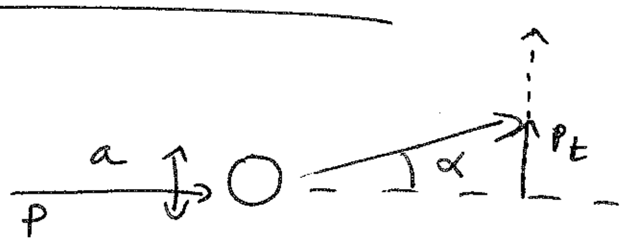
TD n°13
Diffusion

1 Principe d'incertitude



p_t = composante transverse de l'impulsion

principe d'incertitude dans la direction transverse :

$$\Delta p_t \cdot a \geq \hbar$$

angle de diffusion : $\alpha \simeq \dfrac{p_t}{p}$

donc $\Delta \alpha \simeq \dfrac{\Delta p_t}{p} \geq \dfrac{\hbar}{p \cdot a} = \dfrac{1}{k a}$ avec $p = \hbar k$

En physique non relativiste, $(E \ll mc^2)$,

on a $E = \dfrac{p^2}{2m} \iff p = \sqrt{2mE}$

donc $$\boxed{\Delta \alpha \simeq \frac{\hbar}{a \cdot \sqrt{2mE}} = \frac{(\hbar c)}{a \cdot \sqrt{2 \cdot (mc^2) \cdot E}}}$$

proton : $mc^2 \simeq 1$ GeV
$\hbar c = 2 \cdot 10^{-7}$ eV.m

1) si $E = 10$ MeV, $a = 2 \cdot 10^{-15}$ m. alors

$$\Delta \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,7 \text{ rad} \simeq 40°.$$

2) si $E = 5$ eV, $a = 10^{-10}$ m alors

$$\Delta \alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

rem : l'augmentation de a l'a emporté sur la diminution de E

3) Electrons, $mc^2 = 0,5$ MeV

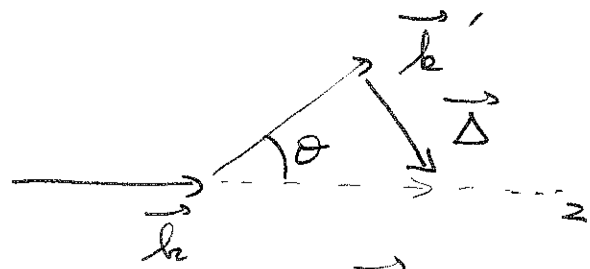
$E = 5$ eV, $a = 10^{-10}$ m

alors $\Delta\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \simeq 0,9$ rad $\simeq 50°$

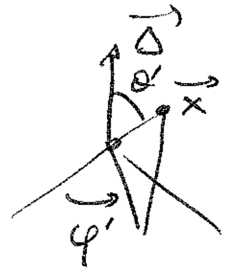
2 Approximation de Born pour des potentiels centraux

1) $$f^{Born} = -\frac{1}{4\pi}\int e^{i\vec{\Delta}\cdot\vec{x}}\, U(\vec{x})\, d^3\vec{x}$$

avec $\vec{\Delta} = \vec{k} - \vec{k}'$



on choisit des coord. sphérique (r, θ', φ') par rapport à l'axe $\vec{\Delta}$.



Alors $$f^{Born} = -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot r^2 \sin\theta'\, e^{i\Delta \cdot r \cdot \cos\theta'}\, U(r)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\infty r^2 dr\, U(r) \int_{-1}^{1} d(\underbrace{\cos\theta'}_{X})\, \exp(i\Delta . r . \cos\theta')$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\infty r^2 dr\, U(r)\, \frac{1}{\Delta r}\Big[\sin(\Delta r X) - i\cos(\Delta r X)\Big]_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{1}{\Delta}\int_0^\infty r \sin(\Delta r)\, U(r)\, dr$$

2) $$\sigma_{tot}^{Born} = \int \frac{d\sigma^B}{d\Omega}\cdot d\Omega = \int |f^B|^2 \cdot (d\theta \sin\theta\, d\varphi)$$
avec $\vec{k}' \equiv (k, \theta, \varphi)$.

or $\Delta = 2k\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, donc $\sin\theta\, d\theta = \frac{\Delta}{k^2}\, d\Delta$

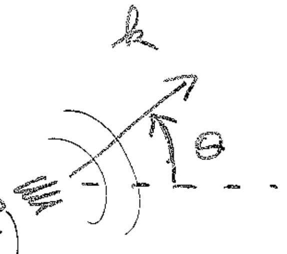
donc $$\sigma_{tot}^{B} = \frac{2\pi}{k^2}\int_0^{2k} |f^B|^2\, \Delta\, d\Delta$$

3 Calcul de sections efficaces avec l'approximation de Born

__rappels__ : dans l'approximation de Born, et potentiels centraux

$$f^B(\Delta) = -\frac{1}{\Delta}\int_0^\infty r \sin(\Delta r)\, U(r)\, dr$$

avec $\Delta = 2k \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$



$$\frac{d\sigma^B}{d\Omega} = |f^B|^2 ; \quad \left(\psi(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ikz} + f(k,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\right)$$

$$\sigma_{tot}^B(k) = \frac{2\pi}{k^2}\cdot\int_0^{2k} |f^B(\Delta)|^2 \Delta\, d\Delta \quad ; \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

__1) Yukawa :__ $U(r) = U_0 \frac{e^{-r/a}}{r}$

$$f^B(\Delta) = -\frac{1}{\Delta}\int_0^\infty \cancel{r} \sin(\Delta r)\, U_0 \frac{e^{-r/a}}{\cancel{r}}\, dr$$

$$= -\frac{U_0}{\Delta}\int_0^\infty \mathrm{Im}\left(e^{\left(i\Delta - \frac{1}{a}\right)r}\right) dr$$

$$= -\frac{U_0}{\Delta}\,\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\left(i\Delta-\frac{1}{a}\right)}\left[e^{\left(i\Delta-\frac{1}{a}\right)r}\right]_0^{\infty}\right]$$

$$= \frac{U_0}{\Delta}\,\mathrm{Im}\left[\frac{1}{i\Delta-\frac{1}{a}}\right] = -\frac{U_0}{\frac{1}{a^2}+\Delta^2}$$

$$\frac{d\sigma^B}{d\Omega} = \frac{U_0^2}{\left(\frac{1}{a^2}+\Delta^2\right)^2} = \frac{U_0^2\,a^4}{\left(1+\left(2\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cdot(ka)\right)^2\right)^2}$$

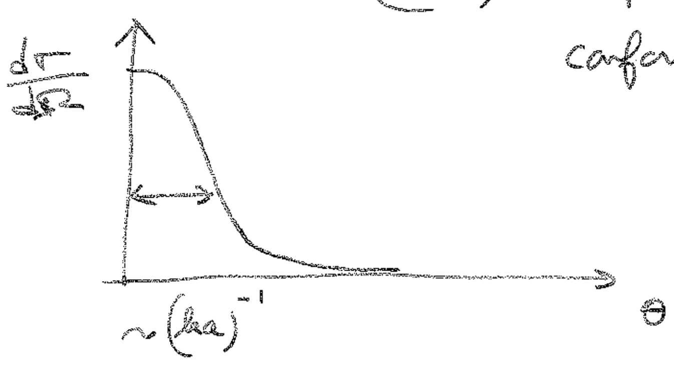
$$\sigma^B_{tot} = \frac{2\pi\,U_0^2}{k^2}\int_0^{2k}\frac{\Delta}{\left(\frac{1}{a^2}+\Delta^2\right)^2}\,d\Delta$$

$$= \frac{2\pi\,U_0^2}{k^2}\;\frac{1}{\left(\frac{2}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{a^2 4k^2}\right)}$$

$$= \frac{\pi\,U_0^2\,a^2}{k^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4a^2k^2}\right)}$$

$$\simeq \underbrace{\left(\frac{\pi\,U_0^2\,a^2\,\hbar^2}{2m}\right)}_{A}\cdot\frac{1}{E} \qquad \text{pour } k\to\infty$$

Dans l'expression de $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, on observe que l'angle d'ouverture est $\Delta\theta \simeq (ka)^{-1}$ pour $(ka)^{-1} \ll 1$.



conformément au principe d'incertitude.

2) Exponentiel : $U(r) = U_0 e^{-r/a}$

$$f^B(\Delta) = -\frac{U_0}{\Delta}\int_0^\infty r \sin(\Delta r)\, e^{-r/a}\, dr$$

Soit $\alpha = -\frac{1}{a}$, alors

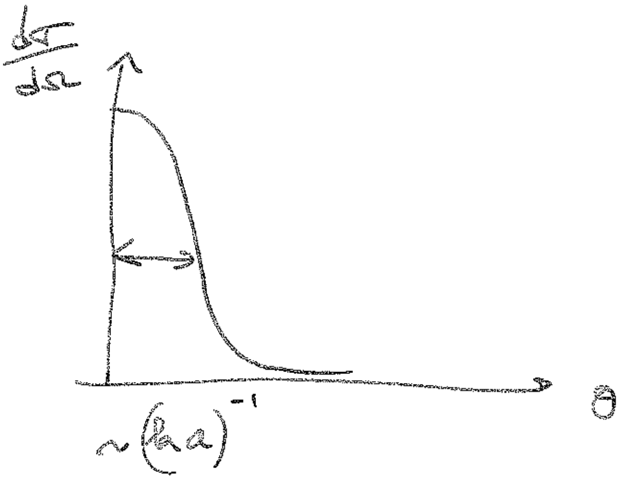
$$f^B(\Delta) = \frac{d}{d\alpha}\left(f^B_{\text{Yukawa}}\right) = \frac{-2U_0 a^3}{\left(1+\Delta^2 a^2\right)^2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4U_0^2 a^6}{\left(1+\Delta^2 a^2\right)^4}$$

$$\sigma_{tot} = 4U_0^2 a^6 \int_0^{2k} \frac{\Delta}{\left(1+\Delta^2 a^2\right)^4}\, d\Delta \cdot \frac{2\pi}{k^2}$$

$$= \frac{2\pi 4 U_0^2 a^6}{k^2}\, \frac{\left(a^4 + 3a^2/(2k)^2 + 3/(2k)^4\right)}{6\left(a^2 + \frac{1}{(2k)^2}\right)^3}$$

$$\underset{k\infty}{\approx} \frac{4U_0^2 a^4}{6}\frac{2\pi}{k^2} = \underbrace{\left(\frac{2U_0^2 a^4 \pi \hbar^2}{3m}\right)}_{A} \cdot \frac{1}{E}$$



3) Coulombien :

on fait $a \to \infty$ dans Yukawa.

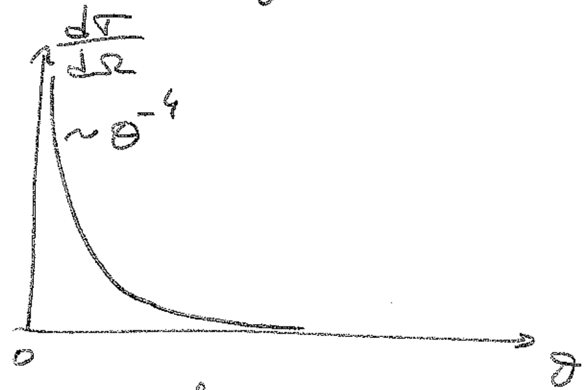
et $U_0 = \dfrac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0}$.

alors

$$f^B(\Delta) = -\frac{U_0}{\Delta^2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{U_0^2}{\Delta^4} = \frac{U_0^2}{(2k)^4 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

rem : comme c'est un produit $k^4 \cdot \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)$, alors la distribution angulaire est la même à toute échelle k,



$$\sigma_{tot} = \frac{2\pi}{k^2}\int_0^{2k} \left|f^B(\Delta)\right|^2 \Delta\, d\Delta = \frac{2\pi U_0^2}{k^2}\int_0^{2k} \frac{d\Delta}{\Delta} = +\infty$$

diverge (en $\Delta = 0$).

En réalité, il y a des effets d'écrantages.

et σ_{tot} est fini.

4) Potentiel Carré

$$U(r) = \begin{cases} U_0 & \text{si } r<a \\ 0 & \text{si } r>a \end{cases}$$

$$f^B(\Delta) = -\frac{U_0}{\Delta}\int_0^a r\sin(\Delta r)\,dr$$

$$= -\frac{U_0}{\Delta}\frac{d}{d\Delta}\left(\int_0^a \cos(\Delta r)\,dr\right)$$

$$= -\frac{U_0}{\Delta}\frac{d}{d\Delta}\left(\frac{1}{\Delta}\Big[\sin(\Delta r)\Big]_0^a\right) = -\frac{U_0}{\Delta}\frac{d}{d\Delta}\left(\frac{\sin(\Delta a)}{\Delta}\right)$$

$$= -\frac{U_0}{\Delta^3}\left(a.\Delta\cos(\Delta a) - \sin(\Delta a)\right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{U_0^2}{\Delta^6}\left|a\Delta\cos(\Delta a) - \sin(\Delta a)\right|^2$$