

Chapitre 5

Plusieurs particules

Jusqu'à présent nous avons présenté comment décrire la dynamique d'une seule particule avec spin ou sans spin dans le cadre de la mécanique quantique.

Bien entendu, toute la complexité de la nature et de la physique vient de ce qu'elle est composée d'un grand nombre de particules qui interagissent entre elles.

Dans ce chapitre nous présentons comment décrire un système quantique constitué de plusieurs particules. Tout d'abord nous présentons le cas de particules différentes, dites **discernables**, puis le cas de particules identiques (par exemple un gaz d'électrons ou de photons, d'hydrogène,...).

5.1 Plusieurs particules discernables

Nous allons montrer et commenter le fait mathématique que **l'espace quantique total pour décrire plusieurs plusieurs particules est le produit tensoriel** des espaces quantique de chaque particule considérée individuellement.

5.1.1 Pour deux particules

Prenons l'exemple d'un système comprenant deux particules différentes, comme par exemple l'atome d'hydrogène constitué d'un proton et d'un électron.

Ce sont des particules avec spin $1/2$, et nous avons défini l'espace de Hilbert individuel de chacune des particules : \mathcal{H}_{proton} , $\mathcal{H}_{electron}$ qui permet de décrire l'état spatial de leur fonction d'onde et leur état de spin. Or dans l'atome d'hydrogène, ces deux particules interagissent, il faut donc considérer et décrire le système total.

Quel peut être un état quantique du système total ? Si $|p_i\rangle, i = 1, \dots$ est une base de \mathcal{H}_{proton} et $|e_j\rangle, j = 1, \dots$ une base de $\mathcal{H}_{electron}$, il est tout à fait possible d'imaginer un état total de la forme $|p_i, e_j\rangle$. Mais *d'après le principe de superposition*, il peut aussi y avoir des combinaisons linéaires de ces états $|p_i e_j\rangle$. Or ces états sont orthogonaux entre eux (car ils décrivent des états physiques différents, voir chapitre 1), ils forment donc une

base de \mathcal{H}_{total} . C'est justement la définition de l'espace produit tensoriel, voir eq.(3.1.5) page 148. Ainsi :

$$\mathcal{H}_{total} = \mathcal{H}_{proton} \otimes \mathcal{H}_{electron}$$

et une base de \mathcal{H}_{total} est $|p_i e_j \rangle = |p_i \rangle \otimes |e_j \rangle$, avec $i = 1, \dots, \quad j = 1, \dots$

Cela peut paraître un peu abstrait, et en effet cela dépasse le bon sens parfois : du fait du produit, cet espace \mathcal{H}_{total} est "gigantesque" et contient nous allons le voir des états quantiques qui défient le bon sens. Le principe de superposition est à l'origine de ce résultat (qu'il ne faut croire, que si l'expérience le confirme).

En terme de fonction d'onde : Si on oublie le spin des particules, une fonction d'onde du proton est de la forme $\psi_p(x_p, y_p, z_p)$, une fonction d'onde de l'électron est de la forme $\psi_e(x_e, y_e, z_e)$ (ce sont des fonctions à trois variables), alors qu'une fonction d'onde du système global est de la forme $\phi(x_p, y_p, z_p, x_e, y_e, z_e)$, *c'est une fonction à six variables*. Nous avons déjà discuté, les corrélations qui peuvent apparaître entre ces variables, cf. figure (3.1.2) page 148. (En tant que fonction à six variables, $|\phi \rangle \in L^2(\mathbb{R}^6) = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^3)$ comme expliqué page 146).

5.1.2 Opérateurs de \mathcal{H}_{total}

Les opérateurs positions, impulsion, spin et autres, sont définis dans les chapitres précédents pour un état quantique à une particule. Voici comment ils opèrent dans l'espace \mathcal{H}_{tot} .

Par exemple si on note \hat{x}_p l'opérateur position x du proton, il agit de la façon suivante sur la fonction d'onde totale :

$$(\hat{x}_p \phi)(x_p, y_p, z_p, x_e, y_e, z_e) = x_p \phi(x_p, y_p, z_p, x_e, y_e, z_e)$$

où en terme de notation vectorielle, l'opérateur associé au proton n'agit que sur les vecteurs du proton dans les termes factorisés :

$$\hat{x}_p(|p \rangle \otimes |e \rangle) = (\hat{x}_p |p \rangle) \otimes |e \rangle \quad (5.1.1)$$

et agit comme l'opérateur identité sur l'espace de l'électron. C'est à dire

$$(\hat{x}_p)_{\mathcal{H}_{tot}} = (\hat{x}_p)_{\mathcal{H}_p} \otimes \hat{I}_e$$

5.1.3 Pour N particules

La généralisation est simple :

$$\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$$

mais l'espace résultant est énorme ! (sa dimension est le produit des dimensions).

5.2 Non localité de la mécanique quantique, le paradoxe E.P.R.

référence : Bransden p673 [BC89], Ballentine [L.E90] p.437.

Pour un texte court, lire : <http://www.physique.usherb.ca/attracte/08-1999/epr.html>

5.2.1 États enchevêtrés : états surprenants de l'espace total

Le principe de superposition est à l'origine de la complexité de la mécanique quantique.

Nous avons déjà vu que pour une particule, alors que son état classique est de la forme (\vec{x}, \vec{p}) , avec position et vitesse précises, la mécanique quantique permet une superposition de tels états comme : $|\vec{x}, \vec{p}\rangle + |\vec{x}', \vec{p}'\rangle$, une fonction d'onde qui serait la somme de deux paquets d'ondes gaussiens différents.

Pour deux particules, il peut y avoir des états de la forme

$$|\phi\rangle = |1\rangle \otimes |2\rangle$$

où $|i\rangle$ est une fonction d'onde respectivement de la particule $i = 1, 2$. Un état $|\phi\rangle$ qui peut s'écrire sous cette forme est dit **factorisable** ou **séparable**. Il n'est pas trop surprenant physiquement.

Mais la mécanique quantique permet à priori des superpositions de tels états. Par exemple :

$$|\phi\rangle = |1\rangle \otimes |2\rangle + |1'\rangle \otimes |2'\rangle \quad (5.2.1)$$

qui est une superposition de deux états factorisés. C'est un état non factorisable, dit **état enchevêtré** (ou "entangled state" en anglais).

De tels états sont observés expérimentalement. Les manifestations physiques de ces états défient le bon sens. On décrit ci-dessous une expérience à l'issue de laquelle deux particules sont dans un état enchevêtré, et l'on discute les conséquences mesurables.

5.2.2 Description quantique orthodoxe

Dans cette expérience, une paire de deux particules de spin 1/2 est créée en un lieu et instant précis. Nous appelons cet événement E_1 . Nous supposons que l'état quantique qui décrit le spin des deux particules est :

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+_z\rangle_1 \otimes |-_z\rangle_2 - |-_z\rangle_1 \otimes |+_z\rangle_2) \quad (5.2.2)$$

l'indice 1 ou 2 se réfère au numéro de la particule. L'état $|\phi\rangle$ est un état enchevêtré.

Cet état correspond à *un spin total nul*, appelé état singlet de spin, voir section 6.5.1. En effet l'observable de spin total est $\vec{S}_{tot} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$, et il est aisé de calculer que $(\vec{S}_{tot})^2 |\phi\rangle = 0$.

Il y a plusieurs façons de créer un tel état, voir par exemple : <http://www.lkb.ens.fr/recherche/qedcav/french/rydberg/resonant/eprpair.html>. Ce peut être par la désintégration d'un pion π_0 qui a un spin nul, en électron et positron :

$$\pi_0 \rightarrow e^- + e^+$$

Les particules 1 et 2 partent dans des directions opposées, vers des détecteurs symbolisés par les physiciens P_1 et P_2 . Voir figure 5.2.1.

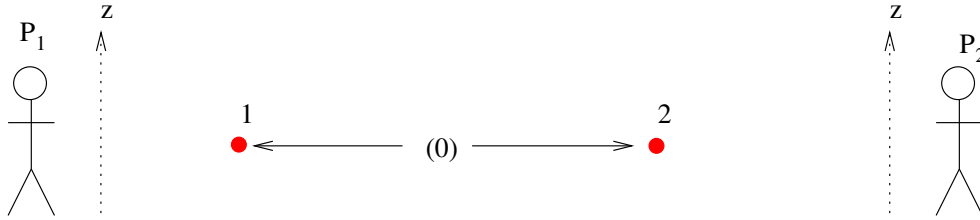


FIGURE 5.2.1 – Les deux particules 1 et 2 sont dans un état enchevêtré, et partent vers deux détecteurs P_1, P_2 .

A l'aide d'un appareil du type Stern-Gerlach, le physicien P_1 effectue une mesure de l'observable :

$$\hat{A} = \left(\frac{2}{\hbar} \right) \hat{S}_{1,z}$$

(composante du spin de la particule 1 selon l'axe z). C'est l'évènement E_2 . Les deux valeurs propres de cette observable sont ± 1 . Par conséquent d'après le postulat de la mesure, voir page 61, à l'issue d'une mesure, le physicien P_1 observera le résultat $A = +1$ ou $A = -1$, avec les probabilités respectives

$$P_{A=+1} = \frac{1}{\langle \phi | \phi \rangle} |\langle +_{1,z} | \phi \rangle|^2 = \frac{1}{2},$$

$$P_{A=-1} = \frac{1}{\langle \phi | \phi \rangle} |\langle -_{1,z} | \phi \rangle|^2 = \frac{1}{2}.$$

et si il observe $A = +1$ (respect. $A = -1$), alors juste après la mesure, l'état quantique des deux particule est $|+_{z > 1} \otimes |-_{z > 2}$, (respectivement $|-_{z > 1} \otimes |+_{z > 2}$) qui est l'état ϕ projeté sur l'espace propre de \hat{A} associé à la valeur propre $A = +1$ (respect. $A = -1$). On remarque donc que cette mesure du physicien P_1 modifie l'état quantique du système total et en particulier celui de la particule 2. C'est l'évènement E_3 sur la figure (5.2.2).

Si *juste après cette première mesure*, le physicien P_2 effectue à son tour une mesure de l'observable

$$\hat{B} = \left(\frac{2}{\hbar} \right) \hat{S}_{2,z}$$

(composante du spin de la particule 2 selon l'axe z), appelé évènement E_4 , et alors deux cas se présentent selon la valeur de A précédente :

5.2. NON LOCALITÉ DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE, LE PARADOXE E.P.R.207

1. si $A = +1$, l'état quantique réduit étant $|\phi \rangle = |+_z \rangle_1 \otimes |-_z \rangle_2$, le physicien P_2 mesure $B = -1$ avec la probabilité $P_{B=-1} = 1$ (c'est à dire certitude).
2. si $A = -1$, l'état quantique réduit étant $|\phi \rangle = |-_z \rangle_1 \otimes |+_z \rangle_2$, le physicien P_2 mesure $B = +1$ avec probabilité 1.

Cette certitude totale traduit une **corrélacion parfaite** entre les états de spin des deux particules. Remarquez que si le physicien P_2 avait effectué sa mesure le premier l'analyse aurait été analogue.

En résumé, d'après cette analyse de la situation par la mécanique quantique (et postulat de la mesure), l'état $|\phi \rangle$ est enchevêtré jusqu'à la première mesure, et subitement, dès la première détection, il est réduit instantanément dans un produit factorisé $|+_z \rangle_1 \otimes |-_z \rangle_2$, ou $|-_z \rangle_1 \otimes |+_z \rangle_2$ respectant la corrélation des deux spins opposés (on parle de "réduction" ou "collapse" de l'état quantique).

Cela est en parfait accord avec les expériences, et cette réduction qui est une sorte *d'action à distance "instantanée"*, (est même *plus rapide que la vitesse de la lumière* qui est la vitesse limite du transport d'énergie et d'information d'après la théorie de la relativité), car elle se passe même si les deux mesures sont deux événements E_2, E_3 sans relation de causalité, c'est à dire espacés par un quadri-vecteur de type espace. Voir figure 5.2.2.

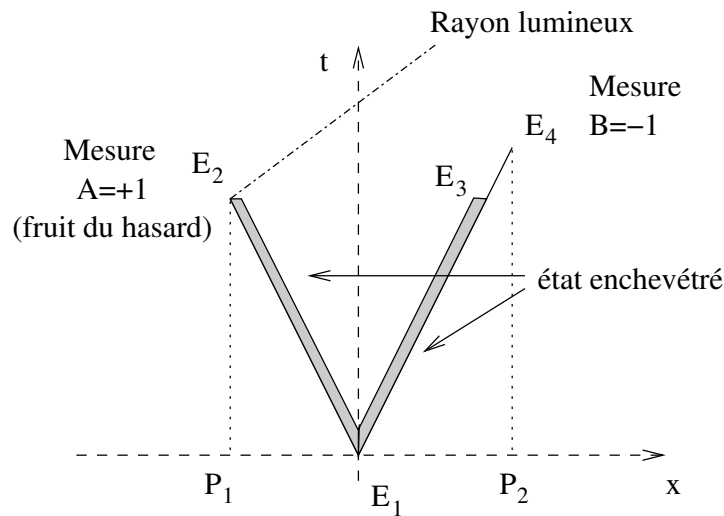


FIGURE 5.2.2 – Schéma dans l'espace temps des événements. E_1 est la création de l'état enchevêtré $|\phi \rangle$ eq.(205) représenté par la ligne grisée. Les particules 1 et 2 se séparent et restent enchevêtrées, jusqu'à ce que le spin de la particule 1 soit mesuré. C'est l'évènement E_2 . Dans cet exemple le physicien P_1 mesure $A = +1$. Au même instant (dans le référentiel x, t du laboratoire?), l'état quantique $|\phi \rangle$ est réduit, et la particule 2 se retrouve dans l'état $|-_z \rangle$. C'est l'évènement E_3 . Cet état est ensuite mesuré par le physicien P_2 , qui observe $B = -1$ (Évènement E_4). La ligne tiret-pointe est le cône de lumière qui représente le trajet le plus rapide (vitesse de la lumière) informant du résultat $A = +1$. Sur ce schéma il ne parvient pas à temps pour expliquer le résultat $B = -1$.

Remarque : Cette action instantanée à distance “plus rapide que la lumière”, **ne permet pas de transmettre de l’information**, et ne contredit pas les principe de la relativité. En effet, P_1 ne choisit pas si le résultat est $A = +1$ ou $A = -1$; il ne peut donc pas transmettre de message à P_2 de cette manière.

Cependant il y a une difficulté très visible sur la figure 5.2.2 : où se situe précisément l’évènement de réduction (E_3)? Il peut être simultané à E_1 , mais la notion de simultanéité dépend du référentiel en relativité. Quel est le référentiel privilégié ici ? La question se pose, bien qu’elle n’a pas d’impact sur le résultat observé. On peut tout de même constater que la théorie quantique et la théorie de la relativité sont inconsistantes entre elles.

Résumé Dans ce paragraphe, nous avons montré que par suite logique du principe de la superposition, la mécanique quantique entraîne des **interactions non locales** : le résultat d’une mesure “ici” dépend de façon instantanée du résultat d’une mesure qui se passe “là-bas”. Or la notion d’évènements instantanés, simultanés n’a pas de sens en théorie de la relativité.

Hubert Reeves dans “Patience dans l’azur” écrit : “Je reprends l’énoncé avec une comparaison pour le lecteur moins familier avec la physique des atomes. A deux messagers, on a donné la consigne suivante : ils devront répondre à une question par oui ou par non. Si le premier répond oui, le second devra répondre non, et vice-versa. Les choses se passent telles que prévues. Il serait raisonnable de supposer qu’ils se sont donné le mot au départ et qu’à chaque instant du trajet chacun savait ce que l’autre allait répondre. Pourtant on montre que tel n’est pas le cas. Aucun des deux n’a choisi avant l’arrivée quelle réponse il allait donner. Comment expliquer que le second connaisse la bonne réponse ?”

5.2.3 Objection de Einstein-Podolsky-Rosen (E.P.R.) sur la non localité (1935)

En 1935, l’objection de ces trois physiciens fut que même si elle ne permet pas de transmettre de l’information, cette action à distance est inacceptable, car non consistente avec la théorie de la relativité qui est locale en espace-temps ; ils étaient partisans d’**une théorie physique locale**.

Ces physiciens suggérèrent que les mêmes résultats expérimentaux peuvent s’interpréter autrement, par une théorie qui serait locale : **dès le départ l’état de spin des deux particules serait décidé**, c’est à dire que l’une ou l’autre des deux situation est déjà engagée : $|+z \rangle_1 \otimes |-z \rangle_2$ ou $|-z \rangle_1 \otimes |+z \rangle_2$ chacune se produisant en moyenne 1 fois sur 2. Le choix de l’une ou l’autre situation est le fruit du hasard, ou résulte d’un mécanisme microscopique déterministe ou non mais inconnu. Il y aurait donc des **variables dynamiques cachées**.

Ces physiciens ont donc ouvert un débat : Quelle interprétation est correcte, la mécanique quantique avec le postulat de la mesure qui est non local, ou une théorie locale à variables cachées ?

Ces deux interprétations seraient-elles équivalentes (compatibles) ?

Le résultat fondamental que nous allons établir ci-dessous est :

La théorie quantique est une théorie non locale. Cela a été confirmé expérimentalement.

5.2.4 Théories locales à variable cachées et inégalités de Bell (1964)

En 1964, J. Bell montre que les deux interprétations précédentes ne sont pas équivalentes et que des expériences pourraient trancher le débat [Bel64]. Les “inégalités de Bell” sont des relations vérifiées par toute théorie locale à variable cachée, et dans certains cas non respectées par le modèle de la mécanique quantique.

A la section suivante, nous présenterons une situation plus simple à expliquer montrant la non localité de la mécanique quantique, appelé “égalité de GHZ”, découverte en 1989. Cependant cette égalité n’a pas été observée expérimentalement.

A cause de l’importance historique de l’inégalité de Bell, et des expériences associées nous établissons une telle inégalité pour dans ce chapitre.

Pour se mettre dans un cas où l’inégalité de Bell est transgressée par la mécanique quantique, supposons que les physiciens P_1 et P_2 mesurent respectivement la composante du spin de la particule 1 (et 2) selon l’axe \vec{a} (et \vec{b}). Voir figure 5.2.3.

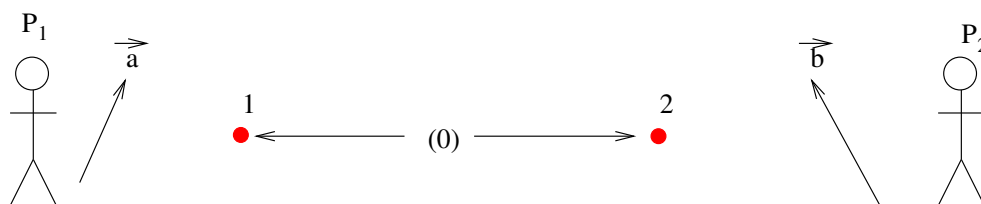


FIGURE 5.2.3 – Mesure de $\hat{E}(\vec{a}, \vec{b}) = \hat{A}(\vec{a}) \hat{B}(\vec{b})$.

On note $\hat{A}(\vec{a}) = (\frac{2}{\hbar}) \hat{S}_{1,\vec{a}}$ et $\hat{B}(\vec{b}) = (\frac{2}{\hbar}) \hat{S}_{2,\vec{b}}$ les observables correspondantes.

Le résultat de leur mesure est $A(\vec{a}) = \pm 1$ et $B(\vec{b}) = \pm 1$.

Considérons l’observable :

$$\hat{E}(\vec{a}, \vec{b}) = \hat{A}(\vec{a}) \hat{B}(\vec{b})$$

La valeur moyenne de cette observable s’obtient expérimentalement en faisant un grand nombre d’expériences successives.

Théorie locale à variable cachée Supposons que une théorie locale à variables cachées soit valide. Pour simplifier les notations mais sans perte de généralité, on note λ “la variable cachée” dont on ne saurait prévoir le comportement, et $p(\lambda) d\lambda$ la probabilité pour que lors d’une expérience, une valeur de l’intervalle $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ soit réalisée.

Le résultat de la mesure de P_1 est une certaine fonction de λ (inconnue) :

$$A(\lambda, \vec{a}) = \pm 1$$

de même pour le résultat de P_2 :

$$B(\lambda, \vec{b}) = \mp 1 = -A(\lambda, \vec{b})$$

Noter que $A(\lambda, \vec{a})$ ne dépend pas de \vec{b} d'après l'hypothèse de localité. En effet le choix de la valeur de \vec{b} se fait localement juste avant la mesure de B et ne peut pas influencer le résultat de A d'après l'hypothèse de localité. (La relation $B(\lambda, \vec{b}) = -A(\lambda, \vec{b})$ vient de ce que les deux résultats sont toujours corrélés).

D'après ce modèle, la valeur moyenne de "l'observable $\hat{E}(\vec{a}, \vec{b})$ " est alors :

$$E_{loc}(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda p(\lambda) A(\lambda, \vec{a}) B(\lambda, \vec{b})$$

Propriété On a l'**inégalité de Bell** : pour tous $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$,

$$\left| E_{loc}(\vec{a}, \vec{b}) - E_{loc}(\vec{a}, \vec{c}) \right| < 1 + E_{loc}(\vec{b}, \vec{c}) \quad (5.2.3)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} E_{loc}(\vec{a}, \vec{b}) - E_{loc}(\vec{a}, \vec{c}) &= \int d\lambda p(\lambda) \left(A(\lambda, \vec{a}) B(\lambda, \vec{b}) - A(\lambda, \vec{a}) B(\lambda, \vec{c}) \right) \\ &= - \int d\lambda p(\lambda) \left(A(\lambda, \vec{a}) A(\lambda, \vec{b}) \right) \left(1 + A(\lambda, \vec{b}) B(\lambda, \vec{c}) \right) \end{aligned}$$

donc $\left| E_{loc}(\vec{a}, \vec{b}) - E_{loc}(\vec{a}, \vec{c}) \right| \leq \int d\lambda p(\lambda) \left| 1 + A(\lambda, \vec{b}) B(\lambda, \vec{c}) \right| = 1 + E_{loc}(\vec{b}, \vec{c})$, car $\int p(\lambda) d\lambda = 1$ et $A = B = \pm 1$ donc $|1 + AB| = (1 + AB)$. □

Remarque : l'inégalité de Bell obtenue dépend du dispositif considéré. En général, on appelle **inégalité de Bell**, l'inégalité obtenue à partir de l'hypothèse de localité.

5.2.5 Violation de l'inégalité par la mécanique quantique (1976)

5.2.5.1 Modèle quantique

en mécanique quantique la valeur moyenne de l'observable $\hat{E}(\vec{a}, \vec{b})$ sur l'état $|\phi\rangle$ eq.(5.2.2) page 205, est :

$$\begin{aligned} E_Q(\vec{a}, \vec{b}) &= \langle \phi | \hat{E}(\vec{a}, \vec{b}) | \phi \rangle = -\cos(\theta) \\ \theta &= \widehat{\vec{a}, \vec{b}} \quad : \text{angle entre } \vec{a} \text{ et } \vec{b} \end{aligned}$$

Démonstration. On peut choisir les vecteurs \vec{a}, \vec{b} dans le plan (z, x) . Montrons que l'état ϕ est invariant par rotation : $\hat{R}_\theta|\phi\rangle = |\phi\rangle$. Posant

$$|\theta\rangle = R_\theta|+_z\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+_z\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-_z\rangle$$

on a :

$$\begin{aligned}\hat{R}_\theta|\phi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\theta\rangle \otimes |\theta + \pi\rangle - |\theta + \pi\rangle \otimes |\theta\rangle) \\ &= \dots = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+_z\rangle \otimes |-_z\rangle - |-_z\rangle \otimes |+_z\rangle) = |\phi\rangle\end{aligned}$$

On peut donc supposer que \vec{a} est selon l'axe z . Alors utilisant $\langle +|S_z|-\rangle = 0$,

$$\begin{aligned}\langle \phi|\hat{E}(\vec{a}, \vec{b})\phi\rangle &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\hbar}\right)^2 (\langle +, -|S_z S_b|+, -\rangle + \langle -, +|S_z S_b|-, +\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\hbar}\right) (\langle -|S_b|-\rangle - \langle +|S_b|+\rangle)\end{aligned}$$

or $S_b = \left(\frac{\hbar}{2}\right) (|\theta\rangle\langle\theta| - |\theta + \pi\rangle\langle\theta + \pi|)$ donc

$$\begin{aligned}\langle \phi|\hat{E}(\vec{a}, \vec{b})\phi\rangle &= \frac{1}{2} (|\langle -|\theta\rangle|^2 - |\langle -|\theta + \pi\rangle|^2 - |\langle +|\theta\rangle|^2 + |\langle +|\theta + \pi\rangle|^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) = -\cos\theta\end{aligned}$$

□

Remarque : comme attendu pour $\vec{a} = \vec{b}$, les deux théories sont en accord :

$$E_Q(\vec{a}, \vec{a}) = E_{loc}(\vec{a}, \vec{a}) = -1.$$

Considérons des directions $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ coplanaires telles que $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$, $(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{3}$, $(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{2\pi}{3}$. Alors

$$\left| E_Q(\vec{a}, \vec{b}) - E_Q(\vec{a}, \vec{c}) \right| = \left| -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right| = \left| -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| = 1$$

$$1 + E_Q(\vec{a}, \vec{c}) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

L'inégalité de Bell (5.2.3) n'est pas vérifiée. On dit qu'il y a "*violation de l'inégalité de Bell par la mécanique quantique*".

Conséquence : **la mécanique quantique est une théorie non locale.**

Exercice :

Fixer $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, et poser $(\vec{b}, \vec{c}) = \alpha$, avec $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ coplanaires donc $(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{2} + \alpha$. Calculer et tracer $|E_Q(\vec{a}, \vec{b}) - E_Q(\vec{a}, \vec{c})|$ et $1 + E_Q(\vec{a}, \vec{c})$ en fonction de α .

Solution :

$$|E_Q(\vec{a}, \vec{b}) - E_Q(\vec{a}, \vec{c})| = \left| -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \right| = |\sin(\alpha)|$$

et $1 + E_Q(\vec{a}, \vec{c}) = 1 - \cos(\alpha)$. Voir figure 5.2.4. Pour $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, on a $\sin \alpha > 1 - \cos \alpha$ donc violation de l'inégalité de Bell.

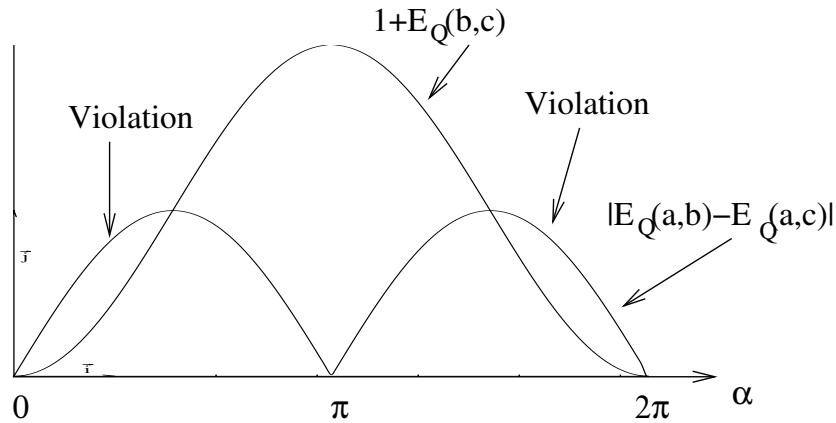


FIGURE 5.2.4 – Violation d’une inégalité de Bell par la mécanique quantique.

5.2.5.2 Non localité de la mécanique quantique, confirmation expérimentale

En 1976, les expériences de Alain Aspect utilisant des photons polarisés, (au lieu de particules avec spin 1/2) montrent la violation d’inégalités de Bell, et sont donc en faveur de la mécanique quantique [Asp76, ADR82]. Ainsi *l’interprétation par une théorie locale à variable cachée n’est pas possible. La non localité de la mécanique quantique est observée expérimentalement.*

Les résultats de l’expérience sont en parfait accord avec la mécanique quantique.

Des expériences plus récentes ont été faites où la distance entre les deux mesures est de l’ordre de 10 km. Elles sont toujours en parfait accord avec la mécanique quantique.

Une expérience peut être faite en T.P. à l’université, voir [DM02].

5.2.6 Égalité de G.H.Z. (1989)

Nous présentons ici un autre protocole expérimental qui **démontre que la théorie quantique est non locale.**

Références : article de Laloë (sur la page web du cours), page 17, et *Greenberger, Horne, Zeilinger, Am. Jour of Phys. vol 58, p1131, 1990.*

Comme auparavant, on note $|+\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ et $|-\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ les deux états de base d'un spin 1/2. On considère 3 particules de spin 1/2. On ne décrit que les états de spin et non pas leur état spatial. L'espace quantique est donc de dimension 6, c'est :

$$\mathcal{H} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes 3} = \mathbb{C}^6$$

Les trois particules sont séparées spatialement, et chacune est envoyée vers un détecteur capable d'observer son état de spin.

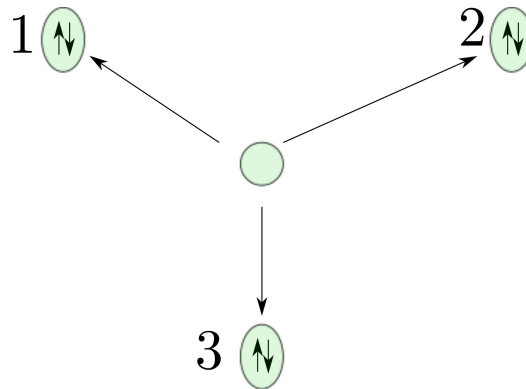


FIGURE 5.2.5 – . Schéma de l'état $\psi = |+++ \rangle - |-- \rangle$ à trois particules enchevêtré.

Supposons que les 3 particules soient dans l'état enchevêtré de spin :

$$\psi = |+++ \rangle - |-- \rangle$$

Rappel sur le processus de la mesure d'après la théorie quantique : si un physicien situé près de la particule 1 mesure l'état de son spin $\sigma_z^{(1)}$ par exemple, il observera $\sigma_z^{(1)} = \pm 1$ avec des probabilités respectives

$$\text{Proba} (\sigma_z^{(1)} = 1) = \frac{\|\mathcal{P}_{\sigma_z^{(1)}=1}(\psi)\|^2}{\|\psi\|^2} = \frac{\| |+++ \rangle \|^2}{\|\psi\|^2} = \frac{1}{2}, \quad \text{Proba} (\sigma_z^{(1)} = -1) = \frac{1}{2},$$

ou $\mathcal{P}_{\sigma_z^{(1)}}$ est le projecteur sur l'espace propre $\sigma_z^{(1)}$. Si le résultat est $\sigma_z^{(1)} = 1$ par exemple, alors l'état total de spin des trois particules juste après la mesure est "réduit" en:

$$\psi' = \mathcal{P}_{\sigma_z^{(1)}=1}(\psi) = |+++ \rangle$$

Cela signifie une modification "instantanée, non locale" de l'état de spin des particules 2 et 3. C'est le "collapse" de l'état quantique.

La question posée par Einstein-Podolsky-Rosen (EPR 1935) est (à nouveau) de savoir si cette modification non locale est réelle ou non. Ce résultat pourrait-t-il s'expliquer par une théorie locale non encore découverte ? c'est à dire une théorie qui montrerait par exemple que l'état des 3 particules $|+++ \rangle$ ou $|- - - \rangle$ est décidé en fait dès leur séparation et que la corrélation existante n'est qu'un effet de mémoire. Autrement dit que le phénomène de collapse n'est pas réel mais est seulement dû au formalisme de la mécanique quantique que l'on utilise.

5.2.6.1 Description avec la théorie quantique

On considère l'observable

$$\hat{A}_{xyy} := \sigma_x^{(1)} \sigma_y^{(2)} \sigma_y^{(3)}$$

et

$$\hat{B} := \sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} \sigma_x^{(3)}$$

où $\sigma_y^{(i)}$ est une matrice de Pauli agissant sur la particule i .

Rappel : $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ont des valeurs propres ± 1 . Observer que les matrices avec des indices (i) différents commutent entre elles car elles agissent sur des particules différentes. Le spectre de \hat{A}_{xyy} et de \hat{B} est donc ± 1 .

Etablissons d'abord le résultat suivant concernant ces opérateurs :

Lemme 5.2.1. *L'état $\psi = |+++ \rangle - |-- - \rangle$ est vecteur propre de l'opérateur \hat{A}_{xyy} de valeur propre $+1$, c'est à dire :*

$$\hat{A}_{xyy} \psi = \psi$$

et est vecteur propre de l'opérateur \hat{B} avec la valeur propre (-1) , c'est à dire :

$$\hat{B} \psi = -\psi$$

Avant de prouver ce Lemme, discutons la signification physique¹ :

1.

Remarque 5.2.2. On peut montrer cependant que aucun des termes individuels n'a une valeur sûre. Par exemple $\text{Proba}_\psi(\sigma_x^{(1)} = 1) = 0.5$, $\text{Proba}_\psi(\sigma_x^{(1)} = -1) = 0.5$.

Démonstration. On $|+_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+_z\rangle + |-_z\rangle)$, et $|-_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+_z\rangle - |-_z\rangle)$ donc $|+_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+_x\rangle + |-_x\rangle)$, $|-_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+_x\rangle - |-_x\rangle)$. Donc

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|+_x +_z +_z\rangle + |-_x +_z +_z\rangle - |+_x -_z -_z\rangle + |-_x -_z -_z\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+_x\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|+_z +_z\rangle - |-_z -_z\rangle) + |-_x\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|+_z +_z\rangle + |-_z -_z\rangle) \right) \end{aligned}$$

Proposition 5.2.3. Une mesure des l'observables A_{xyy} ou A_{yxy} ou A_{yyx} dans l'état ψ donne avec certitude le résultat

$$A_{xyy} = 1, \quad A_{yxy} = 1, \quad A_{yyx} = 1. \quad (5.2.4)$$

(car par symétrie le numéro de la particule n'importe pas). De même une mesure de B dans l'état ψ donne avec certitude

$$B = -1 \quad (5.2.5)$$

Pour illustrer ce que signifie la proposition précédente, on imagine que un ensemble de 3 particules est envoyé régulièrement dans l'état ψ comme sur la figure 5.2.5. L'expérimentateur 1 mesure $\sigma_x^{(1)}$, l'exp.. 2 mesure $\sigma_y^{(2)}$ et l'exp.. 2 mesure $\sigma_y^{(3)}$. Ils collectent leur résultats et obtiennent à la fin un tableau de la forme :

	$\sigma_x^{(1)}$	$\sigma_y^{(2)}$	$\sigma_y^{(3)}$	$A_{xyy} = \sigma_x^{(1)} \sigma_y^{(2)} \sigma_y^{(3)}$
Mesure 1	1	-1	-1	1
Mesure 2	-1	1	-1	1
Mesure 3	-1	-1	1	1
Mesure 4	1	1	1	1
⋮				

De même dans une autre série d'expérience ils mesures $\sigma_y^{(1)}, \sigma_x^{(2)}, \sigma_y^{(3)}$ puis $\sigma_y^{(1)}, \sigma_y^{(2)}, \sigma_x^{(3)}$ puis $\sigma_x^{(1)}, \sigma_x^{(2)}, \sigma_x^{(3)}$ et déduisent en faisant le produit de leur résultats, A_{yxy}, A_{yyx} et B . La théorie quantique prédit que à chaque mesure les valeurs obtenues sont $A_{xyy} = A_{yxy} = A_{yyx} = 1$ et $B = -1$.

Démonstration. du Lemme. On a

$$\sigma_x|+\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |-\rangle, \quad \sigma_x|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |+\rangle.$$

$$\sigma_y|+\rangle = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i|-\rangle, \quad \sigma_y|-\rangle = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -i|+\rangle.$$

donc

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)}\psi &= (|-\rangle|+\rangle|+\rangle - |+\rangle|-\rangle|-\rangle) \\ \sigma_y^{(2)}(\sigma_x^{(1)}\psi) &= i(|-\rangle|-\rangle|+\rangle + i|+\rangle|+\rangle|-\rangle) \end{aligned}$$

et finalement

donc

$$\text{Proba}_\psi(\sigma_x^{(1)} = 1) = \frac{\|\text{Proj}_{+x}(\psi)\|}{\|\psi\|^2} = \frac{1}{2}$$

etc.

□

$$\hat{A}_{xyy}\psi = \sigma_y^{(3)} (\sigma_y^{(2)} \sigma_x^{(1)} \psi) = i^2 (|---\rangle - |+++ \rangle) = \psi$$

Pour $\hat{B}\psi$ on a

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} \psi &= | - ++ \rangle - | + -- \rangle \\ \sigma_x^{(2)} (\sigma_x^{(1)} \psi) &= | - - + \rangle - | + + - \rangle \\ \hat{B}\psi &= \sigma_x^{(3)} (\sigma_x^{(2)} \sigma_x^{(1)} \psi) = | - -- \rangle - | + ++ \rangle = -\psi \end{aligned}$$

□

5.2.6.2 Etude (non quantique) avec une hypothèse de localité

On va maintenant essayer de prédire la valeur du résultat de la mesure de B avec **l'hypothèse d'une théorie locale**. On introduit des variables aléatoires $\sigma_x^{(i)}, \sigma_y^{(i)}, \dots$ prenant les valeurs ± 1 et représentant des résultats de mesure où $i = 1, 2, 3$ est numéro des particules. L'**hypothèse de localité** implique que lors d'une mesure, le résultat $\sigma_x^{(1)}$ ne dépend pas de $\sigma^{(2)}, \sigma^{(3)}$ car les particules sont distantes les une des autres (etc pour tous les indices).

Supposons à priori que l'on a le résultat (5.2.4) c'est à dire :

$$A_{xyy} = \sigma_x^{(1)} \sigma_y^{(2)} \sigma_y^{(3)} = +1, \quad A_{yxy} = \sigma_y^{(1)} \sigma_x^{(2)} \sigma_y^{(3)} = +1, \quad A_{yyx} = \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \sigma_x^{(3)} = +1,$$

alors on obtient d'une part que $A_{xyy}A_{yxy}A_{yyx} = 1$ et d'autre part, utilisant $(\sigma^{(i)})^2 = +1$, $\forall i$, on obtient

$$\begin{aligned} A_{xyy}A_{yxy}A_{yyx} &= (\sigma_x^{(1)} \sigma_y^{(2)} \sigma_y^{(3)}) (\sigma_y^{(1)} \sigma_x^{(2)} \sigma_y^{(3)}) (\sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \sigma_x^{(3)}) \\ &= \sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} \sigma_x^{(3)} = B \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Conclusion :

$$B = 1.$$

qui est en contradiction claire avec le résultat (5.2.5) prédit par la théorie quantique.

Conclusion : la théorie quantique n'est pas une théorie locale.

Cependant il n'y a pas d'expérience à ce jour qui vérifie (5.2.5).

Remarque 5.2.4. Insistons sur l'utilisation de l'hypothèse de localité. Dans l'équation (5.2.6), l'hypothèse de localité est introduite en supposant par exemple que le résultat $\sigma_y^{(2)}$ est le même dans la mesure collective de A_{xyy} et de A_{yyx} . En effet ce qui diffère entre ces deux mesures est l'orientation des appareils de détection des particules (1) et (3), et ce choix ne peut pas influencer le résultat de la mesure sur (2), d'après l'hypothèse de localité. Cela nous a alors permis de simplifier le produit en utilisant $(\sigma_y^{(2)})^2 = 1$. Autrement dit, dans le cadre de la théorie quantique (non locale), le résultat $\sigma_y^{(2)}$ dépend du choix des orientations des appareils (1) et (3) qui peuvent pourtant être situés très loin de (2)! Dans une expérience les physiciens prennent soin de faire ces choix au dernier moment, de façon à être sûr qu'aucun signal causal (i.e. avançant à une vitesse inférieure à $c = 3.10^8 m/s$) puisse informer (2) de ces choix. Cela est délicat et rend l'expérience difficile à réaliser.

5.3 Plusieurs particules identiques

Dans le cas de plusieurs particules *identiques*, une différence importante apparaît par rapport au cas de plusieurs particules *discernables* décrit dans la section 5.1.

5.3.1 Deux particules identiques

5.3.1.1 Particules de spins demi-entier, les Fermions

L'électron est une particule élémentaire de spin 1/2. Si deux électrons sont respectivement dans les états $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$, on pourrait penser que l'ensemble est décrit par le vecteur $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Déjà on peut remarquer que expérimentalement, il serait impossible de distinguer l'état $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ de l'état $|\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle$, ou de toute combinaison linéaire de ces états, puisque l'échange des deux électrons passerait inaperçue.

Principe : L'expérience montre que dans la nature, chaque paire de particule identique élémentaire de spin 1/2 (ou demi-entier 3/2, 5/2, 7/2) est dans un état de la forme dite **antisymétrique**, notée :

$$|\psi_1\rangle \wedge |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle - |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle) \quad (5.3.1)$$

ou toute combinaison linéaire (i.e. superposition) de tels états antisymétrique. Les autres combinaisons sont donc interdites.

Remarques :

- Les particules élémentaires de spin 1/2 soumises à ce principe s'appellent des **Fermions**. Ce sont les quarks, électrons, neutrinos, leptons, et particules analogues d'antimatière ...)
- Ce principe appelé **principe spin-statistique** se justifie en théorie quantique relativiste. Mais il manque actuellement une explication simple de cette correspondance.
- (*) Le symbole “ \wedge ” s'appelle le **produit extérieur**. L'espace des états quantique décrivant deux électrons contient donc les vecteurs de la forme (5.3.1). C'est un espace vectoriel, qui est le produit extérieur des espaces à un électron (ou l'antisymétrisé), et noté

$$\mathcal{H}_{total} = \mathcal{H}_e \wedge \mathcal{H}_e = \hat{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_e \otimes \mathcal{H}_e)$$

- le facteur $1/\sqrt{2}$ est pour la **normalisation** dans le cas où $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ sont chacun orthogonaux et normalisés. En effet dans ce cas

$$\| |\psi_1\rangle \wedge |\psi_2\rangle \|^2 = \frac{1}{2} (2 \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle \langle \psi_2 | \psi_2 \rangle) = 1$$

- On a

$$(|\psi_1 \rangle \wedge |\psi_2 \rangle) = -(|\psi_2 \rangle \wedge |\psi_1 \rangle)$$

- Conséquence de l'anti-symétrie : *deux électrons ne peuvent être dans le même état quantique*. En effet

$$|\psi \rangle \wedge |\psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi \rangle \otimes |\psi \rangle - |\psi \rangle \otimes |\psi \rangle) = 0$$

qui est le vecteur nul et ne peut donc pas décrire un état physique. C'est le **principe d'exclusion de Pauli** formulé en 1925 pour expliquer la structure des atome.

- (*) Cette anti-symétrie se reflète au niveau de la fonction d'onde des deux particules. Si les deux particules ont le même état de spin, disons $|+\rangle \in \mathcal{H}_{spin}$, et dans des états spatial différents, $|\varphi_1 \rangle, |\varphi_2 \rangle \in \mathcal{H}_{spatial}$ posons :

$$\begin{aligned} |\psi_1 \rangle &= |\varphi_1 \rangle \otimes |+\rangle \\ |\psi_2 \rangle &= |\varphi_2 \rangle \otimes |+\rangle \end{aligned}$$

alors

$$|\psi_1 \rangle \wedge |\psi_2 \rangle = (|\varphi_1 \rangle \wedge |\varphi_2 \rangle) \otimes (|+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2)$$

Noter donc que la partie spatiale est antisymétrique, alors que la partie spin est symétrique.

La fonction d'onde (spinorielle) est défini par :

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) &= (\langle x_1 | \otimes \langle x_2 |) (|\psi_1 \rangle \wedge |\psi_2 \rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle x_1 | \varphi_1 \rangle \otimes \langle x_2 | \varphi_2 \rangle - \langle x_1 | \varphi_2 \rangle \otimes \langle x_2 | \varphi_1 \rangle) \otimes (|+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1(\vec{x}_1) \varphi_2(\vec{x}_2) - \varphi_2(\vec{x}_1) \varphi_1(\vec{x}_2)) \otimes (|+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2) \end{aligned}$$

qui vérifie donc :

$$\psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1) = -\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

- (*) Si au contraire les deux particules ont des états de spin différents, elles peuvent être dans le même état spatial. Prenons l'exemple des deux électrons de l'atome d'hélium, qui sont dans l'orbitale spatiale $|S \rangle \in \mathcal{H}_{spatial}$, et ont des états de spins différents, disons $|+\rangle, |-\rangle \in \mathcal{H}_{spin}$

Alors $|\psi_1 \rangle = |S \rangle \otimes |+\rangle, |\psi_2 \rangle = |S \rangle \otimes |-\rangle$, et

$$\begin{aligned} |\psi_1 \rangle \wedge |\psi_2 \rangle &= (|S \rangle_1 \otimes |S \rangle_2) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 - |-\rangle_1 \otimes |+\rangle_2) \\ &= (|S \rangle_1 \otimes |S \rangle_2) \otimes (|+\rangle \wedge |-\rangle) \end{aligned}$$

Cette fois ci, la partie spatiale est symétrique, alors que la partie spin est anti-symétrique.

- En particulier, deux particules ayant le même état de spin, ne peuvent être au même endroit \vec{x} , car d'après ci-dessus,

$$\psi(\vec{x}, \vec{x}) = -\psi(\vec{x}, \vec{x}) \quad \text{donc} \quad \psi(\vec{x}, \vec{x}) = 0$$

Ce principe d'exclusion agit donc comme une répulsion, bien qu'il ne s'agisse pas d'une force à proprement parler (il n'y a pas de particule qui transmet la force, comme le photon transmet la force électromagnétique).

- Les **particules composées** d'un nombre impair de fermions sont approximativement des fermions en régime de faible concentration. Par exemple le neutron est composé de 3 quarks (u, d, d) est approximativement un fermion (de même pour le proton).
- Ce principe d'antisymétrie des fermions a des conséquences observables très claires en physique. Elle explique :
 - pour les neutrons et protons, la structure des **noyaux nucléaires**.
 - pour les électrons, les règles de remplissage des niveaux d'énergie électronique des atomes ou molécules.
 - le remplissage des états électroniques dans les solides cristallins. Ce remplissage est à l'origine des propriétés isolantes ou conductrices de ces matériaux, et finalement de la "solidité" et "impénétrabilité" de la matière solide à notre échelle.
 - Elle explique la taille, et les propriétés des étoiles "naines blanches", où les électrons sont soumis à ce principe d'exclusion (et de même la taille des étoiles à neutron).

5.3.1.2 Particules de spins entier, les Bosons

Principe : L'expérience montre que dans la nature, chaque paire de particule identique élémentaire de spin entier $0, 1, 2, \dots$ est dans un état de la forme dite **symétrique**, notée :

$$|\psi_1 \rangle \vee |\psi_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1 \rangle \otimes |\psi_2 \rangle + |\psi_2 \rangle \otimes |\psi_1 \rangle) \quad (5.3.2)$$

ou toute combinaison linéaire (i.e. superposition) de tels états symétriques. Les autres combinaisons sont donc interdites.

Remarques

- Les particules soumises à ce principe sont appelées des **Bosons**. C'est le cas du photon, des gluons, et autres particules de Jauge Z, W et Boson de Higgs, ...
- C'est aussi le cas pour les particules composées de spin entier (contenant un nombre pair de fermions) mais seulement dans l'approximation des faibles concentration. Par exemple les mésons $K, \pi = (q, \bar{q})$ (contenant un nombre pair de quarks), les atomes et molécules de spin entier comme $He_4 = (p, p, n, n, e, e)$, contenant un nombre pair de protons, neutrons et électrons, atome hydrogène $H = (p, e)$, noyau

deuterium $d = (p, n)$. référence : [MR90, §2.1.6]. Il est curieux que dans [CBF]p.1387 ce problème ne soit pas abordé.

- Cette correspondance appelée **spin-statistique** se justifie en théorie quantique relativiste.
- L'espace total des combinaisons linéaires d'états symétriques est noté :

$$\mathcal{H}_{total} = \mathcal{H} \vee \mathcal{H} = \hat{\mathcal{S}}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$$

- Si les deux particules ont le même état de spin, disons $|+\rangle \in \mathcal{H}_{spin}$, la fonction d'onde des deux particules est symétrique :

$$\psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1) = \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

Il n'y a pas de propriété d'exclusion comme dans le cas des fermions. Au contraire, il est "favorable" que deux particules soient dans le même état, ou au même endroit \vec{x} . Cela amène au phénomène de **condensation de Bose** à basse température (voir Cours de physique Statistique à ce sujet, [DGLR89]).

- Un **faisceau laser** contient un grand nombre de photons ($n \simeq 10^{20}$) qui sont tous (idéalement) dans le même état quantique, correspondant à un mode d'onde électromagnétique précis. Cela est possible car le photon est un boson.

5.3.2 Plusieurs particules identiques

Nous présentons le formalisme pour décrire l'état quantique de N fermions ou N bosons. Notons π un opérateur qui permute les N états. Par exemple pour $N = 3$:

$$\pi(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle) = (|\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle \otimes |\psi_3\rangle)$$

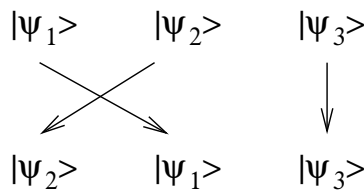


FIGURE 5.3.1 – Une permutation π de trois états, de signature $\sigma(\pi) = (-1)$.

Il y a $N!$ façons de permuter N états. Les opérateurs π correspondants forment le **groupe symétrique** S_N (voir [Bac]).

La **signature d'une permutation** notée $\sigma(\pi)$, vaut $(+1)$ ou (-1) selon que le nombre de croisements est pair ou impair dans le diagramme de correspondance (figure 5.3.1).

5.3.2.1 Cas des bosons

Un état de N **bosons** est une combinaison linéaire (i.e. superposition) de toutes les permutations possibles, de la forme :

$$|\psi_1 \rangle \vee |\psi_2 \rangle \vee \dots \vee |\psi_N \rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\sum_{\pi \in S_N} \pi (|\psi_1 \rangle \otimes |\psi_2 \rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N \rangle) \right)$$

appelé **état totalement symétrique**.

Par exemple pour $N = 2$, on retrouve (5.3.2), et pour $N = 3$, cela donne :

$$|\psi_1 \rangle \vee |\psi_2 \rangle \vee |\psi_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|\psi_1 \psi_2 \psi_3 \rangle + |\psi_1 \psi_3 \psi_2 \rangle + |\psi_3 \psi_2 \psi_1 \rangle + |\psi_2 \psi_1 \psi_3 \rangle + |\psi_3 \psi_1 \psi_2 \rangle + |\psi_2 \psi_3 \psi_1 \rangle)$$

On note aussi l'opérateur **symétriseur** :

$$\hat{S} := \frac{1}{N!} \sum_{\pi \in S_N} \pi \quad (5.3.3)$$

qui agit sur l'espace $\mathcal{H}^{\otimes N} = \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}$. (c'est un projecteur orthogonal, voir proposition 5.3.1 plus bas pour l'explication du facteur $1/N!$). Ainsi :

$$|\psi_1 \rangle \vee |\psi_2 \rangle \vee \dots \vee |\psi_N \rangle = \sqrt{N!} \hat{S} (|\psi_1 \rangle \otimes |\psi_2 \rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N \rangle) \quad (5.3.4)$$

5.3.2.2 Cas des fermions

Un état de N **fermions** est une combinaison linéaire de toutes les permutations possibles affectée de leur signature, de la forme :

$$|\psi_1 \rangle \wedge |\psi_2 \rangle \wedge \dots \wedge |\psi_N \rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\sum_{\pi \in S_N} \sigma(\pi) \pi (|\psi_1 \rangle \otimes |\psi_2 \rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N \rangle) \right)$$

appelé **état totalement antisymétrique**.

Par exemple pour $N = 2$, on retrouve (5.3.1), et pour $N = 3$, cela donne :

$$|\psi_1 \rangle \wedge |\psi_2 \rangle \wedge |\psi_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|\psi_1 \psi_2 \psi_3 \rangle - |\psi_1 \psi_3 \psi_2 \rangle - |\psi_3 \psi_2 \psi_1 \rangle - |\psi_2 \psi_1 \psi_3 \rangle + |\psi_3 \psi_1 \psi_2 \rangle + |\psi_2 \psi_3 \psi_1 \rangle)$$

On note aussi l'opérateur **anti-symétriseur** :

$$\hat{A} := \frac{1}{N!} \sum_{\pi \in S_N} \sigma(\pi) \pi \quad (5.3.5)$$

qui agit sur l'espace $\mathcal{H}^{\otimes N} = \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}$. Ainsi :

$$|\psi_1 \rangle \wedge |\psi_2 \rangle \wedge \dots \wedge |\psi_N \rangle = \sqrt{N!} \hat{A} (|\psi_1 \rangle \otimes |\psi_2 \rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N \rangle)$$

Propriété : Si π est un opérateur de permutation, alors pour un état de N bosons :

$$\pi (|\psi_1 \rangle \vee |\psi_2 \rangle \vee \dots \vee |\psi_N \rangle) = + (|\psi_1 \rangle \vee |\psi_2 \rangle \vee \dots \vee |\psi_N \rangle)$$

et pour un état de N fermions :

$$\pi (|\psi_1 \rangle \wedge |\psi_2 \rangle \wedge \dots \wedge |\psi_N \rangle) = \sigma(\pi) (|\psi_1 \rangle \wedge |\psi_2 \rangle \wedge \dots \wedge |\psi_N \rangle)$$

par exemple pour une **transposition**, qui est une permutation échangeant seulement deux particules, on a $\sigma(\pi) = -1$.

Ainsi les états à N bosons sont des vecteurs propres des opérateurs de transpositions, avec la valeur propre $(+1)$. Et les états à N fermions, sont des vecteurs propres des opérateurs de transpositions, avec la valeur propre (-1) .

Démonstration. ([CBF] Cohen p1379) montrons que $\pi \hat{S} = \hat{S}$ et $\pi \hat{A} = \sigma(\pi) \hat{A}$:

$$\pi \hat{S} = \frac{1}{N!} \sum_{\pi' \in S_N} \pi \pi' = \frac{1}{N!} \sum_{\pi'' = \pi \pi' \in S_N} \pi'' = \hat{S}$$

où on a effectué le changement de variable $\pi'' = \pi \pi'$, et utilisé le fait que $\pi(S_N) = S_N$. De même :

$$\pi \hat{A} = \frac{1}{N!} \sum_{\pi' \in S_N} \sigma(\pi') \pi \pi' = \frac{1}{N!} \sum_{\pi'' \in S_N} \sigma(\pi^{-1} \pi'') \pi'' = \sigma(\pi) \frac{1}{N!} \sum_{\pi'' \in S_N} \sigma(\pi'') \pi'' = \sigma(\pi) \hat{A}$$

où on a utilisé le fait que $\sigma(\pi^{-1} \pi'') = \sigma(\pi^{-1}) \sigma(\pi'')$ (morphisme de groupes) et donc $\sigma(\pi^{-1}) = \sigma(\pi)$. □

Exercice Considérons un électron (fermion) qui peut être dans M états distincts, $|e_1 \rangle, |e_2 \rangle, \dots, |e_M \rangle$. L'espace de Hilbert \mathcal{H}_1 à un électron correspondant est donc de dimension M .

1. D'abord dans le cas simple $M = 3$, supposons qu'il y a un deuxième électron. Donner alors une base de l'espace à deux électrons $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 \wedge \mathcal{H}_1$, et déduire sa dimension.
2. Donner une base de \mathcal{H}_2 et sa dimension, pour M quelconque.
3. Généraliser, pour N électrons, donner une base de \mathcal{H}_N et sa dimension, pour N et M quelconques.

4. Même question pour des bosons.

Proposition 5.3.1. Notons $\mathcal{H}^{\otimes N} := \underbrace{\mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}}_N$ l'espace à N particules "discernables"

(sans symétrie). Considérons les opérateurs linéaires de symétrisation $\hat{\mathcal{S}} : \mathcal{H}^{\otimes N} \rightarrow \mathcal{H}^{\otimes N}$ défini en (5.3.3) et $\hat{\mathcal{A}} : \mathcal{H}^{\otimes N} \rightarrow \mathcal{H}^{\otimes N}$, défini en (5.3.5). Alors

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{S}}^2 &= \hat{\mathcal{S}}, & \hat{\mathcal{S}}^+ &= \hat{\mathcal{S}} \\ \hat{\mathcal{A}}^2 &= \hat{\mathcal{A}}, & \hat{\mathcal{A}}^+ &= \hat{\mathcal{A}},\end{aligned}$$

qui signifie que $\hat{\mathcal{S}}$ et $\hat{\mathcal{A}}$ sont des projecteurs orthogonaux sur les sous espaces respectivement des états totalement symétriques (ou "**espace bosonique**") $\hat{\mathcal{S}}(\mathcal{H}^{\otimes N})$ et antisymétriques (ou "**espace fermionique**") $\hat{\mathcal{A}}(\mathcal{H}^{\otimes N})$. De plus

$$\text{si } N \geq 2 \text{ alors } \hat{\mathcal{S}}\hat{\mathcal{A}} = 0,$$

$$\text{si } N = 2, \text{ alors } \hat{\mathcal{S}} + \hat{\mathcal{A}} = \text{Id}.$$

Remarque 5.3.2.

- A propos du facteur $\sqrt{N!}$: si les vecteurs $\psi_j \in \mathcal{H}$ sont normalisés alors $\Psi := \psi_1 \otimes \psi_2 \dots \otimes \psi_N \in \mathcal{H}^{\otimes N}$ est normalisé, $\|\Psi\| = 1$. Par contre $\hat{\mathcal{S}}\Psi$ est symétrique mais pas normalisé (un projecteur orthogonal ne peut que diminuer la norme du vecteur) :

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathcal{S}}\Psi\|^2 &= \langle \hat{\mathcal{S}}\Psi, \hat{\mathcal{S}}\Psi \rangle = \langle \Psi, \hat{\mathcal{S}}^2\Psi \rangle \\ &= \langle \Psi, \hat{\mathcal{S}}\Psi \rangle = \frac{1}{N!} \sum_{\pi \in S_N} \langle \Psi, \pi\Psi \rangle \\ &= \frac{1}{N!} \|\Psi\|^2 = \frac{1}{N!}.\end{aligned}$$

On a utilisé que $\langle \Psi, \pi\Psi \rangle = 0$ si $\pi \neq \text{Id}$. Ainsi

$$\|\sqrt{N}\hat{\mathcal{S}}\Psi\| = 1$$

et le vecteur symétrique (5.3.4) est normalisé. Noter cependant que $\Psi := \psi_1 \otimes \psi_2 \dots \otimes \psi_N \in \mathcal{H}^{\otimes N}$ est un vecteur très particulier appelé "état produit". En général il est plus "naturel" de considérer l'opérateur $\hat{\mathcal{S}}$ (qui est un projecteur) plutôt que $\sqrt{N}\hat{\mathcal{S}}$.

- L'étude des représentations du groupe de permutation S_N et l'utilisation des tableaux de Young permet de généraliser ces résultats.

Démonstration. On a $\hat{\mathcal{A}} := \frac{1}{N!} \sum_{\pi \in S_N} \sigma(\pi)\pi$. Donc

$$\hat{\mathcal{A}}^2 = \frac{1}{(N!)^2} \sum_{\pi, \pi' \in S_N} \sigma(\pi)\sigma(\pi')\pi \circ \pi' = \frac{1}{(N!)^2} \sum_{\pi, \pi' \in S_N} \sigma(\pi \circ \pi')\pi \circ \pi'$$

car $\sigma : S_N \rightarrow \{-1, 1\}$ est un morphisme de groupe. Posons $\pi'' = \pi \circ \pi'$ et faisons le changement de variable $(\pi, \pi') \rightarrow (\pi, \pi'')$ avec $\pi' = \pi^{-1} \circ \pi''$. On a

$$\hat{\mathcal{A}}^2 = \frac{1}{(N!)^2} \sum_{\pi, \pi'' \in S_N} \sigma(\pi'')\pi'' = \frac{1}{N!} \left(\sum_{\pi \in S_N} 1 \right) \hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{A}}$$

car il y a $N!$ éléments dans S_N donc $(\sum_{\pi \in S_N} 1) = N!$. On a $\pi^+ = \pi$ donc $\hat{\mathcal{A}}^+ = \hat{\mathcal{A}}$. De même on montre que $\hat{\mathcal{S}}^2 = \hat{\mathcal{S}}$ et $\hat{\mathcal{S}}^+ = \hat{\mathcal{S}}$. \square

5.3.2.3 Fonction d'onde à plusieurs particules, Déterminant de Slater.

@@

5.4 Aperçu sur les particules élémentaires et forces élémentaires (*)

Nous donnons cet aperçu très succinct, mais incontournable, car la mécanique quantique s'applique avant tout aux particules élémentaires et à ses composés.

La théorie actuelle en accord avec les expériences (le "modèle standard") date des années 1970-80.

Référence : http://public.web.cern.ch/Public/SCIENCE/TutorialWelcome_fr.html,
<http://www-pdg.lbl.gov>.

5.4.1 Liste des particules élémentaires

5.4.1.1 La matière

6 quarks

			charge électrique (en e)
"up" u	"charm" c	"Top" t	+2/3
"down" d	"Strange" s	"Beauty or Bottom" b	-1/3

ces quarks n'existent que par groupes de deux ($q\bar{q}$) ou trois (qqq), où q dénote un quark, et \bar{q} dénote un anti-quark. Ce phénomène s'appelle **le confinement** ; c'est un fait expérimental pas entièrement compris au niveau théorique.

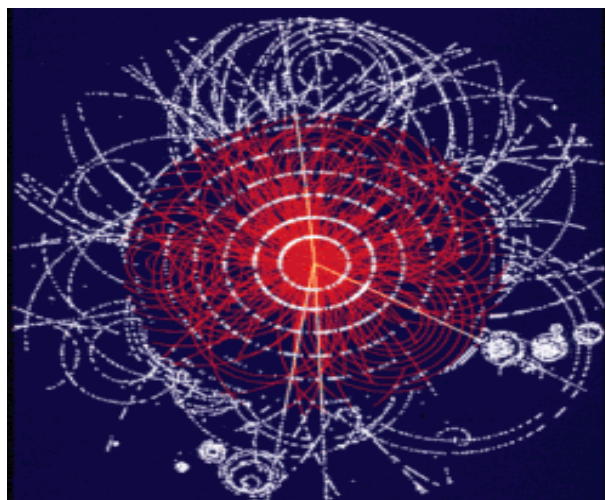


FIGURE 5.4.1 – Trajectoires de particules après une collision au CERN.

6 Leptons On indique la masse en MeV/c^2 .

			charge électrique (en e)
électron : e (0.5)	Muon : μ (105)	Tau : τ (1777)	+1
Neutrino électronique ν_e	Neutrino Muonique ν_μ	Neutrino Tau ν_τ	0

5.4.1.2 L'antimatière

Chaque particule a sa particule "image" d'anti-matière. Il y a donc 6 antiquarks, et 6 anti-leptons, de **même masse** que leur image, de **charge électrique opposée**, notés avec une barre. Exemple : $e^+ = \bar{e}^-$ est l'anti-électron, aussi appelé le positron.

Remarque : une particule de matière rencontrant une particule d'anti-matière peut s'annihiler et donner de l'énergie sous forme de rayonnement :

$$matiere + antimatiere \rightarrow energie$$

Ce processus a été très important au début de l'univers. Après une importante phase d'annihilation mutuelle, il est resté de la matière car elle était en excédent de 1%.

5.4.1.3 Les bosons de Jauge

Ce sont des particules qui transmettent les forces élémentaires.

- Le **photon** γ , de masse nulle, transmet la force électromagnétique entre les particules ayant une charge électrique.
- 8 **gluons** g , de masse nulle, transmettent la force nucléaire forte entre les quarks.

- Les **bosons W et Z** : W_0, W_+, W_- de masse $m = 80 \text{ GeV}/c^2$, et Z_0 de masse $m = 91 \text{ GeV}/c^2$, transmettent la force nucléaire faible entre les particules de matière et d'anti-matière. (quarks et leptons).
- Le boson de Higgs $m = 125 \text{ GeV}/c^2$.

Remarques :

- Les neutrinos ne sont sensibles que à la force nucléaire faible, et n'interagissent donc que très peu. Ils peuvent traverser la Terre facilement. Il y en a 200 par m^3 , provenant d'un reste "fossile" du Big Bang. Réf : Pour la science, juillet 2010.
- L'interaction gravitationnelle est aussi une force élémentaire, mais on ne sait pas si la théorie quantique s'applique pour elle. Autrement dit, on ne sait pas si il y a une particule de Jauge associée que l'on appellerait le **graviton**.

5.4.1.4 Particules élémentaires stables

Il y a donc peu de particules élémentaires. Surtout que la plupart cités ci-dessus sont instables : elles ont une durée de vie très courte. Elles apparaissent lors de collisions énergétiques, et se désintègrent très rapidement. Les particules élémentaires stables sont

$$e^-, \text{neutrinos}, \gamma$$

les quarks q et les gluons g n'existent pas à l'état individuel.

5.4.2 Les particules composées

La richesse et la diversité de la nature vient que ces particules élémentaires s'assemblent pour former des "particules composées" très variées.

5.4.2.1 Les mésons :

les mésons sont composés de deux quarks $q\bar{q}$ avec des gluons qui les lient. Par exemple le méson appelé "pion π_0 " est une superposition quantique :

$$\pi_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle)$$

de masse $m = 140 \text{ MeV}/c^2$, de charge 0.

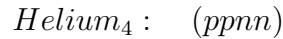
5.4.2.2 Les baryons :

Les baryons sont composés de trois quarks qqq avec des gluons qui les lient. Par exemple :

$$\begin{aligned} \text{Proton } p : & \quad (uud) \quad \text{masse} = 939 \text{ MeV}/c^2, \quad \text{charge} + 1 \\ \text{Neutron } n : & \quad (udd) \quad \text{masse} = 940 \text{ MeV}/c^2, \quad \text{charge } 0 \end{aligned}$$

5.4.2.3 Noyau nucléaire

Un noyau nucléaire est composé de protons et neutrons. Par exemple



Il faut une proportion de neutron et protons adéquate pour former un noyau.

5.4.2.4 Composés plus élaborés : atomes, molécules, matériaux,...

Ensuite, les noyaux s'entourent d'électrons pour former des atomes, les atomes s'assemblent pour former des molécules, des matériaux, des fluides...

5.4.2.5 Particules composées stables

Les particules composées stables sont : le proton p , les noyaux nucléaires légers (He, C, O, \dots) les atomes, les matériaux,...

Remarque :

- le neutron isolé est instable, avec une durée de vie moyenne de 15mn (887 s. précisément).
- L'antimatière serait stable sans l'environnement de la matière. On a fabriqué des atomes d'anti-Hydrogène composés de \bar{p}^- et \bar{e}^+ .
- Le LHC au CERN, étudie depuis 2010 des collisions $p + \bar{p}$ à hautes énergies. On espère de nouvelles découvertes.