

TD n°8  
Couplage de moments angulaires et applications

---

Les “exercices de cours” doivent être préparés avant la séance de TD, sur une feuille qui sera ramassée au début du TD et notée.

## 1 Couplage de deux spins 1/2 (ex. de cours)

On rappelle que l'espace de représentation irréductible de moment angulaire  $j$  est noté  $\mathcal{D}_j$ , de dimension  $2j + 1$ . Ce qui suit est un **exercice de cours**, correspondant à la décomposition

$$\mathcal{D}_{1/2} \otimes \mathcal{D}_{1/2} = \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1$$

Réf. : [1], chap. X, p.1006.

1. On considère une particule 1 (respect. 2) de spin 1/2, décrit par un vecteur dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{D}_{1/2}^{(1)}$ , de base  $|+1\rangle, |-1\rangle$  (respect.  $\mathcal{D}_{1/2}^{(2)}$ , de base  $|+2\rangle, |-2\rangle$ ). Donner une base de l'espace total  $\mathcal{H}_{tot.} = \mathcal{D}_{1/2}^{(1)} \otimes \mathcal{D}_{1/2}^{(2)}$  ?
2. On note  $\vec{S}_1 = (S_{1,x}, S_{1,y}, S_{1,z})$  les opérateurs de spin de la particule 1, et de même  $\vec{S}_2$  pour la particule 2. On note  $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$  le spin total qui génère les rotations du système total des deux particules. Montrer que  $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$  forment bien l'algèbre du moment cinétique (du groupe  $SU(2)$ )<sup>1</sup>
3. On veut décomposer l'espace total  $\mathcal{H}_{tot.} = \mathcal{D}_{1/2}^{(1)} \otimes \mathcal{D}_{1/2}^{(2)}$  en somme de représentations irréductibles des rotations du système total, générées par  $\vec{S}$ . Autrement dit, on cherche une base de vecteurs  $|J, M\rangle$  (à exprimer dans la base de départ), vérifiant :

$$\hat{S}_z |J, M\rangle = \hbar M |J, M\rangle, \quad \vec{S}^2 |J, M\rangle = \hbar^2 J(J+1) |J, M\rangle$$

Donner l'expression de  $\vec{S}^2$  à partir des opérateurs  $\vec{S}_1^2, \vec{S}_2^2, S_{1,\pm}, S_{2,\pm}, S_{1,z}, S_{2,z}$ .

4. Vérifier que  $|-, -\rangle = |J=1, M=-1\rangle$ , et déduire les états  $|J=1, M=0\rangle, |J=1, M=+1\rangle$  en appliquant l'opérateur  $S_+$ . On trouvera le 4eme vecteur manquant en écrivant qu'il est orthogonal au 3 précédents. Montrer que c'est  $|J=0, M=0\rangle \in \mathcal{D}_{J=0}$ . Conclure que  $\mathcal{D}_{1/2} \otimes \mathcal{D}_{1/2} = \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1$ .

## 2 Structure hyperfine des atomes

(Suite de l'exercice (1)). Références : [1], chap. XII-D, p.1217. [2] 12-5,12-2 p.237.

L'atome d'hydrogène est composé d'un proton (1) et d'un électron (2), tous deux ayant un spin 1/2. L'atome étant isolé dans l'espace, son Hamiltonien est invariant par une rotation

---

1. Ou en termes mathématiques on dit que l'espace  $\mathcal{H}_{tot.} = \mathcal{D}_{1/2}^{(1)} \otimes \mathcal{D}_{1/2}^{(2)}$  est un espace de représentation du groupe de rotation.

de l'ensemble. A cause de l'espace de spin  $\mathcal{H}_{tot.} = \mathcal{D}_{1/2}^{(1)} \otimes \mathcal{D}_{1/2}^{(2)}$  de dimension quatre, l'état 1s a une quasi dégénérescence (de multiplicité 4). Cette dégénérescence est levée à cause de l'interaction entre les spins. Les niveaux d'énergie ainsi associés à l'état 1s s'appellent la **structure hyperfine**. On peut montrer que l'opérateur le plus général dans  $\mathcal{H}_{tot.} = \mathcal{D}_{1/2}^{(1)} \otimes \mathcal{D}_{1/2}^{(2)}$  qui commute avec les rotations, est de la forme  $\hat{H} = A.\hat{I} + B.\vec{S}_1.\vec{S}_2$  avec  $A, B \in \mathbb{R}$ . Pour trouver la structure hyperfine, on va donc étudier le spectre de  $\hat{H}$ .

1. En écrivant  $\vec{S}^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2\vec{S}_1.\vec{S}_2$ , exprimer  $\hat{H}$  à l'aide des opérateurs  $\hat{I}$ ,  $\vec{S}^2$  seulement. Dédire que  $\hat{H}$  est bien invariant par rotation.
2. En utilisant la base  $|J, M\rangle$  du problème 1, déduire les vecteurs propres et le **“spectre hyperfin”** de  $\hat{H}$ .
3. Application numérique : l'écart en énergie  $\Delta E$  de la structure hyperfine crée une émission de photons de longueur d'onde  $\lambda = 21\text{cm}$  (onde radio)<sup>2</sup>. Dédire la valeur de  $\Delta E$ , puis  $B$ .
4. Application numérique : la définition actuelle de la seconde utilise les horloges atomiques<sup>3</sup> : *Une seconde est 9192631770 périodes  $T$  de la radiation correspondant à la transition de la structure hyperfine du Ce 133.* Dédire l'écart d'énergie  $\Delta E$  hyperfin du Cesium 133.
5. **(Optionnel)** Montrer, comme affirmé au début, que dans l'espace  $\mathcal{H}_{tot.} = \mathcal{D}_{1/2}^{(1)} \otimes \mathcal{D}_{1/2}^{(2)}$ , tout opérateur autoadjoint invariant par rotation est de la forme  $\hat{H} = A.\hat{I} + B.\vec{S}_1.\vec{S}_2$  avec  $A, B \in \mathbb{R}$ . Plus généralement comment écrire un opérateur invariant par rotation dans  $\mathcal{D}_{j_1} \otimes \mathcal{D}_{j_2}$  ? (Aide : Utiliser le Lemme de Schur et l'opérateur de Casimir  $\vec{S}^2$ ).

### 3 Couplage $\mathcal{D}_{J=1} \otimes \mathcal{D}_{J=1/2}$ . Symétrie d'isospin et diffusion pion-nucléon

Réf. : [1, chap. X, AX , p.1018]. [3, p.118].

**Introduction à la symétrie d'isospin :** Mis à part leur charge électrique  $Q$  différente, le proton ( $Q = +1$  en unité  $e$ ) et le neutron ( $Q = 0$ ), ont des propriétés très semblables. Par exemple leur masse est voisine  $m_n = 940\text{MeV}$ ,  $m_p = 939\text{MeV}$ , et ils se comportent de façon similaire dans les interaction nucléaires. En 1930, Heisenberg a émit l'hypothèse, que le proton et le neutron correspondent à une seule particule, appelée **nucléon**, dont le proton et neutron seraient deux états interne différent, notés  $|p\rangle$  et  $|n\rangle$ . L'état interne du nucléon serait donc décrit par un vecteur dans un espace de dimension deux noté  $\mathcal{D}_{j=1/2}$ , appelé espace **d'isospin**, et ayant pour base  $|p\rangle, |n\rangle$  (par analogie avec le spin  $1/2$ ). Comme la force nucléaire ne fait pas la différence entre le proton et le neutron, Heisenberg a postulé que la force nucléaire possède une symétrie par rapport au mélange de ces deux états, autrement dit une invariance par rapport **au groupe SU(2)**. C'est la **symmétrie d'isospin**<sup>4</sup>. Seule la force électromagnétique fait la différence entre ces deux états internes, et brise cette symétrie. Cependant

2. Dans le gaz interstellaire, constitué d'Hydrogène, les collisions entre atomes est responsable d'une température  $T = 100\text{K}$ , soit  $kT = 10^{-2}\text{eV}$ . Ces collisions excitent l'état supérieur de la structure hyperfine, qui se désexcite ensuite par émission spontanée. L'espace interstellaire contient beaucoup d'atomes H, et ce signal est observable. C'est la célèbre “raie à 21 cm”. Il permet d'ailleurs de **cartographier notre Galaxie**.

3. Voir “Horloge Atomique” dans wikipedia

4. On sait maintenant que cette symétrie reflète l'existence de “champs élémentaires” que sont les quarks u (up) et d (down) inventés par Gell-Mann en 1969.

les forces électromagnétique sont beaucoup plus faibles que les forces nucléaires, et cela explique la petite différence de masse entre le proton et neutron. Par exemple dans l'espace  $\mathcal{D}_{1/2}$ , l'opérateur de charge électrique est

$$\hat{Q} \equiv_{base(|p\rangle, |n\rangle)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En d'autres termes, la base  $|p\rangle, |n\rangle$  est une base particulière de  $\mathcal{H}_{1/2}$  privilégiée par la force électromagnétique. On utilise les notations suivantes pour les nucléons :

$$|p\rangle \equiv |j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle, \quad |n\rangle \equiv |j = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}\rangle, \quad (1)$$

D'autres particules nucléaires ont été découvertes ; les pions,  $\pi^+, \pi^0, \pi^-$  (de charge électrique respectives  $+1, 0, -1$ ). Leur masse est  $m_{\pi^+} = m_{\pi^-} = 139,6 \text{ MeV}$ ,  $m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}$ . D'après l'hypothèse de Heisenberg, ces trois particules sont en fait une seule particule, appelée le **pion**, et possédant un état interne décrit par un vecteur dans l'espace de représentation irréductible  $\mathcal{D}_{j=1}$  de la symétrie d'isospin. La force électromagnétique, ne respectant pas cette symétrie, est responsable du choix particulier de la base  $|\pi^{\pm,0}\rangle$  et de leur différence de masse. En résumé on a les notations suivantes pour les pions :

$$|\pi^+\rangle \equiv |j = 1, m = 1\rangle, \quad |\pi^0\rangle \equiv |j = 1, m = 0\rangle, \quad |\pi^-\rangle \equiv |j = 1, m = -1\rangle. \quad (2)$$

### Réaction nucléaires nucléon-pion :

Considérons les collisions nucléaires entre un nucléon  $N$  ( $p$  ou  $n$ ) et un pion  $\pi$ . En sortie de la collision, les particules peuvent être diverses, par exemple :  $p + \pi^- \rightarrow n + \pi^0$ . La figure 1 montre les probabilités de réaction  $N + \pi \rightarrow N' + \pi'$  (plus précisément les sections efficaces de diffusion  $\sigma$ ) pour diverses réactions de ce type, en fonction de l'énergie de la collision.

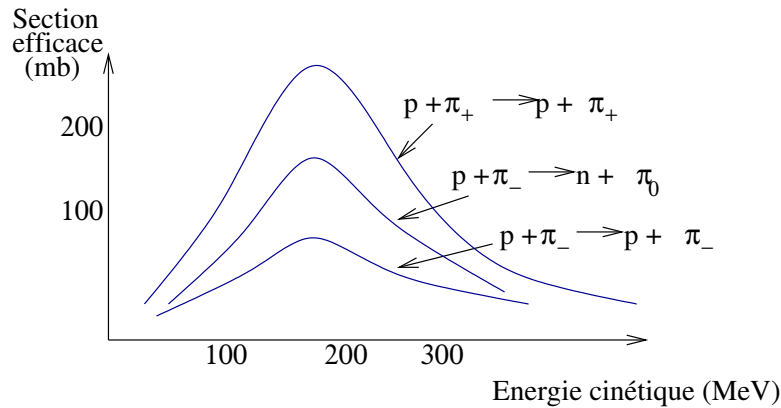


FIGURE 1 – Sections efficaces de diffusion  $\sigma$  pour diverses réactions.

Noter que la section efficace  $\sigma(N + \pi \rightarrow N' + \pi')$  est proportionnelle à la probabilité de la réaction, et donc au module carré d'un "opérateur de diffusion" ou de "réaction"  $\hat{U}$ , pris entre l'état initial et final :

$$\sigma(N + \pi \rightarrow N' + \pi') = \left| \langle N', \pi' | \hat{U} | N, \pi \rangle \right|^2 \quad (3)$$

### Questions :

1. Un état (nucléon - pion)  $|N, \pi\rangle$  se décrit par un vecteur dans l'espace  $\mathcal{H}_{(N,\pi)} = \mathcal{D}_{j=1/2} \otimes \mathcal{D}_{j=1}$ . En utilisant les résultats sur la composition de moments angulaires (généraux aux représentations du groupe  $SU(2)$  en fait), comment se décompose cet espace comme somme d'espaces de représentation irréductible  $\mathcal{D}_{j'}$  de la symétrie  $SU(2)$  d'isospin ? (préciser les dimensions).

2. En utilisant la table 1 ci-dessous des coefficients de Clebsch-Gordan, et les correspondances Eq.(1), Eq.(2), écrire les états de base  $|N, \pi\rangle$  dans la base des états  $|J, M\rangle$  appropriée à cette décomposition.

		$J = 3/2$	$3/2$	$1/2$	$3/2$	$1/2$	$3/2$
$m_1$	$m_2$	$M = 3/2$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$-3/2$
1	1/2	1					
1	-1/2		$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{2/3}$			
0	1/2		$\sqrt{2/3}$	$-\sqrt{1/3}$			
0	-1/2				$\sqrt{2/3}$	$\sqrt{1/3}$	
-1	1/2				$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{2/3}$	
-1	-1/2						1

TABLE 1 – Table des Coefficients de Clebsch-Gordan  $\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle$ , correspondant à la décomposition  $\mathcal{D}_{j_1=1} \otimes \mathcal{D}_{j_2=1/2} = \mathcal{D}_{J=1/2} \oplus \mathcal{D}_{J=3/2}$ .

3. D’après l’hypothèse de l’invariance de la force nucléaire par rapport à la symétrie d’isospin, justifier pourquoi la forme générale que prend la matrice de l’opérateur  $\hat{U}$  exprimé dans cette base des états  $|J, M\rangle$ , dépend de seulement deux amplitudes  $A_{3/2}, A_{1/2} \in \mathbb{C}$ ? Autrement dit,

$$\hat{U} \equiv \begin{pmatrix} A_{3/2} \hat{I}_4 & 0 \\ 0 & A_{1/2} \hat{I}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{: par rapport à la décomposition } \mathcal{H}_{(N,\pi)} = \mathcal{D}_{3/2} \oplus \mathcal{D}_{1/2}) \quad (4)$$

4. On supposera, en première approximation, que ces amplitudes  $A_{3/2}, A_{1/2}$ , ne dépendent pas de l’énergie. Utilisant Eq.(3), Eq.(4), exprimer les trois sections efficaces de la figure (1), à partir de  $A_{3/2}, A_{1/2}$ . Simplifier ces expressions dans les cas extrêmes où (a)  $|A_{3/2}| \gg |A_{1/2}|$ , (b)  $|A_{3/2}| \ll |A_{1/2}|$ , (c)  $A_{3/2} = A_{1/2}$ .
5. Comme il apparait sur la figure (1), l’expérience donne (à la résonance)

$$\begin{aligned} \sigma(p\pi^+ \rightarrow p\pi^+) &= 195 \text{ mb} \\ \sigma(p\pi^- \rightarrow n\pi^0) &= 45 \text{ mb} \\ \sigma(p\pi^- \rightarrow p\pi^-) &= 23 \text{ mb} \end{aligned}$$

Que déduire sur les amplitudes  $A_{3/2}, A_{1/2}$ ?

6. Dans le même esprit avec lequel nous avons introduit le nucléon et le pion, l’interprétation du “pic de résonance” (i.e. la bosse sur la figure (1)) est qu’une particule intermédiaire est créée, appelée **résonance**  $\Delta$ . En mesurant la largeur  $\Delta E$ , quelle est la durée de vie de cette particule (utiliser  $\hbar = 6.5 \cdot 10^{-22} \text{ MeV.s}$ )? Quel est l’espace de degré interne d’isospin de cette particule  $\Delta$ ? Comment noter les états internes de cette particule, en faisant apparaître la charge électrique?

## Références

- [1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Mécanique quantique*.
- [2] Feynman. *Le cours de physique de Feynman, Mécanique quantique*. 1963.
- [3] D.H. Perkins. *Introduction to high energy physics*. 1982.