

TD n°10
Diffusion. Ondes partielles. Résonances

Préparer la question 1).

1 Diffusion sur une sphère

Références : [1] chap.13, [2] chap.8. [3].

On considère une particule de masse m qui diffuse sur le potentiel central :

$$V(r) = -V_0 \text{ si } r < a \quad V_0 > 0 \\ = 0 \quad \text{si } r \geq a$$

On posera $U(r) = \frac{2m}{\hbar^2} V(r)$, et $U_0 = \frac{2m}{\hbar^2} V_0$.

1. Partant de l'équation de Schrödinger stationnaire $\hat{H}\psi = E\psi$, l'écrire en coordonnées sphériques avec $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$, et obtenir l'équation radiale que doit satisfaire $R(r)$ sous la forme d'une équation de Bessel¹ (distinguer les cas $r < a$ et $r > a$).
Aide : le laplacien s'écrit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2}$ où \hat{L} est l'opérateur moment angulaire.
On posera $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$.
2. On cherche maintenant à résoudre l'équation de Schrödinger radiale de la question (1) : $R(r)$ est combinaison linéaire des fonctions de Bessel j_l et n_l . Utiliser la condition que

1. **Rappel sur les fonctions de Bessel radiales** : L'équation de Bessel est

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} - l(l+1) \frac{1}{\rho^2} + 1 \right) F(\rho) = 0$$

et admet les solutions linéairement indépendantes suivantes (i.e. la solution s'écrit $F(\rho) = \alpha j_l(\rho) + \beta n_l(\rho)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$) (A) les "fonctions sphériques de Bessel" :

$$j_l(\rho) = (-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \frac{\sin \rho}{\rho}$$

et (B) les "fonctions de Neumann sphériques" :

$$n_l(\rho) = -(-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \frac{\cos \rho}{\rho}$$

dont les comportements limites sont pour $\rho \rightarrow 0$:

$$j_l(\rho) \simeq \frac{1}{3.5 \dots (2l+1)} \rho^l, \quad n_l(\rho) \simeq -3.5 \dots (2l-1) \frac{1}{\rho^{l+1}}$$

et pour $\rho \rightarrow \infty$:

$$j_l(\rho) \simeq \frac{1}{\rho} \sin \left(\rho - \frac{\pi l}{2} \right), \quad n_l(\rho) \simeq -\frac{1}{\rho} \cos \left(\rho - \frac{\pi l}{2} \right)$$

(qui sont des approximations correctes si $\rho \gg \frac{l(l+1)}{2}$).

$R(r)$ doit être fini en $r = 0$. Poser $K^2 = k^2 + U_0$. Ecrire le raccordement en $r = a$ pour la fonction $R(r)$ et sa dérivée et déduire que l'équation de Schrödinger est équivalente à

$$\frac{Kj'_l(Ka)}{j_l(Ka)} = \frac{k(Bj'_l(ka) + Cn'_l(ka))}{Bj_l(ka) + Cn_l(ka)}$$

où n'_l, j'_l sont les dérivées, $B, C \in \mathbb{C}$ des coefficients inconnus.

3. Montrer que pour $r \rightarrow \infty$, $R(r)$ peut s'écrire :

$$R(r) = A \frac{1}{kr} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right)$$

Pourquoi appelle-t-on δ_l "le déphasage" ? Montrer que l'on peut aussi écrire :

$$R(r) = -\frac{1}{2ik} A e^{-i\delta_l} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} - S_l \frac{e^{ikr}}{r} \right)$$

et donner l'expression de S_l à partir de δ_l . Donner l'interprétation de S_l .

4. A partir de la question (2), donner l'expression de $\tan \delta_l$.
 5. Donner qualitativement la liste des ondes partielles l qui participent à la diffusion, en fonction de k et a (Argument semi-classique qui fait intervenir la relation entre le paramètre d'impact b et le moment angulaire $L = bp$, $L \simeq \hbar l$).
 6. On étudie maintenant le secteur d'ondes partielles $l = 0$, qui est important à basse énergie $k \rightarrow 0$. Donner l'expression de $\tan \delta_0$ en fonction de k, a et K ?
 7. Rappels : la section efficace totale se décompose $\sigma_{tot} = \sum_l \sigma_l$, et

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l + 1) \sin^2 \delta_l$$

On définit la longueur de diffusion α à basse énergie par :

$$\alpha = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\tan \delta_0}{k}$$

Alors $\sigma_{tot} \rightarrow 4\pi\alpha^2$ pour $k \rightarrow 0$.

Montrer ici que

$$\alpha = a \left(1 - \frac{\tan \gamma}{\gamma} \right), \quad \gamma = a\sqrt{U_0}$$

et tracer α en fonction de γ . Identifier les "résonances" qui correspondent "pics" de σ_{tot} .

8. **(Option)** On étudie maintenant la limite $U_0 \rightarrow \infty$ qui correspond à une "sphère dure". A partir de (4) donner l'expression de $\tan \delta_l$, et son expression si $ka \ll 1$, et montrer que $l = 0$ domine.
 9. **(Option)** A basse énergie, exprimer δ_0 et σ_{tot} . Comparer à la surface d'un disque de rayon a . Même questions à haute énergie.

References

- [1] B.H. Bransden and C.J. Joachain. *Introduction to quantum mechanics*. Longman, 1989.
 [2] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Mécanique quantique*.
 [3] F. Faure. *Cours de Mécanique quantique pour Master M1 de physique*. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement>.