Université Joseph Fourier. Master 1 Physique 2011-12
TD de mécanique quantique.

TD n°5
Le spin 1/2

<u>*Références :*</u> *[1] chap. IV. [2] chap. 4.*

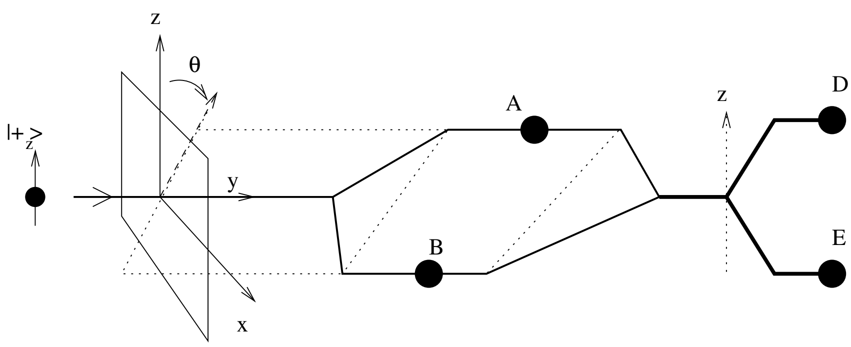
1 Algèbre du spin

Par définition, les opérateurs de spin $\widehat{S}_x, \widehat{S}_y, \widehat{S}_z$ sont les générateurs des rotations du spin, autour des axes x, y, z respectivement. (Rappel : cela signifie par exemple que l'opérateur de rotation d'un angle θ autour de l'axe y est : $\hat{R}_y(\theta) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{S}_y\right)$).

1. Montrer que
$$\exp(i\alpha\vec{\sigma}.\vec{u}) = (\cos\alpha)\hat{I} + i(\sin\alpha)(\vec{\sigma}.\vec{u})$$
où $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $\|\vec{u}\| = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ sont les matrices de Pauli [1]. Aide : développer l'exponentielle par sa série de Taylor. Application : écrire la matrice de $\hat{R}_y(\theta)$ dans la base $|+_z\rangle, |-_z\rangle$ et déduire l'expression des vecteurs $|+_\theta\rangle = \hat{R}_y(\theta)|+_z\rangle$ et $|-_\theta\rangle = \hat{R}_y(\theta)|-_z\rangle$.
2. Dans la base $|+_z\rangle, |-_z\rangle$, donner l'expression de l'opérateur de spin $\widehat{S}_\theta = \hat{R}_y(\theta)\hat{S}_z\hat{R}_y(\theta)^{-1}$. A quel axe correspond t-il ? Montrer que les vecteurs $|+_\theta\rangle, |-_\theta\rangle$ sont des vecteurs propres de $\hat{S}_\theta$ et donner les valeurs propres.

2 Mesure du spin. Délocalisation et recombinaison d'une particule

On considère un dispositif expérimental où un faisceau de particules de spin 1/2 (des neutrons par exemple) entre selon l'axe y. On suppose que chaque particule est préparée dans l'état de spin $|+_z\rangle$.



1. Les matrices de Pauli sont $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $\sigma_k^2 = 1$ pour tout $k = x, y, z$, et $\sigma_x\sigma_y = -\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z$ (de même $\sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y = i\sigma_x$,$\sigma_z\sigma_x = -\sigma_x\sigma_z = i\sigma_y$).

1. Ce faisceau polarisé entre dans un appareil de Stern-Gerlach tourné de l'angle θ autour de l'axe y, (voir figure), et qui a donc pour effet de décomposer l'état de spin $|+_z\rangle$ par rapport à 2 états notés $|+_\theta\rangle, |-_\theta\rangle$. Sur chacun des faisceaux sortants, on met un détecteur (A et B sur la figure), qui comptent respectivement $N_{+\theta}$ et $N_{-\theta}$ particules. Quelle est la probabilité P_A (respect. P_B) de détecter une particule en A (respect. B) ? Après plusieurs mesures, la mécanique quantique prédit quelle valeur pour le rapport $N_{+\theta}/N_{-\theta}$?
2. On enlève les détecteurs A et B précédents, et les deux faisceaux sont recombinés en un seul faisceau avant de pénétrer à nouveau dans un appareil de Stern-Gerlach orienté selon z (voir figure). A la sortie, on place deux détecteurs D et E. Calculer les probabilités P_D, P_E de détecter les particules en D et E respectivement.
3. On place un absorbeur en A. Calculer P_D et P_E. Considérer en particulier le cas $\theta = \pi/2$. Discuter l'aspect paradoxal du résultat. (Voir article “Contrafactualité” sur wikipedia).

3 (option) Représentation d'un état de spin sur la sphère de Riemann

Cette représentation a pour but de montrer la relation entre l'état de spin 1/2 dans l'espace quantique ($\mathbb{C}^2$ de dimension deux complexe), et sa représentation dans l'espace ordinaire $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (de dimension 3 réel).

1. Soit un état de spin 1/2 quelconque noté :
$$|\psi\rangle = a|+_z\rangle + b|-_z\rangle$$
avec $a, b \in \mathbb{C}$. Pourquoi peut-on dire que l'état physique de $|\psi\rangle$ est caractérisé seulement par le nombre complexe $z = a/b$?
2. Calculer les valeurs moyennes $s_x = \frac{<\psi|\widehat{S}_x|\psi>}{\langle\psi|\psi\rangle}, s_y = \frac{<\psi|\widehat{S}_y|\psi>}{\langle\psi|\psi\rangle}, s_z = \frac{<\psi|\widehat{S}_z|\psi>}{\langle\psi|\psi\rangle}$ dans cet état, et les exprimer en fonction de z. On note $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z) \in \mathbb{R}^3$, et on montrera que $\|\vec{s}\| = \frac{\hbar}{2}$, donc que $\vec{s}$ est sur une sphère de rayon $\hbar/2$, appelée **sphère de Bloch** (ou sphère de Riemann, ou $P^1 = P\left(\mathbb{C}^2\right)$ espace projectif de $\mathbb{C}^2$).
3. Inversement montrer que $z = \operatorname{cotg}(\theta/2)\, e^{-i\varphi}$, où (s, θ, φ) sont les coordonnées sphériques du vecteur $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z) \in \mathbb{R}^3$.
4. Montrer que z est la coordonnée stéréographique [2] du point $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$ sur la sphère.

Références

[1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Mécanique quantique.*

[2] F. Faure. *Cours de Mécanique quantique pour Master M1 de physique.* http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement.

[3] Leys J., Ghys E., and Alvarez A. *Dimension.* http ://www.dimensions-math.org.

2. Si M est un point sur la sphère, On place le plan complexe $\mathbb{C}$, sous la sphère, tangent au pôle sud. On considère la droite passant par le pôle nord et M. Elle intersecte $\mathbb{C}$ au point z. On dit alors que $z \in \mathbb{C}$ est **la coordonnée stéréographique** du point M. Voir film1 de [3].