

TD n°4
Particule chargée dans un champ magnétique

Références : [1] H_{III} , E_{VI} et *appendice III*.

1 Hamiltonien d'une particule chargée (ex. de cours)

Réf : [2], chap.3

1. En électromagnétisme, rappeler l'expression de \vec{E} , \vec{B} à partir des potentiels \vec{A} , U .
2. Montrer que les équations de Hamilton classique $\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$, $\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}$ avec le Hamiltonien

$$H(\vec{x}, \vec{p}, t) = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{x}, t) \right)^2 + qU(\vec{x}, t)$$

sont équivalentes à l'équation de Newton avec la force de Lorentz :

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}_{Lorentz} = q \left(\vec{E} + \frac{d\vec{x}}{dt} \wedge \vec{B} \right)$$

2 L'effet Aharonov-Bohm (1959)

Dans le dispositif expérimental décrit par la figure (1), un faisceau cohérent d'électrons part de x_0 , puis est séparé en deux chemins γ_1 , γ_2 , et se recombine dans la région d'interférences où un détecteur est placé. L'onde quantique des électrons n'est présente que sur la zone en gris. Cela est similaire à l'expérience des doubles fentes de Young en optique. Le disque hachuré entouré par les faisceaux contient un champ magnétique \vec{B} perpendiculaire à la figure. Le champ \vec{B} est nul ailleurs, en particulier sur le trajet des faisceaux (zone grise). On note $\phi = \int_{disque} \vec{B} \cdot d^2 \vec{s}$ le flux magnétique.

1. Montrer¹ que $\left(\int_{\gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} - \int_{\gamma_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} \right) = \phi$. Dédurre que \vec{A} est forcément non nul sur le trajet des électrons (bien que $\vec{B} = 0$). Utilisant les coordonnées polaires avec l'origine

1. **Rappel de calcul différentiel** : on a les **formules de Stokes** suivantes.

– Si γ est un chemin d'extrémité a, b et f une fonction alors $\int_{\gamma} \text{grad}(f) \cdot d\vec{l} = f(b) - f(a)$.

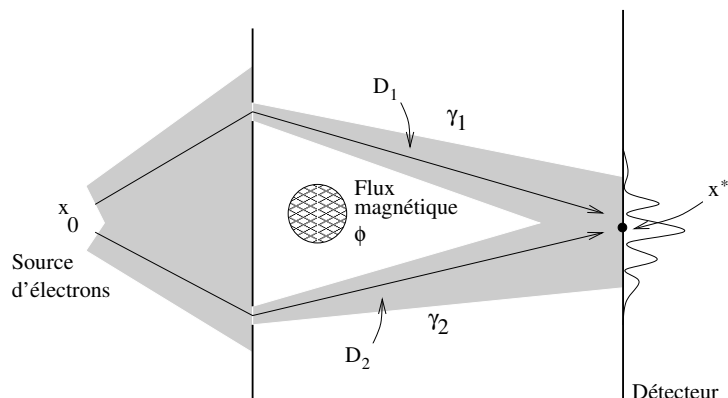


FIGURE 1 –

sur le flux magnétique, montrer que $\vec{A} = \frac{\phi}{2\pi r} \vec{u}_\theta$ est une expression possible pour le potentiel vecteur dans la région où $B = 0$ (externe au tube de flux).

2. Sur la figure 1, on note \mathcal{D}_1 le domaine en gris qui entoure le chemin γ_1 supérieur où $\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = 0$. D'après le Lemme de Poincaré il existe une fonction χ sur \mathcal{D}_1 telle que $\vec{A} = \text{grad} \chi$. On suppose $\chi(x_0) = 0$ pour simplifier. On a donc $\chi(x) = \int_{x_0}^x \vec{A}(x') \cdot d\vec{l}$ où l'intégrale ne dépend pas du chemin reliant x_0 à x . On considère l'équation de Schrödinger suivante qui décrit l'onde stationnaire de l'électron sur le trajet γ_1 (le potentiel V est ici présent pour modéliser les forces qui dévient le faisceau) :

$$\frac{1}{2m} \left(\vec{p} - e\vec{A} \right)^2 \psi_1 + V\psi_1 = E\psi_1 \quad (1)$$

En posant

$$\psi_1(x) = \exp\left(\frac{ie\chi(x)}{\hbar}\right) \psi_0(x) = \exp\left[\frac{ie}{\hbar} \int_{x_0}^x \vec{A}(x') \cdot d\vec{l}\right] \psi_0(x), \quad x \in \mathcal{D}_1$$

-
- Si S est une surface dont le bord est une courbe γ et \vec{u} un champ de vecteur alors $\int_S \vec{\text{rot}}(\vec{u}) \cdot d^2\vec{s} = \int_{\gamma=\partial S} \vec{u} \cdot d\vec{l}$.
 - Si V est un volume dont le bord est la surface S et \vec{v} un champ de vecteur alors $\int_V \text{div}(\vec{v}) \cdot d^3x = \int_{S=\partial V} \vec{v} \cdot d^2\vec{s}$.
 - On a aussi $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}(f)) = 0$ et $\text{div}(\vec{\text{rot}}(\vec{u})) = 0$.
 - Réciproquement les formules suivantes (**Lemme de Poincaré**)

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}} f = 0 &\Rightarrow f = \text{cste} \\ \vec{\text{rot}} \vec{u} = 0 &\Rightarrow \exists f, \text{ tq } \vec{u} = \vec{\text{grad}} f \\ \text{div } \vec{v} = 0 &\Rightarrow \exists \vec{u}, \text{ tq } \vec{v} = \vec{\text{rot}} \vec{u} \end{aligned}$$

ne sont pas toujours vraies. Elles sont vraies sur un domaine \mathcal{D} de l'espace qui est une boule (contractible en un point), ne contenant donc pas de trous.

montrer que l'on obtient l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$\frac{1}{2m} (\vec{p})^2 \psi_0 + V\psi_0 = E\psi_0$$

(i.e. sans potentiel vecteur \vec{A}). Aide : on montrera au préalable que

$$(\vec{p} - e\vec{A}) \left(\exp \left(ie \frac{\chi(x)}{\hbar} \right) \varphi \right) = \exp \left(ie \frac{\chi(x)}{\hbar} \right) (\vec{p}\varphi)$$

pour toute fonction φ .

3. On note de même $\psi_2(x)$ l'amplitude de la fonction d'onde sur le chemin γ_2 dans le domaine \mathcal{D}_2 , et on suppose $\psi_2(x_0) = \psi_1(x_0) = \psi_0(x_0)$ au point x_0 . L'amplitude de l'onde au point x^* de l'écran est alors donnée par $\psi_1(x^*) + \psi_2(x^*)$. De ce qui précède, déduire la densité de probabilité de présence $I = |\psi_1(x^*) + \psi_2(x^*)|^2$ de l'électron en ce point x^* en fonction du flux ϕ ? Conclusion? (Comparer le cas classique et quantique)
4. Ce phénomène d'interférences est observé dans des structures semi-conducteurs. Il permet de détecter des changements de champs magnétique très faibles. Supposons que la surface entourée par les chemins soit de $S = 20\mu m \times 20\mu m$. Calculer la variation de champ magnétique ΔB que l'on peut détecter à travers ce dispositif interférométrique. (comparer au champ magnétique terrestre de $40\mu T$).

3 Niveaux de Landau

On considère des électrons libres, confinés dans un plan (x, y) (entre deux couches de semi-conducteurs). On impose un fort champ magnétique transverse, constant et uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_z$, $B = 0.21 \text{ Tesla}$. On suppose les électrons indépendants.

1. Montrer que $\vec{A} = (A_x = -\frac{1}{2}By, A_y = \frac{1}{2}Bx, A_z = 0)$ est une expression possible pour le potentiel vecteur. Écrire le Hamiltonien $\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2$ décrivant la dynamique d'un électron, à partir des opérateurs $(\hat{x}, \hat{p}_x, \hat{y}, \hat{p}_y)$, sans développer.
2. On propose d'effectuer le changement de variables suivant $(\hat{x}, \hat{p}_x, \hat{y}, \hat{p}_y) \rightarrow (\hat{Q}, \hat{P}, \hat{q}, \hat{p})$:

$$\begin{cases} Q = \frac{1}{\sqrt{\hbar e B}} (p_x + \frac{eB}{2}y) \\ P = \frac{1}{\sqrt{\hbar e B}} (p_y - \frac{eB}{2}x) \end{cases} \quad \begin{cases} q = \frac{1}{eBX} (p_x - \frac{eB}{2}y) \\ p = -\frac{1}{eBX} (p_y + \frac{eB}{2}x) \end{cases} ,$$

Quelles sont les unités physiques de $(\hat{Q}, \hat{P}, \hat{q}, \hat{p})$? Calculer les commutateurs des opérateurs $(\hat{Q}, \hat{P}, \hat{q}, \hat{p})$ deux à deux, pour vérifier que ce sont bien des variables canoniques? On introduira une "constante de Planck effective"

$$\hbar_{eff} = \frac{\hbar}{eBX^2}$$

Exprimer \hbar_{eff} à partir du flux $\phi = BX^2$ de B à travers la surface élémentaire X^2 et du “**quantum de flux**” ou **fluxon** $\phi_0 = h/e$?

3. En introduisant la fréquence cyclotron $\omega = eB/m$, donner l’expression de \hat{H} en fonction des nouveaux opérateurs $(\hat{Q}, \hat{P}, \hat{q}, \hat{p})$, $(\hbar\omega)$, X et \hbar_{eff} ?
4. Donner l’expression des niveaux d’énergie E_n de \hat{H} , appelés **niveaux de Landau**, et donner leur multiplicité. Interprétation?

Références

- [1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Mécanique quantique*.
- [2] F. Faure. *Cours de Mécanique quantique pour Master M1 de physique*. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement>.