Oscillations anharmoniques

① $E_0^{(1)} = \langle \varphi_0 | \hat{H}_1 \varphi_0 \rangle = \int_{\mathbb{R}} |\varphi_0(q)|^2 q^4 \, dq$

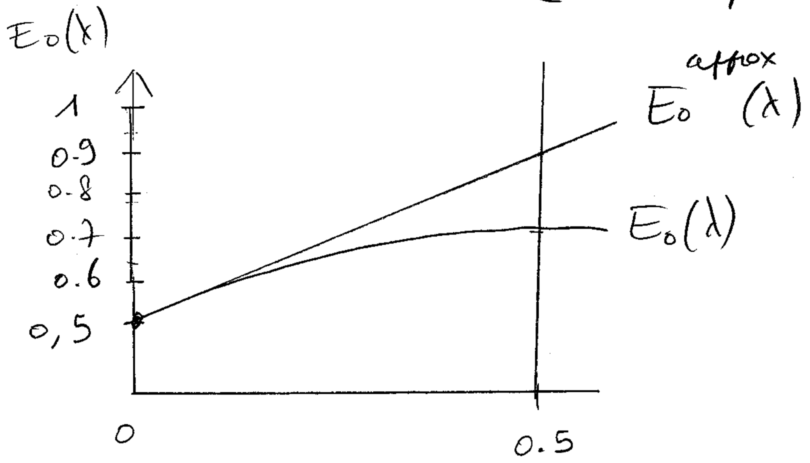
$$= \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{q^2}{\sigma^2}} q^4 \, dq = \frac{\sigma^5}{(\pi\sigma^2)^{1/2}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} x^4 \, dx \right)}_{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}} = \frac{3}{4}\sigma^4$$

on a posé $x = \frac{q}{\sigma}$.

② on a obtenu $E_0^{(approx)}(\lambda) = \varepsilon_0 + \lambda \cdot E_0^{(1)}$

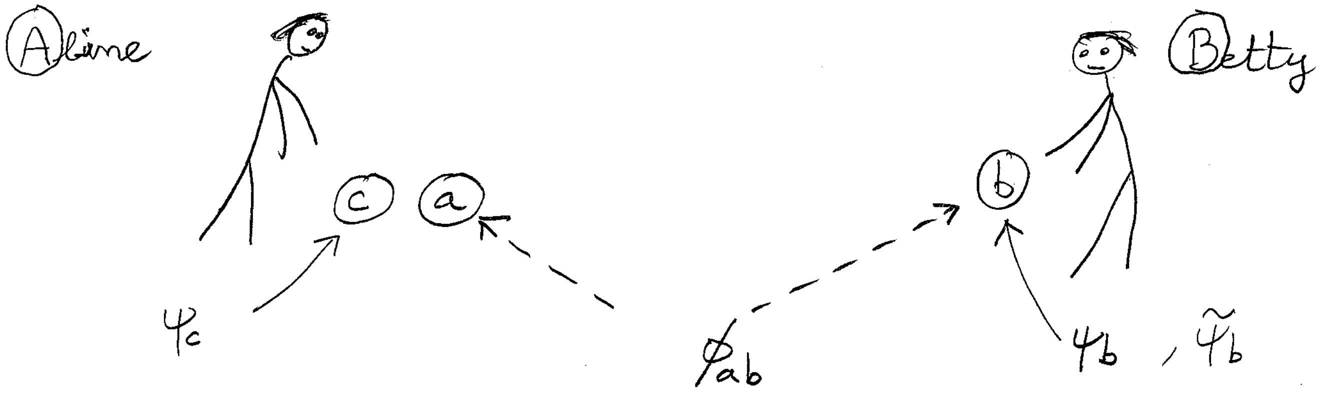
on a $\sigma = 1$.

$$= \frac{1}{2} + \lambda \cdot \frac{3}{4} = 0.5 + 0.75 \times \lambda$$



$E_0^{approx}(\lambda)$ est tangent à $E_0(\lambda)$ en $\lambda = 0$.

Téléportation quantique



1 $\quad \phi_{ab} \otimes \varphi_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0_a 0_b\rangle + |1_a 1_b\rangle \right) \otimes \left(\alpha |0_c\rangle + \beta |1_c\rangle \right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(|0_a 0_c\rangle \otimes \alpha |0_b\rangle + |0_a 1_c\rangle \otimes \beta |0_b\rangle$$

1 $$+ |1_a 0_c\rangle \otimes \alpha |1_b\rangle + |1_a 1_c\rangle \otimes \beta |1_b\rangle \Big)$$

par ailleurs l'expression souhaitée est (membre de droite)

$$\frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2) \otimes \alpha |0_b\rangle + \frac{1}{2} (\varphi_3 + \varphi_4) \otimes \beta |0_b\rangle$$

2 $$+ \frac{1}{2} (\varphi_3 - \varphi_4) \otimes \alpha |1_b\rangle + \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) \otimes \beta |1_b\rangle$$

En identifiant (1-1) et (1-2) on déduit :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |0_a 0_c\rangle = \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |0_a 1_c\rangle = \frac{1}{2} (\varphi_3 + \varphi_4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |1_a 0_c\rangle = \frac{1}{2} (\varphi_3 - \varphi_4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |1_a 1_c\rangle = \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)$$

donc $\quad \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0_a 0_c\rangle + |1_a 1_c\rangle \right), \qquad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0_a 0_c\rangle - |1_a 1_c\rangle \right)$

$\quad \varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0_a 1_c\rangle + |1_a 0_c\rangle \right), \qquad \varphi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0_a 1_c\rangle - |1_a 0_c\rangle \right)$

② On a $\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$. C'est une base orthonormée.

③ On peut supposer $\|\psi_c\| = 1$ c'est à dire $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

D'après l'expression de l'état total $\phi_{ab} \otimes \psi_c$,

l'amplitude devant l'état φ_i est $\frac{1}{2}$,

Par conséquent la probabilité d'obtenir l'état φ_i

est $\text{Proba}_i = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ (les 4 états sont équiprobables)

après la mesure,

- si Aline observe φ_1 alors $\psi_b = \alpha |0_b\rangle + \beta |1_b\rangle$
  - " φ_2 " $\psi_b = \alpha |0_b\rangle - \beta |1_b\rangle$
  - " φ_3 " $\psi_b = \beta |0_b\rangle + \alpha |1_b\rangle$
  - " φ_4 " $\psi_b = \beta |0_b\rangle - \alpha |1_b\rangle$

④ $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$ car $\psi_b = \tilde{\psi}_b$.

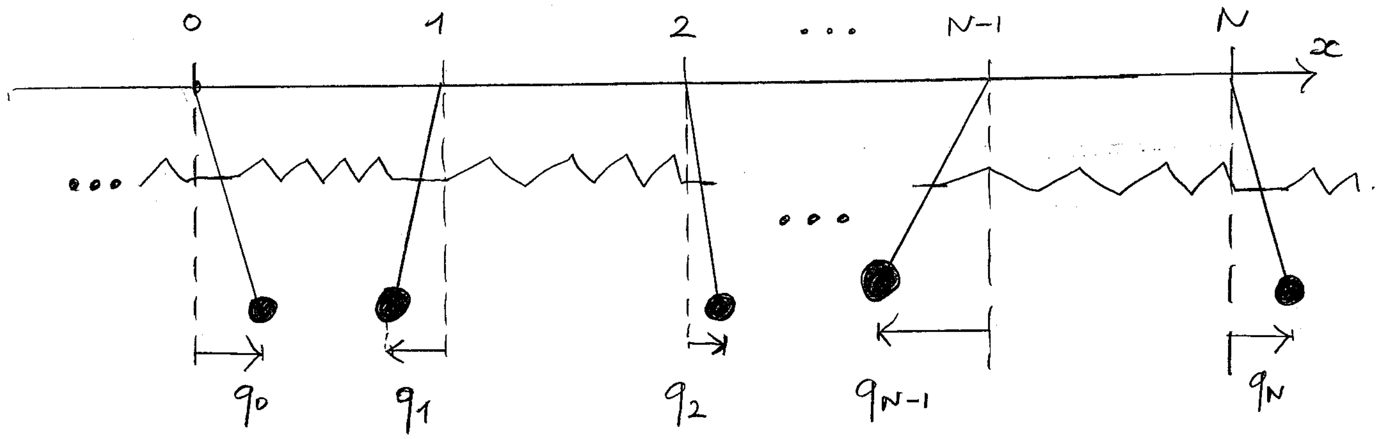
$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ transforme $\psi_b = \alpha |0_b\rangle - \beta |1_b\rangle$

en $\tilde{\psi}_b = \alpha |0_b\rangle + \beta |1_b\rangle$

$U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ transforme $\psi_b = \beta |0_b\rangle + \alpha |1_b\rangle$ en $\tilde{\psi}_b$

$U_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ " $\psi_b = \beta |0_b\rangle - \alpha |1_b\rangle$ en $\tilde{\psi}_b$.

Chaine périodique de particules



(1) Le terme $\frac{1}{2}\hat{p}_j^2$ est l'énergie cinétique de la particule j.

Le terme $\frac{1}{2} K \hat{q}_j^2$ est l'énergie potentielle du pendule j représenté sur la figure, dans l'approximation des petites oscillations.

Le terme $\frac{1}{2}\alpha\left(\hat{q}_{j+1}-\hat{q}_j\right)^2$ est l'énergie potentielle du ressort entre la particule j et $(j+1)$.

(2) On suppose $Y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i 2\pi \frac{jk}{N}} X_j$

alors : $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i 2\pi \frac{\ell k}{N}} Y_k = \frac{1}{N} \sum_j \underbrace{\left(\sum_k e^{i\frac{2\pi k}{N}(\ell - j)}\right)}_{N.\,\delta_{\ell,j}} X_j$

$= X_\ell$: formule d'inversion

et

$$\sum_k Y_k^* Y_k = \sum_{j,l} \underbrace{\left(\sum_k \frac{1}{N} e^{i \frac{2\pi}{N} k (j-l)} \right)}_{\delta_{j,l}} X_l^* X_j$$

$$= \sum_j X_j^* X_j \qquad \text{: formule de Parseval.}$$

(3) on a $e^{i 2\pi \frac{k}{N}} \hat{\phi}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{-i 2\pi (j-1) \frac{k}{N}} \hat{q}_j$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{-i 2\pi j \frac{k}{N}} \hat{q}_{j+1} \qquad \text{(par changement } j \to j+1\text{)}$$

donc $\left(e^{i 2\pi \frac{k}{N}} - 1\right) \hat{\phi}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{-i 2\pi j \frac{k}{N}} \left(\hat{q}_{j+1} - \hat{q}_j\right)$

La relation de Parseval donne :

$$\sum_k \left| e^{i 2\pi \frac{k}{N}} - 1 \right|^2 \hat{\phi}_k^* \phi_k = \sum_j \left(\hat{q}_{j+1} - \hat{q}_j\right)^2$$

$$\sum_k \pi_k^* \pi_k = \sum_j \hat{p}_j^2$$

$$\sum_k \phi_k^* \phi_k = \sum_j q_j^2$$

or $\left| e^{i 2\pi \frac{k}{N}} - 1 \right|^2 = \left| e^{i\pi \frac{k}{N}} \left(e^{i\pi \frac{k}{N}} - e^{-i\pi \frac{k}{N}} \right) \right|^2$

$$= 4 \sin^2\left(\pi \frac{k}{N}\right)$$

donc

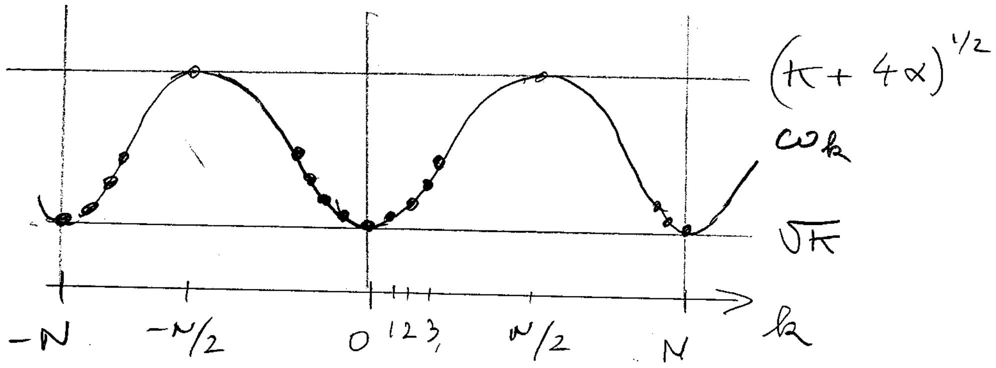
$$H = \frac{1}{2}\left(\sum_j \hat{p}_j^2\right) + \frac{K}{2}\left(\sum_j \hat{q}_j^2\right) + \frac{\alpha}{2} \sum_j \left(\hat{q}_{j+1} - \hat{q}_j\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k \pi_k^* \pi_k + \frac{K}{2}\left(\sum_k \phi_k^* \phi_k\right) + 2\alpha \sum_k \sin^2\left(\pi \frac{k}{N}\right) \phi_k^* \phi_k$$

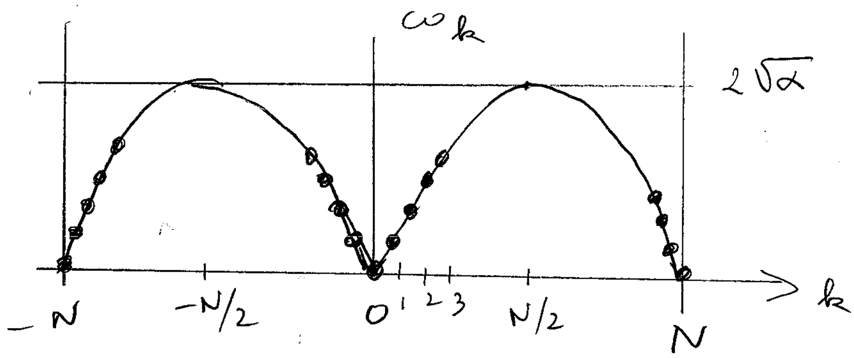
$$= \sum_k \frac{1}{2}\left(\pi_k^* \pi_k + \omega_k^2 \phi_k^* \phi_k\right) \quad \text{avec} \quad \omega_k = \left(K + 4\alpha \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right)^{1/2}$$

(4)

si $K > 0$



si $K = 0$



(5)

$$[a_k, a_l] = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\sigma_k}\,\phi_k + \frac{i}{\sqrt{\sigma_k}}\Pi_k,\ \sqrt{\sigma_l}\,\phi_l + \frac{i}{\sqrt{\sigma_l}}\Pi_l\right]$$

$$= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\sigma_k}{\sigma_l}}\,[\phi_k, \Pi_l] + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\sigma_l}{\sigma_k}}\,[\Pi_k, \phi_l]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j,m} e^{-i\frac{2\pi}{N}(jk+ml)}\left(\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\sigma_k}{\sigma_l}}\,\underbrace{[q_j, p_m]}_{i\delta_{jm}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\sigma_l}{\sigma_k}}\,\underbrace{[p_j, q_m]}_{-i\delta_{jm}}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\underbrace{\left(\sum_j e^{-i\frac{2\pi}{N}j(k+l)}\right)}_{N\,\delta_{k,-l}}\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_l}{\sigma_k}} - \sqrt{\frac{\sigma_k}{\sigma_l}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_l}{\sigma_{-l}}} - \sqrt{\frac{\sigma_{-l}}{\sigma_l}}\right) = 0 \qquad \text{car } \sigma_l = \sigma_{-l}$$

donc

$$[a_k, a_l] = 0$$

$$[a_k, a_\ell^+] = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\sigma_k}\,\phi_k + \frac{i}{\sqrt{\sigma_k}}\Pi_k,\ \sqrt{\sigma_\ell}\,\phi_\ell^+ - \frac{i}{\sqrt{\sigma_\ell}}\Pi_\ell^+\right]$$

$$= -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\sigma_k}{\sigma_\ell}}\,[\phi_k, \Pi_\ell^+] + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\sigma_\ell}{\sigma_k}}\,[\Pi_k, \phi_\ell^+]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j,m} e^{-i\frac{2\pi}{N}jk + i\frac{2\pi}{N}m\ell}\left(-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\sigma_k}{\sigma_\ell}}\,\underbrace{[q_j, p_m]}_{i\delta_{j,m}} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\sigma_\ell}{\sigma_k}}\,\underbrace{[p_j, q_m]}_{-i\delta_{j,m}}\right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{N}\sum_j e^{-i\frac{2\pi}{N}j(k-\ell)}\right)}_{\delta_{k,\ell}}\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_k}{\sigma_\ell}} + \sqrt{\frac{\sigma_\ell}{\sigma_k}}\right)$$

$$= \delta_{k,\ell}$$

donc

$$[a_k, a_\ell^+] = \delta_{k,\ell}$$

(6) si $k \neq \ell$ les résultats sont nuls.

On a $\quad a_k^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_k - i P_k), \qquad X_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_k + a_k^+)$

$$P_k = \frac{i}{\sqrt{2}}(a_k^+ - a_k)$$

donc

$$[X_k, P_k] = \frac{i}{2}\left(\underbrace{[a_k, a_k^+]}_{1} - \underbrace{[a_k^+, a_k]}_{-1}\right) = i$$

donc

$$[X_k, X_\ell] = 0$$

$$[P_k, P_\ell] = 0$$

$$[X_k, P_\ell] = i\,\delta_{k,\ell}$$

Ce sont des "opérateurs canoniques".

7 on a $X_k^2 + P_k^2 = \frac{1}{2}\left(a_k + a_k^+\right)^2 - \frac{1}{2}\left(a_k^+ - a_k\right)^2$

$$= \frac{1}{2}\left[\cancel{a_k^2} + \cancel{(a_k^+)^2} + a_k a_k^+ + a_k^+ a_k - \cancel{a_k^{+2}} - \cancel{a_k^2} + a_k^+ a_k + a_k a_k^+\right]$$

$$= a_k a_k^+ + a_k^+ a_k$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\sigma_k}\,\phi_k + \frac{i}{\sqrt{\sigma_k}}\Pi_k\right)\left(\sqrt{\sigma_k}\,\phi_k^+ - \frac{i}{\sqrt{\sigma_k}}\Pi_k^+\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\sqrt{\sigma_k}\,\phi_k^+ - \frac{i}{\sqrt{\sigma_k}}\Pi_k^+\right)\left(\sqrt{\sigma_k}\,\phi_k + \frac{i}{\sqrt{\sigma_k}}\Pi_k\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\sigma_k\left(\phi_k\phi_k^+ + \phi_k^+\phi_k\right) + \frac{1}{2\sigma_k}\left(\Pi_k\Pi_k^+ + \Pi_k^+\Pi_k\right)$$

$$+ \frac{i}{2}\left(\Pi_k\phi_k^+ - \phi_k\Pi_k^+ + \phi_k^+\Pi_k - \Pi_k^+\phi_k\right)$$

or $\phi_k^+ = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_j e^{-i\frac{2\pi}{N}j(-k)}\, q_j = \phi_{-k}$

et $\Pi_k^+ = \Pi_{-k}$

donc

$$\sum_k \sigma_k^2\,\phi_k\phi_k^+ = \sum_k \sigma_k^2\,\phi_k\phi_{-k} = \sum \sigma_{-k}^2\,\phi_{-k}\phi_k$$

$$= \sum_k \sigma_k^2\,\phi_k^+\phi_k$$

avec changement $k \leftrightarrow -k$
et car $\sigma_{-k} = \sigma_k$.

de même on peut remplacer $\Pi_k\Pi_k^+$ par $\Pi_k^+\Pi_k$,

et $\sum_k \sigma_k\left(\Pi_k\phi_k^+ - \phi_k\Pi_k^+ + \phi_k^+\Pi_k - \Pi_k^+\phi_k\right)$

$$= \sum_k \sigma_k\left(\Pi_k\phi_{-k} - \phi_k\Pi_{-k} + \phi_{-k}\Pi_k - \Pi_{-k}\phi_k\right)$$

changem^t $(k \leftrightarrow -k)$

$$= \sum_k \sigma_k\left(\cancel{\Pi_k\phi_{-k}} - \cancel{\phi_k\Pi_{-k}} + \cancel{\phi_k\Pi_{-k}} - \cancel{\Pi_k\phi_{-k}}\right)$$

$$= 0$$

donc au final,

$$\sum_k \sigma_k\,\frac{1}{2}\left(X_k^2 + P_k^2\right) = \sum_k \frac{1}{2}\sigma_k^2\,\phi_k^+\phi_k + \frac{1}{2}\Pi_k^+\Pi_k = H$$

avec le choix $\sigma_k = \omega_k$.

Commentaire : H est somme d'oscillateurs harmoniques indépendants appelés modes propres.

(8) De (7), on peut déduire le spectre de H ;
c'est le modèle connu de l'oscillateur harmonique.

$$\hat{H} \varphi_n = E_n \varphi_n \quad \text{avec}$$

$$n = (n_0, n_1, \dots, n_{N-1}) \in \mathbb{N}^N,$$

$$E_n = \sum_{k=0}^{N-1} \tau_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right)$$

rem : $E_0 = \frac{1}{2} \sum_k \tau_k$: énergie de l'état fondamental ou "énergie du vide".