

TD n°5 Solutions  
*Spin 1/2*

## 1 Algèbre du spin

1. Si  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\|\vec{u}\| = 1$ , on obtient

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{u})^2 = (\sigma_x u_x + \sigma_y u_y + \sigma_z u_z)^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = \|\vec{u}\|^2 = 1$$

Donc  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{u})^n = 1$  si  $n$  pair, et  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{u})^n = \vec{\sigma} \cdot \vec{u}$  si  $n$  impair. On utilise la série convergente  $e^X = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} X^n$ , pour écrire

$$\begin{aligned} \exp(i\alpha \vec{\sigma} \cdot \vec{u}) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (i\alpha)^n (\vec{\sigma} \cdot \vec{u})^n = \left( \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k)!} (i\alpha)^{2k} \right) \hat{I} + (\vec{\sigma} \cdot \vec{u}) \left( \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)!} (i\alpha)^{2k+1} \right) \\ &= (\cos \alpha) \hat{I} + i (\vec{\sigma} \cdot \vec{u}) \sin \alpha \end{aligned}$$

Ensuite, dans la base  $|+_z\rangle, |-_z\rangle$ ,  $\hat{S}_y \equiv \frac{\hbar}{2} \sigma_y$  donc

$$\hat{R}_y(\theta) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \theta \hat{S}_y\right) \equiv \exp\left(i \left(-\frac{\theta}{2}\right) \sigma_y\right) = \cos \frac{\theta}{2} - i \sigma_y \sin \frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Finalement,  $|+\theta\rangle = \hat{R}_y(\theta) |+_z\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+_z\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |-_z\rangle$ , et  $|-\theta\rangle = \hat{R}_y(\theta) |-_z\rangle = -\sin \frac{\theta}{2} |+_z\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |-_z\rangle$ .

2. On écrit  $\hat{S}_\theta = \hat{R}_y(\theta) \hat{S}_z \hat{R}_y^{-1}(\theta)$ , avec  $\hat{S}_z \equiv \frac{\hbar}{2} \sigma_z$ , et on développe le produit de matrices. On obtient

$$\hat{S}_\theta \equiv \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

On vérifie par exemple, que pour  $\theta = \pi/2$ ,  $\hat{S}_\theta \equiv \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{S}_x$ . L'opérateur  $\hat{S}_\theta$  correspond à l'axe  $z$  transformé par la rotation  $R_y(\theta)$ . Comme  $\hat{S}_z |+_z\rangle = \frac{\hbar}{2} |+_z\rangle$  on déduit que

$$\hat{S}_\theta |+\theta\rangle = \hat{R}_y(\theta) \hat{S}_z \hat{R}_y^{-1}(\theta) \left( \hat{R}_y(\theta) |+_z\rangle \right) = \frac{\hbar}{2} \hat{R}_y(\theta) |+_z\rangle = \frac{\hbar}{2} |+\theta\rangle$$

et de même  $\hat{S}_\theta |-\theta\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-\theta\rangle$ .

## 2 Mesure du spin. Délocalisation et recombinaison d'une particule

1. D'après l'exercice 1,

$$|+_z\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+\theta\rangle - \sin \frac{\theta}{2} |-\theta\rangle$$

Cette décomposition donne l'amplitude des deux faisceaux. On déduit les probabilités, en prenant les modules carrés, et en normalisant (ce qui est inutile ici car l'état est déjà normalisé) :

$$P_{+, \theta} = \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|^2, \quad P_{-, \theta} = \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|^2,$$

Donc après  $N$  mesures, la mécanique quantique prédit

$$\frac{N_{+\theta}}{N_{-\theta}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{P_{+, \theta}}{P_{-, \theta}} = \left( \cotg \frac{\theta}{2} \right)^2$$

2. Après recombinaison, on re-obtient l'état

$$|+_z\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\theta\rangle - \sin\frac{\theta}{2}|-\theta\rangle = 1|+_z\rangle + 0| -_z\rangle$$

et donc les probabilités sont  $P_D = 1, P_E = 0$ .

3. Si on place un absorbeur en A, alors après recombinaison, il sort seulement l'état  $(-\sin\frac{\theta}{2}|-\theta\rangle)$ , qui lui-même se décompose dans le dernier appareil comme

$$|-\theta\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}|+_z\rangle + \cos\frac{\theta}{2}| -_z\rangle$$

et donc les probabilités sont  $P_D = |\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|^2, P_E = |\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}|^2$ . En particulier dans le cas  $\theta = \pi/2$ , on obtient  $P_D = \frac{1}{4}, P_E = \frac{1}{4}$  (la somme ne fait pas 1 car il y a probabilité 1/2 que la particule soit absorbée en A). Le paradoxe est que en rajoutant un absorbeur dans le dispositif, le flux en E augmente. Cela ne peut pas se produire si les faisceaux étaient un flux de particules classiques. Ici le résultat est lié à l'aspect ondulatoire, et résulte "d'interférences".

### 3 Représentation d'un état de spin sur la sphère de Riemann

1. Soit un état de spin 1/2 quelconque noté :

$$|\psi\rangle = a|+_z\rangle + b| -_z\rangle$$

avec  $a, b \in \mathbb{C}$ . Si  $b \neq 0$ , alors on écrit  $|\psi\rangle = b|\varphi\rangle$  avec  $|\varphi\rangle = z|+_z\rangle + |-_z\rangle$  et  $z = a/b$ . De façon très générale, les probabilités associées au résultat d'une mesure sur un état quantique, ne change pas si l'état est multiplié par une constante complexe. Plus précisément, si  $|\psi\rangle = b|\varphi\rangle$ , et  $\hat{A}$  est une observable (opérateur) :

$$\frac{\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{|b|^2 \langle\varphi|\hat{A}|\varphi\rangle}{|b|^2 \langle\varphi|\varphi\rangle} = \frac{\langle\varphi|\hat{A}|\varphi\rangle}{\langle\varphi|\varphi\rangle}$$

Par conséquent  $|\psi\rangle$  et  $|\varphi\rangle$  décrivent les mêmes "états physiques"

2. On calcule

$$s_x = \frac{\langle\psi|\hat{S}_x|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \frac{\hbar}{2} (\bar{a}, \bar{b}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \frac{2\Re(z)}{1 + |z|^2}$$

de même :

$$s_y = \frac{\langle\psi|\hat{S}_y|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = -\frac{\hbar}{2} \frac{2\Im(z)}{1 + |z|^2}, \quad s_z = \frac{\langle\psi|\hat{S}_z|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\hbar}{2} \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}$$

Donc  $s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = (\frac{\hbar}{2})^2$ . (Ne pas confondre  $s^2 = \langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2 + \langle S_z \rangle^2$  avec  $\langle S^2 \rangle = \hbar^2 (\frac{1}{2})(\frac{1}{2} + 1)$ ).

3. En coordonnées sphériques  $(s, \theta, \varphi)$ ,  $s_x = \frac{\hbar}{2} \sin\theta \cos\varphi, s_y = \frac{\hbar}{2} \sin\theta \sin\varphi, s_z = \frac{\hbar}{2} \cos\theta$ , on obtient

$$z\bar{z} = \frac{1 + 2\frac{s_z}{\hbar}}{1 - 2\frac{s_z}{\hbar}} = \frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} = \cotg^2\frac{\theta}{2}$$

et

$$z = (1 + |z|^2)^{-1/2} \left( \frac{s_x}{\hbar} - i \frac{s_y}{\hbar} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \right)^{-1/2} (\cos\varphi - i \sin\varphi) \sin\theta$$

donc  $z = \cotg\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}$ .

4. D'après les schémas :

