

TD n°5  
 Le spin 1/2

Références : [1] chap. IV. [2] chap. 4.

## 1 Algèbre du spin

Par définition, les opérateurs de spin  $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$  sont les générateurs des rotations du spin, autour des axes  $x, y, z$  respectivement. (Rappel : cela signifie par exemple que l'opérateur de rotation d'un angle  $\theta$  autour de l'axe  $y$  est :  $\hat{R}_y(\theta) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{S}_y\right)$ ).

1. Montrer que

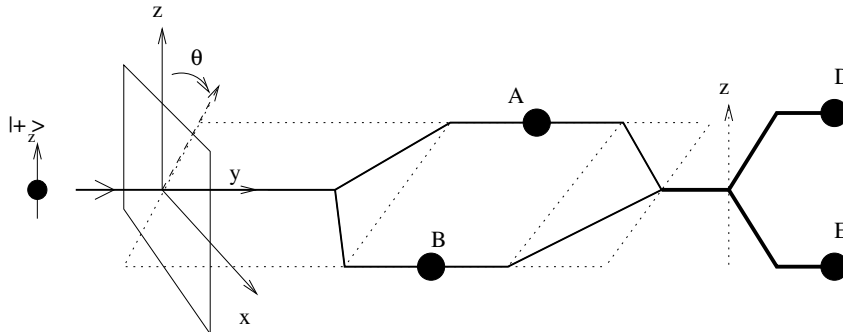
$$\exp(i\alpha\vec{\sigma}\cdot\vec{u}) = (\cos\alpha)\hat{I} + i(\sin\alpha)(\vec{\sigma}\cdot\vec{u})$$

où  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\|\vec{u}\| = 1$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  sont les matrices de Pauli<sup>1</sup>. Aide : développer l'exponentielle par sa série de Taylor. Application : écrire la matrice de  $\hat{R}_y(\theta)$  dans la base  $|+z\rangle, |-z\rangle$  et déduire l'expression des vecteurs  $|+\theta\rangle = \hat{R}_y(\theta)|+z\rangle$  et  $|-\theta\rangle = \hat{R}_y(\theta)|-z\rangle$ .

2. Dans la base  $|+z\rangle, |-z\rangle$ , donner l'expression de l'opérateur de spin  $\hat{S}_\theta = \hat{R}_y(\theta)\hat{S}_z\hat{R}_y(\theta)^{-1}$ . A quel axe correspond t-il ? Montrer que les vecteurs  $|+\theta\rangle, |-\theta\rangle$  sont des vecteurs propres de  $\hat{S}_\theta$  et donner les valeurs propres.

## 2 Mesure du spin. Délocalisation et recombinaison d'une particule

On considère un dispositif expérimental où un faisceau de particules de spin 1/2 (des neutrons par exemple) entre selon l'axe  $y$ . On suppose que chaque particule est préparée dans l'état de spin  $|+z\rangle$ .



1. Les matrices de Pauli sont  $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . On vérifie que  $\sigma_k^2 = 1$  pour tout  $k = x, y, z$ , et  $\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z$  (de même  $\sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y = i\sigma_x, \sigma_z\sigma_x = -\sigma_x\sigma_z = i\sigma_y$ ).

1. Ce faisceau polarisé entre dans un appareil de Stern-Gerlach tourné de l'angle  $\theta$  autour de l'axe  $y$ , (voir figure), et qui a donc pour effet de décomposer l'état de spin  $|+_z\rangle$  par rapport à 2 états notés  $|+\theta\rangle, |-\theta\rangle$ . Sur chacun des faisceaux sortants, on met un détecteur (A et B sur la figure), qui comptent respectivement  $N_{+\theta}$  et  $N_{-\theta}$  particules. Quelle est la probabilité  $P_A$  (respect.  $P_B$ ) de détecter une particule en A (respect. B) ? Après plusieurs mesures, la mécanique quantique prédit quelle valeur pour le rapport  $N_{+\theta}/N_{-\theta}$  ?
2. On enlève les détecteurs A et B précédents, et les deux faisceaux sont recombinaés en un seul faisceau avant de pénétrer à nouveau dans un appareil de Stern-Gerlach orienté selon  $z$  (voir figure). A la sortie, on place deux détecteurs  $D$  et  $E$ . Calculer les probabilités  $P_D, P_E$  de détecter les particules en D et E respectivement.
3. On place un absorbeur en A. Calculer  $P_D$  et  $P_E$ . Considérer en particulier le cas  $\theta = \pi/2$ . Discuter l'aspect paradoxal du résultat. (Voir article "Contrafactuel" sur wikipedia).

### 3 (option) Représentation d'un état de spin sur la sphère de Riemann

Cette représentation a pour but de montrer la relation entre l'état de spin 1/2 dans l'espace quantique ( $\mathbb{C}^2$  de dimension deux complexe), et sa représentation dans l'espace ordinaire  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  (de dimension 3 réel).

1. Soit un état de spin 1/2 quelconque noté :

$$|\psi\rangle = a|+_z\rangle + b|-_z\rangle$$

avec  $a, b \in \mathbb{C}$ . Pourquoi peut-on dire que l'état physique de  $|\psi\rangle$  est caractérisé seulement par le nombre complexe  $z = a/b$  ?

2. Calculer les valeurs moyennes  $s_x = \frac{\langle \psi | \hat{S}_x | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}, s_y = \frac{\langle \psi | \hat{S}_y | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}, s_z = \frac{\langle \psi | \hat{S}_z | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$  dans cet état, et les exprimer en fonction de  $z$ . On note  $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z) \in \mathbb{R}^3$ , et on montrera que  $\|\vec{s}\| = \frac{\hbar}{2}$ , donc que  $\vec{s}$  est sur une sphère de rayon  $\hbar/2$ , appelée **sphère de Bloch** (ou sphère de Riemann, ou  $P^1 = P(\mathbb{C}^2)$  espace projectif de  $\mathbb{C}^2$ ).
3. Inversement montrer que  $z = \cotg(\theta/2) e^{-i\varphi}$ , où  $(s, \theta, \varphi)$  sont les coordonnées sphériques du vecteur  $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z) \in \mathbb{R}^3$ .
4. Montrer que  $z$  est la coordonnée stéréographique<sup>2</sup> du point  $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$  sur la sphère.

### Références

- [1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Mécanique quantique*.
- [2] F. Faure. *Cours de Mécanique quantique pour Master M1 de physique*. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement>.
- [3] J. Leys, E. Ghys, and A. Alvarez. *Dimension. Videos*. <http://www.dimensions-math.org>.

2. Si  $M$  est un point sur la sphère, On place le plan complexe  $\mathbb{C}$ , sous la sphère, tangent au pôle sud. On considère la droite passant par le pôle nord et  $M$ . Elle intersecte  $\mathbb{C}$  au point  $z$ . On dit alors que  $z \in \mathbb{C}$  est la **coordonnée stéréographique** du point  $M$ . Voir film1 de [3].