TD n^{o}5 Solutions

Spin 1/2

1 Algèbre du spin

1. Si $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $\|\vec{u}\| = 1$, on obtient

$$(\vec{\sigma}.\vec{u})^2 = (\sigma_x u_x + \sigma_y u_y + \sigma_z u_z)^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = \|\vec{u}\|^2 = 1$$

Donc $(\vec{\sigma}.\vec{u})^n = 1$ si n pair, et $(\vec{\sigma}.\vec{u})^n = \vec{\sigma}.\vec{u}$ si n impair. On utilise la série convergente $e^X = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} X^n$, pour écrire

$$\begin{aligned}\exp(i\alpha\vec{\sigma}.\vec{u}) &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} (i\alpha)^n (\vec{\sigma}.\vec{u})^n = \left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k)!} (i\alpha)^{2k}\right) \hat{I} + (\vec{\sigma}.\vec{u}) \left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)!} (i\alpha)^{2k+1}\right) \\ &= (\cos\alpha)\, \hat{I} + i\,(\vec{\sigma}.\vec{u}) \sin\alpha\end{aligned}$$

Ensuite, dans la base $|+_z\rangle, |-_z\rangle$, $\hat{S}_y \equiv \frac{\hbar}{2}\sigma_y$ donc

$$\hat{R}_y(\theta) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{S}_y\right) \equiv \exp\left(i\left(-\frac{\theta}{2}\right)\sigma_y\right) = \cos\frac{\theta}{2} - i\sigma_y \sin\frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Finalement, $|+_\theta\rangle = \hat{R}_y(\theta)|+_z\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+_z\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-_z\rangle$, et $|-_\theta\rangle = \hat{R}_y(\theta)|-_z\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}|+_z\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|-_z\rangle$.

2. On écrit $\hat{S}_\theta = \hat{R}_y(\theta)\hat{S}_z\hat{R}_y^{-1}(\theta)$, avec $\hat{S}_z \equiv \frac{\hbar}{2}\sigma_z$, et on développe le produit de matrices. On obtient

$$\widehat{S}_\theta \equiv \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

On vérifie par exemple, que pour $\theta = \pi/2$, $\widehat{S}_\theta \equiv \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{S}_x$. L'opérateur $\hat{S}_\theta$ correspond à l'axe z transformé par la rotation $R_y(\theta)$. Comme $\widehat{S}_z|+_z\rangle = \frac{\hbar}{2}|+_z\rangle$ on déduit que

$$\widehat{S}_\theta|+_\theta\rangle = \hat{R}_y(\theta)\hat{S}_z\hat{R}_y^{-1}(\theta)\left(\hat{R}_y(\theta)|+_z\rangle\right) = \frac{\hbar}{2}\hat{R}_y(\theta)|+_z\rangle = \frac{\hbar}{2}|+_\theta\rangle$$

et de même $\widehat{S}_\theta|-_\theta\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-_\theta\rangle$.

2 Mesure du spin. Délocalisation et recombinaison d'une particule

1. D'après l'exercice 1,

$$|+_z\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+_\theta\rangle - \sin\frac{\theta}{2}|-_\theta\rangle$$

Cette décomposition donne l'amplitude des deux faisceaux. On déduit les probabilités, en prennant les modules carrés, et en normalisant (ce qui est inutile ici car l'état est déjà normalisé) :

$$P_{+,\theta} = \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^2, \qquad P_{-,\theta} = \left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^2,$$

Donc après N mesures, la mécanique quantique prédit

$$\frac{N_{+\theta}}{N_{-\theta}} \to_{N\to\infty} \frac{P_{+,\theta}}{P_{-,\theta}} = \left(\mathrm{cotg}\frac{\theta}{2}\right)^2$$

2. Après recombinaison, on re-obtient l'état

$$|+_z\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+_\theta\rangle - \sin\frac{\theta}{2}|-_\theta\rangle = 1|+_z\rangle + 0|-_z\rangle$$

et donc les probabilités sont $P_D = 1$, $P_E = 0$.

3. Si on place un absorbeur en A, alors après recombinaison, il sort seulement l'état $\left(-\sin\frac{\theta}{2}|-_\theta\rangle\right)$, qui lui même se décompose dans le dernier appareil comme

$$|-_\theta\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}|+_z\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|-_z\rangle$$

et donc les probabilités sont $P_D = \left|\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right|^2$, $P_E = \left|\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right|^2$. En particulier dans le cas $\theta = \pi/2$, on obtient $P_D = \frac{1}{4}$, $P_E = \frac{1}{4}$ (la somme ne fait pas 1 car il y a probabilité 1/2 que la particule soit absorbée en A). Le paradoxe est que en rajoutant un absorbeur dans le dispositif, le flux en E augmente. Cela ne peut pas se produire si les faisceaux étaient un flux de particules classiques. Ici le résultat est lié à l'aspect ondulatoire, et resulte "d'interférences".

3 Représentation d'un état de spin sur la sphère de Riemann

1. Soit un état de spin 1/2 quelconque noté :

$$|\psi >= a|+_z > +b|-_z >$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$. Si $b \neq 0$, alors on écrit $|\psi >= b|\varphi\rangle$ avec $|\varphi\rangle = z|+_z > +|-_z >$ et $z = a/b$. De façon très générale, les probabilités associées au résultat d'une mesure sur un état quantique, ne change pas si l'état est multiplié par une constante complexe. Plus précisement, si $|\psi >= b|\varphi\rangle$, et $\hat{A}$ est une observable (opérateur) :

$$\frac{\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{|b|^2}{|b|^2}\frac{\langle\varphi|\hat{A}|\varphi\rangle}{\langle\varphi|\varphi\rangle} = \frac{\langle\varphi|\hat{A}|\varphi\rangle}{\langle\varphi|\varphi\rangle}$$

Par conséquent $|\psi\rangle$ et $|\varphi\rangle$ décrivent les même "états physiques"

2. On calcule

$$s_x = \frac{\langle\psi|\widehat{S}_x|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{1}{|a|^2 + |b|^2}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \overline{a}, & \overline{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\frac{2\Re(z)}{1 + |z|^2}$$

de même :

$$s_y = \frac{\langle\psi|\widehat{S}_y|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = -\frac{\hbar}{2}\frac{2\Im(z)}{1 + |z|^2}, \quad s_z = \frac{\langle\psi|\widehat{S}_y|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\hbar}{2}\frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}$$

Donc $s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$. (Ne pas confondre $s^2 = \langle S_x\rangle^2 + \langle S_y\rangle^2 + \langle S_z\rangle^2$ avec $\langle S^2\rangle = \hbar^2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + 1\right)$).

3. En coordonnées sphériques (s, θ, φ), $s_x = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\cos\varphi$, $s_y = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\sin\varphi$, $s_z = \frac{\hbar}{2}\cos\theta$, on obtient

$$z\overline{z} = \frac{1 + 2\frac{s_z}{\hbar}}{1 - 2\frac{s_z}{\hbar}} = \frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} = \operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}$$

et

$$z = \left(1 + |z|^2\right)\left(\frac{s_x}{\hbar} - i\frac{s_y}{\hbar}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)(\cos\varphi - i\sin\varphi)\sin\theta$$

donc $z = \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}$.

4. D'après les schémas :