

Chapitre 4

Particule de spin 1/2

Dans ce chapitre nous montrons comment décrire les degrés de liberté interne d'une particule formés par son spin (moment angulaire intrinsèque).

Jusqu'à présent, l'état quantique d'une particule est décrite par sa fonction d'onde $|\psi\rangle$. Celle-ci est vue comme un vecteur de l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ (qui est de dimension infinie).

Pour certaines particules (électron, neutron, protons, . . . voir plus loin) l'expérience montre qu'elles possèdent un **moment cinétique intrinsèque** \vec{s} , appelé **spin**, et qu'il y a seulement *deux états de spin distincts*. "to spin" signifie "tourner sur soi-même". Nous verrons que c'est l'image que l'on peut se faire d'un électron. La direction du spin est la direction de l'axe rotation.

Dans l'expérience de "Stern-Gerlach" un faisceau de particules neutres (comme le neutron) toutes dans le même état initial, traverse un champ magnétique non homogène. Le champ magnétique interagit avec le moment cinétique \vec{s} de chaque particule, et par conséquent la trajectoire de chaque particule est défléchie selon la valeur de son moment cinétique intrinsèque \vec{s} . On observe deux trajectoires distinctes à la sortie du dispositif, correspondant à deux états de spin orientés parallèlement (ou anti-parallèlement) à l'axe z , que l'on notera respectivement $|+z\rangle$, $|-z\rangle$.

Le détail sur l'interaction du spin avec le champ magnétique sera présenté dans la section 4.9.

4.1 L'espace des états de spin

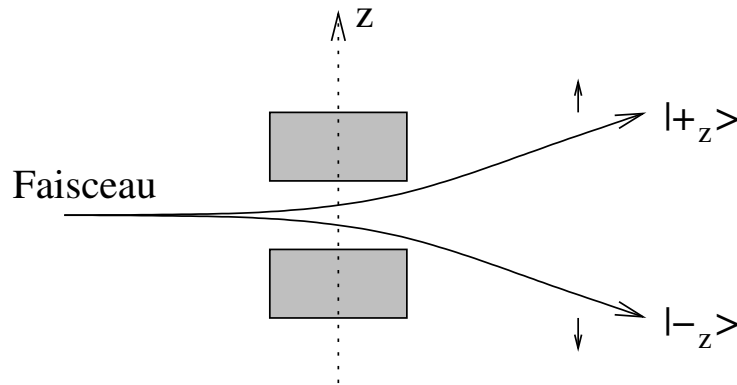


FIGURE 4.0.1 – Dispositif de Stern-Gerlach séparant les états de spin $|+_z\rangle$ ou $|-_z\rangle$ de la particule.

Définition 4.1.1. on part de **deux principes** à priori :

1. Tout d’abord le principe suggéré par l’expérience (et le formalisme quantique, autorisant les superpositions d’états) que l’état de spin $|s\rangle$ de la particule est décrit par un vecteur dans un espace vectoriel complexe noté \mathcal{H}_{spin} qui est **de dimension deux**, engendré par les deux états *orthogonaux* $|+_z\rangle, |-_z\rangle$. Ces deux états correspondent à des spins hauts et bas parallèles à l’axe z . Autrement dit un état de spin général est de la forme :

$$|s\rangle = a|+_z\rangle + b|-_z\rangle \in \mathcal{H}_{spin}, \quad a, b \in \mathbb{C} \quad (4.1.1)$$

2. Le deuxième principe est qu’il **n’y a pas de direction privilégiée** (dans l’univers).

Remarques :

- Pour relier cet état de spin $|s\rangle = a|+_z\rangle + b|-_z\rangle$ à la “mesure du spin selon l’axe z ” dans l’appareil de Stern-Gerlach, figure 4.0.1, rappelons que le principe de la mesure stipule que la probabilité d’observer la particule dans le faisceau supérieur sera alors $P_+ = \frac{|\langle+_z|s\rangle|^2}{\langle s|s\rangle} = \frac{|a|^2}{|a|^2+|b|^2}$ et la probabilité $P_- = \frac{|\langle-_z|s\rangle|^2}{\langle s|s\rangle} = \frac{|b|^2}{|a|^2+|b|^2}$ de l’observer dans le faisceau du bas. Après une détection, si la particule a été détectée dans le faisceau du haut (par exemple), l’état de spin sera $|s\rangle = |+_z\rangle$.
- Le problème dans l’écriture (4.1.1) de l’état $|s\rangle$ ci-dessus, est que l’axe z semble jouer un rôle privilégié, en contradiction avec le deuxième principe énoncé. Il nous faudra trouver une description d’un état de spin sans faire référence à une direction privilégiée.
- (*) Mathématiquement, la question précédente correspond à chercher une “représentation projective du groupe de rotation $SO(3)$ dans l’espace \mathbb{C}^2 ”. La théorie des

représentation montre qu'elle existe et est unique. Ce sera $\mathcal{D}_{1/2}$.

- Une autre question qui se pose est que les états $|+z\rangle, |-z\rangle$ correspondent à une direction du moment cinétique particulière dans l'espace (haut et bas). Est-ce qu'il en est de même pour l'état général $|s\rangle$, (4.1.1)? A quelle direction \vec{s} correspond t-il? On répondra à cette question dans la section 4.4.
- La description quantique du spin est plus simple que la description de la fonction d'onde car l'espace de Hilbert est ici de dimension 2 seulement. Par contre, l'interprétation géométrique de cet espace est assez délicate, nous allons donc le faire de façon progressive.
- Remarque très importante : lorsqu'il s'agit du spin 1/2 il est question de deux espaces qui entrent en jeu et qu'il ne faut pas confondre : l'**espace quantique du spin** \mathcal{H}_{spin} définit plus haut qui est un espace vectoriel complexe de dimension deux, et l'**espace ordinaire** \mathbb{R}^3 qui est un espace réel de dimension 3 avec les variables de position (x, y, z) .

La première observation est que dans l'espace ordinaire, la représentation des états $|+z\rangle, |-z\rangle$ forme un angle de 180° entre eux, alors que dans l'espace de spin \mathcal{H}_{spin} , ils sont orthogonaux, et forment donc un angle de 90° . Imaginons un état de spin $|s_\theta\rangle$ intermédiaire, qui dans l'espace ordinaire, est l'état $|+z\rangle$ tourné de l'angle θ autour de l'axe y . Ainsi $|s_{\theta=0}\rangle = |+z\rangle$ et $|s_{\theta=\pi}\rangle = |-z\rangle$. Par conséquent dans l'espace de spin :

$$|s_\theta\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+z\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-z\rangle \quad (4.1.2)$$

décrit un état de spin quelconque dans le plan (x, z) . Cela est clair sur la figure 4.1.1.

- L'état $|s_\theta\rangle$ que nous venons de construire s'obtient par l'action d'une rotation d'un angle θ autour de l'axe y . On note $\hat{R}_y(\theta)$ l'opérateur unitaire qui effectue cette opération et donc :

$$|s_\theta\rangle = \hat{R}_y(\theta)|+z\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+z\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-z\rangle$$

La rotation de l'état initial $|-z\rangle$ est de même (il est orthogonal au précédent) :

$$\hat{R}_y(\theta)|-z\rangle = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|+z\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|-z\rangle$$

En multipliant les équations précédentes par $\langle \pm_z |$ on obtient les éléments de matrice $\langle \pm_z | \hat{R}_y(\theta) | \pm_z \rangle$ de l'opérateur de rotation $\hat{R}_y(\theta)$ dans la base $|\pm_z\rangle$:

$$\hat{R}_y(\theta) \equiv_{(\text{base } |\pm_z\rangle)} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (4.1.3)$$

- Comme les rotations autour de l'axe y fixé, vérifient la relation de groupe $\hat{R}_y(\theta_2)\hat{R}_y(\theta_1) = \hat{R}_y(\theta_1 + \theta_2)$ (comme la fonction exponentielle) il est naturel de poser $\hat{R}_y(\theta) =$

$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{S}_y\right)$ où \hat{S}_y est une matrice 2×2 appelée générateur des rotations du spin autour de l'axe y (ou opérateur de spin). On le calcule facilement d'après $\left(\frac{d}{d\theta}\hat{R}_y(\theta)\right)_{\theta=0} = -\frac{i}{\hbar}\hat{S}_y$. Cela donne

$$\hat{S}_y = i\hbar \left(\frac{d}{d\theta}\hat{R}_y(\theta)\right)_{\theta=0} = \frac{\hbar}{2}\sigma_y, \quad \sigma_y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

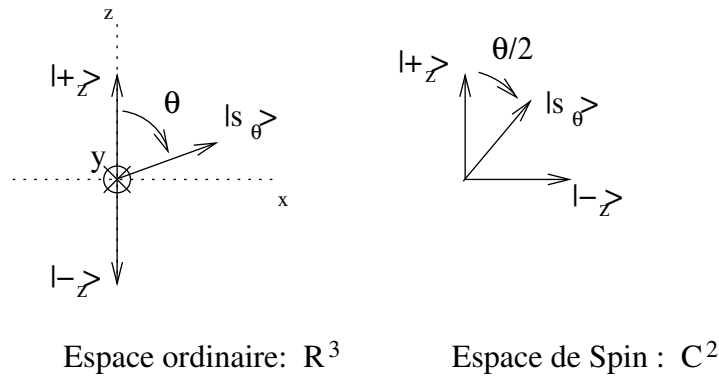


FIGURE 4.1.1 – Pour un spin dans le plan (x, z) , l'espace ordinaire et l'espace de spin sont directement reliés.

4.2 Rotation de 2π et 4π d'un spin

On observe sur la figure (4.1.1), que une rotation de (2π) change le signe du vecteur dans l'espace de spin :

$$\hat{R}_y(2\pi)|+z\rangle = -|+z\rangle$$

Seulement une rotation de (4π) ramène l'état de spin à son état initial :

$$\hat{R}_y(4\pi)|+z\rangle = |+z\rangle$$

Plus généralement, d'après (4.1.3) on a

$$\hat{R}_y(2\pi) = -\hat{\text{Id}}, \quad \hat{R}_y(4\pi) = \hat{\text{Id}}.$$

Ce signe $(-)$ est assez surprenant. On peut penser au premier abord qu'il est non détectable car une mesure détecte des probabilités, le module des amplitudes, et non pas les phases. Mais on peut imaginer de séparer le faisceau en deux et de détecter les phases par un phénomène d'interférences, comme sur la figure (4.2.1). Une interprétation géométrique est de dire que l'espace de spin est un **double recouvrement** de l'espace des directions de l'espace ordinaire. Ainsi une rotation de 2π ne suffit pas à obtenir l'état initial, il faut 4π . Voir figure (4.2.2). Voir plus loin une discussion plus précise.

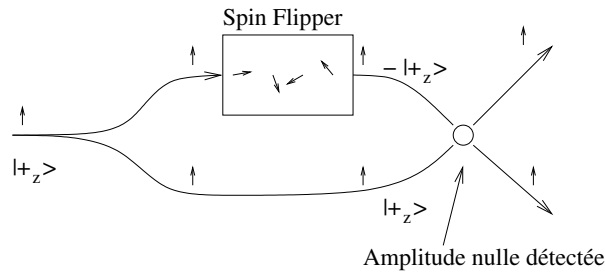


FIGURE 4.2.1 – Le spin-flipper effectue une rotation de $2\pi \equiv 360^\circ$ à la direction du spin. Par conséquent à la sortie l'état est $-|+z \rangle$, et au lieu d'interférence, l'amplitude est $|+z \rangle - |+z \rangle = 0$.

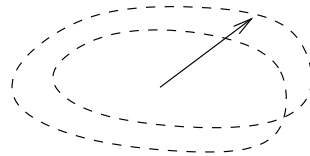


FIGURE 4.2.2 – Schéma du double recouvrement.

4.3 Générateurs des rotations et matrices de rotation

Les opérateurs de rotation $\hat{R}_y(\theta)$ autour de l'axe y forment un groupe à un paramètre θ d'après les 3 critères (4.3.1) :

$$\hat{R}_y(\theta_1)\hat{R}_y(\theta_2) = \hat{R}_y(\theta_1 + \theta_2) \quad : \text{loi de composition} \tag{4.3.1}$$

$$\hat{R}_y(0) = Id \quad : \text{élément neutre} \tag{4.3.2}$$

$$\left(\hat{R}_y(\theta)\right)^{-1} = \hat{R}_y(-\theta) \quad : \text{inverse} \tag{4.3.3}$$

On notera de même $\hat{R}_x(\theta)$, $\hat{R}_z(\theta)$ les opérateurs de rotation autour des autres axes de base x, z respectivement.

On peut considérer les générateurs correspondant à ces rotations comme pour eq(??) :

Définition 4.3.1. L'opérateur de spin selon y noté respectivement \hat{S}_y est le générateur de l'opérateur de rotation $\hat{R}_y(\theta)$ c'est à dire :

$$\forall \theta, \quad \hat{R}_y(\theta) = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\theta\hat{S}_y\right) \quad (4.3.4)$$

De même pour les autres axes :

$$\forall \theta, \quad \hat{R}_x(\theta) = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\theta\hat{S}_x\right), \quad \hat{R}_z(\theta) = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\theta\hat{S}_z\right)$$

Remarque : de façon équivalente, on peut écrire l'équivalent de l'équation de Schrödinger :

$$\frac{d|s_\theta\rangle}{d\theta} = \left(\frac{-i\hat{S}_y}{\hbar}\right)|s_\theta\rangle, \quad \text{avec } |s_\theta\rangle = \hat{R}_y(\theta)|+_z\rangle$$

et de même avec les axes x, z .

Proposition 4.3.2. Dans la base $|\pm_z\rangle$,
Les opérateurs $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ sont représentés par les matrices :

$$\hat{S}_{x,y,z} \equiv_{(base\ |\pm_z\rangle)} \frac{\hbar}{2} \sigma_{x,y,z},$$

avec les **matrices de Pauli** :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.3.5)$$

Les deux valeurs propres de chacun de ces opérateurs sont $(\pm\hbar/2)$. C'est à dire que l'on a

$$\hat{S}_x|+_x\rangle = +\frac{\hbar}{2}|+_x\rangle, \quad \hat{S}_x|-_x\rangle = \left(-\frac{\hbar}{2}\right)|-_x\rangle, \quad \text{etc pour } y, z$$

avec les vecteurs propres de \hat{S}_x donnés par :

$$|+_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+_z\rangle + |-_z\rangle), \quad |-_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+_z\rangle - |-_z\rangle)$$

et ceux de \hat{S}_y :

$$|+_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+_z\rangle + i|-_z\rangle), \quad |-_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+_z\rangle - i|-_z\rangle)$$

Remarques :

- Les vecteurs propres respectifs des opérateurs $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ correspondent à des états de spins respect. parallèles aux axes x, y, z car ils qui sont invariants par ces rotations. On note l'ensemble de ces trois opérateurs par un opérateur vectoriel :

$$\hat{\vec{S}} := (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$$

- Les opérateurs autoadjoints $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ sont interprétés ici comme des générateurs des opérateurs unitaires de rotation $\hat{R}_x(\theta), \hat{R}_y(\theta), \hat{R}_z(\theta)$. Mais comme remarqué page (90), une autre interprétation est que ce sont des observables lors d'une opération de mesure. Par exemple dans l'expérience de Stern-Gerlach ci-dessus, à cause de l'orientation particulière du dispositif, la mesure est associée à l'observable \hat{S}_z . Il y a donc deux résultats possibles de la mesure que sont les états $|+_z\rangle$ ou $|-_z\rangle$. Voir TD.

Démonstration. (*) Commençons par le calcul de la matrice de \hat{S}_y : dans la base $|\pm_z\rangle$, d'après (4.3.4) et (4.1.2),

$$\hat{S}_y = i\hbar \left(\frac{d\hat{R}_y(\theta)}{d\theta} \right)_{\theta=0} = i\hbar \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}_{\theta=0} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_y$$

Ensuite il suffit de diagonaliser cette matrice. Voir Section A.2.2 page 363. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det(\hat{S}_y - \lambda I) = \lambda^2 - (\hbar/2)^2$, donc $\lambda = \pm\hbar/2$.

On recherche maintenant le générateur \hat{S}_z des rotations autour de l'axe z . Comme pour \hat{S}_y , ses valeurs propres sont $(\pm\hbar/2)$ (car il n'y a pas de direction privilégiée), et les vecteurs propres sont $|\pm_z\rangle$ car ils sont situés sur l'axe de rotation qui est fixe. Donc la matrice de \hat{S}_z est diagonale dans cette base.

Cherchons finalement \hat{S}_x . L'axe x est obtenu en faisant tourner l'axe y de $(-\pi/2)$ autour de l'axe z , donc

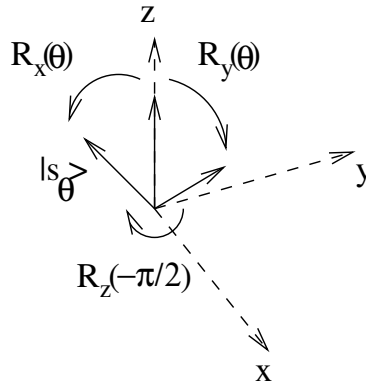


FIGURE 4.3.1 – Cette figure montre que $|s_\theta\rangle = \hat{R}_x(\theta)|+_z\rangle = \hat{R}_z(-\frac{\pi}{2})\hat{R}_y(\theta)|+_z\rangle$. (Mais attention $\hat{R}_x(\theta) \neq \hat{R}_z(-\frac{\pi}{2})\hat{R}_y(\theta)$, à vérifier sur l'état $|+_y\rangle$).

$$\hat{S}_x = \hat{R}_z(-\frac{\pi}{2})\hat{S}_y\hat{R}_z(+\frac{\pi}{2})$$

Or

$$\hat{R}_z(-\frac{\pi}{2}) = \exp\left(\frac{-i\hat{S}_z(-\pi/2)}{\hbar}\right) = \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}$$

Ainsi on obtient

$$\hat{S}_x = \left(\frac{\hbar}{2}\right) \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{+i\pi/4} \end{pmatrix} = \left(\frac{\hbar}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Exercice 4.3.3. “Expression d’un état de spin $|s_{\theta,\varphi}\rangle$ général”

Un état de spin $|s_{\theta,\varphi}\rangle$ associé à la direction (θ, φ) en coordonnées sphériques est obtenu par :

$$|s_{\theta,\varphi}\rangle = \hat{R}_z(\varphi)\hat{R}_y(\theta)|+_z\rangle$$

Montrer que :

$$|s_{\theta,\varphi}\rangle = e^{-i\varphi/2} \cos(\theta/2)|+_z\rangle + e^{i\varphi/2} \sin(\theta/2)|-_z\rangle$$

Solution : D'après (4.1.2) on a

$$\hat{R}_y(\theta) |+_z\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |+_z\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |-_z\rangle$$

Et d'après

$$\hat{R}_z(\varphi) |\pm_z\rangle = \exp\left(-i\varphi \frac{\hat{S}_z}{\hbar}\right) |\pm_z\rangle = \exp\left(-(\pm i) \frac{\varphi}{2}\right) |\pm_z\rangle$$

on a

$$\hat{R}_z(\varphi) \hat{R}_y(\theta) |+_z\rangle = e^{-i\varphi/2} \cos(\theta/2) |+_z\rangle + e^{i\varphi/2} \sin(\theta/2) |-_z\rangle$$

Exercice 4.3.4. "l'opérateur \vec{S}^2 "

On considère l'opérateur

$$\vec{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$$

Montrer que dans l'espace \mathcal{H}_{spin} cet opérateur est multiple de l'identité :

$$\vec{S}^2 = \hbar^2 \frac{3}{4} \hat{I}$$

(Aide : observer que $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I$). Ce résultat sera obtenu en plus grande généralité en section (6.3.6) page 255.

Solution : calculer avec les matrices 2×2 , dans la base $|\pm_z\rangle$. Alors $\vec{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \frac{\hbar^2}{4} (3) \text{Id}$.

Remarque (*) : On peut obtenir le résultat $\vec{S}^2 \propto Id$ par des arguments de symétrie (c'est le "lemme de Schur", voir plus loin) : (1) l'opérateur \vec{S}^2 est invariant par rotation, et donc si $\vec{S}^2|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ est vecteur propre et $|\psi'\rangle = \hat{R}|\psi\rangle$, alors $\vec{S}^2|\psi'\rangle = \vec{S}^2\hat{R}|\psi\rangle = \hat{R}\vec{S}^2|\psi\rangle = \lambda|\psi'\rangle$. Or tout vecteur de \mathcal{H}_{spin} s'obtient de cette façon.

4.4 (*) Représentation de l'état de spin sur la sphère de Bloch

La figure (4.1.1) montre la relation entre l'espace ordinaire \mathbb{R}^3 et l'espace de spin \mathcal{H}_{spin} lorsque le spin est dans le plan (x, z) . Il y a une relation générale, pour n'importe quelle direction du spin que voici.

Supposons donné un état de spin quelconque :

$$|s\rangle = a|+_z\rangle + b|-_z\rangle \in \mathcal{H}_{spin}, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

On définit alors le vecteur $\vec{s} \in \mathbb{R}^3$ par les valeurs moyennes de l'observable $\vec{\hat{S}}$ dans l'état $|s\rangle$:

$$\vec{s} = \langle \vec{\hat{S}} \rangle \tag{4.4.1}$$

c'est à dire d'après (1.6.6) page 68 :

$$\vec{s} = \begin{cases} s_x = \frac{\langle s | \hat{S}_x | s \rangle}{\langle s | s \rangle} \\ s_y = \frac{\langle s | \hat{S}_y | s \rangle}{\langle s | s \rangle} \\ s_z = \frac{\langle s | \hat{S}_z | s \rangle}{\langle s | s \rangle} \end{cases}$$

Propriété : Le vecteur \vec{s} caractérise l'état quantique $|s\rangle$ à une constante près (phase près si $|s\rangle$ est normalisé). Plus précisément, le vecteur \vec{s} de l'espace ordinaire, en coordonnées sphériques $\vec{s} = (\theta, \varphi, \|\vec{s}\|)$, est relié aux composantes (a, b) de l'état $|s\rangle$ dans l'espace de Spin par :

$$\begin{aligned} \|\vec{s}\| &= \frac{\hbar}{2} \quad : \text{norme fixée} \\ z = \frac{a}{b} &= \cotg\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\varphi} \in \mathbb{C} : \quad \text{si } b \neq 0 \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

L'interprétation graphique de cette relation est que $z = a/b$ est la **projection stéréographique** du vecteur \vec{s} , voir figure (4.4.1).

Il y a donc une relation bijective entre la direction du vecteur \vec{s} , et l'état quantique normalisé $|s\rangle$ (à une phase près).

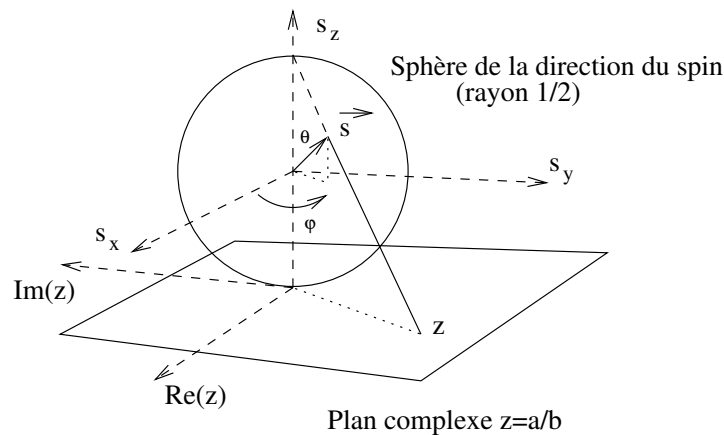


FIGURE 4.4.1 – Projection stéréographique relie le vecteur $\vec{s} = \langle \hat{S} \rangle \in \mathbb{R}^3$ et les composantes (a, b) de l'état quantique $|s\rangle = a|+_z\rangle + b|-_z\rangle \in \mathcal{H}_{spin} \equiv \mathbb{C}^2$.

Remarques : La norme $\|\vec{s}\| = \frac{\hbar}{2}$ n'est pas surprenante. La direction (θ, φ) du vecteur \vec{s} , ne dépend que du quotient $z = a/b \in \mathbb{C}$. Cela est attendu, car en général, le résultat des valeurs moyenne ne change pas si on multiplie le vecteur par une constante complexe, donc $|s'\rangle = (a/b)|+_z\rangle + |-_z\rangle \in \mathcal{H}_{spin}$ donne le même résultat $|s\rangle$.

preuve : (TD) On pourrait calculer brutalement les valeurs moyennes $\langle \hat{S} \rangle$, mais ce n'est pas nécessaire : on vérifie d'abord dans le cas $\varphi = 0$, lorsque \vec{s} est dans le plan (x, z) . Cela correspond à la figure (4.1.1). On obtient alors $z = \cotg(\theta/2)$ sans calcul, en se référant à la figure (4.4.2).

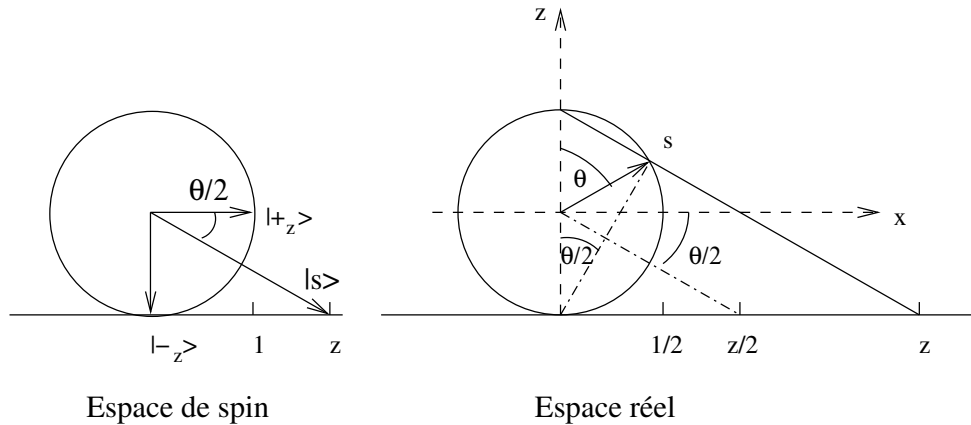


FIGURE 4.4.2 – Figure montrant que $z = \cotg(\theta/2)$ pour la projection stéréographique.

Ensuite on obtient le cas général, en effectuant une rotation autour de l'axe z grâce à l'opérateur $\hat{R}_z(\varphi)$. \square

Exercice 4.4.1. “Représentation d'un état de spin sur la sphère de Riemann”

Cette représentation a pour but de montrer la relation entre l'état de spin 1/2 dans l'espace quantique (\mathbb{C}^2 de dimension deux complexe), et sa représentation dans l'espace ordinaire $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (de dimension 3 réel).

1. Soit un état de spin 1/2 quelconque noté :

$$|\psi\rangle = a|+_z\rangle + b|-_z\rangle$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$. Pourquoi peut-on dire que l'état physique de $|\psi\rangle$ est caractérisé seulement par le nombre complexe $z = a/b$?

2. Calculer les valeurs moyennes $s_x = \frac{\langle \psi | \hat{S}_x | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$, $s_y = \frac{\langle \psi | \hat{S}_y | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$, $s_z = \frac{\langle \psi | \hat{S}_z | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$ dans cet état, et les exprimer en fonction de z . On note $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z) \in \mathbb{R}^3$, et on montrera que $\|\vec{s}\| = \frac{\hbar}{2}$, donc que \vec{s} est sur une sphère de rayon $\hbar/2$, appelée **sphère de Bloch** (ou sphère de Riemann, ou $P^1 = P(\mathbb{C}^2)$ espace projectif de \mathbb{C}^2).
3. Inversement montrer que $z = \cotg(\theta/2) e^{-i\varphi}$, où (s, θ, φ) sont les coordonnées sphériques du vecteur $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z) \in \mathbb{R}^3$.
4. Montrer que z est la coordonnée stéréographique¹ du point $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$ sur la sphère.

1. Si M est un point sur la sphère, On place le plan complexe \mathbb{C} , sous la sphère, tangent au pôle sud. On considère la droite passant par le pôle nord et M . Elle intersecte \mathbb{C} au point z . On dit alors que $z \in \mathbb{C}$ est la **coordonnée stéréographique** du point M . Voir film1 de [LGA].

L'espace projectif $\mathbb{C}P^1 = P(\mathbb{C}^2)$ (*) L'association d'une sphère (ici sphère des vecteurs \vec{s}) à partir d'un espace vectoriel de dimension deux (ici \mathcal{H}_{spin}) est générale et ne se limite pas au cas du spin. Voici la construction générale dans le langage de la mécanique quantique.

Soit \mathcal{H} un espace vectoriel (espace de Hilbert quantique) de dimension n . En terme de mesure, il est impossible de distinguer le vecteur $|\psi\rangle$ du vecteur $|\psi'\rangle = \lambda|\psi\rangle$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour cette raison, on appelle **rayon quantique** l'ensemble des vecteurs proportionnels entre eux. Ainsi le rayon quantique de $|\psi\rangle$ (supposant $\psi \neq 0$), noté $[\psi]$, est :

$$[\psi] = \{|\psi'\rangle, \text{ tels que } \exists \lambda \in \mathbb{C}, |\psi'\rangle = \lambda|\psi\rangle\}.$$

L'ensemble des rayons est appelé l'espace projectif de \mathcal{H} , et est noté $P(\mathcal{H})$.

Par construction, un rayon est une famille à une dimension complexe (obtenu en faisant varier $\lambda \in \mathbb{C}$), et l'ensemble des rayons est donc un espace de dimension complexe $n - 1$, donc de dimension réelle $2(n - 1)$, aussi noté $\mathbb{C}P^{(n-1)}$.

Si $\mathcal{H} \equiv \mathbb{C}^2$ est un espace à deux états, (comme le spin), le paragraphe précédent a montré que l'espace projectif est une sphère. C'est à dire $\mathbb{C}P^1 = P(\mathbb{C}^2) = S^2$. Dans un problème à deux états, il est souvent commode de représenter l'évolution quantique sur cette sphère, aussi appelée **sphère de Riemann** ou **sphère de Bloch**.

4.5 Groupe SU(2) de rotation du spin, et relations de commutation

4.5.1 Non commutativité du groupe et relations de commutation

Si on considère deux rotations différentes autour d'axes différents, par exemple $\hat{R}_x(\alpha)$ et $\hat{R}_y(\beta)$, alors en général le résultat de la combinaison de ces deux rotations dépend de l'ordre avec lequel on les fait. En général :

$$\hat{R}_x(\alpha) \hat{R}_y(\beta) \neq \hat{R}_y(\beta) \hat{R}_x(\alpha)$$

Cela est évident sur l'exemple de la figure 4.5.1. On dit que les deux opérateurs ne commutent pas car $[\hat{R}_x(\alpha), \hat{R}_y(\beta)] = \hat{R}_x(\alpha)\hat{R}_y(\beta) - \hat{R}_y(\beta)\hat{R}_x(\alpha) \neq 0$.

Remarquer que $R_y(\beta)R_x(\alpha) \neq R_x(\alpha)R_y(\beta) \Leftrightarrow R_y^{-1}(\beta)R_x^{-1}(\alpha)R_y(\beta)R_x(\alpha) \neq I$. On va donc calculer $R_y^{-1}R_x^{-1}R_yR_x$. Voir figure 4.5.2.

La relation suivante est importante. Elle montre que la non commutativité de ces rotations est liée à la non commutativité de leur générateurs. Le résultat est général en théorie des groupe.

Proposition 4.5.1. *Pour des angles très petits $\alpha, \beta \ll 1$, on a*

$$(R_y(\beta))^{-1} (R_x(\alpha))^{-1} R_y(\beta) R_x(\alpha) = I - \frac{\alpha\beta}{\hbar^2} [\hat{S}_y, \hat{S}_x] + o(\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta)$$

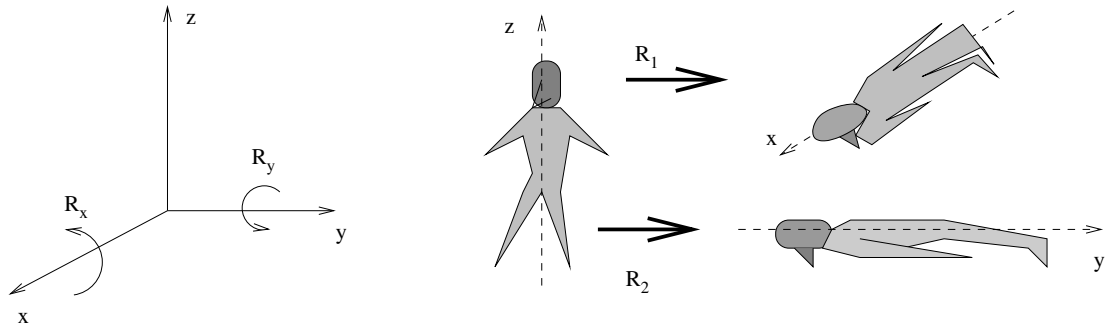


FIGURE 4.5.1 – Cet exemple montre que les deux rotations suivantes sont différentes : $R_1 = R_x(\frac{\pi}{2})R_y(\frac{\pi}{2}) \neq R_2 = R_y(\frac{\pi}{2})R_x(\frac{\pi}{2})$

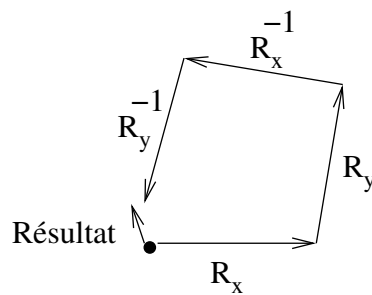


FIGURE 4.5.2 – Non commutativité : $R_y^{-1}R_x^{-1}R_yR_x \neq I$

Remarques :

- Cette dernière relation importante montre une *signification des relations de commutation en mécanique quantique* : si les générateurs commutent, alors les éléments du groupe commutent, et réciproquement. (C'est dans le cadre de l'interprétation des opérateurs auto-adjoints comme générateurs).

Démonstration. Pour simplifier les notations, on pose : $A = -i\hat{S}_x\alpha/\hbar$, $B = -i\hat{S}_y\beta/\hbar$. On a alors

$$\begin{aligned}\hat{R}_x(\alpha) &= \exp\left(-i\hat{S}_x\alpha/\hbar\right) = \exp(A) \simeq 1 + A + \frac{1}{2}A^2 + o(\alpha^2) \\ \left(\hat{R}_x(\alpha)\right)^{-1} &= \exp\left(-i\hat{S}_x(-\alpha)/\hbar\right) = \exp(-A) \simeq 1 - A + \frac{1}{2}A^2 + o(\alpha^2)\end{aligned}$$

et de même pour $\hat{R}_y(\beta)$. Alors

$$\begin{aligned}R_y R_x &= \left(1 + B + \frac{1}{2}B^2\right) \left(1 + A + \frac{1}{2}A^2\right) \\ &= 1 + A + B + BA + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2 + \dots \\ R_y^{-1} R_x^{-1} &= 1 - A - B + BA + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2 + \dots\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}R_y^{-1} R_x^{-1} R_y R_x &= 1 - A + A - B + B - A^2 - AB - BA - B^2 + BA + BA + A^2 + B^2 + o(\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta) \\ &= 1 + BA - AB + \dots = 1 + [B, A] + \dots \\ &= I - \frac{\alpha\beta}{\hbar^2} [\hat{S}_y, \hat{S}_x] + o(\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta)\end{aligned}$$

□

Il est donc important de calculer les commutateurs entre les générateurs. On trouve :

Proposition 4.5.2. *On a*

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = \hat{S}_x\hat{S}_y - \hat{S}_y\hat{S}_x = i\hbar\hat{S}_z \quad (4.5.1)$$

$$[\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar\hat{S}_x,$$

$$[\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar\hat{S}_y$$

Démonstration. le calcul se fait avec les matrices, par exemple :

$$\begin{aligned}\hat{S}_x\hat{S}_y - \hat{S}_y\hat{S}_x &\equiv \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv i\hbar\hat{S}_z\end{aligned}$$

Comme il n'y a pas d'axe privilégié, le résultat est identique en permutant les axes. \square

Remarque : Ainsi

$$R_y^{-1}(\beta)R_x^{-1}(\alpha)R_y(\beta)R_x(\alpha) = I + i\frac{\alpha\beta}{\hbar}\hat{S}_z + o(\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta) = R_z(-\alpha\beta) + o(\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta)$$

qui s'interprète en disant que au premier ordre, la suite des opérations (infinitésimales) $R_y^{-1}(\beta)R_x^{-1}(\alpha)R_y(\beta)R_x(\alpha)$ est équivalent à une rotation infinitésimale d'un angle $(-\alpha\beta)$ autour de l'axe z .

Noter que nous avons établi ces résultats pour la rotation d'un spin quantique, mais qu'ils sont valables aussi pour la rotation d'un objet solide en mécanique classique. La différence entre le groupe de rotation de spin (groupe SU(2)) et le groupe de rotation dans \mathbb{R}^3 (groupe SO(3)) ne se perçoit pas au niveau local ou infinitésimal (où les deux groupes sont isomorphes) mais globalement, comme l'a montré la section 4.2 (rotation de 2π) ; voir cours de math [Fau10b].

4.5.2 Rotation autour d'un axe \vec{u} quelconque

Nous avons défini au dessus les opérateurs de rotation du spin et les générateurs autour des axes x, y, z .

Proposition 4.5.3. Soit $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur unitaire (i.e de longueur 1) correspondant une direction quelconque. On pose :

$$\hat{S}_{\vec{u}} = \vec{u} \cdot \hat{\vec{S}} = u_x\hat{S}_x + u_y\hat{S}_y + u_z\hat{S}_z \equiv \frac{\hbar}{2}(\vec{u} \cdot \vec{\sigma}) \quad (4.5.2)$$

Soit un angle $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$\hat{R}_{\vec{u}}(\alpha) = \exp\left(\frac{-i\hat{S}_{\vec{u}}\alpha}{\hbar}\right) \quad (4.5.3)$$

$\hat{R}_{\vec{u}}(\alpha)$ est l'opérateur de rotation du spin d'un angle α autour de l'axe \vec{u} , et $\hat{S}_{\vec{u}}$ est le générateur de cette rotation.

Remarques :

- L'expression de $\hat{R}_z(\theta)$ ci-dessus est un cas particulier de cette formule avec $\vec{u} = (0, 0, 1)$ pointant vers l'axe z ; et de même pour les opérateurs $\hat{R}_x(\theta)$ et $\hat{R}_y(\theta)$.
- L'opérateur $\hat{S}_{\vec{u}} = (\hat{S}_{\vec{u}})^+$ est autoadjoint et de trace nulle : $\text{Tr}(\hat{S}_{\vec{u}}) = 0$ (car $\text{Tr}(\hat{S}_x) = \text{Tr}(\hat{S}_y) = \text{Tr}(\hat{S}_z) = 0$). Donc $\hat{R}_{\vec{u}}(\alpha)$ est un opérateur unitaire et de déterminant 1 : $\det(\hat{R}_{\vec{u}}(\alpha)) = 1$ (d'après la formule d'algèbre linéaire : $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$) dans un espace complexe de dim 2. On dit que c'est un élément du groupe $SU(2)$.

4.5.3 (*) Algèbre de Lie des rotations

Pour mieux comprendre ce qui précède, observer que les relations de commutation ci-dessus (4.5.1), montrent que les trois générateurs $(\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ ne commutent pas, mais leur commutateur est encore un de ces trois opérateurs. Comme défini page 103, cela signifie que ces trois opérateurs forment une base d'une algèbre de Lie de dimension 3, appelée **algèbre de Lie des rotations**, notée \mathcal{R} , formée par les combinaisons linéaires de la forme :

$$\hat{S}_{\vec{U}} = U_x \hat{S}_x + U_y \hat{S}_y + U_z \hat{S}_z = \vec{U} \cdot \vec{\hat{S}} \in \mathcal{R}, \quad \vec{U} = (U_x, U_y, U_z) \in \mathbb{R}^3$$

et (4.5.1) nous assure que $\frac{1}{i} [\hat{S}_{\vec{U}}, \hat{S}_{\vec{V}}] \in \mathcal{R}$ pour tous $\vec{U}, \vec{V} \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 11. montrer que pour $\vec{U}, \vec{V} \in \mathbb{R}^3$,

$$\frac{1}{i\hbar} [\hat{S}_{\vec{U}}, \hat{S}_{\vec{V}}] = \hat{S}_{\vec{U} \wedge \vec{V}}$$

4.5.4 (*) Groupe de Lie des rotations

En posant :

$$\vec{U} = \alpha \vec{u}, \quad \alpha = |\vec{U}|, \quad \vec{u} \text{ unitaire}$$

on peut écrire

$$\hat{R}_{\vec{U}} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{S}_{\vec{U}}\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \alpha \hat{S}_{\vec{u}}\right) = \hat{R}_{\vec{u}}(\alpha)$$

qui est une rotation d'un angle α autour de l'axe \vec{u} .

On a mentionné page 125, un résultat général : en prenant l'exponentielle des éléments d'une algèbre de Lie d'opérateurs, on obtient un groupe de Lie. Ainsi, ici, les opérateurs de rotation $\hat{R}_{\vec{u}}(\alpha)$ (pour différentes valeurs de \vec{u}, α) forment *un groupe* de Lie de dimension

3, noté R_{spin} (ou encore $Spin(\mathbb{R}^3)$ dans la littérature) :

$$\begin{aligned}\hat{R}_1 \hat{R}_2 &= \hat{R}_3 & : \text{loi de composition interne} \\ \hat{R}_{\vec{u}}(0) &= Id & : \text{élément neutre} \\ \left(\hat{R}_{\vec{u}}(\alpha)\right)^{-1} &= \hat{R}_{\vec{u}}(-\alpha) & : \text{rotation inverse}\end{aligned}$$

(la première relation signifie la chose non triviale que la composition successive de deux rotation est à nouveau une certaine rotation).

Pour spécifier la rotation $\hat{R}_{\vec{u}}(\alpha)$, il faut trois paramètres : la direction (θ, φ) de l'axe \vec{u} , et l'angle de rotation α , ou encore $\vec{U} = \alpha\vec{u} \in \mathbb{R}^3$. Pour cela on dit que c'est un groupe à trois paramètres continus, ou un **groupe de Lie de dimension trois**.

4.5.5 (*) Représentation des opérateurs de rotation dans une base : groupe des matrices $SU(2)$

Nous allons montrer que le groupe de rotation du spin 1/2 noté $Spin(\mathbb{R}^3)$ est identique à un groupe de matrices appelé groupe $SU(2)$.

Considérons un opérateur de rotation \hat{R} de spin 1/2, de la forme (4.5.3). Dans la base $(|+z\rangle, |-z\rangle)$, cet opérateur unitaire est représenté par une matrice unitaire 2×2 :

$$M_{\vec{u}}(\alpha) = \begin{pmatrix} \langle +|\hat{R}|+\rangle & \langle +|\hat{R}|-\rangle \\ \langle -|\hat{R}|+\rangle & \langle -|\hat{R}|-\rangle \end{pmatrix}$$

C'est une matrice complexe 2×2 de déterminant un, et unitaire.

Par définition de telles matrices, forment un groupe appelé *le groupe Spécial Unitaire $SU(2)$* :

$$SU(2) = \{M \in Mat_2(\mathbb{C}) / \det(M) = 1, M^+ = M^{-1}\}$$

(on vérifie facilement que cet ensemble forme un groupe avec la multiplication de matrices).

Inversement, à une matrice $M \in SU(2)$, on associe un opérateur de rotation de spin \hat{R} par la même relation ci-dessus (voir preuve ci-dessous).

Ainsi le groupe des rotation du spin 1/2 exprimé dans une base orthonormée s'identifie au groupe de matrices $SU(2)$.

Exercice 12. Rotation du spin et groupe $SU(2)$

1. Montrer qu'un générateur des rotations du spin 1/2 (i.e. élément de l'algèbre de Lie \mathcal{R}_{spin}) $\hat{S}_{\vec{U}}$, avec $\vec{U} \in \mathbb{R}^3$, s'exprime dans une base o.n. par une matrice hermitienne 2×2 de trace nulle. Montrer inversement qu'une matrice hermitienne 2×2 de trace nulle détermine un générateur $\hat{S}_{\vec{U}}$.
2. Montrer que l'ensemble des matrices hermitienne 2×2 de trace nulle forme l'algèbre de Lie $su(2)$ du groupe $SU(2)$ défini ci-dessus. Montrer que les matrices de Pauli $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ forment une base de cette algèbre $su(2)$.
3. Grâce à l'application exponentielle, déduire que le groupe des rotations du spin 1/2, R_{spin} , exprimé dans une base o.n., s'identifie au groupe $SU(2)$ des matrices.

4.6 (*) Espace quantique total d'une particule à 3 dimensions avec spin 1/2

L'espace de Hilbert de la fonction d'onde, décrivant l'état spatial de la particule est :

$$\mathcal{H}_{espace} = L^2(\mathbb{R}^3)$$

L'espace de Hilbert du spin, décrivant l'état de spin est lui de dimension 2 :

$$\mathcal{H}_{spin} \equiv \mathbb{C}^2$$

Alors l'espace de Hilbert total est le produit tensoriel :

$$\boxed{\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_{espace} \otimes \mathcal{H}_{spin}}$$

4.6.1 Remarques

- Pourquoi le produit tensoriel ? tout simplement, car il est possible d'envisager que la particule soit dans un état quantique comme

$$|\psi\rangle = a|x_1\rangle|+_z\rangle + b|x_2\rangle|-_z\rangle \quad (4.6.1)$$

(avec des amplitudes $a, b \in \mathbb{C}$), qui traduit un état où la position x est *corrélée* avec l'état de spin. C'est exactement le cas à la sortie de l'appareil de Stern-Gerlach, figure (4.0.1), où $|x_1\rangle$ est un état situé dans le faisceau supérieur avec spin $|+_z\rangle$, et $|x_2\rangle$ un état situé dans le faisceau inférieur avec spin $|-_z\rangle$.

- Comme décrit page 148, le produit tensoriel d'espace de Hilbert permet l'existence d'état corrélés qui sont surprenants pour le sens commun. C'est le cas de l'état eq(4.6.1), où l'état de spin est corrélé avec la position de la particule. Si on observe la particule en x_1 , elle aura le spin $|+_z\rangle$. Si on l'observe en x_2 , elle aura le spin $|-_z\rangle$. (Voir TD).

4.6.2 Une base de \mathcal{H}_{tot} et champ spinoriels

Les états $|\vec{x}\rangle, \vec{x} \in \mathbb{R}^3$, forment la base (continue) de position de l'espace $\mathcal{H}_{spatial}$.

De même les deux états $|\pm_z\rangle$ forment une base de l'espace de spin \mathcal{H}_{spin} .

D'après la définition du produit tensoriel, voir (3.1.5), une base de l'espace

$$\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_{espace} \otimes \mathcal{H}_{spin}$$

est formée par $|\vec{x}, +\rangle = |\vec{x}\rangle \otimes |+_z\rangle$ et $|\vec{x}, -\rangle = |\vec{x}\rangle \otimes |-_z\rangle$ avec le paramètre continu $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Autrement dit un état général de la particule $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{tot}$ est caractérisé par ses composantes complexes :

$$\begin{aligned} \psi_+(\vec{x}) &= \langle \vec{x}, + | \psi \rangle \\ \psi_-(\vec{x}) &= \langle \vec{x}, - | \psi \rangle \end{aligned}$$

qui forme donc une fonction d'onde sur l'espace à deux composantes complexes. Cela s'appelle un champ vectoriel à valeur dans \mathbb{C}^2 ou plus précisément un **champ spinoriel**. C'est l'analogie du champ électrique $\vec{E}(\vec{x})$ qui lui est une fonction à trois composantes réelles.

Noter que les deux composantes $\psi_+(\vec{x}), \psi_-(\vec{x})$ dépendent du choix de la base $|\pm_z\rangle$, et dépendent donc du choix de l'axe z . Pour éviter de choisir une base particulière, on peut dire que $|\psi\rangle$ est une fonction d'onde à valeur² dans \mathcal{H}_{spin} .

Exercice 13. action d'une rotation

Pour une particule avec spin, décrite par la fonction d'onde à deux composantes $\psi_{\pm}(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \pm | \psi, \vec{s} \rangle$, donner l'expression de la fonction d'onde de la même particule dans un repère \vec{x}' obtenu par une rotation $\vec{x}' = R\vec{x}$?

4.7 Autres degrés de liberté internes

On dit que le spin est un **degré de liberté interne** de la particule, contrairement au **degrés de libertés externes** que sont x, y, z . L'espace de Hilbert qui le décrit est \mathcal{H}_{spin} , est un espace autre que celui des fonctions d'ondes spatiales $\mathcal{H}_{espace} = L^2(\mathbb{R}^3)$. L'espace total est le produit tensoriel $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_{espace} \otimes \mathcal{H}_{spin}$.

Cependant *ces deux espaces ne sont pas indépendants* l'un de l'autre, puisque une transformation de l'espace comme une rotation, agit aussi sur l'espace du spin, voir (B.4.1).

En physique, il y a des espaces de degrés de libertés internes, autres que le spin, qui eux n'ont pas cet "attachement" avec l'espace ordinaire \mathbb{R}^3 .

- Par exemple, pour les champs élémentaires, que sont les quarks, il y a un espace interne dit de **couleurs** $\mathcal{H}_{coul} \equiv \mathbb{C}^3$ de dimension trois (rouge-vert-bleu). (Attention, les quarks ne sont pas des particules, dans le sens où ils n'existent pas à l'état individuel et libre. On parle plutôt de champs élémentaires, et leur description est dans le cadre de la théorie des champs, classique ou quantique).

Les trois couleurs des quarks, sont dues au fait que la théorie des champs correspondantes, la **Q.C.D.** ("**la Chromo-Dynamique Quantique**" qui décrit la **force nucléaire forte**), est une théorie de Jauge avec le groupe $SU(3)$ qui signifie qu'elle possède une symétrie (de Jauge) par rapport aux rotations dans l'espace des couleurs $\mathcal{H}_{coul} \equiv \mathbb{C}^3$. L'**interaction électro-faible** (qui décrit à la fois l'électromagnétisme et la force nucléaire faible), est décrite par la théorie de Jauge $SU(2)$, faisant donc intervenir un espace de degré liberté interne $\mathcal{H}_{faible} \equiv \mathbb{C}^2$, appelé charge faible. Ces théories de Jauge se manifestent surtout dans les collisions de particules à hautes énergies.

- Autre exemple (mais qui est relié aux quarks), en physique nucléaire, on considère le neutron et le proton comme une manifestation d'une seule particule, appelée le **nucléon**. (Car la force nucléaire ne les distinguent pas, seule la force électromagnétique qui est sensible à la charge électrique, les distingue). Ainsi le proton $|p\rangle$ et le

2. La formulation géométrique correcte est de considérer l'espace fibré de fibre isomorphe à \mathbb{C}^2 (appelé "fibré spinoriel") . ψ est une section de ce fibré.

neutron $|n\rangle$ ne sont que deux états particuliers de l'espace à deux états du nucléon appelé **espace d'isospin**, noté $\mathcal{H}_{isospin} \equiv \mathbb{C}^2$, et ayant pour base $|p\rangle, |n\rangle$. Par exemple un nucléon peut être dans l'état interne d'isospin $|N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n\rangle + |p\rangle)$ qui est une superposition. Cependant cette notion d'espace d'isospin est en fait équivalente au point de vue plus conventionnel qui distingue le proton et le neutron.

4.8 Mesure de spin, application récente : la Cryptographie quantique

Nous présentons une branche de la mécanique quantique, appelée l'**information quantique** et plus précisément ici, la **cryptographie quantique**. Il y a des développements récents, à la fois du côté théorique et expérimentale.

Références : [NGWH01], dont est inspirée cette section, et une revue récente de *Pour la Science* [LS02].

L'idée de la cryptographie quantique est d'utiliser un défaut bien connu de la mécanique quantique :

“Chaque mesure perturbe le système”

comme un avantage dans l'échange de messages que l'on veut garder secrets, et d'éviter ainsi l'espionnage.

En effet la cryptographie quantique se sert de l'énoncé équivalent :

“Pas de perturbation \implies il n'y a pas eu d'espion”

pour être sûr que le message n'a pas été intercepté.

Nous allons voir précisément comment utiliser cela pratiquement. Il y a déjà des dispositifs expérimentaux de cryptographie quantique (notée C.Q.). Et la C.Q. pourrait bien être la première application commerciale de la physique quantique fonctionnant au niveau de l'état quantique individuel.

4.8.1 Cryptographie classique symétrique à clef secrète

Comme il est d'usage, considérons deux personnages Alice et Bob.

Alice veut envoyer un message à Bob. Pour cela elle écrit son message en base deux (suite de 0 et 1), et dispose aussi d'une clef qui est une suite de 0 et 1 de même longueur, et envoie à Bob le message crypté obtenu par l'opération suivante :

$$\text{message crypté} = \text{message} \oplus \text{clef}$$

où le signe \oplus est l'addition modulo 2 sans retenue :

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 1 \oplus 0 = 1, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0.$$

Exemple : message = 10100110, clef=00110111, alors message crypté=10010001.

Exercice En supposant que Bob possède aussi la clef, quelle formule doit-il utiliser pour décrypter le message ?

Solution :

$$\text{message} = \text{message crypté} \oplus \text{clef}$$

Exemple : message crypté = 10010001 , clef = 00110111, alors message = 10100110.

Remarque : cette méthode de cryptographie est la seule prouvée être sans faille. Les inconvénients sont que Alice et Bob doivent être les seuls à connaître la clef secrète, et qu'ils disposent d'une clef secrète aussi longue que le message à se transmettre. Cette méthode s'appelle "one time pad" (1926). La difficulté est donc que Alice et Bob partagent une clef secrète. C'est là qu'intervient la cryptographie quantique présentée ci-dessous.

La méthode la plus utilisée (sur internet par exemple) est cependant un encryptage asymétrique à clef publique, de type R.S.A. (1978), basé sur la factorisation de grands nombres premiers. Mais dans ce cas, il n'est pas prouvé qu'il n'existe pas d'algorithme rapide permettant de décrypter le message.

4.8.2 Le protocole B.B.84 pour partager une clef secrète

Pour appliquer la méthode dite "one time pad" (1926) présentée plus haut, Alice et Bob doivent partager une clef (suite de 0 et 1) connue d'eux seuls.

C'est là que la mécanique quantique intervient. Cette méthode a été mise au point récemment et utilise non pas des spins 1/2, mais les 2 états de polarisation de la lumière : l'échange d'une clef secrète se fait via l'échange de photons dans une fibre optique.

Pour simplifier la présentation, nous remplaçons la polarisation de la lumière par le spin 1/2 : nous supposons que Alice et Bob échangent des particules ayant deux états possibles de spin 1/2.

Alice et Bob ont chacun de leur côté un appareil de type Stern-Gerlach qui permet à Alice de polariser le spin de la particule dans l'état qu'elle veut, et à Bob de mesurer ce spin par rapport à une direction choisie. Voir figure 4.8.1.

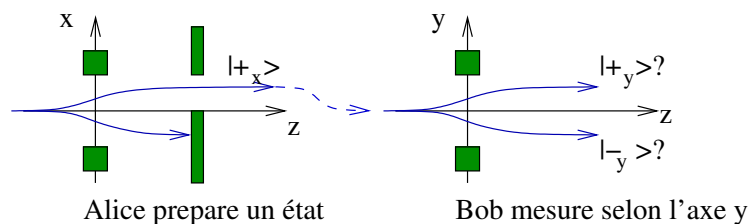


FIGURE 4.8.1 – Alice prépare un état de spin, polarisé selon x ou y . Bob ensuite détecte la polarisation avec un appareil orienté selon x ou y .

On appelle z la direction de propagation. Ils utilisent deux directions possibles pour leur appareil : x ou y , ce qui correspond à deux bases différentes du spin, notées pour

simplifier :

$$\begin{aligned} B_x : \quad & |+_x\rangle \equiv 0 \quad , \quad |-_x\rangle \equiv 1 \\ B_y : \quad & |+_y\rangle \equiv 0 \quad , \quad |-_y\rangle \equiv 1 \end{aligned}$$

(il est habituel en théorie de l'information quantique de noter une base de deux états quantiques par $|0\rangle, |1\rangle$, et de l'appeler **quantum bit** ou **qbit**).

Voici la séquence des opérations :

1. Alice envoie des particules individuelles à Bob. Pour chacune d'elle, elle choisit l'état de spin au hasard parmi les quatre ci-dessus.

Pour Alice, cela correspond à une suite de qbits (0 et 1) associée à une suite de Bases, exemple :

0	1	1	0	1	0	0
B_x	B_x	B_y	B_x	B_y	B_y	B_x

2. Pour chaque particule reçue, Bob mesure l'état de spin par rapport à une base B_x ou B_y qu'il choisit au hasard. Cela lui donne un résultat, une suite de qbits (0 et 1). Exemple :

0	1	0	0	1	1	0
B_x	B_y	B_x	B_x	B_y	B_x	B_x

Propriété :

- Si Bob a fait le même choix de base que Alice, alors il détecte le même qbit. (En effet si Alice envoie $|+_x\rangle$, et que Bob détecte dans la direction x , il mesurera à coup sûr $|+_x\rangle$).
 - Pour les qbits où Bob a fait un choix différent de base, il a en moyenne 50% d'erreurs. (En effet si Alice envoie $|+_x\rangle$, et que Bob détecte dans la direction y , on décompose $|+_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+_y\rangle + |-_y\rangle)$, ce qui donne une probabilité $P_{|+_y\rangle} = 1/2$ et $P_{|-_y\rangle} = 1/2$)
 - Au total, Bob a donc en moyenne 25% d'erreur sur sa suite de qbit.
3. Bob annonce (publiquement) à Alice la suite de base (suite $B_x, B_y \dots$) qu'il a choisit (et pas les résultats).
 4. Parmi cette suite, Alice annonce (publiquement) à Bob quelle sous suite correspond au même choix. Exemple ici :

B_x			B_x	B_y		B_x
-------	--	--	-------	-------	--	-------

5. Alice et Bob ne gardent chacun que cette sous suite de qbit, ce qui correspond en moyenne à 50% des événements. **Cette suite de 0 et 1 est finalement leur clef secrète.** Exemple ici : (0,0,1,0).

Pour être sûr que cette clef est secrète (i.e. connus d'eux seuls) il faut montrer que une tierce personne nommée Eve ne puisse intercepter leur échange de qbit sans que Bob et Alice ne s'en aperçoive (Eve est le nom habituel donné à l'espion en cryptologie, et vient de l'anglais *eavesdropper*="qui écoute aux portes").

Pour cela :

Théorème de non-clonage : “Eve ne peut pas faire une copie de qbits sans les perturber”

preuve : Supposons la possibilité d’une opération idéale de copie (i.e. sans perturbation) d’un état quantique $|\psi\rangle$ par Eve dans un registre, symbolisée par la transformation :

$$|\psi\rangle \otimes |\text{Registre}\rangle \otimes |\text{Eve}_0\rangle \longrightarrow |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |\text{Eve}_\psi\rangle$$

Appliqué aux états $|+x\rangle, |-x\rangle$, cela donne :

$$|+x\rangle \otimes |\text{Registre}\rangle \otimes |\text{Eve}_0\rangle \longrightarrow |+x\rangle \otimes |+x\rangle \otimes |\text{Eve}_+\rangle$$

$$|-x\rangle \otimes |\text{Registre}\rangle \otimes |\text{Eve}_0\rangle \longrightarrow |-x\rangle \otimes |-x\rangle \otimes |\text{Eve}_-\rangle$$

et d’après le principe de superposition, on aurait pour $|+y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+x\rangle + |-x\rangle)$

$$|+y\rangle \otimes |\text{Registre}\rangle \otimes |\text{Eve}_0\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|+x\rangle \otimes |+x\rangle \otimes |\text{Eve}_+\rangle + |-x\rangle \otimes |-x\rangle \otimes |\text{Eve}_-\rangle)$$

qui est différent du résultat qu’il faudrait : $|+y\rangle \otimes |+y\rangle \otimes |\text{Eve}_+\rangle$. \square .

On peut imaginer comme parade que Eve intercepte et mesure l’état de spin, et renvoie à Bob le même état pour faire croire qu’il n’y a pas eu interception. Si elle le fait, elle ne fait pas le même choix de base que Alice dans 50% des cas ; par conséquent Alice et Bob ont 25% d’erreur sur leur clef finale. En échangeant entre eux (et publiquement) une fraction seulement de cette clef, ils peuvent se rendre compte de la présence de Eve, et décider de ne pas conserver la clef.

4.9 Interaction du spin avec le champ électromagnétique

4.9.1 Cas de l’électron

(cf Sakurai [Sak67]p78, Cohen p980)

L’interaction d’un électron de masse m , de charge $q = -e$, de spin 1/2, avec un champ électromagnétique extérieur \vec{A}, U est décrite dans l’espace de Hilbert

$$\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_{espace} \otimes \mathcal{H}_{spin}$$

par le **Hamiltonien de Pauli** :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\vec{\sigma} \cdot \left(\hat{\vec{p}} - q\vec{A}(\hat{\vec{x}}, t) \right) \right)^2 + qU(\hat{\vec{x}}, t) \quad (4.9.1)$$

où $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ sont les matrices de Pauli agissant dans l’espace du spin \mathcal{H}_{spin} .

Cet Hamiltonien s’écrit aussi sous la forme plus commode :

$$\boxed{\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{p}} - q\vec{A}(\hat{\vec{x}}, t) \right)^2 - \vec{\mathcal{M}}_e \cdot \vec{B} + qU(\hat{\vec{x}}, t)} \quad (4.9.2)$$

avec

$$\vec{\mathcal{M}}_e = \frac{q}{m} \vec{S} \quad \text{: moment magnétique de l'électron} \quad (4.9.3)$$

Preuve : On utilise la relation (A.2.2), et $\hat{p} \wedge \vec{A} = -i\hbar \text{rot}(\vec{A}) - \vec{A} \wedge \hat{p}$ (à démontrer). \square

Remarques

- La forme (4.9.1), découle directement de l'équation de Dirac dans la limite non relativiste. L'équation de Dirac est une équation d'onde qui a une écriture assez "naturelle" et qui décrit la fonction d'onde d'un électron en théorie relativiste. (Il y a cependant des problèmes théoriques avec l'équation de Dirac, qui ne sont résolus que dans le cadre de la théorie quantique des champs).
- Le terme (4.9.3) est très semblable à l'expression du moment magnétique d'un dipôle magnétique en mécanique classique : considérons une particule classique de charge q sur une orbite circulaire de rayon r . La période de rotation est $\tau = \frac{2\pi r}{v}$. Le courant correspondant est

$$I = \frac{q}{\tau} = \frac{qv}{2\pi r}$$

et la surface du dipôle magnétique créé est $\vec{S} = \pi r^2 \cdot \vec{u}$ (\vec{u} est un vecteur normal unitaire). Par ailleurs le moment orbital³ est

$$\vec{L} = \vec{p} \wedge \vec{r} = m\vec{v} \wedge \vec{r} = mvr\vec{u}.$$

Alors le moment magnétique est :

$$\vec{\mathcal{M}}_{class} = I \cdot \vec{S} = \frac{qv}{2\pi r} \pi r^2 \cdot \vec{u} = \frac{qv}{2} r \cdot \vec{u} = \frac{q}{2m} \vec{L}$$

qui est comparable à (4.9.3) mis à part le facteur 1/2. La forme (4.9.1) a donc l'avantage de donner une origine au manque de ce facteur 1/2, pas évident a priori.

4.9.2 Autres particules de spin 1/2

cf Bransden p.533, [BC89].

Pour une particule quelconque de spin 1/2, de masse m , de charge q , le Hamiltonien est semblable à (4.9.2) :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - q\vec{A}(\hat{x}, t) \right)^2 - \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B} + qU(\hat{x}, t)$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}} &= g\mu \frac{\vec{S}}{\hbar} && \text{: moment magnétique} \\ \mu &= \frac{|e|\hbar}{2m} && \text{: magnéton} \\ &g && \text{: rapport gyromagnétique} \end{aligned}$$

3. On verra au chapitre ?? que le moment angulaire \vec{L} sont les générateurs des rotations dans \mathbb{R}^3 et joue donc un rôle analogue aux opérateurs de spin \vec{S} .

Valeurs expérimentales :

	Électron	Proton	Neutron
g	2,002319314	5,5883	-3,8263

Remarques :

- Le Hamiltonien de Pauli (4.9.1),(4.9.3), donne $g_e = 2$. La valeur expérimentale un peu différente s'explique à cause d'effets d'influences de l'électron sur le champ électromagnétique quantique que l'on peut calculer dans le cadre de l'électrodynamique quantique. Les valeurs de g pour le proton et le neutron sont dues à la structure interne des ces particules (structure de quarks et de gluons), mais on ne connaît pas à ce jour de calcul précis qui le montre.
- Le moment magnétique du neutron est anti-parallèle à son spin. (signe négatif de g_n).
- Pour le neutron ou proton, $\mu_N = e\hbar/(2m_p)$ s'appelle le **magnéton nucléaire**. Pour l'électron $\mu_B = e\hbar/(2m_e)$ s'appelle le **magnéton de Bohr**.

4.9.3 Évolution du spin seul, précession de Larmor

Nous discutons ici l'évolution de l'état de spin 1/2 d'une particule, qui pourrait être un noyau nucléaire de spin 1/2, dans un matériau.

La particule est supposée être au repos, ce qui permet d'oublier l'état quantique spatial de celle-ci, et de ne traiter que l'état de spin $|s(t)\rangle \in \mathcal{H}_{spin}$. (Pour être plus précis, on peut supposer que le champ \vec{B} est uniforme, et que l'état spatial de la particule est dans l'état fondamental de $\hat{H}_{espace} = \frac{1}{2m} (\hat{p} - q\vec{A}(\vec{x}, t))^2 + qU(\vec{x}, t)$.)

Ainsi, $|\psi(t)\rangle = |\psi_{0,espace}\rangle \otimes |s(t)\rangle$, et on ne s'intéresse que à la dynamique de $|s(t)\rangle \in \mathcal{H}_{spin}$ décrite par :

$$\hat{H}_{spin} = -\frac{g\mu}{\hbar} \vec{S} \cdot \vec{B}$$

qui a deux valeurs propres $E_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \hbar \omega$, $\omega = \frac{g\mu}{\hbar} |\vec{B}|$. L'équation d'évolution de Schrödinger est

$$i\hbar \frac{d|s(t)\rangle}{dt} = \hat{H}|s(t)\rangle$$

Nous cherchons à décrire l'évolution du vecteur spatial de spin défini eq(4.4.1) page 181 :

$$\vec{s}(t) = \langle \hat{\vec{S}} \rangle = \langle s(t) | \hat{\vec{S}} | s(t) \rangle$$

Nous rappelons que inversement le vecteur $\vec{s}(t)$ défini l'état $|s(t)\rangle$ à une phase près. Comme $\|\vec{s}(t)\| = \frac{\hbar}{2}$, cette évolution défini des trajectoires sur la sphère de Bloch.

Propriété

$\vec{s}(t)$ évolue d'après les "équations de Bloch" :

$$\frac{d\vec{s}(t)}{dt} = \frac{dH_{spin}}{d\vec{s}} \wedge \vec{s} = \left(-\frac{g\mu}{\hbar} \vec{B} \right) \wedge \vec{s} \tag{4.9.4}$$

où $H_{spin} = -\frac{g\mu}{\hbar} \vec{s} \cdot \vec{B}$ est le Hamiltonien (Classique).

Les trajectoires sont donc des cercles autour du champ \vec{B} , à la fréquence

$$\omega = \frac{g\mu}{\hbar} |\vec{B}|$$

dans le sens indirect. Voir figure 4.9.1.

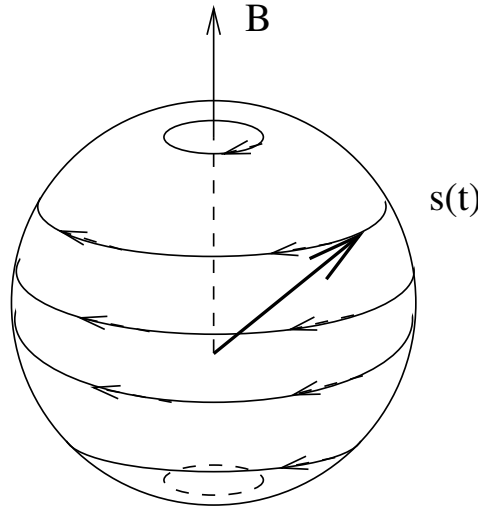


FIGURE 4.9.1 – **Précession de Larmor** du spin : rotation du vecteur $\vec{s}(t)$ autour du champ magnétique \vec{B} .

Le rapport de fréquence de précession du spin d'un proton et d'un électron est

$$\frac{\omega_p}{\omega_e} = \frac{g_p \mu_N}{g_e \mu_B} \simeq 5000$$

preuve : (TD)

- Argument rapide : lors de l'évolution, l'énergie est constante, donc $\vec{s} \cdot \vec{B}$ est constant donc l'angle $\widehat{\vec{s}\vec{B}}$ est constant, ce qui oblige le spin \vec{s} à tourner autour de \vec{B} .
- Autre preuve rapide, en coordonnées : on peut supposer que $\vec{B} = B \vec{e}_z$. Alors $\hat{H}_{spin} = -\frac{g\mu B}{\hbar} \hat{S}_z$. Il est utile de travailler dans la base $(|+_z\rangle, |-_z\rangle)$: si

$$|s(0)\rangle = a(0)|+_z\rangle + b(0)|-_z\rangle$$

alors

$$|s(t)\rangle = \exp\left(-i\hat{H}t/\hbar\right) |s(0)\rangle = a(t)|+_z\rangle + b(t)|-_z\rangle$$

avec $a(t) = a(0)e^{-iEt/\hbar}$, $b(t) = b(0)e^{+iEt/\hbar}$, et $E = -\frac{g\mu B}{2}$. D'après la coordonnées stéréographiques (4.4.2) page 182,

$$z(t) = \frac{a(t)}{b(t)} = z(0) e^{-2iEt/\hbar} = z(0) e^{i\omega t}$$

donc $\varphi(t) = -\omega t + \varphi(0)$ et $\theta(t) = \theta(0) = cste$, $\omega = \frac{2|E|}{\hbar} = \frac{g\mu}{\hbar} |\vec{B}|$.

- Autre argument géométrique : le Hamiltonien $\hat{H}_{spin} = -\omega S_z$ a justement l'expression du générateur des rotations $\hat{S}_{\vec{u}}$ (4.5.2) autour de l'axe \vec{u} qui est ici l'axe \vec{B} . De cette façon on obtient directement que le mouvement est une rotation, et on obtient aussi la vitesse angulaire.

Remarques :

- L'énergie de la trajectoire classique du spin est $E_{spin} = -\frac{g\mu}{\hbar} \vec{s} \cdot \vec{B}$, qui est extremum pour \vec{s} et \vec{B} parallèles. On vérifie en particulier que dans ces derniers cas, ce sont deux points fixes de la dynamique de $\vec{s}(t)$, correspondant aux deux états propres \hat{H}_{spin} .
- On a des coordonnées canoniques (q, p) sur la sphère montrant que la sphère S^2 est un espace de phase classique pour la dynamique du vecteur classique $\vec{s}(t)$ (θ, φ sont les coordonnées sphériques) :

$$\begin{aligned} q &= \cos \theta \\ p &= s \cdot \varphi \end{aligned}$$

Alors l'équation de Bloch (4.9.4) s'écrit sous la forme Hamiltonienne standard :

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H_{spin}}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H_{spin}}{\partial q} \end{aligned}$$

preuve : voir [Fau10a].

@@TD : Décrire la trajectoire du neutron de spin 1/2 dans champ magnétique in-homogène. Exp. de Stern-Gerlach

4.9.4 Résonance Magnétique Nucléaire (R.M.N.) et Imagerie Magnétique Résonante (I.R.M.)

L'interaction du spin des particules avec un champ magnétique décrite ci-dessus, est très utilisée pour faire de **l'imagerie** dans beaucoup de domaines (physique des matériaux, biologie, médecine,...). Ces techniques d'imagerie se sont très développées ces dernières années et sont en particulier un outil formidable en médecine pour l'étude des tissus vivants, et a révolutionné le domaine (voir par exemple une carte précise interactive du cerveau <http://www.med.harvard.edu/AANLIB/cases/caseNA/pb9.htm>).



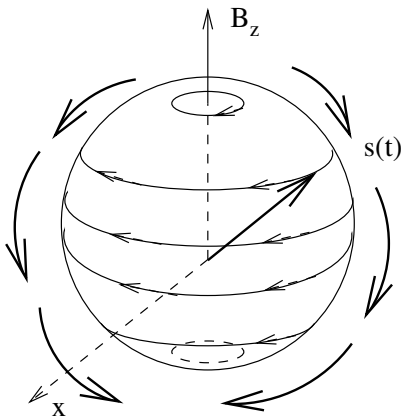
Ces techniques sont basées sur l'interaction d'un champ magnétique appelé "sonde" avec les spins des noyaux nucléaires du milieu étudié.

Voici la technique utilisée, décrite de façon très simplifiée :

1. L'échantillon est placé dans un champ magnétique constant \vec{B}_0 parallèle à l'axe z . $B_0 \simeq 2 \rightarrow 10T$. Les états d'énergie de chaque spin (pour simplifier supposé être 1/2, et considéré comme isolé) est donc $E_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \hbar \omega$. A température ambiante, $kT/\hbar\omega \simeq 10^5$, donc d'après la loi de Boltzmann, à l'équilibre, il y a une différence de population très faible entre les deux états : $N_+/N_- = e^{-\Delta E/kT} \simeq 1 - \frac{\Delta E}{kT} = 1 - 10^{-5}$. C'est cependant ces petites différences qui feront un signal observable.
2. A un moment donné, et sur une courte durée (pulse de quelques $\mu s.$), le champ magnétique appliqué est de la forme :

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z + B_1 \cos(\omega_1 t) \vec{e}_x$$

où B_0 est le même, et $B_1 \ll B_0$ est faible, mais oscille à une fréquence ω_1 bien choisie. Si la fréquence ω_1 est suffisamment proche de la fréquence ω , il est montré en TD qu'il y a un phénomène de **résonance** : un spin 1/2 peut basculer vers l'état $-1/2$, si la durée du pulse est aussi bien ajustée (et inversement). (voir figure).



Ce pulse a donc pour effet d'inverser les populations N_+, N_- . Il faudra ensuite un certain temps, appelé temps de relaxation $T_2 (\simeq 1s)$, pour que les populations retrouvent leur valeurs d'équilibre selon z . Durant tout ce temps, les spins ($+1/2$ ou $-1/2$) qui sont ainsi rentrés en résonance ont **émit un champ magnétique induit** qui est détecté collectivement. Le signal temporel ainsi détecté, appelé Free Induction Decay (FID), constitue l'information de base sur l'échantillon.

3. **Ce signal recueilli dépend de plusieurs paramètres qui caractérisent le noyau nucléaire, et permettent ainsi de l'identifier :**

- (a) Il y a un signal, si il y a résonance. Il faut $\omega_1 \simeq \omega$. Or $\omega = \frac{g\mu}{\hbar} B$ dépend de g , B , qui dépendent du noyau. Par exemple $g = 2.016$ pour un spin $1/2$ de Fe^{3+} dans le composé MgO . La valeur de $B = B_0(1 - s)$ ressentie par le noyau est la valeur B_0 modifiée légèrement par l'environnement électronique du noyau (les électrons créent un champ magnétique induit, appelé diamagnétique). $s \simeq 10^{-6}$. Cet effet s'appelle le **déplacement chimique**.
 - (b) Il y a une faible interaction entre les spins de noyaux nucléaires voisins, qui dépend de la **configuration de la molécule** dans laquelle se trouve le noyau. Ces interaction, se traduisent par des décalages de fréquences ω , ou des multiplets dans le cas de noyau identiques comme dans CH_4 .
 - (c) **Le temps de relaxation T_2 dépend beaucoup du matériau**. C'est essentiellement ce signal qui est utilisé en imagerie.
 - (d) L'intensité du signal est aussi proportionnelle à la concentration des noyaux identifiés.
4. Afin de faire de l'imagerie, il faut une bonne résolution du signal en espace et en temps. Cela est possible en utilisant un champ $B_0(\vec{x})$ qui est en fait non homogène, et légèrement variable en temps (idées de P. Lanterbur's 1971 et P. Mansfield 1973, voir www.beyonddiscovery.org) . Ainsi un signal de résonance détecté, pourra être associé à une région précise de l'espace. Cela permet des **résolution spatiales $1mm \times 1mm$ et temporelles $40ms$** .

4.10 Conseils de Lecture

- Cohen-Tannoudji [CBF], chapitre IV.
- Feynman [Fey63], chapitres 6,11.