

TD n°2

*Spectre de l'oscillateur Harmonique.
 La force de Casimir du vide quantique.*

Les "exercices de cours" doivent être préparés avant la séance de TD, sur une feuille qui sera ramassée au début du TD et notée.

1 Spectre de l'oscillateur Harmonique (ex. de cours)

Références : [2] chap. V. [3].

L'objectif est de trouver les niveaux d'énergie du Hamiltonien $\hat{H} = \hat{p}^2 / (2m) + \frac{1}{2}k\hat{q}^2$, décrivant une particule à une dimension q dans un potentiel quadratique. Rappel : $\hat{p} = -i\hbar d/dq$, et $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar\hat{I}$. On pose $\omega = \sqrt{k/m}$.

1. Pourquoi ce modèle est important en physique ? donner un exemple.
2. On définit les opérateurs (vérifier qu'ils sont sans dimension) :

$$\hat{Q} = \left(\frac{\sqrt{mk}}{\hbar} \right)^{1/2} \hat{q}, \quad \hat{P} = \left(\frac{1}{\hbar\sqrt{mk}} \right)^{1/2} \hat{p}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Q} + i\hat{P}), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Q} - i\hat{P}), \quad \hat{N} = a^\dagger a$$

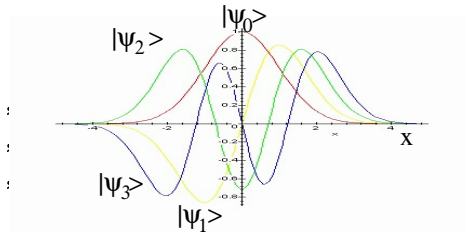
Calculer les commutateurs $[\hat{Q}, \hat{P}]$, $[a, a^\dagger]$, $[\hat{N}, a]$, $[\hat{N}, a^\dagger]$, et montrer que $\hat{H} = \hbar\omega (\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{I})$.

On va maintenant chercher le spectre de l'opérateur \hat{N} .

3. On cherche la fonction $\psi_0(Q)$ définie par $a\psi_0 = 0$. Montrer que l'on obtient l'équation différentielle $\frac{d\psi_0}{dQ} = -Q\psi_0$ dont la solution normalisée est la Gaussienne $\psi_0(Q) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{Q^2}{2}\right)$. Montrer que ψ_0 est fonction propre de \hat{N} .
4. Pour un entier $n \geq 1$, on définit par récurrence l'état ψ_n par $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n}} a^\dagger \psi_{n-1}$. Par récurrence sur n montrer que $\hat{N}\psi_n = n\psi_n$ et que $\|\psi_n\|^2 = 1$.
5. Montrer que $a\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}$.
6. On cherche l'expression de la fonction $\psi_n(Q)$. Montrer la relation : $\psi_n(Q) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \left(Q - \frac{d}{dQ} \right) \psi_{n-1}(Q)$.
 A l'aide du logiciel gratuit **xcas** [1], dessiner les **fonctions d'Hermite** $\psi_n(Q)$ avec le code :

```
f0:=exp(-x^2/2);
```

```
f1:=1/(sqrt(2*1))*(x*f0-diff(f0,
f2:=1/(sqrt(2*2))*(x*f1-diff(f1,
f3:=1/(sqrt(2*3))*(x*f2-diff(f2,
plot([f0,f1,f2,f3],x=-5..5);
```



7. Pour simplifier l'écriture, on définit la fonction $H_n(Q)$ par l'écriture $\psi_n(Q) = \langle Q | \psi_n \rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{Q^2}{2}\right) \left(\frac{1}{n!2^n}\right)^{1/2} H_n(Q)$ et connaissant $\psi_0(Q)$ ci-dessus, on observe que $H_0(Q) = 1$. Montrer que $H_n(Q) = \left(2Q - \frac{d}{dQ}\right) H_{n-1}(Q)$. Dédurre par récurrence que $H_n(Q)$ est en fait un polynôme de degré n à coefficients entiers appelé **polynôme d'Hermite**, et calculer les premiers termes $H_1(Q), H_2(Q), H_3(Q)$.
8. Dédurre de ce qui précède que les niveaux d'énergie de \hat{H} sont $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$, et que les fonctions propres associées sont $\psi_n(Q)$.
9. (**Optionnel**) Pour montrer que l'opérateur \hat{N} n'a pas d'autres vecteurs propres, il faut montrer que ces états ψ_n forment une base de l'espace $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. Montrer que \hat{N} est auto adjoint ($\hat{N}^+ = \hat{N}$), et déduire que les vecteurs propres ψ_n forment un ensemble orthonormés de vecteurs. On cherche une fonction $\varphi(Q)$ orthogonale à toutes les fonctions ψ_n . Comme $\psi_n \propto e^{-Q^2/2} H_n$ avec H_n polynôme de degré n , cela implique $\int \varphi(Q) e^{-Q^2/2} P(Q) dQ = 0$ pour tout polynôme P . En déduire que la transformée de Fourier de $\varphi(Q) e^{-Q^2/2}$ est nulle et donc que $\varphi = 0$.

2 La force de Casimir (1948)

(Lire : Wikipedia "Effet Casimir".) C'est un effet assez surprenant qui montre que dans le "vide", il y a des "fluctuations quantiques" du champ électromagnétique qui ont des effets mesurables. Cet effet calculé par Casimir en 1948, a été observé en 1958 par Sparnay et encore plus récemment avec une grande précision. Considérons deux plaques métalliques (conducteurs parfaits) de surface S , séparés d'une distance $\ell \simeq 1\mu m$. On va montrer que le vide quantique électromagnétique induit une force attractive entre ces deux plaques appelée **force de Casimir**¹ :

$$F_{Casimir}(\ell) = - \left(\frac{\pi^2 \hbar c}{240 \ell^4} \right) S \quad (1)$$

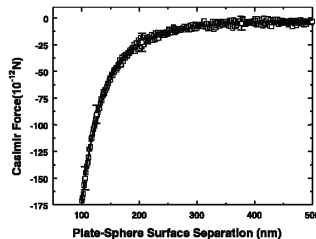
Remarquer que cette force décroît très vite avec la distance (en $1/\ell^4$), et que son expression fait intervenir seulement les constantes fondamentales $\hbar c$. Sa valeur est très faible :

$$F_{Casimir} \simeq 10^{-7} N \text{ pour } \ell = 1\mu m \text{ et surface } S = 1cm^2.$$

1. Soit une boîte métallique de côtés $L_x = L_y = L$ et d'épaisseur très fine $L_z = \ell \ll L$. Comme le champ électrique s'annule sur les parois, les modes pouvant exister dans cette cavité ont par conséquent des longueurs d'onde selon (x, y, z) qui sont $\lambda_x = 2L/a$,

1.

- Voici une courbe qui compare la théorie et les mesures expérimentales, obtenue par A.Roy et al. (1999) :



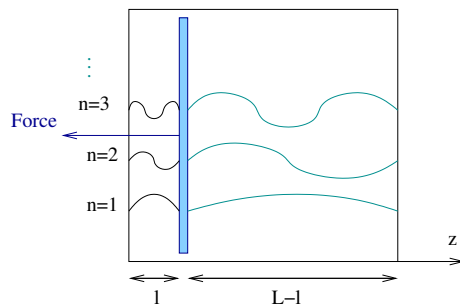


FIGURE 1 – Plaque métallique libre de bouger selon z dans une enceinte aux murs métalliques. Le vide quantique des modes électromagnétiques $n = 1, 2, 3 \dots$ est responsable de la force de Casimir.

$\lambda_y = 2L/b$, $\lambda_z = 2\ell/d$, indicés par des entiers $a, b, d > 0$. Montrer que la fréquence du mode indicé par (a, b, d) est

$$\omega_{a,b,d} = \frac{\pi c}{\ell} \left(\left(\frac{\ell}{L} \right)^2 (a^2 + b^2) + d^2 \right)^{1/2}.$$

On rappelle que si la cavité est “vide”, chaque mode de fréquence ω a cependant une “énergie quantique du vide” $\frac{1}{2}\hbar\omega$. Dédire une expression (formelle) de l’énergie du vide quantique électromagnétique dans cette cavité $\mathcal{E}(\ell)$, comme somme sur ces modes (en tenant compte des deux états de polarisation possibles). Quelle est l’origine de la divergence de $\mathcal{E}(\ell)$?

2. Pour éviter cette divergence, on introduit une **fréquence de coupure**² ω_c et on décide de multiplier l’énergie de chaque mode de fréquence ω par le facteur $\exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right)$, ce qui rend donc l’expression de $\mathcal{E}(\ell)$ convergente (on fera $\omega_c \rightarrow \infty$ à la fin du calcul³). Comme $\ell \ll L$, on pourra remplacer la somme sur (a, b) par une intégrale sur $a > 0, b > 0$, et ensuite utiliser des coordonnées polaires $a = \rho \cos \theta, b = \rho \sin \theta$. Remarquer que $\omega d\omega = \left(\frac{\pi c}{L}\right)^2 \rho d\rho$. Montrer que

$$\mathcal{E}(\ell) \simeq \hbar \left(\frac{\pi}{2}\right) \sum_{d>0} \int_0^\infty \rho \omega e^{-\omega/\omega_c} d\rho = \hbar \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{L}{\pi c}\right)^2 \sum_{d>0} \int_{\omega_0}^\infty \omega^2 e^{-\omega/\omega_c} d\omega$$

avec $\omega_0 = \frac{\pi c}{\ell}d$. Ensuite, on utilisera l’astuce $\int_{\omega_0}^\infty \omega^2 e^{-\omega/\omega_c} d\omega = \left(\frac{d^2}{d\alpha^2} \int_{\omega_0}^\infty d\omega e^{-\alpha\omega}\right)_{\alpha=\frac{1}{\omega_c}}$ et la formule de somme $\sum_{d>0} \alpha^d = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ pour déduire

$$\mathcal{E}(\ell) = \frac{\hbar c \pi^2 L_x^2}{2\ell^3} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{x(e^x - 1)} \right), \quad x = \frac{\pi c}{\omega_c \ell}$$

3. Utiliser le développement :

$$\frac{1}{x(e^x - 1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{12} - \frac{1}{30.24}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

2. Physiquement, cette fréquence de coupure peut être la fréquence de coupure dans les métaux, appelée aussi fréquence plasma (pour $\omega < \omega_c$ le métal est réfléchissant, et pour $\omega > \omega_c$ le métal est transparent).

3. On choisit ici une fonction de troncation $e^{-\omega/\omega_c}$. Le résultat ne dépend pas du choix de cette fonction.

pour exprimer l'énergie du vide $\mathcal{E}(\ell)$ en puissances de ω_c . Montrer que dans la limite $\omega_c \rightarrow \infty$, $\mathcal{E}(\ell)$ diverge comme ω_c^4 , et calculer les termes sous dominants jusqu'au premier terme non divergent.

4. Calculer $U(\ell) = \mathcal{E}(\ell) + \mathcal{E}(L - \ell)$ qui est l'énergie du vide dans l'enceinte de la figure 1, et déduire l'expression de la force de Casimir définie par $F_{\text{Casimir}}(\ell) = -\frac{dU}{d\ell}$.

Références

- [1] Parisse B. *Logiciel libre de calcul formel*. Taper xcas dans google.
- [2] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Mécanique quantique*.
- [3] F. Faure. *Cours de Mécanique quantique pour Master M1 de physique*. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement>.