Université Joseph Fourier. Master 1 Physique 2011-12
Examen Mécanique Quantique, janvier 2012.

Durée 3h00. Documents interdits. Calculatrice autorisée. 1 feuille manuscrite autorisée. Le barème est indiqué entre parenthèses. L'examen est noté sur 20. Le signe ($\star$) signifie que le problème peut être traité à cet endroit sans avoir nécessairement résolu les questions qui précèdent. **Encadrer les résultats demandés.**

1 Oscillations anharmoniques. Théorie des perturbations.

On considère une particule sans spin à une dimension. Sa dynamique est décrite par le Hamiltonien :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1$$

avec

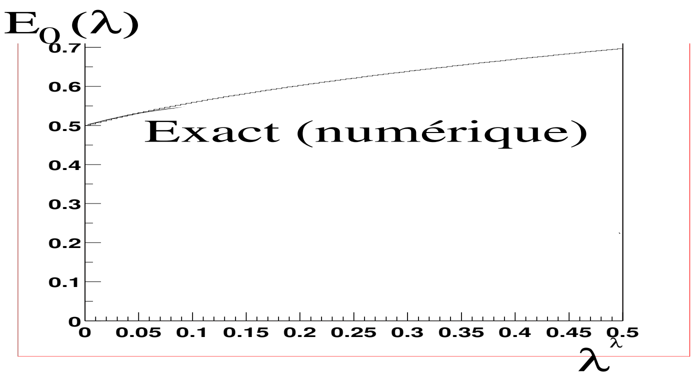
$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}K\hat{q}^2$$

qui est un oscillateur harmonique et un terme de "perturbation" :

$$\lambda \hat{H}_1 = \lambda \hat{q}^4$$

en supposant $\lambda \ll 1$. Rappels sur l'oscillateur Harmonique : on a $\hat{H}_0|\varphi_n\rangle = \varepsilon_n|\varphi_n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, avec $\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ et $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$. L'état fondamental normalisé est $\varphi_0(q) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}}\exp\left(-\frac{q^2}{2\sigma^2}\right)$ avec $\sigma = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}$. On pourra utiliser $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}x^4 dx = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

1. ($\star$) (**2**) On note $E_n(\lambda) = \varepsilon_n + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots$ l'énergie du niveau n de $\hat{H}$. Calculer la correction au premier ordre du niveau $n = 0$.
2. ($\star$) (**1**) Dans le cas $\hbar = 1, m = 1, \omega = 1$ donner l'expression de la fonction $E_0(\lambda)$ obtenue dans le cadre de l'approximation de la question (1). Dessiner cette fonction sur la figure suivante que l'on recopiera et qui représente $E_0(\lambda)$. Commenter.

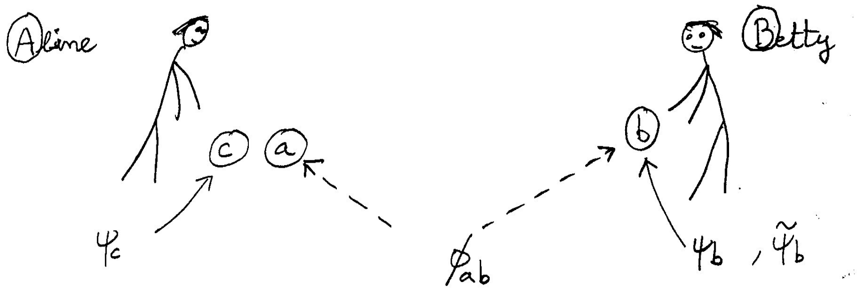


2 Téléportation quantique [1]

Ce problème présente le mécanisme théorique du transport d'un état quantique à deux états depuis une personne nommée **Aline (A)** vers une autre personne **Betty (B)** qui est éloignée de (A). On suppose que Aline est en présence d'une particule quantique [2] c qui est dans un état initial :

$$\psi_c = \alpha|0_c\rangle + \beta|1_c\rangle$$

où les amplitudes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sont fixées (mais non connues) et $|0_c\rangle$,$|1_c\rangle$ sont les vecteurs de base de l'espace quantique de c.



Pour mettre en oeuvre ce mécanisme de téléportation on suppose qu'une particule a à deux états est présente auprès de (A), qu'une particule b à deux états est présente auprès de (B) et que ces deux particules sont dans l'état quantique enchevetré [3] :

$$\phi_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0_a 0_b\rangle + |1_a 1_b\rangle\right)$$

où ($|0_a\rangle$,$|1_a\rangle$) et ($|0_b\rangle$,$|1_b\rangle$) sont respectivement les vecteurs de base de l'espace quantique de a et de b. L'objectif est qu'à la fin de l'opération, la particule b soit dans l'état

$$\tilde{\psi}_b = \alpha|0_b\rangle + \beta|1_b\rangle$$

identique à l'état initial de c.

1. ($\star$) (**3**) Montrer que le système de départ $\phi_{ab} \otimes \psi_c$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi_{ab} \otimes \psi_c &= \frac{1}{2}\varphi_1 \otimes (\alpha|0_b\rangle + \beta|1_b\rangle) + \frac{1}{2}\varphi_2 \otimes (\alpha|0_b\rangle - \beta|1_b\rangle) \\ &\quad + \frac{1}{2}\varphi_3 \otimes (\beta|0_b\rangle + \alpha|1_b\rangle) + \frac{1}{2}\varphi_4 \otimes (\beta|0_b\rangle - \alpha|1_b\rangle) \end{aligned}$$

1. La "téléportation quantique" telle qu'elle a été proposée par Bennett en 1993 est un terme très exagéré par rapport à ce qu'il en est vraiment. L'objectif est de transporter sur une grande distance un état quantique sans risquer de le dommager (i.e. sans qu'il soit réduit par interaction avec son environnement) et sans risquer qu'il soit copié par un espion. Le record expérimental actuel est une "téléportation quantique" en chine par Xian-Min Jin, en 2010, d'un état sur une distance de 16km avec une efficacité de 90%.

2. Au lieu du terme "particule quantique" il faudrait utiliser le terme "système quantique" qui est plus juste mais moins imagé.

3. Il a bien sûr fallu une opération préalable pour créer et ces deux particules a et b corrélées.

où l'on donnera l'expression des états $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ indépendants de α, β, dans la base $\{|0_a 0_c\rangle, \dots |1_a 1_c\rangle\}$ du système (a, c). (Noter que l'ordre des particules qui est $(a, b), c$ à gauche de l'équation a changé en $(a, c), b$ à droite de l'équation).

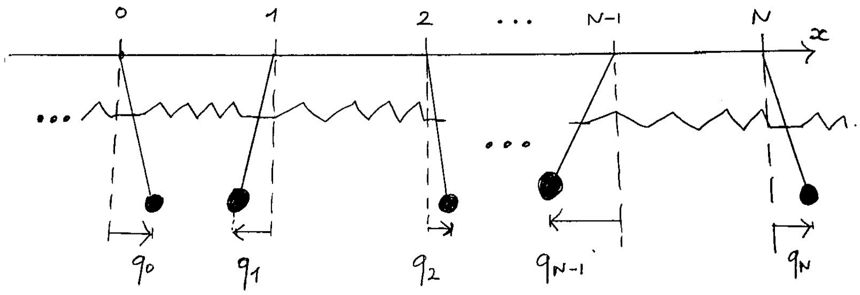
2. **(2)** Calculer les produits scalaires $\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle$ avec $i, j = 1 \dots 4$. Commenter.
3. $(\star)$ **(1)** Aline procède à une "mesure quantique" du système (a, c) associée à la base $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Cela signifie les vecteurs φ_i sont vecteurs propres de son observable et que son résultat est soit φ_1, soit φ_2, soit φ_3, soit φ_4. Quelle est la probabilité d'obtenir l'état φ_i ? Après cette mesure, dans quel état ψ_b se trouve la particule b en fonction du résultat de Aline ?
4. $(\star)$ **(2)** Aline envoie le résultat de sa mesure à Betty (par internet ou autre moyen standard). Si le résultat annoncé est φ_i alors Betty utilise une matrice unitaire U_i pour transformer l'état de b et obtenir l'état final souhaité $\tilde{\psi}_b = \alpha|0_b\rangle + \beta|1_b\rangle$ (Par exemple la matrice unitaire $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ transforme $(\alpha|0_b\rangle - \beta|1_b\rangle)$ en $\tilde{\psi}_b = (\alpha|0_b\rangle + \beta|1_b\rangle))$. Donner l'expression des matrices unitaires U_1, U_2, U_3, U_4.

3 Chaine périodique de particules

On considère N particules identiques indicés par $j = 0, 1, \dots (N-1)$ et disposés sur un axe x. On note q_j l'écart de l'atome j par rapport à sa position d'équilibre. On suppose que l'ensemble des particules est décrit par le Hamiltonien suivant exprimé avec des variables sans dimension

$$\hat{H} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2}\hat{p}_j^2 + \frac{1}{2}K\hat{q}_j^2 + \frac{1}{2}\alpha\left(\hat{q}_{j+1} - \hat{q}_j\right)^2$$

avec des paramètres $K \geq 0$, $\alpha \geq 0$ et les relations de commutation canoniques $[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = \delta_{j,k}\hat{\mathrm{Id}}$ pour les opérateurs auto-adjoints $\hat{q}_j, \hat{p}_j$. On suppose que la chaine est périodique c'est à dire que la particules $N + j$ est identique à la particule j pour tout $j \in \mathbb{N}$. Le but du problème est de calculer les niveaux d'énergie de $\hat{H}$.



1. $(\star)$ **(1)** Donner le sens physique de chacun des trois termes dans $\hat{H}$ par rapport à la figure.
2. $(\star)$ **(1)** Cette question établie des résultats utiles pour la suite. Si $(X_0, \dots X_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ est un vecteur à N composantes on dit que sa **transformée de Fourier discrète**

est le vecteur $(Y_0, \dots Y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ obtenu par $Y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi jk/N} X_j$. Montrer la **formule d'inversion de Fourier** $X_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi jk/N} Y_k$ et la **relation de Parseval** $\sum_{k=0}^{N-1} Y_k^* Y_k = \sum_{j=0}^{N-1} X_j^* X_j$.

3. ($\star$) (**3**) Comme $\hat{H}$ est invariant par décalage, il est naturel de définir des nouveaux opérateurs non autoadjoints pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$ par transformée de Fourier dicrète :

$$\hat{\phi}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi jk/N} \hat{q}_j, \qquad \hat{\pi}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi jk/N} \hat{p}_j$$

Montrer que

$$\hat{H} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left(\hat{\pi}_k^\dagger \hat{\pi}_k + \omega_k^2 \hat{\phi}_k^\dagger \hat{\phi}_k \right)$$

avec une expression de ω_k que l'on donnera en fonction de K, α, k, N. (Aide : on pourra utiliser l'observation que $e^{i2\pi \frac{k}{N}} \hat{\phi}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{jk}{N}} \hat{q}_{j+1}$ et la relation de Parseval pour chacun des 3 termes de $\hat{H}$.)

4. (**1**) Tracer le graphe de ω_k en fonction de $k \in \mathbb{N}$ (appelée **"relation de dispersion**"), dans le cas $K > 0$ et dans le cas particulier $K = 0$.

5. ($\star$) (**2**) Pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$ on définit les opérateurs non autoadjoints

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\sigma_k} \hat{\phi}_k + \frac{i}{\sqrt{\sigma_k}} \hat{\pi}_k \right)$$

où $\sigma_k > 0$, $\sigma_{-k} = \sigma_k$, sera choisit plus loin. Calculer les commutateurs $[a_k, a_l]$ et $\left[a_k, a_l^\dagger\right]$ pour tous k, l.

6. (**1**) On décompose $a_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{X}_k + i \hat{P}_k \right)$ avec des opérateurs autoadjoints $\hat{X}_k, \hat{P}_k$. Déduire de la question précédente les commutateurs $\left[\hat{X}_k, \hat{X}_l\right], \left[\hat{P}_k, \hat{P}_l\right]$ et $\left[\hat{X}_k, \hat{P}_l\right]$ pour tous k, l. Commenter.

7. (**3**) Avec un choix de σ_k que l'on précisera montrer que

$$\hat{H} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_k \frac{1}{2} \left(\hat{P}_k^2 + \hat{X}_k^2 \right)$$

Commenter. (Aide : on pourra montrer et utiliser $\phi_k^\dagger = \phi_{-k}$, $\pi_k^\dagger = \pi_{-k}$.)

8. ($\star$) (**2**) Déduire que les vecteurs propres et valeurs propres de $\hat{H}$ s'écrit

$$\hat{H} \varphi_n = E_n \varphi_n$$

avec $n = (n_0, \dots n_{N-1})$ et $n_k \in \mathbb{N}$. Donner l'expression de E_n en fonction des ω_k et n_k.