Université Joseph Fourier. Master 1 Physique.
TD de mécanique quantique, Frédéric Faure.

TD n°10
Théorie des perturbations dépendant du temps
Mesure du rapport gyromagnétique du neutron

Références : [1] chapitre XIII et complément A-XIII.

On prépare un faisceau de neutrons, de vitesse v, dirigé suivant l'axe x. Ce faisceau est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}_0$ constant et uniforme dirigé selon z. On note $|+_z>$, $|-_z>$, les états propres de la projection $\hat{S}_z$ du spin du neutron suivant l'axe z.

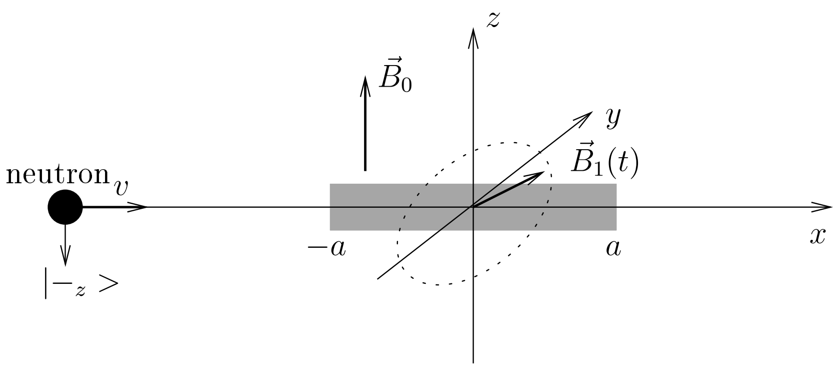
On note

$$\vec{\mathcal{M}} = \gamma \vec{S}$$

son moment magnétique, avec [1] $\gamma = \frac{g\,e}{2M}$, où $e = 1,6\,10^{-19} Coulomb$ est la charge élémentaire, et $M = 1,6\,10^{-27} kg$ est la masse du proton et g est appelé **le rapport gyromagnétique du neutron** que l'on étudie dans ce problème.

Les neutrons sont initialement dans l'état $|-_z\rangle$. Ils traversent ensuite une zone où règne un champ magnétique oscillant $\vec{B}_1$ dont les composantes sont :

$$\vec{B}_1 = \begin{cases} B_{1x} = B_1 e^{-|x|/a} \cos(\omega t) \\ B_{1y} = B_1 e^{-|x|/a} \sin(\omega t) \\ B_{1z} = 0 \end{cases}$$



On suppose B_1 constant et $B_1 \ll B_0$ (en toute rigueur B_1 devrait être variable pour assurer $div\,\vec{B} = 0$). Dans tout le problème *on traite le mouvement spatial des neutrons classiquement.* La seule partie quantique concerne l'évolution de leur état de spin.

1. Soit un neutron dont le mouvement spatial est $(x = vt, y = 0, z = 0)$. Le Hamiltonien qui caractérise l'évolution quantique de son état de spin est $\hat{H}_{spin}(t) = -\vec{\mathcal{M}}.\vec{B}(t)$ avec $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$ (il s'agit de l'interaction du moment magnétique avec le champ magnétique). On posera $\omega_0 = -\gamma B_0$ et $\omega_1 = -\gamma B_1$. Donner l'expression de la matrice

1. Pour justifier cette définition de g, il faut se rappeler que le moment magnétique orbital classique pour une charge q de moment angulaire $\vec{L}$ est $\mathcal{M}_{class.} = \frac{q}{2m}\vec{L}$.

2×2 représentant $\hat{H}_{spin}(t)$ dans la base $\{|+_z\rangle, |-_z\rangle\}$ (en fonction de $\omega, \omega_0, \omega_1, \hbar, v, t, a$) ? Aide : voir note de bas de page [2].

2. On note c_{-+} l'amplitude de probabilité de la transition du neutron vers l'état $|+_z\rangle$ à l'instant $t = +\infty$ (loin de la zone d'interaction), sachant qu'à $t = -\infty$, il était dans l'état $|-_z\rangle$. En traitant $\vec{B}_1$ comme une perturbation, et en appliquant la théorie des perturbations dépendant du temps au premier ordre, montrer que :
$$c_{-+} \simeq \frac{-i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 t} \langle +_z | \hat{H}_{spin}(t) | -_z \rangle \, dt$$
3. Calculer c_{-+} ? Aide : montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega t} e^{-\alpha|t|} dt = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\Omega^2}$.
On mesure le flux de neutrons qui sont passés dans l'état $|+\rangle$ (par exemple par un dispositif de Stern Gerlach muni de compteurs à neutrons), donc la probabilité P_{-+} qu'ils aient effectué cette transition. Montrer qu'en fonction de ω, P_{-+} a un comportement résonant ; tracer P_{-+} en fonction de l'écart à la résonance $(\omega_0 - \omega)$. Quelle est l'ordre de grandeur et l'interprétation de la largeur de la courbe de résonance $\Delta\omega_0$, en fonction de v et a ?
4. On rajoute sur le trajet du faisceau une deuxième zone de champ oscillant $\vec{B}'(t)$, identique à la première, mais décalée d'une distance b ($b \gg a$) le long de x :
$$\vec{B}' = \begin{cases} B'_x = B_1 e^{-|x-b|/a} \cos(\omega t) \\ B'_y = B_1 e^{-|x-b|/a} \sin(\omega t) \\ B'_z = 0 \end{cases}$$
Quelle est la nouvelle expression de $\langle +_z | \hat{H}_{spin}(t) | -_z \rangle$?
Calculer la nouvelle valeur de l'amplitude de probabilité de transition c_{-+}dans le passage au travers des deux zones et montrer que l'on obtient l'ancienne expression de c_{-+} multipliée par le facteur $\left(1 + e^{i(\omega_0-\omega)b/v}\right)$. Calculer la nouvelle probabilité P_{-+} et tracer son allure ?
5. Expliquer pourquoi il est préférable d'utiliser deux zones de champ décalées de b plutôt qu'une seule, si l'on veut mesurer avec précision ω_0 ? Quel est alors l'ordre de grandeur de la précision obtenue $\Delta\omega_0$? Exprimer l'ordre de grandeur de la précision obtenue sur le facteur gyromagnétique Δg ?
6. Application numérique : le faisceau de neutron a une vitesse $v = 100 m/s$. La valeur du rapport gyromagnétique du neutron est actuellement mesurée avec la précision :
$$g = -3,8240836 \pm 1,76.10^{-6}$$
Dans un champ de $B_0 = 1$ Tesla, quelle doit être l'ordre de grandeur de la longueur b pour atteindre cette précision ?

Références

[1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Mécanique quantique.*

2. on rappelle que : $\hat{S}_x \equiv_{(\text{base } |\pm_z\rangle)} \left(\frac{\hbar}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\hat{S}_y \equiv_{(\text{base } |\pm_z\rangle)} \left(\frac{\hbar}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $\hat{S}_z \equiv_{(\text{base } |\pm_z\rangle)} \left(\frac{\hbar}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.