Université Joseph Fourier. Master 1 Physique, 2011-2012.
TD de mécanique quantique.

TD n°9
Diffusion. Sections efficaces, approximation de Born

Références : [1] chap.13, [2] chap.8. Préparer l'ex. de cours.

1 Principe d'incertitude sur l'angle de diffusion (ex. de cours)

Cet exercice est qualitatif. On cherche à évaluer la petite taille angulaire $\Delta\theta$ à laquelle une onde diffusée peut varier. On considère un faisceau de particules qui diffuse sur un potentiel dont l'extension spatiale est a. En écrivant le principe d'incertitude pour la composante transverse de l'impulsion diffusée, déduire que l'incertitude $\Delta\theta$ de l'angle de diffusion est donné par

$$\Delta\theta \simeq \frac{1}{ka}, \qquad |\vec{p}| = \hbar k$$

Calculer $\Delta\theta$ lorsque les particules sont :

1. des protons d'énergie $E = 10\text{MeV}$ et $a = 2.10^{-15}\text{m}$. (aide : $\hbar c \simeq 2.10^{-7}\text{eV.m}$ $m_p c^2 \simeq 1\text{GeV}$).
2. des protons d'énergie $E = 10\text{keV}$ et $a = 10^{-10}\text{m}$.
3. des électrons d'énergie $E = 5\text{eV}$ et $a = 10^{-10}\text{m}$ (aide : $m_e c^2 \simeq 0.5\text{MeV}$).

2 Approximation de Born pour des potentiels centraux

On considère le Hamiltonien $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. On suppose que le potentiel décroit vite à l'infini ($V(\vec{x}) = o\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)$). On rappelle que si une onde plane incidente selon l'axe z de vecteur d'onde k, notée e^{ikz}, diffuse sur le potentiel $V(\vec{x})$, alors l'onde stationnaire résultante $\psi(\vec{x})$ dans tout l'espace a la forme suivante loin de l'origine :

$$\psi(\vec{x}) \to e^{ikz} + f(k,\theta,\varphi)\frac{e^{ikr}}{r}, \qquad \text{pour } r = |\vec{x}| \to \infty$$

où $\vec{x} \equiv (r,\theta,\varphi)$ sont les coordonnées sphériques, et $f(k,\theta,\varphi)$ est appelée **amplitude de diffusion**. Dans **l'approximation de Born**, en notant $U(\vec{x}) = \frac{2m}{\hbar^2}V(\vec{x})$, on a vu en cours que

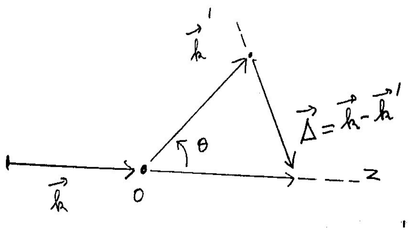
$$f(k,\theta,\varphi) \simeq f^{Born}(k,\theta,\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\int e^{i\vec{\Delta}.\vec{x}'}U(\vec{x}')\,d^3\vec{x}'$$

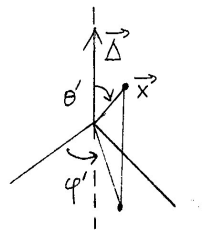
Avec $\vec{\Delta} = \vec{k} - \vec{k}'$, où $\vec{k}' = k\frac{\vec{x}}{r} \equiv (k,\theta,\varphi)$ est le vecteur diffusé. (Remarquer que l'intégrale est une transformée de Fourier du potentiel).

1. Montrer que pour des ***potentiels centraux*** (i.e. de la forme $V(r)$),

$$f^{Born}(\Delta) = -\frac{1}{\Delta}\int_0^\infty r\sin(\Delta r)\,U(r)\,dr$$

avec $\Delta = 2k\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Aide : choisir des coordonnées sphériques (r,θ',φ') t.q. $\vec{\Delta}$ soit sur l'axe z', voir figure).





2. On rappelle aussi que la section efficace de diffusion différentielle et totale sont

$$\frac{d\sigma^{Born}}{d\Omega} = \left|f^{Born}\right|^2, \qquad \sigma_{tot}^{Born} = \int \left(\frac{d\sigma^{Born}}{d\Omega}\right) d\Omega$$

Montrer que la section efficace de diffusion totale est :

$$\sigma_{tot}^{Born}(k) = \frac{2\pi}{k^2} \int_0^{2k} \left|f^{Born}(\Delta)\right|^2 \Delta d\Delta, \qquad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Aide : montrer que $\Delta = 2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\sin(\theta)\, d\theta = \Delta d\Delta / k^2$.

3 Calcul de sections efficaces avec l'approximation de Born

Calculer dans l'approximation de Born au premier ordre, l'amplitude de diffusion f^{Born}, la section efficace de diffusion différentielle $\frac{d\sigma^{Born}}{d\Omega}$ et totale σ_{tot}^{Born} pour les potentiels centraux suivants. On note $U(r) = \frac{2m}{\hbar^2} V(r)$. Dans chacun des cas, décrire la distribution angulaire, comparer les résultats entre eux. Vérifier que $\sigma_{tot}^{Born} \simeq A E^{-1}$ pour l'énergie $E \to \infty$, et déterminer le coefficient A.

1. **Potentiel de Yukawa** :

$$U(r) = U_0 \frac{e^{-r/a}}{r}$$

Aide : $\int_0^\beta \frac{x}{(\alpha + x^2)^2} dx = \frac{1}{2\alpha\left(1 + \frac{\alpha}{\beta^2}\right)}$.

2. **Potentiel Coulombien** (en faisant $a \to \infty$ dans les résultats du potentiel de Yukawa) :

$$U(r) = U_0 \frac{1}{r}, \qquad U_0 = \frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0}$$

3. **Potentiel exponentiel** (utiliser les résultats du potentiel de Yukawa) :

$$U(r) = U_0 e^{-r/a}$$

Aide :$\int_0^\beta \frac{x}{(1 + \alpha x^2)^4} dx = \frac{\left(\alpha^2 + 3\alpha/\beta^2 + 3/\beta^4\right)}{6\left(\alpha + \frac{1}{\beta^2}\right)^3}$

4. **Potentiel de puits carré** :

$$\begin{aligned} U(r) &= U_0, \qquad \text{si } r < a \\ &= 0 \qquad \text{sinon} \end{aligned}$$

References

[1] B.H. Bransden and C.J. Joachain. *Introduction to quantum mechanics.* Longman, 1989.

[2] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Mécanique quantique.*