Université Joseph Fourier. Master 1 Physique 2011-12
TD de mécanique quantique

TD n°3
Formule d'approximation semi-classique de Weyl

---

1 Particule libre (ex. de cours)

Références : [1] appendice III.

On considère une particule de masse m, se déplaçant librement à une dimension entre deux murs en $x = 0$ et $x = L$.

1. Donner l'expression de son énergie (le Hamiltonien classique) $H(x, p)$, et dessiner l'allure de la trajectoire d'une **particule classique** d'énergie E dans l'espace de phase (x, p).
2. Le principe d'incertitude dit qu'un état quantique occupe la surface $\Delta x \Delta p \simeq \hbar$ dans l'espace de phase. Plus précisément, soit E une énergie fixée, et appelons $S(E)$ la surface dans l'espace de phase (x, p) occupée par les points d'énergie *inférieure à* E. Appelons $N(E)$ le nombre de niveaux d'énergie quantiques inférieurs à E. **La formule de Weyl** donne [1] :
$$N(E) \simeq \frac{S(E)}{2\pi\hbar}$$
(avec une correction de l'ordre d'un nombre de niveaux négligeable devant $N(E)$ si $N(E)$ est grand). Calculer $S(E)$ dans le cas présent, et déduire $N(E)$ d'après la formule de Weyl. Comparer ce résultat au spectre exact (voir TD1) : $E_n^{exact} = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \frac{\hbar^2}{2m}$. Donner l'expression de la **densité d'états** $\rho(E) = \frac{dN(E)}{dE}$.
3. (Optionnel) Mêmes questions (1 et 2) dans le cas d'une particule libre se déplaçant dans une boîte tridimensionnelle de volume V. Dans ce cas la formule de Weyl s'écrit :
$$N(E) \simeq \frac{S(E)}{(2\pi\hbar)^3}$$
où $S(E)$ est le volume [2] dans l'espace de phase (x, y, z, p_x, p_y, p_z) occupé par les états d'énergie inférieure à E. Cette formule est très utilisée en physique statistique pour estimer la densité d'états, par exemple d'électrons dans un métal, *[1]* p.1423). Remarques sur l'expression de $N(E)$ obtenue ?

1. cette formule est en fait valable pour toute forme de potentiel $V(x)$ "confinant"
2. Il sera utile de connaitre le volume d'une sphère de rayon $|p| = \sqrt{2mE}$ dans l'espace des impulsions (p_x, p_y, p_z) : Vol $= \frac{4}{3}\pi |p|^3$

4. (Optionnel) Application. Dans un métal comme le sodium, la densité d'électrons libres est $n/V = 2.6\,10^{22}$ électrons/cm^3. Estimer l'énergie et la vitesse des électrons qui ont l'énergie de Fermi E_F. (d'après la règle de remplissage de Fermi, chaque état quantique spatial d'énergie $E \leq E_F$ est occupé par deux électrons de spin opposés).

2 Spectre du corps noir : gaz de photons à l'équilibre thermique

Soit un volume V fixé, qui contient un gaz de photons à l'équilibre thermodynamique à la température T fixée. Cela signifie que ces photons sont en contact avec de la matière qui est à la température T, car il n'y a pas d'interaction directe entre les photons.

La distribution d'énergie de ces photons s'appelle la **loi de Planck** ou **spectre du corps noir.** L'allure de ce spectre dépend de la température T.

Exemples :

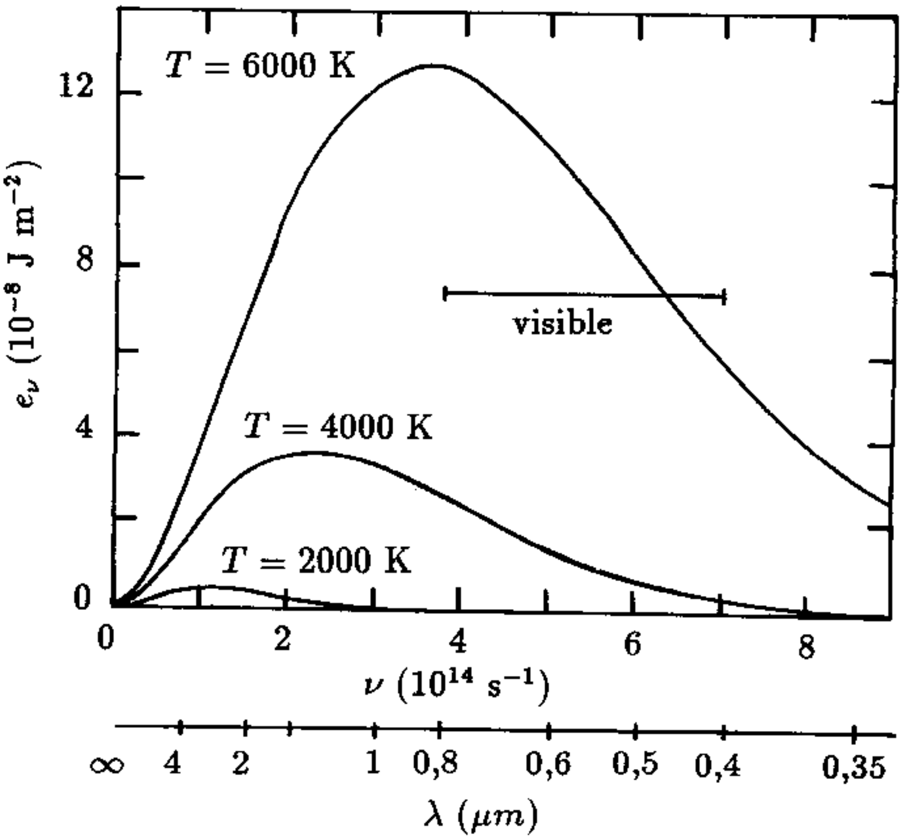
- A la surface du Soleil, le plasma a la température $T = 6000^0 K$.
- Dans un four, on peut avoir $T = 600^0 K$. Cf Diu p826-917 pour une barre de fer. Le forgeron a des tables de couleurs, lui donnant la température précise, à partir de la couleur observée.
- Le rayonnement fossile de l'univers suit la loi de Plank pour $T = 2,725\,K\ \pm 0.002$. Lire "Fond diffus cosmologique" sur wikipedia.

On va établir la loi de Planck qui donne la distribution d'énergie $u(\nu)\,d\nu$ (par intervalle de fréquence et par unité de volume) d'un gaz de photons à l'équilibre thermique.

Questions Pour un intervalle de fréquence $\nu \in [\nu; \nu + d\nu]$,

1. En utilisant la formule de Weyl sur le comptage d'états ondulatoires (i.e. un état ondulatoire occupe l'espace de phase $\frac{1}{(2\pi)^3} d^3\vec{x} d^3\vec{k}$), trouver le nombre de modes électromagnétiques $\frac{dn}{d\nu}$ dans un volume V et par intervalle de fréquence.
2. D'après la quantification du champ électromagnétique, un mode de fréquence ν ayant N photons a une énergie $E_N = h\nu\,(N + 1/2)$. La loi de Boltzmann stipule que cet état à N photons a la probabilité $P_N = \frac{1}{Z}\exp\left(-E_N/(kT)\right)$ d'apparaitre. Déduire le nombre moyen de photons dans ce mode $< N_{mode} >= \frac{dN}{dn}$ appelée **loi de Bose-Einstein**. Déduire le nombre moyen de photons $\frac{dN}{d\nu}$ par intervalle de fréquence.
3. Déduire et tracer l'énergie des photons par unité de volume et par intervalle de fréquence, notée $u(\nu)$ et appelée **Loi de Planck** :

$$\boxed{u(\nu)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3 d\nu}{c^3\left(e^{h\nu/kT} - 1\right)}\ :\ \text{loi de Planck}}$$



3 Equidistribution de l'énergie des ondes sismiques

La croute terrestre est solide, et inhomogène. Les ondes sismiques sont des ondes de vibration élastiques dans ce milieu. Leur origine est diverse : tremblements de terre pour les fortes amplitudes (qui sont relativement rares et localisées). Mais il y a toujours un "bruit de fond" d'ondes sismiques dont l'origine est essentiellement par exemple le fracas des vagues sur les côtés océaniques. Sauf près des autoroutes par exemple, où le passage des poids lourds a un effet dominant. Dans la croute, les ondes élastiques ont trois polarisations possibles :

- 2 états de polarisation pour les ondes transverses (**ondes** P comme primaires car plus rapides, elles arrivent les premières), qui ont une vitesse $v_P \simeq 6$ km/s
- 1 état de polarisation pour les ondes longitudinales (**ondes** S, comme secondaires), qui ont une vitesse plus faible $v_S = v_P/1.73$

Dans certaines régions, la croute terrrestre contient de nombreuses inhomogénéités. Dans ces régions les ondes du bruit de fond se comportent de façon très complexe (subissent des reflexions, des interférences...). Il est donc raisonnable de supposer que tous les modes sont excités de façon identique en moyenne. C'est une hypothèse sur l'équidistribution de l'énergie entre les différents modes, semblable à "l'hypothèse ergodique" en physique statistique.

1. En utilisant la formule de Weyl sur le comptage d'états ondulatoires, considérer un intervalle de fréquence $d\nu$ et un volume V, et calculer le nombre de modes dn_P d'ondes P et le nombre de modes dn_S d'ondes S.
2. Avec l'hypothèse d'équidistribution de l'énergie entre ces différents modes, déduire [3] le rapport E_P/E_S entre l'énergie contenue par les ondes P et S dans un intervalle de fréquence $d\nu$.

Références

[1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Mécanique quantique.*

[2] R. Hennino, N. Tregoures, M Shapiro, L. Margerin, M Campillo, B. van Tiggelen, and R. Weaver. Observation of equipartition of seismic waves. *Phys. Rev. Letters*, 86 :3447–3450, 2001.

[3] G. Papanicolaou, L. Ryzhik, and J. Keller. Stability of the p to s energy ratio in the diffusive regime. 1995.

3.

(a) Cette prédominance en énergie des ondes S sur les ondes P n'a été étudiée que récemment [3] (1995), et observée dans une région du Mexique en 2001 [2], qui forme une cavité propice à la diffusion des ondes. Il faut noter la difficulté qu'il y a de mesurer la polarisation des ondes sismiques.