

Annexe A

Formules

A.1 Analyse et intégrales

A.1.1 Intégrales Gaussiennes

Formule 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-X^2) dX = \sqrt{\pi} \quad (\text{A.1})$$

Démonstration. Soit $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Alors

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right) \\ &= \int_0^{\infty} dr r \int_0^{2\pi} d\theta e^{-r^2} = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = 2\pi \left(\left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} \right) = \pi \end{aligned}$$

donc $I = \sqrt{\pi}$. □

Formule 2 Soit

$$Q(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$A, B, C \in \mathbb{C}$ et $\Re(A) > 0$ pour la convergence.

Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-Q(x)) dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(-C + \frac{B^2}{4A}\right) \quad (\text{A.2})$$

Preuve : @@

Formule 3. Pour $n \geq 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

où

$$(2n-1)!! := (2n-1)(2n-3)\dots 5.3.1 = \frac{(2n)!}{2^n (n!)}$$

appelée **double factorielle**. (par symétrie, pour une puissance impaire $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} dx = 0$).

Démonstration. Il faut dériver la formule $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ par rapport à α et faire $\alpha = 1$ à la fin : soit

$$I_\alpha := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

On a

$$\frac{d^n I_\alpha}{d\alpha^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-x^2)^n e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi} \left(\frac{-1}{2}\right) \left(\frac{-3}{2}\right) \dots \left(\frac{-2n-1}{2}\right)$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

□

A.2 Algèbre

A.2.1 Diagonalisation d'une matrice 2×2

Formule générale : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Alors la matrice A se diagonalise¹ :

$$A = PDP^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} a-d+\sqrt{\Delta} & a-d-\sqrt{\Delta} \\ 2c & 2c \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{a+d+\sqrt{\Delta}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a+d-\sqrt{\Delta}}{2} \end{pmatrix},$$

1. Avec le logiciel gratuit **xcas** de calcul formel (pour l'obtenir, taper **xcas** dans google). Et dans **xcas**, écrire : $A := [[a,b],[c,d]]$; $D := \text{eigv1}(A)$; $P := \text{eigv}(A)$; On vérifiera que $\text{simplify}(P*D*\text{inv}(P))$; redonne bien la matrice A .

avec

$$\Delta = (a - d)^2 + 4bc$$

Remarque : la matrice P contient les vecteurs propres en colonne, et ils sont définis à la multiplication près par un nombre.

Cas particulier : Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \bar{b} & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} |b| & -|b| \\ \bar{b} & \bar{b} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} |b| & 0 \\ 0 & -|b| \end{pmatrix}$$

A.2.2 Relations de commutation

On a :

$$\begin{aligned} [\hat{q}, \hat{p}] &= i\hbar \\ [\hat{q}, F(\hat{p})] &= i\hbar \frac{dF(\hat{p})}{d\hat{p}} \\ [F(\hat{q}), \hat{p}] &= i\hbar \frac{dF(\hat{p})}{d\hat{q}} \end{aligned}$$

preuve : Voir [CBF]p 172.

Si les opérateurs A, B vérifient :

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$$

alors on a la **formule de Glauber**

$$\exp(A) \exp(B) = \exp([A, B]/2) \exp(A + B) \quad (\text{A.3})$$

preuve : Voir [CBF]p 174, ou TD.

Autre preuve : poser $C = i[A, B]$; Alors les trois opérateurs (A, B, C) vérifient l'algèbre de Weyl-Heisenberg (comme $\hat{q}, \hat{p}, i\hbar$) :

$$C = [A, B], \quad [A, C] = [B, C] = 0$$

Considérons les matrices :

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui vérifient aussi la même algèbre. On procède comme dans la section 2.2.6.4, on vérifie sur les matrices 3×3 que $e^a e^b = e^{c/2} e^{a+b}$ \square .

A.2.3 Algèbre des matrices de Pauli

On a

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) \quad (\text{A.4})$$

valable même si \vec{A}, \vec{B} sont des opérateurs.

Si \vec{u} vecteur unitaire :

$$\exp(i\varphi \vec{\sigma} \cdot \vec{u}) = \cos \varphi + i \sin \varphi \vec{\sigma} \cdot \vec{u}$$

A.2.4 Relations sur les matrices

Pour une matrice A (ou un opérateur à Trace) on a :

$$\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$$

A.2.5 Inverse d'une matrice 2×2

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\text{Det}(A) = ad - bc \neq 0$ alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

A.2.6 Relations de commutations

Pour 3 opérateurs A, B, C on a

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

Démonstration. On écrit :

$$\begin{aligned} [AB, C] &= ABC - CAB = A([B, C] + CB) - CAB \\ &= A[B, C] + [A, C]B \end{aligned}$$

□

A.3 Calcul différentiel dans \mathbb{R}^3

références : Jackson [Jac75], début et fin.

Ici $f(\vec{x})$ représente une fonction. $\vec{V}(\vec{x})$ représente un champ de vecteurs.

A.3.1 Rappels sur le calcul différentiel vectoriel.

Voir Feynmann “Electromagnétisme”, chap 2.

- Pour un champ scalaire $V(x, y, z)$, le champ vectoriel $\vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}}V$ a pour coordonnées : $W_x = \frac{\partial V}{\partial x}$, $W_y = \frac{\partial V}{\partial y}$, $W_z = \frac{\partial V}{\partial z}$. On écrit aussi : $\overrightarrow{\text{grad}}V = \vec{\nabla}V$.
- Si $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ sont les coordonnées du champ vectoriel $\vec{E}(\vec{x})$, alors le champ $\vec{W} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}$ a pour coordonnées :

$$\begin{aligned} W_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ W_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ W_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{aligned}$$

on s'en rappelle en écrivant : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$ avec “l'opérateur vectoriel” $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

- Et

$$\text{div}\vec{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$$

qui se retient en écrivant $\text{div}\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$.

- Le **Laplacien** ΔV est le champ scalaire :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Propriétés importantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}V) &= \vec{0} \\ \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) &= 0 \\ \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}V) &= \Delta V \\ \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{a})) - \Delta\vec{a} \end{aligned}$$

Formules de Stokes

- Si γ est un chemin dont a, b sont les extrémités, alors

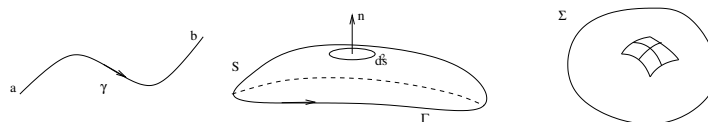
$$\int_{\gamma} \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{l} = f(b) - f(a)$$

- Si S est une surface dont γ est le contour, alors

$$\int_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) \cdot \vec{n} d^2s = \int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l}$$

- Si V est un volume dont le bord est la surface $S = \partial V$, alors

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{V}) d^3v = \int_{\Sigma=\partial V} \vec{V} \cdot \vec{n} d^2s$$



Lemme de Poincaré : Réciproquement les formules suivantes

$$\begin{aligned} \vec{\operatorname{grad}} f = 0 &\Rightarrow f = \text{cste} \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{u} = 0 &\Rightarrow \exists f, \operatorname{tq} \vec{u} = \vec{\operatorname{grad}} f \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 &\Rightarrow \exists \vec{u}, \operatorname{tq} \vec{v} = \vec{\operatorname{rot}} \vec{u} \end{aligned}$$

ne sont pas toujours vraies. Elles sont vraies sur un domaine \mathcal{D} de l'espace qui est une boule (contractible en un point), ne contenant donc pas de trous.

A.3.2 En coordonnées sphériques :

$$\vec{\operatorname{grad}}(f) = (\partial_r f) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r} \partial_\theta f\right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi f\right) \vec{e}_\varphi \quad (\text{A.5})$$

A.3.3 Relations

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

$$\vec{\operatorname{rot}} (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} (\operatorname{div} \vec{b}) - \vec{b} (\operatorname{div} \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b}$$

$$\vec{\operatorname{div}} (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{\operatorname{rot}}(\vec{a}) \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{\operatorname{rot}}(\vec{b}) \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{\operatorname{rot}} (f \cdot \vec{V}) = \vec{\operatorname{grad}}(f) \wedge \vec{V} + f \vec{\operatorname{rot}}(\vec{V}) \quad (\text{A.7})$$

$$\operatorname{div} (f \vec{a}) = \operatorname{grad} (f) \cdot \vec{a} + f \cdot \operatorname{div}(\vec{a}) \quad (\text{A.8})$$

$$\operatorname{div}(\vec{e}_r) = \frac{2}{r}$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{e}_r = \frac{1}{r} (\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r) \equiv \frac{\vec{a}_\perp}{r}$$