Université Joseph Fourier. Master 1 Physique
TD de mécanique quantique

Solution du TD n°7
Un modèle simple de l'émission spontanée

---

1 Un modèle simple de l'emmission spontanée : un état quantique couplé à un continuum

1. Les états propres et valeurs propres de $\hat{H}$ sont notés

$$\hat{H}|\psi_\mu\rangle = \varepsilon_\mu|\psi_\mu\rangle, \quad \mu \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

et sont inconnus pour le moment. On multiplie cette équation par $\langle k|$ donnant

$$\langle k|H|\psi_\mu\rangle = \varepsilon_\mu\langle k|\psi_\mu\rangle$$

On utilise la relation de fermeture $\hat{I} = |\varphi\rangle\langle\varphi| + \sum_{k'}|k'\rangle\langle k'|$ et on écrit :

$$\langle k|H|\psi_\mu\rangle = \langle k|H\hat{I}|\psi_\mu\rangle = \langle k|H|\varphi\rangle\langle\varphi|\psi_\mu\rangle + \sum_{k'}\langle k|H|k'\rangle\langle k'|\psi_\mu\rangle = v\langle\varphi|\psi_\mu\rangle + E_k\langle k|\psi_\mu\rangle$$

cela donne

$$v\langle\varphi|\psi_\mu\rangle + E_k\langle k|\psi_\mu\rangle = \varepsilon_\mu\langle k|\psi_\mu\rangle$$

On déduit donc (supposant $\varepsilon_\mu - E_k \neq 0$) que

$$\langle k|\psi_\mu\rangle = \frac{v}{\varepsilon_\mu - E_k}\langle\varphi|\psi_\mu\rangle$$

2. De même on multiplie l'équation (1) par $\langle\varphi|$ donnant

$$\begin{aligned}
\langle\varphi|H|\psi_\mu\rangle &= \varepsilon_\mu\langle\varphi|\psi_\mu\rangle \\
\Leftrightarrow E_\varphi\langle\varphi|\psi_\mu\rangle + \sum_{k'} v\langle k'|\psi_\mu\rangle &= \varepsilon_\mu\langle\varphi|\psi_\mu\rangle \\
\Leftrightarrow v\sum_{k'}\langle k'|\psi_\mu\rangle &= \varepsilon_\mu\langle\varphi|\psi_\mu\rangle \\
\Leftrightarrow \sum_{k'}\frac{v^2}{\varepsilon_\mu - E_{k'}} &= \varepsilon_\mu \quad \Leftrightarrow \frac{v^2}{\delta}\sum_{k'}\frac{1}{\varepsilon_\mu/\delta - k'} = \varepsilon_\mu \\
\Leftrightarrow \frac{v^2}{\delta}\frac{\pi}{\tan(\pi\varepsilon_\mu/\delta)} &= \varepsilon_\mu
\end{aligned}$$

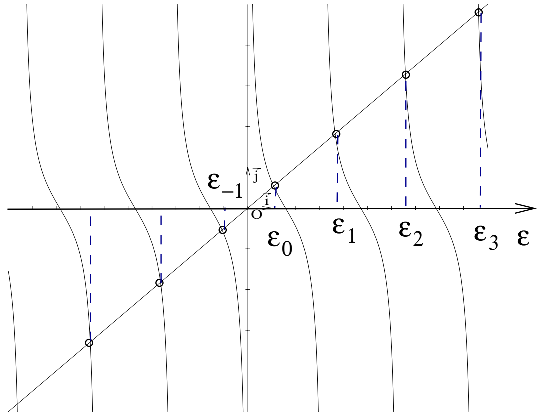
soit

$$\left(\frac{2}{\Gamma\hbar}\right)\varepsilon_\mu = \frac{1}{\tan(\pi\varepsilon_\mu/\delta)}$$

On trace les fonctions

$$f(E) = \left(\frac{2}{\hbar\Gamma}\right)E, \qquad g(E) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi E}{\delta}\right)}$$

et les intersections donnent graphiquement les solutions ε_μ, $\mu \in \mathbb{Z}$. (On vérifie que $\varepsilon_\mu - E_k \neq 0$)



3. On a $1 = \langle\psi_\mu|\psi_\mu\rangle = \langle\psi_\mu|\varphi\rangle\langle\varphi|\psi_\mu\rangle + \sum_{k'}\langle\psi_\mu|k'\rangle\langle k'|\psi_\mu\rangle = |\langle\varphi|\psi_\mu\rangle|^2 \left(1 + \sum_{k'}\left(\frac{v}{\varepsilon_\mu - E_k}\right)^2\right)$. Donc

$$\begin{aligned}\langle\varphi|\psi_\mu\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}} \qquad N = 1 + \sum_{k'}\left(\frac{v}{\varepsilon_\mu - E_{k'}}\right)^2 \\ \langle k|\psi_\mu\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{v}{\varepsilon_\mu - E_k}\end{aligned}$$

On utilise $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \mathrm{cotan}^2(x)$, et alors

$$N = 1 + \sum_{k'}\left(\frac{v}{\varepsilon_\mu - E_{k'}}\right)^2 = 1 + \frac{v^2}{\delta^2}\sum_{k'}\frac{1}{\frac{\varepsilon_\mu}{\delta} - k'} = 1 + \frac{v^2}{\delta^2}\frac{\pi^2}{\sin^2\left(\frac{\pi\varepsilon_\mu}{\delta}\right)} = 1 + \frac{v^2\pi^2}{\delta^2}\left(1 + \left(\frac{2}{\Gamma\hbar}\right)^2\varepsilon_\mu^2\right)$$

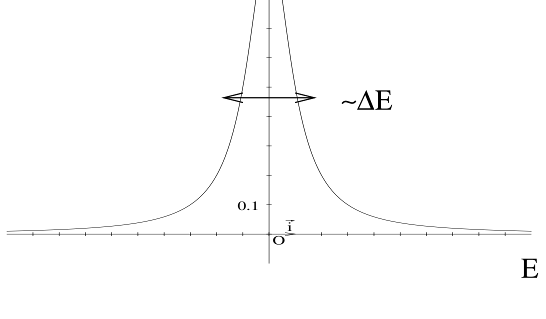
donc

$$|\langle\varphi|\psi_\mu\rangle|^2 = \left(1 + \frac{1}{\delta}\frac{\hbar\Gamma\pi}{2}\left(1 + \left(\frac{2}{\Gamma\hbar}\right)^2\varepsilon_\mu^2\right)\right)^{-1}$$

4. La probabilité de détecter l'état $|\varphi\rangle$ avec l'énergie ε_μ est $|\langle\varphi|\psi_\mu\rangle|^2$. La probabibilité de détecter l'énergie ε_μ dans l'intervalle $[E, E + dE]$ est donc

$$\begin{aligned}dP &= \sum_{\mu \text{ t.q. } \varepsilon_\mu \in [E, E+dE]} |\langle\varphi|\psi_\mu\rangle|^2 \simeq \frac{dE}{\delta}|\langle\varphi|\psi_\mu\rangle|^2 \\ &= \frac{dE}{\delta + \frac{\hbar\Gamma\pi}{2}\left(1 + \left(\frac{2}{\Gamma\hbar}\right)^2 E^2\right)} \\ &\simeq \frac{\left(\frac{2}{\hbar\pi\Gamma}\right)}{\left(1 + \left(\frac{2}{\Gamma\hbar}\right)^2 E^2\right)} dE\end{aligned}$$

$(dP/dE)(E)$ est une Lorenztienne de largeur $\Delta E \simeq \frac{\hbar\Gamma}{2}$.



L'énergie ε_μ est l'énergie de l'atome désexcité (constant) plus l'énergie du photon émis. Donc si l'on détecte l'énergie du photon émis (spectre de fluorescence), on obtiendra justement une telle courbe de forme Lorentzienne (en probabilité pour un photon, ou en intensité pour une assemblée de photons).

5. On a $|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\varphi\rangle$ et $\hat{I} = \sum_\mu |\psi_\mu\rangle\langle\psi_\mu|$. Donc

$$\begin{aligned}\langle\varphi|\psi(t)\rangle &= \sum_\mu \langle\varphi|e^{-i\hat{H}t/\hbar}\psi_\mu\rangle\langle\psi_\mu|\varphi\rangle \simeq \frac{1}{\delta}\int dE e^{-iEt/\hbar}\,|\langle\varphi|\psi_\mu\rangle|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dE e^{-iEt/\hbar}\frac{\left(\frac{2}{\hbar\pi\Gamma}\right)}{\left(1+\left(\frac{2}{\Gamma\hbar}\right)^2 E^2\right)} = \frac{1}{\pi}\int dx e^{-i\alpha x}\frac{1}{1+x^2} \\ &= e^{-\Gamma|t|/2}\end{aligned}$$

(avec $x = \frac{E2}{\hbar\Gamma}$, et $\alpha = \frac{\Gamma t}{2}$).

Donc la probabilité pour que à la date t l'atome soit toujours excité (le photon non émis) est

$$P(t) = |\langle\varphi|\psi(t)\rangle|^2 = e^{-\Gamma|t|}$$

La loi de deséxcitation de l'atome est donc une loi de décroissance exponentielle avec la constante de temps $\tau = 1/\Gamma$ donnée par la règle d'or de Fermi. Autrement dit la théorie des perturbation dépendant du temps donne le résultat exact dans ce modèle simple et soluble sans approximation ; cela n'est plus vrai si la densité spectrale n'est plus uniforme.

2 (Option) Symétrie dynamique de deux oscillateurs de même fréquence

1. On a

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{Q}_1 + i\hat{P}_1\right), \quad a_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{Q}_1 - i\hat{P}_1\right)$$

en effet $\left[a_1, a_1^+\right] = \frac{1}{2}\left(-i\left[Q_1, P_1\right] - i\left[Q_1, P_1\right]\right) = \hat{I}d$. De même pour $a_2, a_2^\dagger$. On a $a_1^\dagger a_1 = \ldots = \hat{H}_1 - \frac{1}{2}$, donc

$$\hat{H}_1 = \hat{N}_1 + \frac{1}{2}\hat{I}d, \qquad \hat{H}_2 = \hat{N}_2 + \frac{1}{2}\hat{I}d$$

2. On a $\hat{H} = \hat{N}_1 + \hat{N}_2 + \hat{I}d$. Donc

$$\hat{H}|n_1, n_2\rangle = (n_1 + n_2 + 1)\,|n_1, n_2\rangle$$

Les niveaux d'énergie sont donc

$$E = n_1 + n_2 + 1 \in \mathbb{N}^*$$

Une base de l'espace propre d'énergie E fixée, est le produit tensoriel $|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$ noté aussi $|n_1, n_2\rangle$, avec $n_1 = 0 \to E-1$, et $n_2 = E - 1 - n_1$. Donc sa dimension est E (un entier).

3. Généralement, on a pour 3 opérateurs A, B, C

$$\begin{aligned}[AB, C] &= ABC - CAB = A\left([B, C] + CB\right) - CAB \\ &= A\,[B, C] + [A, C]\,B\end{aligned}$$

Donc $\left[a^\dagger a, a\right] = \left[a^+, a\right] a = -a$ et de même $\left[a^+ a, a^+\right] = a^+\left[a, a^+\right] = a^+$.

(a) Les opérateurs d'indices différents commuttent entre eux. Donc

$$\begin{aligned}[N_1, J_+] &= \left[a_1^+ a_1, a_2^+ a_1\right] = a_2^+\left[a_1^+ a_1, a_1\right] = a_2^+\left(-a_1\right) = -J_+ \\ [N_1, J_-] &= \left[a_1^+ a_1, a_1^+ a_2\right] = \left[a_1^+ a_1, a_1^+\right] a_2 = a_1^+ a_2 = J_- \\ [N_2, J_+] &= \left[a_2^+ a_2, a_2^+ a_1\right] = \left[a_2^+ a_2, a_2^+\right] a_1 = a_2^+ a_1 = J_+ \\ [N_2, J_-] &= \left[a_2^+ a_2, a_1^+ a_2\right] = \left[a_2^+ a_2, a_2\right] a_1^+ = -a_1^+ a_2 = -J_-\end{aligned}$$

Donc $[H, J_+] = 0$, $[H, J_-] = 0$, et $[H, J_0] = 0$.

(b) On écrit $J_0 = \frac{1}{2}(N_2 - N_1)$. On obtient

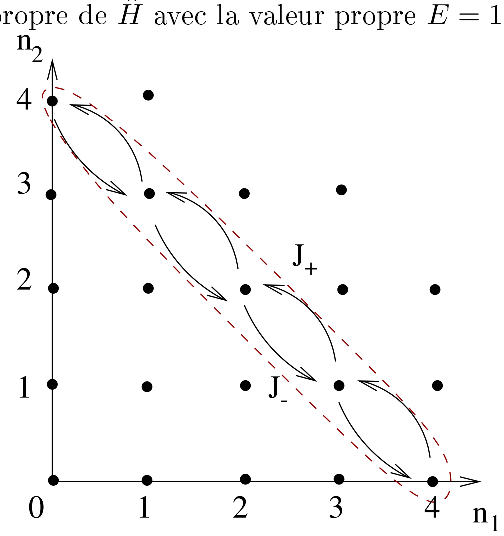
$$[J_0, J_+] = \frac{1}{2}[N_2 - N_1, J_+] = J_+$$

$$[J_0, J_-] = \frac{1}{2}[N_2 - N_1, J_-] = -J_-$$

$$\begin{aligned}[J_+, J_-] &= \left[a_2^+ a_1, a_1^+ a_2\right] = a_2^+ \left[a_1, a_1^+ a_2\right] + \left[a_2^+, a_1^+ a_2\right] a_1 \\ &= a_2^+ a_2 \left[a_1, a_1^+\right] + \left[a_2^+, a_2\right] a_1^+ a_1 \\ &= 2J_0\end{aligned}$$

On reconnait l'algèbre du groupe de rotations (groupes SU(2) ou SO(3)). Attention, il ne s'agit pas ici de rotation dans l'espace réel (x, y, z), mais dans l'espace de phase (Q_1, P_1, Q_2, P_2) des oscillateurs.

4. On $\hat{H}|n_1 n_2\rangle = (1 + n_1 + n_2)|n_1 n_2\rangle$. On utilise $a_1^+|n_1\rangle = \sqrt{n_1+1}|n_1+1\rangle$, et $a_1|n_1\rangle = \sqrt{n_1}|n_1 - 1\rangle$, pour déduire que $\hat{J}_0|n_1 n_2\rangle = \frac{1}{2}(n_2 - n_1)|n_1 n_2\rangle$, $\hat{J}_+|n_1 n_2\rangle = \sqrt{n_1(n_2+1)}|n_1 - 1, n_2 + 1\rangle$, et $\hat{J}_-|n_1 n_2\rangle = \sqrt{(n_1+1)n_2}|n_1 + 1, n_2 - 1\rangle$. Le schéma est le suivant. Les 5 points entourés, représentent l'espace propre de $\hat{H}$ avec la valeur propre $E = 1 + n_1 + n_2 = 5$.



.

5. L'algèbre du groupe commutte avec $\hat{H}$, donc les espaces propres sont invariants par l'action du groupe. Le vecteur $|n_1, n_2\rangle$ peut s'écrire $|j, m\rangle$ avec $j = (n_1 + n_2)/2$, $m = \frac{1}{2}(n_2 - n_1)$ donc $2j + 1 = E$. Conclusion : l'espace propre E est un espace de représentation irréductible du groupe SU(2) (car j peut être demi-entier).