(2\left(\theta_u - \theta_v\right)\right)$.



8. Si l'on choisit ces angles parmi u, v, w décalés de $\phi/2$ comme sur la figure, on note
$$\Delta(\phi) = \langle A_u B_v\rangle - \langle A_u B_w\rangle + \langle A_v B_v\rangle + \langle A_v B_w\rangle$$
qui se mesure expérimentalement avec plusieurs mesures successives.



Montrer que d'après la mécanique quantique
$$\Delta_{quantique}(\phi) = \cos 2\phi - 2\cos\phi - 1$$
dont l'allure est donnée sur la figure.
L'expérience (faite en 1976 par A. Aspect et al.) est en accord avec ce résultat.

9. Pour une théorie locale à variables cachées, le résultat de la mesure d'une observable O est aléatoire et en moyenne on l'exprime par $\langle O\rangle = \int O d\mu$ où μ est une mesure de probabilité.
On notera $A = A_u$, $A' = A_v$, $B = B_v$, $B' = B_w$ et
$$\Delta_{loc}(A, A'; B, B') = \langle AB\rangle - \langle AB'\rangle + \langle A'B\rangle + \langle A'B'\rangle$$
Dans ces notations où a été supposée la localité de la théorie ?
En utilisant $|A|, |A'|, |B|, |B'| \leq 1$, montrer l'**inégalité de Bell (1965)** $|\Delta_{loc}| \leq 2$. (Aide : commencer par $|\Delta_{loc}| \leq |\langle AB\rangle - \langle AB'\rangle| + |\langle A'B\rangle + \langle A'B'\rangle|$)
Conclusion sur la non localité de la mécanique quantique ?