

TD n°1  
*Une particule à une dimension*

---

Les “exercices de cours” doivent être préparés avant la séance de TD, sur une feuille qui sera ramassée au début du TD et notée.

## 1 Particule libre (ex. de cours)

*Références : [1] chap.1, complément H<sub>I</sub>.*

On considère une particule de masse  $m$ , se déplaçant **librement** à une dimension  $x$  et qui rebondit parfaitement sur deux murs situés en  $x = 0$  et  $x = L$ . Le potentiel est donc  $V(x) = 0$  pour  $0 < x < L$ , et  $V(x) = +\infty$  ailleurs imposant  $\psi(0) = \psi(L) = 0$ . Trouver les fonctions d'ondes stationnaires  $\psi_n$  et les niveaux d'énergie  $E_n$ .

## 2 La paquet d'onde Gaussien (ex. de cours)

*Références : [1] chap.1, complément G<sub>I</sub>.*

Supposons qu'une particule se déplaçant selon l'axe  $x$  soit décrite à la date  $t = 0$  par la fonction d'onde

$$\psi(x) = C \exp\left(i\frac{p_0 x}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1)$$

appelé **paquet d'onde Gaussien**, avec  $x_0, p_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  et  $C > 0$ . En notation de Dirac, on écrit  $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$  où  $|\psi\rangle \in L^2(\mathbb{R})$  est l'état quantique.

1. Trouver  $C$  de façon à ce que  $|\psi\rangle$  soit normalisé, c'est à dire :  $\|\psi\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = 1$ . Tracer et donner l'interprétation physique de  $P(x) = |\psi(x)|^2$  ?

Aide : voici la formule de **l'intégrale Gaussienne** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(- (Ax^2 + Bx + C)) dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(-C + \frac{B^2}{4A}\right), \quad A, B, C \in \mathbb{C},$$

et avec  $\Re(A) > 0$ , pour que l'intégrale soit convergente.

2. On note  $|p\rangle$  l'état décrivant **une onde plane**, et défini par

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(i\frac{px}{\hbar}\right)$$

Calculer  $\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle$ . Tracer et interpréter  $\tilde{P}(p) = |\tilde{\psi}(p)|^2$ .

3. Que devient l'état  $|\psi\rangle$  dans la limite  $\sigma \rightarrow \infty$ , puis dans la limite  $\sigma \rightarrow 0$  ?

4. On définit la position moyenne de la particule par  $\langle x \rangle = \int x P(x) dx = \langle \psi | \hat{x} \psi \rangle$ , avec  $P(x) = |\psi(x)|^2$ . On définit l'incertitude en position  $\Delta x$  par

$$(\Delta x)^2 := \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$

Montrer la formule utile :  $(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ .

5. Dans le cas du paquet d'onde Gaussien, calculer  $\langle x \rangle, \Delta x, \langle p \rangle, \Delta p$  et le produit  $\Delta x \Delta p$ .

### 3 Dispersion d'une onde. Discussion qualitative.

1. Sachant que  $p = mv$ , écrire le principe d'incertitude pour  $\Delta x \Delta v$ . L'interpréter en montrant que une onde quantique libre (non soumise à des forces) ne peut rester localiser au cours du temps (cad que  $\Delta x$  ne peut pas rester petit).
2. Application numérique : avec  $h = 2\pi\hbar = 6.6 \cdot 10^{-34} J.s$ . Montrer que pour un électron libre (de masse  $m = 9 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ ), l'onde dépasse forcément une taille macroscopique ( $\simeq 1 \text{cm}$ ) après quelques secondes. Au contraire pour une poussière de masse  $m \geq 10^{-15} \text{kg}$ , montrer que l'on peut ne pas avoir d'effet ondulatoires à une taille macroscopique en des temps raisonnables.
3. Considérons une onde quantique soumise à des forces lui imposant une dynamique chaotique, une "sensibilité aux conditions initiales" telles que la dispersion croit exponentiellement comme  $\Delta x(t) \simeq \Delta x(0) e^{t/\tau}$ ,  $\Delta v(t) \simeq \Delta v(0) e^{t/\tau}$  avec un temps caractéristique  $\tau$  (par exemple une boule de loto,  $\tau \simeq 1 \text{s}$ ). Montrer que  $\Delta x(t)$  atteint une taille macroscopique après un temps très court, appelé **temps d'Ehrenfest**  $T_E$ . Donner une expression analytique (qualitative) et numérique de  $T_E$  si  $\tau \simeq 1 \text{s}$  et  $m = 10^{-2} \text{kg}$ .

### 4 Evolution d'un paquet d'onde libre

1. A la date  $t = 0$ , la particule libre est décrite par un paquet d'onde  $\psi(x)$  dont on ne précisera pas l'expression. On suppose seulement que sa transformée de Fourier  $\tilde{\psi}(p)$  est concentrée en  $p \simeq p_0$ . Le paquet d'onde évolue librement sur tout l'axe  $x$ . On note  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$  le Hamiltonien du système. Déterminer l'expression de  $\tilde{\psi}(p, t)$  à la date  $t$  à partir de  $\tilde{\psi}(p, 0)$ .
2. Faire l'approximation, à l'ordre 1 en  $p$ , de  $H$  au point  $p_0$  :

$$H(p) \simeq H(p_0) + (p - p_0) \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_{p=p_0}$$

pour en déduire l'expression de  $\psi(x, t)$  à la date  $t$  à partir de  $\psi(x, t = 0)$ . Allure de  $|\psi(x, t)|$  ?

3. (**Optionnel**) Même question que précédemment en poussant le développement jusqu'à l'ordre 2 en  $p$ , et en considérant cette fois ci le cas particulier d'un paquet d'onde Gaussien (1). On aura une intégrale Gaussienne à calculer.

### Références

- [1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Mécanique quantique*.