Annexe B

Solutions des exercices

B.1 Chapitre 1

Exercice 1.1.2 page 24

$$< x_0, p_0, \sigma | x_0, p_0, \sigma >= \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/2}} \int dx \exp\left(-(x-x_0)^2/\sigma^2\right) = \frac{1}{(\pi)^{1/2}} \int dX \exp\left(-X^2\right) = 1$$

C'est une intégrale Gaussienne, voir eq.(A.1.1), avec le changement de variable $X = \frac{x-x_0}{\sigma}$.

Exercice 2 page 43 Il y a une infinité d'autres possibilités plus ou moins explicites. En voici un exemple simple. $(W_k)_k$ défini par

$$W_0 = V_0$$

$$W_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_k + V_{-k}), \qquad W_{-k} = \frac{1}{i\sqrt{2}}(V_k - V_{-k}), \quad \text{si } k > 0$$

On remarque que $W_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{k2\pi x}{L}\right)$, $W_{-k}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{k2\pi x}{L}\right)$ pour $k > 0$.

Exercice 4 page 51 Vérifions la relation $< x|\hat{x}|\phi >= x < x|\phi >$. On a en effet $\langle x| \int x' \, |x' >< x'|dx' \, |\phi\rangle = \int x' \, \delta(x'-x)\langle x'|\phi\rangle = x \, \langle x|\phi\rangle$.

Remarque : une telle écriture n'est pas correcte mathématiquement car $|x\rangle \notin \mathcal{H}$. L'outil mathématique approprié est le théorème spectrale. L'idée est d'introduire le projecteur $\hat{P}_x =$ " $\int_{-\infty}^{x} |x\rangle\langle x| dx$" et d'écrire de façon équivalente $\hat{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dP_x$.

Exercice 5 page 53 on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_{x_0,p_0,\sigma}(p) &=< p|x_0,p_0,\sigma >= \int dx \ < p|x >< x|x_0,p_0,\sigma > \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}} \int dx \exp\left(i\frac{(p_0-p)\,x}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \sqrt{\frac{\sigma}{\hbar\sqrt{\pi}}} \exp\left(i\frac{x_0 p_0}{\hbar}\right) \exp\left(-i\frac{x_0 p}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2(\hbar/\sigma)^2}\right)
\end{aligned} \tag{B.1.1}$$

où l'intégrale Gaussienne se calcule par la formule (A.1.2). Remarquer la similarité de l'expression obtenue pour $\tilde{\psi}_{x_0,p_0,\sigma}(p)$ avec celle de $\psi_{x_0,p_0,\sigma}(x)$, mis à part facteur de phase constant.

Exercice 1.6.5 page 70

1. Partant de $\langle A\rangle(t) = \langle\psi(t)|\hat{A}(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi|\hat{U}(-t)\hat{A}(t)\hat{U}(t)|\psi\rangle$ avec $\hat{U}(t) = \exp\left(-i\hat{H}t/\hbar\right)$. On dérive en $t=0$: $\frac{d\langle A\rangle(t)}{dt} = \langle\psi|\frac{i\hat{H}}{\hbar}\hat{A} - \hat{A}\frac{i\hat{H}}{\hbar} + \frac{d\hat{A}}{dt}|\psi\rangle$ donnant le résultat souhaité.
2. Pour $\hat{A} = \hat{H}$ supposé indépendant du temps, cela donne $\frac{d\langle H\rangle}{dt} = 0$ qui montre la conservation de l'énergie moyenne au cours du temps.
3. On a $d\langle\hat{x}\rangle/dt = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{x},\hat{H}\right]\right\rangle = \frac{1}{i\hbar 2m}\langle[\hat{x},\hat{p}^2]\rangle = \frac{1}{m}\langle\hat{p}\rangle$ où la dernière égalité utilise une relation de la page 363. De même $d\langle\hat{p}\rangle/dt = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{p},\hat{H}\right]\right\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{p},V(\hat{x})]\rangle = -\left\langle\frac{dV}{dx}(\hat{x})\right\rangle$.

B.2 Chapitre 2

Exercice 2.1.5 page 94 par définition, $< x|\hat{T}_\lambda|\psi >=< x-\lambda|\psi >, \forall|\psi >$. Donc $< x|\hat{T}_\lambda =< x-\lambda|$. Donc $\hat{T}_\lambda^+|x >= |x-\lambda >$. Ensuite, $\hat{T}_\lambda$ est un opérateur unitaire, et $\hat{T}_\lambda^+ = \hat{T}_\lambda^{-1} = \hat{T}_{-\lambda}$. donnant $\hat{T}_{-\lambda}|x >= |x-\lambda >$.

Exercice 2.1.7 page 97

1. $\hat{U}(t_0) = \exp\left(\left(\frac{-i}{\hbar}\right)\hat{H}t_0\right)$. En effet si on dérive $|\psi(t+t_0)\rangle = \hat{U}(t_0)|\psi(t)\rangle$, par rapport à t_0, on obtient $\frac{\partial|\psi(t+t_0)\rangle}{\partial t_0} = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)\hat{H}\hat{U}(t_0)|\psi(t)\rangle = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)\hat{H}|\psi(t+t_0)\rangle$ qui est l'équation de Schrödinger. Par ailleurs pour $t_0 = 0$, on a bien $\hat{U}(t_0=0) = \hat{I}$.
2. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\langle x|\psi_{x_0}\rangle}{\partial x_0} &= \frac{\partial}{\partial x_0}\psi(x-x_0) = -\frac{\partial}{\partial x}\psi(x-x_0) = -\frac{\partial}{\partial x}\psi_{x_0}(x) = -\frac{\partial}{\partial x}\langle x|\psi_{x_0}\rangle \\
&= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle x|\psi_{x_0}\rangle = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)\langle x|\hat{p}\psi_{x_0}\rangle
\end{aligned}$$

car $\hat{p} \equiv -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$. Donc $\frac{\partial|\psi_{x_0}\rangle}{\partial x_0} = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)\hat{p}|\psi_{x_0}\rangle$. Notant $|\psi_{x_0}\rangle = \hat{T}_{x_0}|\psi\rangle$, comme dans la question (1), on déduit que $\frac{\partial\hat{T}(x_0)}{\partial x_0} = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)\hat{p}\hat{T}(x_0)$ et donc $\hat{T}(x_0) = \exp\left(\left(\frac{-i}{\hbar}\right)\hat{p}x_0\right)$.

3. Soit $\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle$. En suivant le même calcul que ci-dessus, le générateur des boosts est $\hat{b} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$. Or on sait que $\hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$ (cela se vérifie sur l'équation $\langle p|\hat{x}|x\rangle = x\langle p|x\rangle = x$ Cste $e^{-ipx/\hbar} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\langle x|p\rangle$). Donc $\hat{b} = -\hat{x}$. On déduit que $\hat{B}(p_0) = \exp\left(\left(\frac{-i}{\hbar}\right)(-\hat{x})\,p_0\right)$.
4. On déduit que $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{[\hat{A},\hat{B}]}$ et donc que $e^{-\hat{A}}e^{-\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{[\hat{A},\hat{B}]}$. Dans le cas qui nous interesse, $e^{\hat{A}} = \hat{T}(x_0) = \exp\left(\left(\frac{-i}{\hbar}\right)\hat{p}x_0\right)$, soit $\hat{A} = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)\hat{p}x_0$, et $e^{\hat{B}} = \hat{B}(p_0) = \exp\left(\left(\frac{-i}{\hbar}\right)(-\hat{x})\,p_0\right)$, soit $\hat{B} = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)(-\hat{x})\,p_0$. D'après $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar\hat{Id}$, on obtient $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = -\left(\frac{-i}{\hbar}\right)x_0\left(\frac{-i}{\hbar}\right)p_0\,[\hat{p},\hat{x}] = -ix_0p_0/\hbar = -i\mathcal{S}/\hbar$, donnant la relation recherchée.
   $\mathcal{S}/(2\pi\hbar)$ est le nombre de cellules de Planck $(2\pi\hbar)$ contenues dans la surface $\mathcal{S}$. Ce nombre intervient dans la formule de Weyl, voir cours.

Exercice 2.2.7 page 111 (voir aussi [DGLR89] p.378).

1. On a $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$
$$P_n = \frac{1}{Z}\exp\left(-E_n/(k_BT)\right) = \frac{1}{Z}e^{-\alpha(n+1/2)}$$
avec
$$\alpha = \frac{\hbar\omega}{kT} = \frac{\Theta}{T}$$
Calcul de la constante Z : il faut $\sum_{n=0}^{\infty}P_n = 1$ (normalisation des probabilités). On a la série géométrique $S_\alpha := \left(\sum_{n\geq 0}e^{-\alpha n}\right) = \frac{1}{1-e^{-\alpha}}$ donc
$$1 = \sum_{n=0}^{\infty}P_n = \frac{1}{Z}e^{-\alpha/2}S_\alpha$$
donc
$$Z = \frac{e^{-\alpha/2}}{1-e^{-\alpha}}$$
Alors
$$\begin{aligned}\langle E_x\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}P_nE_n &= \frac{\hbar\omega}{Z}\sum_n e^{-\alpha(n+1/2)}\left(n+\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\hbar\omega}{Z}e^{-\alpha/2}\left(\sum_n ne^{-\alpha n} + \frac{1}{2}\sum_n e^{-\alpha n}\right)\end{aligned}$$
Il nous faut calculer
$$\sum_{n\geq 0}ne^{-\alpha n} = -\frac{d}{d\alpha}(S_\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2}$$

Donc

$$\langle E_x \rangle = \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\right) = \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)\coth\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \left(\frac{k\Theta}{2}\right)\coth\left(\frac{\Theta}{2T}\right)$$

2. Pour l'énergie moyenne d'un atome à 3 dim :

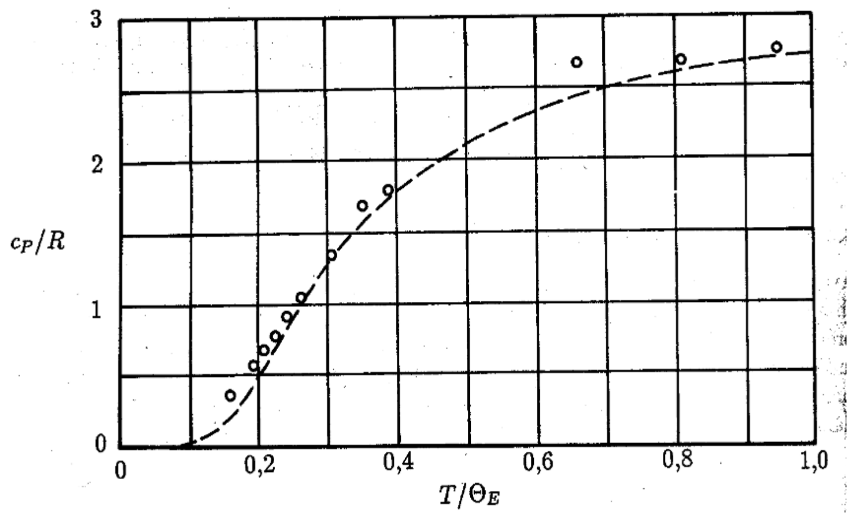
$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= \langle E_x \rangle + \langle E_y \rangle + \langle E_z \rangle \\ &= 3\left(\frac{k\Theta}{2}\right)\coth\left(\frac{\Theta}{2T}\right)\end{aligned}$$

Pour une mole d'atomes, l'énergie moyenne est $\langle U \rangle = \mathcal{N}\langle E \rangle$ avec $\mathcal{N} = \frac{R}{k}$ nombre d'Avogadro. Alors

$$\langle U \rangle = \frac{3R\Theta}{2}\coth\left(\frac{\Theta}{2T}\right)$$

et donc la capacité calorifique molaire est

$$C = \frac{d\langle U \rangle}{dT} = \frac{3R\Theta}{2}\frac{(-1)}{\sinh^2\left(\frac{\Theta}{2T}\right)}\left(\frac{-\Theta}{2T^2}\right) = 3R\left(\frac{\Theta}{2T}\right)^2\frac{1}{\sinh^2\left(\frac{\Theta}{2T}\right)}$$



Pour $T \ll \Theta$, on a $C \sim \frac{1}{T^2}e^{-\Theta/T} \to 0$. On remarque que

$$\Theta = \frac{\hbar\omega}{k} = \frac{\hbar}{k}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

où K est la "constante de raideur" de la liaison entre atomes. Donc **Corps dur (diamant)$\Leftrightarrow K$ élevé $\Leftrightarrow \Theta$ élevé.**

Pour $T \gg \Theta$ on a $C \to 3R$. Cette valeur s'obtient aussi par le théorème d'équipartition de l'énergie (valable en mécanique classique pour des Hamiltoniens quadratiques seulement).

Exercice 2.2.8 page 119

1. On a $\lambda_x = 2L/a$, $\lambda_y = 2L/b$, $\lambda_z = 2L/d$, avec $a, b, d \in \mathbb{N}^*$ entiers. Donc $k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x} = \frac{\pi}{L}a$, etc.... La fréquence de ce mode (a, b, d) est $\omega_{a,b,d} = ck = c\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)^{1/2} = \pi c\left(\frac{a^2}{L^2} + \frac{b^2}{L^2} + \frac{d^2}{l^2}\right)^{1/2}$. L'énergie du vide quantique dans la boite est alors (en pensant aux deux états de polarisations possibles)

$$\mathcal{E}(l) = 2\sum_{a,b,d>0} \frac{1}{2}\hbar\omega_{a,b,d}$$

La divergence de $\mathcal{E}(l)$ est due aux hautes fréquences ω ; appelée **divergence ultraviolette**.

2. On a

$$\mathcal{E}(l) = \hbar\sum_{a,b,d>0} \omega e^{-\omega/\omega_c}$$

et $\omega_{a,b,d} = \frac{\pi c}{l}\left(\left(\frac{l}{L}\right)^2(a^2+b^2) + d^2\right)^{1/2}$. Comme $(l/L) \ll 1$, on peut traiter a, b comme des variables continues dans la somme (approximation de Riemann d'une intégrale), et donc

$$\mathcal{E}(l) \simeq \hbar\sum_{d>0}\int da\, db\, \omega e^{-\omega/\omega_c}$$

Ensuite, on utilise des coordonnées polaires $(a, b) \to (u, \theta)$, c'est à dire $(a^2 + b^2) = u^2$ et $dadb = ududθ$, et $\theta = 0 \to \pi/2$. Alors

$$\mathcal{E}(l) \simeq \hbar\left(\frac{\pi}{2}\right)\sum_{d>0}\int_0^\infty du\, u\, \omega e^{-\omega/\omega_c}$$

Finalement, le changement de variable $u \to \omega = \frac{\pi c}{l}\left(\left(\frac{l}{L}\right)^2 u^2 + d^2\right)^{1/2}$, donne $\omega d\omega = udu\left(\frac{\pi c}{L}\right)^2$ et

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(l) &\simeq \hbar\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{L}{\pi c}\right)^2\sum_{d>0}\int_{\omega_0}^\infty d\omega\, \omega^2 e^{-\omega/\omega_c}\\
&= \frac{\hbar L^2}{2\pi c^2}\sum_{d>0}\frac{d^2}{d\alpha^2}\int_{\omega_0}^\infty d\omega\, e^{-\alpha\omega}\\
&= \frac{\hbar L^2}{2\pi c^2}\sum_{d>0}\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha\omega_0}\right)
\end{aligned}$$

avec $\omega_0 = \frac{\pi c}{l}d$, et $\alpha = 1/\omega_c$. Ensuite $\sum_{d>0} e^{-\alpha\omega_0} = \sum_{d>0}\left(e^{-\alpha\frac{\pi c}{l}}\right)^d = \frac{-e^{-\alpha\frac{\pi c}{l}}}{1-e^{-\alpha\frac{\pi c}{l}}} =$

$\frac{1}{e^{\alpha\frac{\pi c}{l}}-1}$ (suite géométrique). Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(l) &= \frac{\hbar L^2}{2\pi c^2}\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{1}{e^{\alpha\frac{\pi c}{l}}-1}\right)\\ &= \frac{\hbar c\pi^2 L^2}{2l^3}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x\left(e^x-1\right)}\right)\end{aligned}$$

avec $x = \alpha\pi c/l = \pi c/(\omega_c l)$.

3. Ensuite
$$\frac{1}{x\left(e^x-1\right)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{12} - \frac{1}{30\times 24}x^2 + O\left(x^3\right)$$
donc
$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x\left(e^x-1\right)}\right) = \frac{6}{x^4} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{15\times 24} + O\left(x\right)$$
et
$$\begin{aligned}\mathcal{E}(l) &= \frac{\hbar c\pi^2 L^2}{2l^3}\left(6\left(\frac{\omega_c l}{\pi c}\right)^4 - \left(\frac{\omega_c l}{\pi c}\right)^3 - \frac{1}{15\times 24} + O(1/\omega_c)\right)\\ &= \frac{\hbar c\pi^2 L^2}{2}\left(6\left(\frac{\omega_c}{\pi c}\right)^4 l - \left(\frac{\omega_c}{\pi c}\right)^3 - \frac{1}{15\times 24}\frac{1}{l^3} + O(1/\omega_c)\right)\end{aligned}$$

4. On a
$$\begin{aligned}U(l) &= \mathcal{E}(l) + \mathcal{E}(L-l) = \frac{\hbar c\pi^2 L^2}{2}\left(6\left(\frac{\omega_c}{\pi c}\right)^4 L - \frac{1}{15\times 24}\left(\frac{1}{l^3} + \frac{1}{\left(L-l\right)^3}\right) + ...\right)\\ &\simeq \frac{\hbar c\pi^2 L^2}{2}\left(6\left(\frac{\omega_c}{\pi c}\right)^4 L - \frac{1}{15\times 24}\left(\frac{1}{l^3}\right) + ...\right),\end{aligned}$$
pour $L \gg l$. Donc $F_{Casimir}(l) = -\frac{dU}{dl} = -\frac{\hbar c\pi^2 L^2}{2}\left(\frac{3}{15\times 24}\frac{1}{l^4} + ...\right)$ et pour $\omega_c \to \infty$, les termes suivants s'annullent, donc
$$F_{Casimir}(l) = -\frac{\hbar c\pi^2 L^2}{240}\frac{1}{l^4}$$

Exercice 2.2.13 page 126

1. Utiliser la relation (A.2.1), qui s'applique car $[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar Id$, $[a, a^+] = Id$.
2. Utiliser les expressions (2.2.29), et pour montrer la dernière ligne, le fait que $a|0>= 0$, donc $\exp(-\overline{z}a)|0>= \sum_n \frac{(-\overline{z}a)^n}{n!}|0>= |0>$.
3. Calculer $d(e^{\alpha a}|qp>)/d\alpha$ en $\alpha = 0$.

Exercice 2.2.15 page 128

1. On vérifie que cette représentation par des matrices 3×3 vérifie bien les règles (2.2.15). Par exemple, on calcule : $[\varphi(a), \varphi(a^+)] = \varphi(a)\varphi(a^+) - \varphi(a^+)\varphi(a) = ... = \varphi\left(\hat{I}\right)$; etc...

2. On a $\hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^+)$, donc $\varphi\left(-i\alpha'\hat{Q}\right) = (-i\alpha')\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $\varphi\left(\exp\left(-i\alpha'\hat{Q}\right)\right) = \exp\left(\varphi\left(-i\alpha'\hat{Q}\right)\right) = \begin{pmatrix} 1 & (-i\alpha')/\sqrt{2} & -\alpha'^2/4 \\ 0 & 1 & (-i\alpha')/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour cette dernière égalité, on utilise le fait que, posant $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^n = 0$ pour $n > 2$. Donc $\exp(\lambda M) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}(\lambda M)^n = M^0 + \lambda M + \frac{1}{2}\lambda^2 M^2 = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2/2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On procède de même pour les quatre autres expressions. Finalement, on calcule le produit de matrices,[1] :

$$\varphi\left(\exp\left(-i\gamma'\hat{I}\right)\right)\varphi\left(\exp\left(-i\alpha'\hat{Q}\right)\right)\varphi\left(\exp\left(-i\beta'\hat{P}\right)\right)\varphi\left(\exp\left(-i\theta\hat{n}\right)\right)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & A' & B' \\ 0 & e^{-i\theta} & C' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A' = -\overline{z}'e^{-i\theta}, \ B' = -i\gamma' + \frac{1}{2}|z'|^2 - \frac{i}{2}\Im\left(z'^2\right), \ C' = z'$$

que l'on identifie avec (2.2.37), pour obtenir (2.2.34).

Exercice 2.3.2 page 133 $E_F \simeq 3eV$, $V_F \simeq 10^6 m/s$.

Exercice 6 page 133

1. Un mode occupe le volume élémentaire $\Delta^3\vec{x}\Delta^3\vec{k} = (2\pi)^3$ dans l'espace de phase $\left(\vec{x}, \vec{k}\right)$. Considérons un intervalle de fréquence $d\nu$. D'après $\omega = 2\pi\nu = ck$, cela correspond à

$$dk = \frac{2\pi}{c}d\nu$$

et à un volume dans l'espace $\vec{k}$ de

$$\mathcal{V}_k = 4\pi k^2 dk$$

1. Pour ces produits de matrices, ainsi que ces exponentielles de matrices, on aura intérêt à utiliser un logiciel de calcul formel (comme Maple, Mathematica ou Xcas qui est un logiciel gratuit et libre).

(volume de la sphère de rayon k et épaisseur dk). Donc dans un volume V et un intervalle de fréquence $d\nu$ contiennent

$$dn = 2\left(V\,\mathcal{V}_k\right)/\left(2\pi\right)^3$$

modes. Le facteur 2 tient compte des deux états de polarisation possibles d'un mode (droite/gauche). Donc

$$dn = \frac{2V\left(4\pi k^2 \frac{(2\pi)}{c} d\nu\right)}{\left(2\pi\right)^3} = \frac{8\pi V \nu^2}{c^3} d\nu$$

2. On a $\langle N_{mode}\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} P_N N$, avec la probabilité $P_N = \frac{1}{Z}\exp\left(-E_N/kT\right)$. Comme $1 = \sum_N P_N$, on déduit que la constante Z est donnée par

$$\begin{aligned} Z &= \sum_N \exp\left(-E_N/kT\right) = \sum_N \exp\left(-\alpha\left(N+1/2\right)\right) \\ &= e^{-\alpha/2} \underbrace{\sum_{N\geq 0} e^{-\alpha N}}_{S} \end{aligned}$$

avec $\alpha = \left(\hbar\omega\right)/kT$ et la série géométrique $S = \sum_{N\geq 0} e^{-\alpha N} = \frac{1}{1-e^{-\alpha}}$. Alors

$$\begin{aligned} \langle N_{mode}\rangle &= \sum_{N=0}^{\infty} P_N N \\ &= \frac{1}{Z}\sum_N N\exp\left(-\alpha\left(N+1/2\right)\right) \\ &= \frac{1}{e^{-\alpha/2}S} e^{-\alpha/2}\left(-\frac{dS}{d\alpha}\right) = \frac{1}{S}\left(-\frac{dS}{d\alpha}\right) = \frac{1}{e^{\alpha}-1} \\ &= \frac{1}{e^{h\nu/(kT)}-1} \end{aligned}$$

appelée **distribution de Bose-Einstein.** Ensuite

$$\frac{dN}{d\nu} = \frac{dN}{dn}\frac{dn}{d\nu} =< N_{mode} > \frac{dn}{d\nu}$$

3. $u(\nu) = \frac{1}{V}\left(h\nu\right)\frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right)}$

Exercice 7 page 135

1. Un mode occupe $\Delta^3\vec{x}\Delta^3\vec{k} = (2\pi)^3$. Considérons un intervalle de fréquence $d\nu$. Pour les ondes S, cela correspond à $dk = \frac{2\pi}{v_S}d\nu$, et un volume dans l'espace $\vec{k}$ de $\mathcal{V}_k = 4\pi k^2 dk$ (volume de la sphère de rayon k et épaisseur dk). Donc dans un volume V et un intervalle de fréquence $d\nu = \frac{v_S}{2\pi}dk$ contiennent $dn_S = 2\left(V\,\mathcal{V}_k\right)/\left(2\pi\right)^3$ modes. Le facteur 2 tient compte des deux états de polarisation possibles d'un mode. Donc
$$dn_S = \frac{2\left(4\pi\right)V\nu^2 d\nu}{v_s^3}$$
de même pour les ondes P :
$$dn_P = \frac{\left(4\pi\right)V\nu^2 d\nu}{v_P^3}$$
2. D'après l'hypothèse d'équidistribution entre les modes, le rapport d'énergie est égal au rapport du nombre de modes :
$$\frac{E_P}{E_S} = \frac{dn_P}{dn_S} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_S}{v_P}\right)^3 = \frac{1}{2\left(1,73\right)^3} \simeq \frac{1}{10}$$

Exercice 9 page 136

1. On a $\hat{T}_q\,\hat{B}_p = \exp\left(-iq\hat{p}/\hbar\right)\exp\left(ip\hat{x}/\hbar\right)$. Utiliser (A.2.1), avec $A = -iq\hat{p}/\hbar$, $B = ip\hat{x}/\hbar$, $[A,B] = (qp/\hbar^2)\left(-i\hbar\right)$ donnant $e^Ae^B = e^Be^Ae^{[A,B]}$ donc $\hat{T}_q\,\hat{B}_p = e^{-iS/\hbar}\hat{B}_p\,\hat{T}_q$, avec $S = qp$ qui est la surface du carré dans l'espace de phase concerné par les translations. En terme de mécanique analytique, c'est une action. Les opérateurs commutent lorsque $S = nh,\ n \in \mathbb{N}$ c'est à dire lorsque la surface contient un nombre entier de cellules de Planck.
2. Utiliser (A.2.1) :$e^Ae^B = e^{A+B}e^{\frac{1}{2}[A,B]}$. On a $B = i(P_2 - P_1)\left(\hat{Q} - Q_1\right) - i(Q_2 - Q_1)\left(\hat{P} - P_1\right)$, $A = i(P_3 - P_2)\left(\hat{Q} - Q_2\right) - i(Q_3 - Q_2)\left(\hat{P} - P_2\right)$, et $\frac{1}{2}[A,B] = -\frac{i}{2}(P_2-P_1)(Q_3-Q_2)+\frac{i}{2}(Q_2-Q_1)(P_3-P_2) = -\frac{i}{2}\overrightarrow{23}\wedge\overrightarrow{12} = -i\,S/\hbar$:produit vectoriel et S est la surface hachurée (dans les unités q,p). On a $S/\hbar = \frac{1}{2}\left(P_2Q_3 - P_1Q_3 + P_1Q_2 - Q_2P_3 + Q\right.$
On a donc
$$\hat{D}_{2,3}\hat{D}_{1,2} = e^{-iS/\hbar}\exp\left(A+B\right) = e^{-iS/\hbar}\exp\left(i(P_3-P_1)\hat{Q} - i(Q_3-Q_1)\hat{P}\right)\exp\left(i\left(-P_2Q_1 + Q_2P_1 - P_3Q\right.\right.$$
. Par ailleurs,
$$\begin{aligned}\hat{D}_{1,3} \;&=\; \exp\left(i(P_3-P_1)\left(\hat{Q}-Q_1\right) - i(Q_3-Q_1)\left(\hat{P}-P_1\right)\right)\\ &= \exp\left(i(P_3-P_1)\hat{Q} - i(Q_3-Q_1)\hat{P}\right)\exp\left(i\left(-P_3Q_1 + Q_3P_1\right)\right)\end{aligned}$$
. Finalement, $\hat{D}_{2,3}\hat{D}_{1,2} = \hat{D}_{1,3}e^{-iS/\hbar}e^{i2S/\hbar} = e^{+iS/\hbar}\hat{D}_{1,3}$.
3. Par récurrence.

Exercice 10 page 137

1. $H(q,p) = H(q_0,p_0) + (q-q_0)\,.\frac{\partial H}{\partial q} + (p-p_0)\,.\frac{\partial H}{\partial p} + o(\Delta q, \Delta p)$, avec $\Delta q = q - q_0$, $\Delta p = p - p_0$.
2. $\hat{H}|q_0,p_0 > \simeq \left(H(q_0,p_0)\,Id + (\hat{q}-q_0)\,.\frac{\partial H}{\partial q} + (\hat{p}-p_0)\,.\frac{\partial H}{\partial p}\right)|q_0,p_0>$. (On a remplacé q et p par les $\hat{q}$ et $\hat{p}$).
3. Ainsi

$$\begin{aligned}\hat{U}(\Delta t)|q_0,p_0 > &= \exp\left(-i\hat{H}\Delta t/\hbar\right)|q_0,p_0> \\ &\simeq \exp\left(-i\left(H(q,p)\,Id + (\hat{q}-q_0)\,.\frac{\partial H}{\partial q} + (\hat{p}-p_0)\,.\frac{\partial H}{\partial p}\right)\Delta t/\hbar\right)|q_0,p_0>\end{aligned}$$

donc $\hat{U}(\Delta t)|q_0,p_0 >= \exp(-iE\Delta t/\hbar)\hat{D}_{0,1}|q_0,p_0>$, avec $q_1 - q_0 = \frac{\partial H}{\partial p}\Delta t$ et $p_1 - p_0 = -\frac{\partial H}{\partial q}\Delta t$ sont les déplacements du point (q_0,p_0) par la dynamique classique, et $E = H(q_0,p_0)$ est l'énergie du point classique, conservée au cours du temps. Sur la durée Δt infinitésimale, le paquet d'onde est donc translaté dans l'espace de phase, comme le point classique.

4. Alors en sommant des déplacements infinitésimaux,

$$\hat{U}(t)|q_0,p_0 > \simeq \exp\left(-iEt/\hbar\right)\Pi_{i=0}^{N-1}\hat{D}_{i,i+1}|q_0,p_0 >= \exp\left(-iEt/\hbar\right)\exp\left(iS/\hbar\right)\,\hat{D}_{0,M(t)}|q_0,p_0>$$

, où $M(t)$ est l'évolution classique.

5. On a $\hat{U}(t')|\phi >= \int_0^T e^{iE(t+t'-t')/\hbar}\hat{U}(t+t')|q_0p_0 >= e^{-iEt'/\hbar}\int_{t'}^{T+t'} e^{iEt/\hbar}\,\hat{U}(t)|q_0,p_0>$ $dt = e^{-iEt'/\hbar}|\phi>$, à condition que $e^{iET/\hbar}\hat{U}(T)|q_0,p_0 >= |q_0,p_0>$, car alors

$$\int_T^{T+t'} e^{iEt/\hbar}\,\hat{U}(t)|q_0,p_0>\,dt = \int_0^{t'} e^{iEt/\hbar}\,\hat{U}(t)|q_0,p_0>\,dt$$

.

6. D'après ci-dessus, la condition s'écrit : $\exp\left(iS/\hbar\right)\,\hat{D}_{0,M(T)}|q_0,p_0 >= |q_0,p_0>$, où S est la surface de la trajectoire (action). Or $M(T) = M(0)$, donc il faut $\exp\left(iS/\hbar\right) = 1$, soit

$$S = hn, \quad n \in \mathbb{N}$$

appelée **règle de quantification de Bohr-Sommerfeld :** la surface doit contenir un nombre entier de cellules de Planck.
Pour l'oscillateur Harmonique, cela donne (voir section précédente) $E_n \simeq \hbar\omega n$. (Il manque l'indice 1/2).

Exercice 2.3.3 page 140 (Voir [CBF] p571). On a $J = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\hbar}dx\,dp\,|x,p,\sigma\rangle\langle x,p,\sigma| = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\hbar}dx\,dp\,D(z)|0\rangle\langle 0|D^+(z)$. Or $D(z)|0\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right)\exp\left(za^+\right)\exp\left(-\overline{z}a\right)|0\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right)e^{za^+}|0\rangle$. Or $e^{za^+}|0\rangle = \sum_{n\geq 0}\frac{z^n a^{+n}}{n!}|0\rangle = \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$.

Donc $J = \sum_{n,n'} \int \frac{dxdp}{h} \frac{z^n \overline{z}^{n'}}{\sqrt{n!n'!}} e^{-|z|^2} |n\rangle\langle n'|$. Mais d'une part $\frac{dx \wedge dp}{h} = dQ \wedge dP$ et $\int dQdP\, z^n \overline{z}^{n'} e^{-|z|^2} = \int d\rho d\theta\, e^{-\rho^2} \rho^{n+n'} e^{i\theta(n-n')} = n!\, \delta_{n,n'}$ en coordonnées polaires (ρ, θ) et intégration sur ρ par parties. Donc $J = \sum_{n \geq 0} |n\rangle\langle n| = \hat{I}$. De façon plus élégante, cette relation de fermeture est une simple conséquence du lemme de Schur (théorie des groupes) voir [Per86] p.15.

Exercice 8 page 136 @@ revoir, voir correction de JJB @@

1. Le Hamiltonien classique est :

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Soit une valeur $E < 0$ fixée. On cherche le volume de l'espace de phase des points :

$$\Sigma_E = \{(\vec{x}, \vec{p}) / H(\vec{x}, \vec{p}) \leq E\}$$

On utilise naturellement les coordonnées sphériques : $\vec{p} \equiv (p, \varphi_p, \theta_p)$ et $\vec{x} \equiv (r, \varphi, \theta)$. Alors (utilisant $d\vec{x} = r^2 dr\, \sin\theta d\theta d\varphi$)

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(E) &= Vol\,(\Sigma_E) = \int_{\Sigma_E} d\vec{x} d\vec{p} \\ &= (4\pi)^2 \int_{E \geq \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}} r^2 p^2\, dr dp \\ &= (4\pi)^2 \frac{e^4}{3\,(4\pi\varepsilon_0)^2} \int_0^\infty p^2\, dp\, \frac{1}{\left(\frac{p^2}{2m} - E\right)^3} \\ &= (4\pi)^2 \frac{e^4}{3\,(4\pi\varepsilon_0)^2} \left(\frac{m^{3/2}\pi}{4\sqrt{2}(-E)^{3/2}}\right) = \frac{e^4 m^{3/2}\pi}{12\sqrt{2}\,(-E)^{3/2}\,\varepsilon_0^2} \end{aligned}$$

Ensuite d'après (2.3.2),

$$N\,(E) = \frac{\mathcal{V}\,(E)}{h^3} = \frac{e^4 m^{3/2}\pi}{12\sqrt{2}\,(-E)^{3/2}\,\varepsilon_0^2 h^3}$$

2. On déduit la densité de niveaux semi-classique $\rho_{sc}\,(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{e^4 m^{3/2}\pi}{8\sqrt{2}(-E)^{5/2}\varepsilon_0^2 h^3}$, qui est une expression valable lorsque les niveaux deviennent denses, c'est à dire pour $E \to 0^-$.

3. A partir de l'expression $E_n^{exact} = -\frac{\varepsilon_1}{n^2}$ avec $\varepsilon_1 = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13,6\ eV$, on a (sans oublier la dégénérescence du niveau E_n qui est n^2) $dN = n^2 dn$ donc $dN/dE = n^2 dn/dE = \frac{1}{2} \frac{m^{3/2} e^6}{2^{3/2}\hbar^3 (-E)^{5/2}}$.

@@

B.3 Chapitre 3

Exercice 3.1.2 page 149 on a $\vec{x} = R^{-1}\vec{x}'$ et la valeur de la fonction d'onde n'est pas changée lors de la rotation : $\psi'(\vec{x}') = \psi(\vec{x})$, donc :

$$\psi'(\vec{x}') = \psi(R^{-1}\vec{x}') \tag{B.3.1}$$

(situation semblable au cas de la translation, figure (2.1.1)).

On peut obtenir le même résultat avec la notation d'opérateurs : $\psi'(\vec{x}') =< \vec{x}'|R|\psi >=< R^{+}\vec{x}'|\psi >=< R^{-1}\vec{x}'|\psi >= \psi(R^{-1}\vec{x}')$, où on a utilisé le fait que l'opérateur rotation est unitaire.

Exercice 3.3.1 page 169 Électrons bidimensionnels dans un champ magnétique constant, avec un potentiel périodique : le spectre fractal de Hofstadter. [2]

1. $\vec{B} = rot\left(\vec{A}\right) = (\partial_x A_y - \partial_y A_x)\,\vec{e}_z = B\vec{e}_z$. Alors

$$\begin{aligned} H(x,p_x,y,p_y) &= \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 + V(x,y) \\ &= \frac{1}{2m}\left(\left(p_x + \frac{eB}{2}y\right)^2 + \left(p_y - \frac{eB}{2}x\right)^2\right) + V(x,y) \end{aligned}$$

2. Pour les unités, $[Q] \equiv \frac{[p_x]}{\left[\sqrt{\hbar eB}\right]} \equiv \frac{[p_x]}{\sqrt{[p_x]m[p_x]/m}} \equiv 1$ (pensant à $\frac{d\vec{p}}{dt} \equiv e\vec{v}\wedge\vec{B}$) et $[q] \equiv \frac{[p_x]}{[eBX]} \equiv \frac{[p_x]}{([p_x]/m)m} \equiv 1$. Donc$\left(\hat{Q},\hat{P},\hat{q},\hat{p}\right)$ sont sans dimension. A partir de $[\hat{x},\hat{p}_x] = i\hbar$ et $[\hat{y},\hat{p}_y] = i\hbar$, on calcule

$$\left[\hat{Q},\hat{P}\right] = i, \qquad [\hat{q},\hat{p}] = i\,\hbar_{eff}$$

et les autres commutateurs sont nuls. On a finalement :

$$2\pi\hbar_{eff} = \frac{\phi_0}{\phi}.$$

3. On obtient

$$H\left(Q,P,q,p\right) = \frac{\hbar\omega}{2}\left(P^2+Q^2\right) + V\left(-X\left(p+\sqrt{\hbar_{eff}}P\right),\ -X\left(q+\sqrt{\hbar_{eff}}Q\right)\right)$$

2. Ce spectre a été étudié dans *D. Hofstadter, "Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields" Phys.Rev.B* ***14****,2239, (1976).* Il est (partiellement) observé expérimentalement dans : *Albrecht et al. "Evidence of the Hofstadter Fractal energy spectrum in the Quantized Hall Conductance " Phys.Rev.Lett.* ***86****,147 (2001). Chercher "hofstadter butterfly"* dans Google.

4. Si $V = 0$, alors $H(Q,P,q,p) = \frac{\hbar\omega}{2}(P^2+Q^2)$ est un oscillateur harmonique. Ses niveaux d'énergie (**niveaux de Landau**) sont donc :

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

mais les variables (q,p) n'interviennent pas. Cela montre que chaque niveau est infiniment dégénéré (comme la dimension de l'espace de Hilbert des opérateurs $\hat{q},\hat{p}$).
<u>**(La suite est facultative)**</u>

5. La périodicité est 1 selon q et selon p. Les générateurs des translations sont respectivement $(\hat{p},-\hat{q})$, et $[\hat{q},\hat{p}] = i\,\hbar_{eff}$. Par conséquent

$$\hat{T}_q = \exp(-i\hat{p}/\hbar_{eff}), \quad \hat{T}_p = \exp(i\hat{q}/\hbar_{eff}).$$

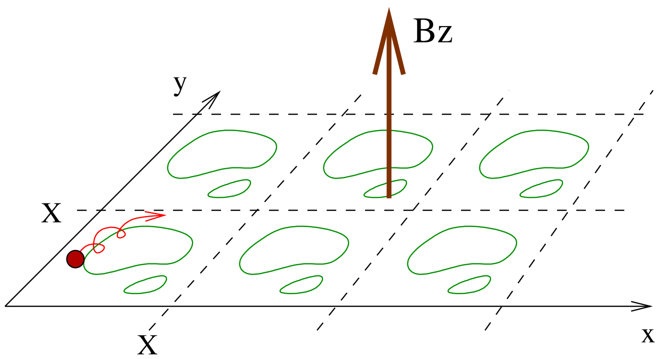
6. La relation de Glauber donne $\hat{T}_q\hat{T}_p = e^{\left[-i\hat{p}/\hbar_{eff},i\hat{q}/\hbar_{eff}\right]}\hat{T}_p\hat{T}_q = e^{\frac{-i2\pi}{2\pi\hbar_{eff}}}\hat{T}_p\hat{T}_q$. Donc $\left[\hat{T}_q,\hat{T}_p\right] = 0$ si et seulement si

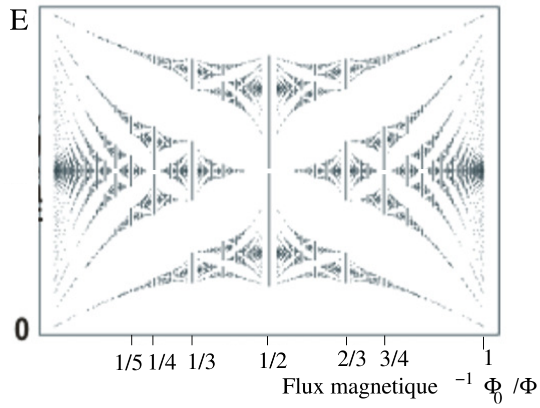
$$\frac{1}{2\pi\hbar_{eff}} = N \in \mathbb{N} \quad : \text{entier}$$

Cela donne $\frac{\phi}{\phi_0} = \frac{1}{2\pi\hbar_{eff}} = N$. Autrement dit, il doit y avoir un nombre entier de quanta de flux à travers la surface élémentaire X^2.
A.N. : $N = \frac{X^2eB}{h}$, avec $X = 2.10^{-7}m$, $B = 0,21\,T.$, $h = 6,6.10^{-34}J.s.$, $e = 1,6.10^{-19}C$, $N = \frac{10^{-14}4\,1,6.10^{-19}0,21}{6,6.10^{-34}} \simeq 2$.

7. Avec cette condition, on peut (comme dans la théorie de Bloch), chercher les états stationnaires parmi les vecteurs propres communs de $\hat{T}_q$ et $\hat{T}_p$ qui vérifient, $\hat{T}_q|\psi\rangle = e^{i\theta_1}|\psi\rangle$ et $\hat{T}_p|\psi\rangle = e^{i\theta_2}|\psi\rangle$. Les états stationnaires ainsi trouvés $|\psi_n(\theta_1,\theta_2)\rangle$ vont dépendre des paramètres continus (θ_1,θ_2) et d'un indice discret n. Cela donnera un spectre en bandes. Chaque bande est indicée par n.

8. Avec les notation ci-dessus, appelons $\mathcal{H}(\theta_1,\theta_2)$ l'espace des fonctions de Bloch vérifiant $\hat{T}_q|\psi\rangle = e^{i\theta_1}|\psi\rangle$ et $\hat{T}_p|\psi\rangle = e^{i\theta_2}|\psi\rangle$. Comme $\hat{T}_q|\psi\rangle = e^{i\theta_1}|\psi\rangle$, la fonction d'onde $\psi(q)$, est périodique (à une phase près), de période 1. Par conséquent, sa transformée de Fourier $\tilde{\psi}(p)$ est discrète, avec un pas $\Delta p = h_{eff} = \frac{1}{N}$. Or $\hat{T}_p|\psi\rangle = e^{i\theta_2}|\psi\rangle$, ce qui signifie que $\tilde{\psi}(p)$ est elle même périodique, de période 1. Dans l'intervalle $p \in [0,1[$ il y a $1/\Delta p = N$ composantes, et l'état$|\psi\rangle$ n'a donc que N composantes indépendantes. L'espace des fonctions de Bloch $\mathcal{H}(\theta_1,\theta_2)$ est donc de dimension N. Avec la perturbation V, le premier niveau de Landau perd sa dégénérescence et il apparait donc N bandes de Bloch. (Cela est aussi vrai pour les autres niveaux de Landau).





9. La condition $2\pi\hbar_{eff} = \frac{1}{N}$ est exceptionelle. Par contre, si $2\pi\hbar_{eff} = \frac{h}{eBX^2} = \frac{\phi_0}{\phi} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, on considère une cellule de base de côtés X et $Y = aX$, donc de surface $XY = aX^2$. Pour cette cellule de base, la constante effective $2\pi\hbar'_{eff} = \frac{2\pi\hbar}{eB(XY)} = \frac{1}{b}$. Donc $\left(2\pi\hbar'_{eff}\right)^{-1} = b \in \mathbb{N}$ est entier, les résultats précédents s'appliquent et on déduit que le spectre est formé de b **bandes**. Ainsi lorsque ϕ/ϕ_0 varie continuement, le dénominateur b (et donc le nombre de bandes) varie discontinuement, ce qui explique l'aspect fractal du spectre obtenu. Voir figure.

B.4 Chapitre 4

Exercice 11 page 188 le résultat (4.5.1) montre que cette relation est vraie pour les trois vecteurs de base e_i de $\mathbb{R}^3$, ce qui peut s'écrire $\left[\hat{S}_{e_i}, \hat{S}_{e_j}\right] = i\hbar\hat{S}_{e_i\wedge e_j} = i\hbar e_i \wedge e_j.\hat{\vec{S}}$. Alors $\left[\hat{S}_{\vec{U}}, \hat{S}_{\vec{V}}\right] = \sum_{i,j}\left[U_i\hat{S}_{e_i}, U_j\hat{S}_{e_j}\right] = \sum_{i,j} U_iU_j\left[\hat{S}_{e_i}, \hat{S}_{e_j}\right] = i\hbar\sum_{i,j} U_iU_je_i \wedge e_j.\hat{\vec{S}} = i\hbar\left(\vec{U}\wedge\vec{V}\right).\hat{\vec{S}}$.

Exercice 4.4.1 page ??

1. Soit un état de spin 1/2 quelconque noté :

$$|\psi >= a|+_z > +b|-_z >$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$. Si $b \neq 0$, alors on écrit $|\psi >= b|\varphi\rangle$ avec $|\varphi\rangle = z|+_z > +|-_z >$ et $z = a/b$. De façon très générale, les probabilités associées au résultat d'une mesure sur un état quantique, ne change pas si l'état est multiplié par une constante complexe. Plus précisement, si $|\psi >= b|\varphi\rangle$, et $\hat{A}$ est une observable (opérateur) :

$$\frac{\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{|b|^2}{|b|^2}\frac{\langle\varphi|\hat{A}|\varphi\rangle}{\langle\varphi|\varphi\rangle} = \frac{\langle\varphi|\hat{A}|\varphi\rangle}{\langle\varphi|\varphi\rangle}$$

Par conséquent $|\psi\rangle$ et $|\varphi\rangle$ décrivent les même "états physiques"

2. On calcule

$$s_x = \frac{\langle\psi|\widehat{S}_x|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{1}{|a|^2+|b|^2}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \bar{a}, & \bar{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\frac{2\Re(z)}{1+|z|^2}$$

de même :

$$s_y = \frac{\langle\psi|\widehat{S}_y|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = -\frac{\hbar}{2}\frac{2\Im(z)}{1+|z|^2}, \quad s_z = \frac{\langle\psi|\widehat{S}_y|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\hbar}{2}\frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}$$

Donc $s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$. (Ne pas confondre $s^2 = \langle S_x\rangle^2 + \langle S_y\rangle^2 + \langle S_z\rangle^2$ avec $\langle S^2\rangle = \hbar^2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)$).

3. En coordonnées sphériques (s,θ,φ), $s_x = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\cos\varphi$, $s_y = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\sin\varphi$, $s_z = \frac{\hbar}{2}\cos\theta$, on obtient

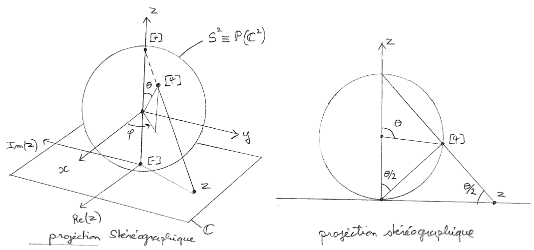
$$z\overline{z} = \frac{1+2\frac{s_z}{\hbar}}{1-2\frac{s_z}{\hbar}} = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = \operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}$$

et

$$z = \left(1+|z|^2\right)\left(\frac{s_x}{\hbar} - i\frac{s_y}{\hbar}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)(\cos\varphi - i\sin\varphi)\sin\theta$$

donc $z = \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}$.

4. D'après les schémas :



Exercice 12 page 189

1. On a vu en cours, que les générateurs $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ s'expriment respectivement dans la base o.n. $(|+_z\rangle, |-_z\rangle)$ par les matrices de Pauli $\left(\frac{\hbar}{2}\sigma_x, \frac{\hbar}{2}\sigma_y, \frac{\hbar}{2}\sigma_z\right)$; ce sont des matrices hermitienne 2×2 de trace nulle. Par conséquent, l'opérateur $\hat{S}_{\vec{U}} = U_x\hat{S}_x + U_y\hat{S}_y + U_z\hat{S}_z = \vec{U}.\hat{\vec{S}} \in \mathcal{R}$, $\quad \vec{U} = (U_x, U_y, U_z) \in \mathbb{R}^3$ (générateur des rotations du spin 1/2) s'exprime par la matrice $\frac{\hbar}{2}\sigma_{\vec{U}}$ avec

$$\sigma_{\vec{U}} = U_x\sigma_x + U_y\sigma_y + U_z\sigma_z = \vec{U}.\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} U_z & U_x - iU_y \\ U_x + iU_y & -U_z \end{pmatrix}$$

2. Soit $M \in SU(2)$. On a (a) : $M^+ = M^{-1}$ et (b) : $det(M) = 1$. Écrivons $M = \exp(-i\lambda G)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, et G matrice $2*2$ qui est un "générateur" ,i.e. élément de l'algèbre de Lie $su(2)$. Pour $\lambda \to 0$, la relation (a) donne $(1 + i\lambda G^+) = (1 + i\lambda G)$, soit $G = G^+$. La relation (b) donne $1 = det(M) = \exp(-i\lambda Trace(G))$, donc $Trace(G) = 0$. (La relation matricielle très générale $det(M) = \exp(-i\lambda Trace(G))$, se démontre en écrivant G dans une base propre, où elle est diagonale). Ainsi l'algèbre de Lie $su(2)$ du groupe $SU(2)$ est formé par les matrices hermitienne 2×2 de trace nulle forme. Comme expliqué en (1), G est de la forme$G = \begin{pmatrix} u_z & u_x - iu_y \\ u_x + iu_y & -u_z \end{pmatrix} = \vec{u}.\vec{\sigma}$, et donc les matrices de Pauli forment une base de cette algèbre.
3. Soit $\varphi : \hat{O} \to M_{\hat{O}}$ l'application qui à un opérateur de $\mathcal{H}_{spin}$ associe la matrice 2×2, qui est son expression dans la base $(|+_z\rangle, |-_z\rangle)$. On a vu que $\varphi\left(\hat{S}_{\vec{U}}\right) = \frac{\hbar}{2}\sigma_{\vec{U}}$ et que $\varphi : \mathcal{R}_{spin} \to su(2)$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie. Pour $\hat{R} \in R_{spin}$, on a $\varphi\left(\hat{R}\right) = \varphi\left(\exp\left(\frac{-i\hat{S}_{\vec{u}}\,\alpha}{\hbar}\right)\right) = \exp\left(\varphi\left(\frac{-i\hat{S}_{\vec{u}}\,\alpha}{\hbar}\right)\right) = \exp\left(-\frac{i}{2}\sigma_{\vec{U}}\right)$ qui montre que $\varphi : R_{spin} \to SU(2)$ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 13 page 191 Voir eq(B.4.1). Cette fois ci l'opérateur de rotation agit à la fois sur l'espace ordinaire et sur le spin : $\psi'_\pm(\vec{x}') =< \vec{x}', \pm|\hat{R}|\psi, \vec{s} >=< R^+\vec{x}', R^+ \pm |\psi, \vec{s} >=< R^{-1}\vec{x}', R^{-1} \pm |\psi, \vec{s} >$, c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} \psi'_+(\vec{x}') \\ \psi'_-(\vec{x}') \end{pmatrix} = \hat{R}^{-1}_{spin} \begin{pmatrix} \psi_+(R^{-1}_{espace}\vec{x}') \\ \psi_-(R^{-1}_{espace}\vec{x}') \end{pmatrix} \tag{B.4.1}$$

B.5 Chapitre 7

Exercice 6.5.1 Diffusion nucléon-pion page 277. On a vu que $\mathcal{D}_{1/2}\otimes\mathcal{D}_{1/2} = \mathcal{D}_0\oplus\mathcal{D}_1$ qui est la décomposition de Clebsh-Gordan. Si $\hat{H}$ est un opérateur vérifiant $\left[\hat{H}, \vec{S}\right] = 0$ (invariance par rotation) alors d'après le **Lemme de Shur**, $\hat{H}$ exprimé dans la décomposition $\mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1$ est de la forme bloc:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \lambda\hat{I} & 0 \\ \underbrace{0}_{\mathcal{D}_0} & \underbrace{\mu\hat{I}}_{\mathcal{D}_1} \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Or on a vu que l'opérateur $A.\hat{I} + B.\vec{S}_1.\vec{S}_2 = A + \frac{B}{2}\hbar^2\left(J(J+1) - \frac{3}{2}\right)$ s'exprime dans cette même décomposition par

$$\begin{pmatrix} E_0 = A - \frac{3}{4}B\hbar^2 & 0 \\ 0 & E_1 = A + \frac{1}{4}B\hbar^2 \end{pmatrix}$$

Il suffit donc de prendre A, B tels que $A - \frac{3}{4}B\hbar^2 = \lambda$ et $\mu = A + \frac{1}{4}B\hbar^2$.
Plus généralement, pour le couplage $\mathcal{D}_{j_1} \otimes \mathcal{D}_{j_2} = \oplus_{j=|j_2-j_1|}^{j_1+j_2}\mathcal{D}_j$, un opérateur invariant

s'exprime comme $\lambda_j \hat{I}$ sur chaque espace $\mathcal{D}_j$ de la décomposition. Il y a donc $N = j_2 + j_1 - |j_2 - j_1|$ paramètres indépendant λ_j. Comme l'opérateur de Casimir $\vec{S}^2$ est $\hbar^2 j(j+1)\hat{I}$ sur un espace $\mathcal{D}_j$ (et distingue donc les espaces $\mathcal{D}_j$) on déduit que un opérateur invariant peut s'exprimer sous la forme $\hat{H} = \mu_0 \hat{I} + \mu_1 \vec{S}^2 + \mu_2 \left(\vec{S}^2\right)^2 + \ldots + \mu_{N-1}\left(\vec{S}^2\right)^{N-1}$. Il est possible de relier les $(\mu_j)_j$ et les $(\lambda_j)_j$. De façon équivalente on pourrait utiliser $\left(\vec{S}_1.\vec{S}_2\right)^k$ à la place de $\left(\vec{S}^2\right)^k$, les coefficients seraient différents.

Exercice 6.5.2 Diffusion nucléon-pion page 283.

1. On a $\mathcal{H}_{j=1} \otimes \mathcal{H}_{j=1/2} = \mathcal{H}_{j=1/2} \oplus \mathcal{H}_{j=3/2}$, de dimensions $3 \times 2 = 2 + 4 = 6$ (d'après $dim\mathcal{H}_j = 2j+1$).
2. On obtient :

$$\begin{aligned}
|p\pi^+\rangle &= |\frac{3}{2};\frac{3}{2}\rangle \\
|p\pi^0\rangle &= \sqrt{2/3}|\frac{3}{2};\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{1/3}|\frac{1}{2};\frac{1}{2}\rangle \\
|p\pi^-\rangle &= \sqrt{1/3}|\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{2/3}|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\rangle \\
|n\pi^+\rangle &= \sqrt{1/3}|\frac{3}{2};\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|\frac{1}{2};\frac{1}{2}\rangle \\
|n\pi^0\rangle &= \sqrt{2/3}|\frac{3}{2};\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{1/3}|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\rangle \\
|n\pi^-\rangle &= |\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\rangle
\end{aligned}$$

3. Dans un espace de représentation irréductible, $\hat{U}$ doit agir comme l'identité à une constante complexe près (Lemme de Shur). Donc dans la décomposition $\mathcal{H}_{j=1/2} \oplus \mathcal{H}_{j=3/2}$:

$$\hat{U} \equiv_{\mathcal{H}_{3/2}\oplus\mathcal{H}_{1/2}} \begin{pmatrix} A_{3/2}\hat{I}_4 & 0 \\ 0 & A_{1/2}\hat{I}_2 \end{pmatrix}$$

avec $A_{3/2}, A_{1/2} \in \mathbb{C}$.

4. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sigma\left(p\pi^+ \to p\pi^+\right) &= \left|\langle p,\pi^+|\hat{U}|p,\pi^+\rangle\right|^2 = \left|A_{3/2}\right|^2 \\
\sigma\left(p\pi^- \to n\pi^0\right) &= \left|\langle n,\pi^0|\hat{U}|p,\pi^-\rangle\right|^2 = \left|\frac{\sqrt{2}}{3}A_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3}A_{1/2}\right|^2 \\
\sigma\left(p\pi^- \to p\pi^-\right) &= \left|\langle p,\pi^-|\hat{U}|p,\pi^-\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{3}A_{3/2} + \frac{2}{3}A_{1/2}\right|^2
\end{aligned}$$

(a) si $\left|A_{3/2}\right| \gg \left|A_{1/2}\right|$, alors $\sigma\left(p\pi^{+} \to p\pi^{+}\right) = \left|A_{3/2}\right|^{2}$, $\sigma\left(p\pi^{-} \to n\pi^{0}\right) \simeq \frac{2}{9}\left|A_{3/2}\right|^{2}$, $\sigma\left(p\pi^{-} \to p\pi^{-}\right) \simeq \frac{1}{9}\left|A_{3/2}\right|^{2}$.

(b) si $\left|A_{3/2}\right| \ll \left|A_{1/2}\right|$, alors $\sigma\left(p\pi^{+} \to p\pi^{+}\right) \simeq 0$, $\sigma\left(p\pi^{-} \to n\pi^{0}\right) \simeq \frac{2}{9}\left|A_{1/2}\right|^{2}$, $\sigma\left(p\pi^{-} \to p\pi^{-}\right) \simeq \frac{4}{9}\left|A_{1/2}\right|^{2}$.

(c) si $A_{3/2} = A_{1/2}$, alors $\sigma\left(p\pi^{+} \to p\pi^{+}\right) = \left|A_{3/2}\right|^{2}$, $\sigma\left(p\pi^{-} \to n\pi^{0}\right) \simeq 0$, $\sigma\left(p\pi^{-} \to p\pi^{-}\right) \simeq \left|A_{3/2}\right|^{2}$.

5. L'expérience donne :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma\left(p\pi^{+} \to p\pi^{+}\right)}{\sigma\left(p\pi^{-} \to n\pi^{0}\right)} &= 4.33 \simeq 4.5 \\ \frac{\sigma\left(p\pi^{+} \to p\pi^{+}\right)}{\sigma\left(p\pi^{-} \to p\pi^{-}\right)} &= 8.47 \simeq 9 \end{aligned}$$

On est donc proche de la situation $\left|A_{3/2}\right| \gg \left|A_{1/2}\right|$.

6. Durée de vie $\tau \simeq \frac{\hbar}{\Delta E} = 6.510^{-24}s$. L'espace de degré interne d'isospin de cette particule Δ est $\mathcal{H}_{j=3/2}$, de dimension $2j+1=4$. D'après l'écriture $|j=3/2, m=3/2\rangle = |p^{+}, \pi^{+}\rangle$, etc... on déduit que $|\Delta^{++}\rangle = |j=3/2; m=3/2\rangle$, $|\Delta^{+}\rangle = |j=3/2; m=1/2\rangle$,$|\Delta^{0}\rangle = |j=3/2; m=-1/2\rangle$,$|\Delta^{-}\rangle = |j=3/2; m=-3/2\rangle$.