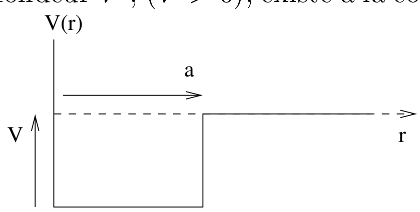
Université Joseph Fourier. Master 1, Physique 2010-11
Examen Mécanique Quantique, janvier 2011.

Durée 3h00. Documents interdits. Calculatrice autorisée. 1 feuille manuscrite autorisée. Le barème est indiqué entre parenthèses. L'examen est noté sur 20. Le signe $(\star)$ signifie que le problème peut être traité à cet endroit sans avoir nécessairement résolu les questions qui précèdent.

1 (13) Etats liés du deuton

Le noyau du Deutérium, appelé deuton, est constitué de deux nucléons, un proton p et un neutron n, ayant chacun un spin 1/2 et une masse $M \simeq 940\mathrm{MeV}/c^2$. Les états possibles de spin du proton et neutron selon l'axe z, sont notés $|+_p\rangle, |-_p\rangle, |+_n\rangle, |-_n\rangle$. (Rappel : dans la base $(|+_p\rangle, |-_p\rangle)$, on a $\hat{S}_{p,x} \equiv \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,$\hat{S}_{p,y} \equiv \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$,$\hat{S}_{p,z} \equiv \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et de même pour le neutron).

1. **(2)** On note $\hat{S}_{p,\pm} = \hat{S}_{p,x} \pm i\hat{S}_{p,y}$ les "opérateurs d'échelle" du proton, (et de même pour le neutron). Rappeler l'action respective de ces opérateurs $\hat{S}_{p,\pm}$ sur les états de base $|\pm_p\rangle$ du proton ? Définir les opérateurs de spin total $\hat{\vec{S}} = \left(\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z\right)$ du deutérium ? Montrer la relation $\hat{\vec{S}}^2 = \frac{3}{2}\hbar^2\hat{I} + \left(\hat{S}_{p,+}\hat{S}_{n,-} + \hat{S}_{p,-}\hat{S}_{n,+} + 2\hat{S}_{p,z}\hat{S}_{n,z}\right)$.
2. **(3)** A l'aide de la question précédente, exprimer, **en justifiant**, les états singulet et triplets du deuton $|J, M\rangle$, en fonction des états de spin de chacun des nucléons n, p . Préciser pour chaque état $|J, M\rangle$ si il est symétrique ou antisymmétrique par permutation des particules.
3. $(\star)$**(1)** Les deux nucléons intéragissent via un potentiel qui dépend de l'orientation relative de leur spin :
$$V(r) = V_1(r) + V_2(r)\hat{\vec{S}}_n.\hat{\vec{S}}_p\frac{1}{\hbar^2}$$
Montrer que l'on obtient les potentiels effectifs $V_1(r) + \frac{1}{4}V_2(r)$ et $V_1(r) - \frac{3}{4}V_2(r)$ selon la valeur de J .
4. $(\star)$**(2)** On approxime $V_1(r)$ par un potentiel de "puits carré " de largeur $a \approx 1$ fm et profondeur V_1 . De même $V_2(r)$ est de largeur a et profondeur V_2. Pour simplifier, on traite ce problème de façon unidimensionnelle (Hamiltonien $H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$ avec la masse réduite m). En exprimant les conditions de raccordement entre les états propres obtenus pour $0 < r < a$ et ceux obtenus pour $r > a$, montrer qu'un état lié d'énergie E ,($E < 0$), dans un potentiel de "puits carré" de largeur a et profondeur V , ($V > 0$), existe à la condition



que : $\sqrt{\frac{\varepsilon}{V-\varepsilon}} = -\tan\left(\frac{a\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar}\right)$ avec $\varepsilon = E + V$.

5. $(\star)$**(2)** Tracer l'allure schématique des fonctions $f_1\left(\sqrt{\varepsilon}\right) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{V-\varepsilon}}$ et $f_2\left(\sqrt{\varepsilon}\right) = -\tan\left(\frac{a\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar}\right)$ (en fonction de $\sqrt{\varepsilon}$) et montrer sur le graphe où se trouvent les solutions de l'égalité $f_1\left(\sqrt{\varepsilon}\right) = f_2\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$. Donner l'intervalle $[V_{min}, V_{max}]$ des valeurs de V possibles pour qu'il y ait **un seul** état lié. Application numérique : donner V_{min}, V_{max} en MeV. (Donnée : $\hbar c = 200 MeV.fm$).
6. **(1)** On suppose que $V_2 \ll V_1$. Le seul état lié connu du deuton est l'état triplet avec l'énergie de liaison $\Delta E = 2,2 MeV$. Déduire une valeur approchée de V_1 et une minoration de V_2 (en MeV). Montrer que cet état est très peu lié.
7. $(\star)$**(2)** En utilisant le principe de Pauli, expliquer pourquoi il n'existe pas d'état lié à deux protons ou deux neutrons ?

2 (4) Mesures successives, effet Zeno

Un faisceau de photons polarisés rectilignement selon x se déplace selon l'axe z . On place n polariseurs tournés respectivement d'un angle $\alpha_k = \left(\frac{k}{n}\right)\frac{\pi}{2}$ par rapport à l'axe x , où $k = 1, .., n$ est un entier. Autrement dit, l'angle entre deux polariseurs successifs est $\alpha_1 = \frac{1}{n}\frac{\pi}{2}$.

1. **(1)** Quelle est la probabilité pour qu'un photon traverse le dispositif pour $n = 1$ et $n = 2$?
2. $(\star)$**(3)** Même question pour n quelconque, et $n \to \infty$ (à l'ordre $1/n$) ? Interprétation du résultat (appelé effet Zeno) ?

Formules : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$; $\log(1+x) = x + o(x)$; $e^x = 1 + x + o(x)$.

3 (7) Théorie des perturbations

1. **(3)** On considère l'oscillateur harmonique à une dimension, $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$ perturbé par une Gaussienne $\hat{H}_1 = \lambda e^{-\alpha x^2}$. Pour le Hamiltonien $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$, calculer la correction ΔE_0 à l'énergie de l'état fondamental $\varphi_0(x) = C_0 e^{-\alpha x^2}$ et calculer le correction ΔE_1 à l'énergie du premier état excité $\varphi_1(x) = C_1 x e^{-\alpha x^2}$, au premier ordre en théorie des perturbations. **Données :** $\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-cX^2} dX = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$.
2. $(\star)$**(4)** On considère toujours l'oscillateur harmonique $\hat{H}_0$ auquel on applique un champ électrique $\mathcal{E}$ donnant lieu à une perturbation dépendant du temps : $\hat{H}_1(t) = 0$ pour $t < 0$ et $\hat{H}_1(t) = q\mathcal{E}\hat{x}e^{-t/\tau}$ pour $t > 0$ avec $\tau > 0$.

   (a) A l'instant $t = 0$, le système est dans l'état fondamental φ_0. En détaillant le calcul, calculer la probabilité $P_n(t)$ au premier ordre en théorie des perturbations, pour que le système soit dans l'état φ_n à l'instant $t > 0$? (avec $\varphi_n = |n\rangle$, $n \neq 0$). **Données :** $\langle\varphi_{n'}|\hat{x}|\varphi_n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}\right)$.

   (b) Quelle est la probabilité pour qu'il reste dans l'état φ_0 ? Quelle est la limite pour $t \to \infty$?