Corrigé

# Mesure du rapport gyromagnétique du neutron

(1) $$\hat{H} = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$
$$= -\gamma\,\vec{S}\cdot(\vec{B}_0 + \vec{B}_1(t))$$
$$= -\gamma\left[S_x\cdot B_{1x} + S_y\cdot B_{1y} + S_z\cdot B_{0z}\right]$$

(2) $$\hat{H}_{spin}(t) \equiv -\gamma\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} B_0 & B_{1x} - i B_{1y} \\ B_{1x} + i B_{1y} & -B_0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} \omega_0 & \omega_1\, e^{-v|t|/a}\, e^{-i\omega t} \\ \omega_1\, e^{-v|t|/a}\, e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{bmatrix}$$

(3) on écrit $\hat{H}(t) = \underset{-\gamma\vec{S}\cdot\vec{B}_0}{\underset{\shortparallel}{H_0}} + \underset{-\gamma\vec{S}\cdot\vec{B}_1(t)}{\underset{\shortparallel}{H_1(t)}}$

et $$|\psi(t)\rangle = c_0(t)\, e^{-iE_0 t/\hbar}\,|-\rangle + c_1(t)\, e^{-iE_1 t/\hbar}\,|+\rangle$$

avec $E_0 = -\frac{\hbar}{2}\omega_0 = -E_1$.

$c_0(-\infty) = 1, \qquad c_1(-\infty) = 0.$

Equ. de Schrödinger : $|\dot{\psi}(t)\rangle = -\frac{i\hat{H}(t)}{\hbar}|\psi(t)\rangle$

donne :

$$\dot{c}_j = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)\sum_i c_i\, e^{-iE_i t/\hbar}\,\langle j|\hat{H}_1|i\rangle\cdot e^{iE_j t/\hbar}$$

avec $\begin{cases} |0\rangle = |-\rangle \\ |1\rangle = |+\rangle \end{cases}$

alors à l'ordre 0 en $\hat{H}_1$ : $\dot{c}_j^{(0)} = 0 \longrightarrow c_j^{(0)}(t) = \text{cste}$

et à l'ordre 1 : $\dot{c}_1^{(1)} = \left(\frac{-i}{\hbar}\right) c_0 \, e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}} \langle + | \hat{H}_1(t) | - \rangle \, e^{+i\frac{E_0 t}{\hbar}}$

$$= \left(\frac{-i}{\hbar}\right) e^{i\omega_0 t} \langle + | \hat{H}_1(t) | - \rangle$$

donc

$$c_{-+} = c_1(+\infty) = \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 t} \langle + | \hat{H}_1(t) | - \rangle \, dt$$

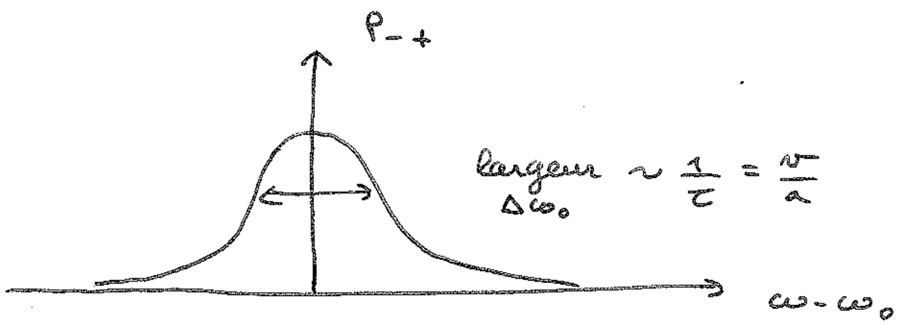
et notant que $\langle + | \hat{H}_1(t) | - \rangle = \langle + | \hat{H}(t) | - \rangle$

④ $$c_{-+} = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)\frac{\hbar}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_0 - \omega)t} \, e^{-v|t|/a} \, \omega_1 \, dt$$

$$= -\frac{i\omega_1}{2} \frac{2(v/a)}{\left(\frac{v}{a}\right)^2 + (\omega_0 - \omega)^2} = -i\omega_1 \cdot \left(\frac{a}{v}\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0 - \omega}{(v/a)}\right)^2}$$

$$P_{-+} = |c_{-+}|^2 = (\omega_1 \cdot \tau)^2 \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\omega_0 - \omega}{1/\tau}\right)^2\right)^2}$$

avec $\tau = \frac{a}{v}$ : temps de passage dans la zone $\vec{B}_1$.



5 $\langle + | \hat{H}(t) | - \rangle = \frac{\hbar}{2} \omega_1 \, e^{-v|t|/a} e^{-i\omega t}$

$+ \frac{\hbar}{2} \omega_1 \, e^{-|vt-b|/a} e^{-i\omega t}$

$= \frac{\hbar}{2} \omega_1 \, e^{-i\omega t} \left[ e^{-v|t-t_b|/a} + e^{-v|t|/a} \right]$

avec $t_b = \frac{b}{v}$

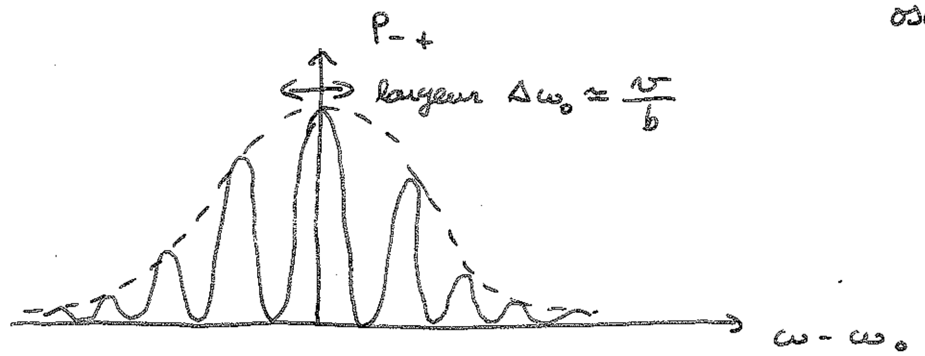
alors $c_{-+} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 t} \frac{\hbar}{2} \omega_1 \, e^{-i\omega t} \left[ e^{-v|t|/a} + e^{-v|t-t_b|/a} \right] dt$

$= -\frac{i}{2} \omega_1 \left[ \int e^{i(\omega_0-\omega)t} e^{-v|t|/a} dt \right] \left( 1 + e^{i(\omega_0-\omega)t_b} \right)$

par le chgt de variable $t' = t - t_b$.

$P_{-+} = |c_{-+}|^2 = \left( \omega_1 \frac{a}{v} \right)^2 \frac{1}{\left( 1 + \left( \frac{\omega_0-\omega}{v/a} \right)^2 \right)^2} \, 4 \cos^2 \left[ (\omega_0 - \omega) \frac{b}{2v} \right]$

oscillations rapides




6 On obtient une meilleure précision $\Delta\omega_0 \sim \frac{v}{b}$, $(b \gg a)$.

$g = -\frac{2M\omega_0}{eB_0}$, donc $\Delta g = \frac{2M}{e \cdot B_0} \frac{v}{b}$

7 $$b \sim \frac{2 M v}{e B_0 \cdot \Delta y} \sim \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{1{,}6} \cdot 10^{-27} \cdot 100}{\cancel{1{,}6} \cdot 10^{-19} \cdot \cancel{2} \cdot 10^{-6}} \sim 1 \, m.$$