Introduction à la géométrie et la topologie des espaces fibrés en physique

Frédéric Faure

version: 18 septembre 2022

Table des matières

0.1 Présentation du cours . . . 3
0.1.1 Plan . . . 3

1 Le pendule de Léon Foucault et le transport parallèle sur $T\mathcal{S}$ 5
1.1 Description historique du pendule de Foucault . . . 5
1.2 Connexion de Levi-Civita . . . 6
1.2.1 Dérivée covariante et métrique . . . 11
1.3 Holonomie et courbure . . . 13
1.3.1 Holonomie d'un chemin fermé . . . 13
1.3.2 Courbure de Gauss d'une surface et formule de Gauss Bonnet . . . 15
1.4 Trajectoires géodésiques . . . 21
1.4.1 Définition d'une trajectoire géodésique . . . 21
1.4.2 Comportement relatif de géodésiques voisines . . . 23
1.5 Choix de Jauge, potentiel de Jauge . . . 25
1.5.1 Choix de Jauge ou trivialisation locale du fibré tangent . . . 25
1.5.2 Potentiel de Jauge . . . 27
1.5.3 Changement de Jauge . . . 29
1.5.4 Courbure . . . 29
1.6 Espace fibré vectoriel . . . 31
1.6.1 Définitions . . . 31
1.6.2 Fibré normal à une courbe $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ . . . 35
1.7 Topologie d'un fibré vectoriel de rang 1 sur S^1 . . . 41
1.8 Topologie d'un fibré vectoriel de rang 2 sur S^2 . . . 42
1.9 Topologie d'un espace fibré F de rang 2 sur $\mathcal{S}$ à partir des zéros d'une section . . . 45
1.9.1 Cas d'un fibré de rang 1 sur S^1 . . . 45
1.9.2 Cas d'un fibré de rang 2 sur $\mathcal{S}$ . . . 46
1.9.3 Exemple du fibré TS^2 . . . 47

2 L'espace fibré canonique en mécanique quantique et la connexion de Berry 50
2.1 L'espace projectif $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ . . . 51
2.1.1 Remarque de base . . . 51
2.1.2 Exemple simple mais important : $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ . . . 52
2.2 Connexion de Berry sur l'espace fibré canonique $F \to \mathbb{P}(\mathcal{H})$ . . . 54
2.3 Evolution quantique et connexion de Berry . . . 55
2.4 Vitesse du point $[\psi(t)]$ sur l'espace projectif . . . 59
2.5 Exemple d'une matrice 2×2 . . . 60
2.6 Le théorème adiabatique . . . 62

3 Systèmes couplés lents-rapide en dimension 2. Exemple du spin-orbite 68
3.1 Exemples en physique . . . 68
3.2 Le modèle quantique . . . 69
3.3 Le modèle semi-quantique. Interprétation topologique des bandes . . . 71
3.4 Les dégénérescences et leur "codimension" . . . 73
3.5 Résultat général . . . 74

3.6 Forme normale topologique [1] 77

1. Il ne s'agit pas de **forme normale symplectique** étudiée par Y. Colin de Verdière . Une forme normale symplectique donne le spectre correct. Notre **forme normale topologique** ne donne que le nombre correct de valeurs propres échangées et non leur position.

Remark 0.0.1. On this pdf file, you can click on the colored words, they contain an hyper-link to wikipedia or other multimedia contents.

Il y a une page web associée à ce cours avec des documents supplémentaires.

0.1 Présentation du cours

Video de cette section.

Ce cours est destiné à des étudiants de physique désireux d'apprendre des notions de mathématique utiles dans de nombreux domaines de la physique (mécanique quantique, mécanique classique, relativité, électromagnétisme, élasticité, mécanique du solide, robotique et théorie du contrôle,...).

L'objectif est d'introduire des **concepts et outils de base en géométrie différentielle et en topologie** (variétés différentiables, espaces fibrés avec connections, géométrie Riemannienne, géométrie symplectique), en donnant tout au long du cours des **applications précises à la physique**. L'intérêt de la géométrie différentielle pour la physique est non seulement de fournir des outils de calculs, mais surtout de proposer un cadre de pensée où l'on fait ressortir l'identité géométrique des objets manipulés. Ce mode de pensée est très fécond, et parfois même indispensable.

Dans ce cours on se concentre sur la notion d'**espace fibré avec connexion**. C'est une notion de géométrie et de topologie qui est à la base de la formulation de nombreuses théories physiques : **l'électromagnétisme, la relativité générale, les théories de Jauge**, et apparaît de façon naturelle pour expliquer des phénomènes comme : le pendule de Foucault, la phase de Berry, l'effet Hall quantique, les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld, la raideur d'un ressort, ...

Dans un souci de clarté et de pédagogie, les notions présentées seront toujours associées à des exemples simples, et illustrées autant que possible. On donnera des suggestions d'ouvrages et un guide à la littérature pour les étudiants qui seraient désireux d'approfondir les mathématiques ou conforter leurs bases.

0.1.1 Plan

1. **Le pendule de Foucault. Connexion sur un fibré vectoriel. Transport parallèle.**
   Chapitre d'introduction. On présente les notions de : fibré tangent TS2. Connexion géométrique. Holonomie. Courbure. Indice de Chern du fibré. Autres applications : description géométrique de la chute d'un chat qui se retourne, d'une bactérie qui nage, de la torsion d'un brin d'ADN, de la raideur d'un ressort.
2. **Équation de Schrödinger et phase de Berry.**
   Théorème adiabatique et phase de Berry. Aspect topologique des dégénérescences du spectre. Indices topologiques de Chern. Applications : Monopole magnétique. Effet Aharanov Bohm. Effet hall quantique entier. Transport topologiques de charges en physique mésoscopique. Aspect topologique des systèmes quantiques couplés. Manifestation de la formule de l'indice d'Atiyah-Singer en physique moléculaire.

— Merci de m'indiquer [2] toute correction ou amélioration possible (et autres remarques).
— Les signes @@ signifie que le passage est inachevé et à compléter.

Références : Il faut consulter des ouvrages de mathématiques pour préciser, approfondir, compléter les notions présentées ici. Pour un historique sur la notion d'espace fibré en mathématiques et physique, on peut consulter un texte de J.P. Bourguignon [Bou92] disponible sur la page web [Fau10a].

2. email: frederic.faure@univ-grenoble-alpes.fr

- Pour la physique mathématique, nous conseillons les livres de M. Taylor [Tay96a, Tay96b, Tay96c]. La théorie des connections sur espaces fibrés est traitée en particulier dans les appendices B et C.
- Notes de cours d'Yves Colin de Verdière [dV02], dont ces notes se sont largement inspirées.
- Sur les espaces fibrés vectoriels (version mathématiques), voir le livre disponible sur internet [Hat98] de Hatcher, et celui de Nakahara [Nak03].

Chapitre 1

Le pendule de Léon Foucault et le transport parallèle sur $T\mathcal{S}$

Pour présenter la notion géométrique d'espace fibré nous commençons par décrire un exemple qui permettra d'introduire beaucoup de notion importante et leur donner facilement une interprétation intuitive qui sera valable dans le cas général.

1.1 Description historique du pendule de Foucault

Vidéo de la section.

(cf Wikipédia "Pendule de Foucault" pour plus de détails).

En 1851, L. Foucault a accroché un long pendule dans le panthéon à Paris, dans le but de mettre en évidence la rotation de la Terre dans l'espace, mais sans observer les étoiles, c'est à dire en faisant une observation dans une pièce sans fenêtre. Le pendule avait un mouvement d'oscillations rectilignes, avec peu de frottements et qui ne s'amortissaient qu'après 6 heures (ou des oscillations entretenues).

Le référentiel terrestre, lié aux murs de la pièce, se déplace par rapport aux étoiles (référentiel Galiléen). L'idée de base de Foucault est que d'après le principe d'inertie, la direction des oscillations du pendule voudrait rester fixe par rapport aux étoiles, et donc se déplacer par rapport au référentiel terrestre (les murs de la pièce).

Les choses ne sont pas si simples car à cause de l'attraction terrestre, la direction des oscillations doit aussi rester dans le plan horizontal. Or ce plan horizontal bouge par rapport aux étoiles à cause de la rotation de la Terre.

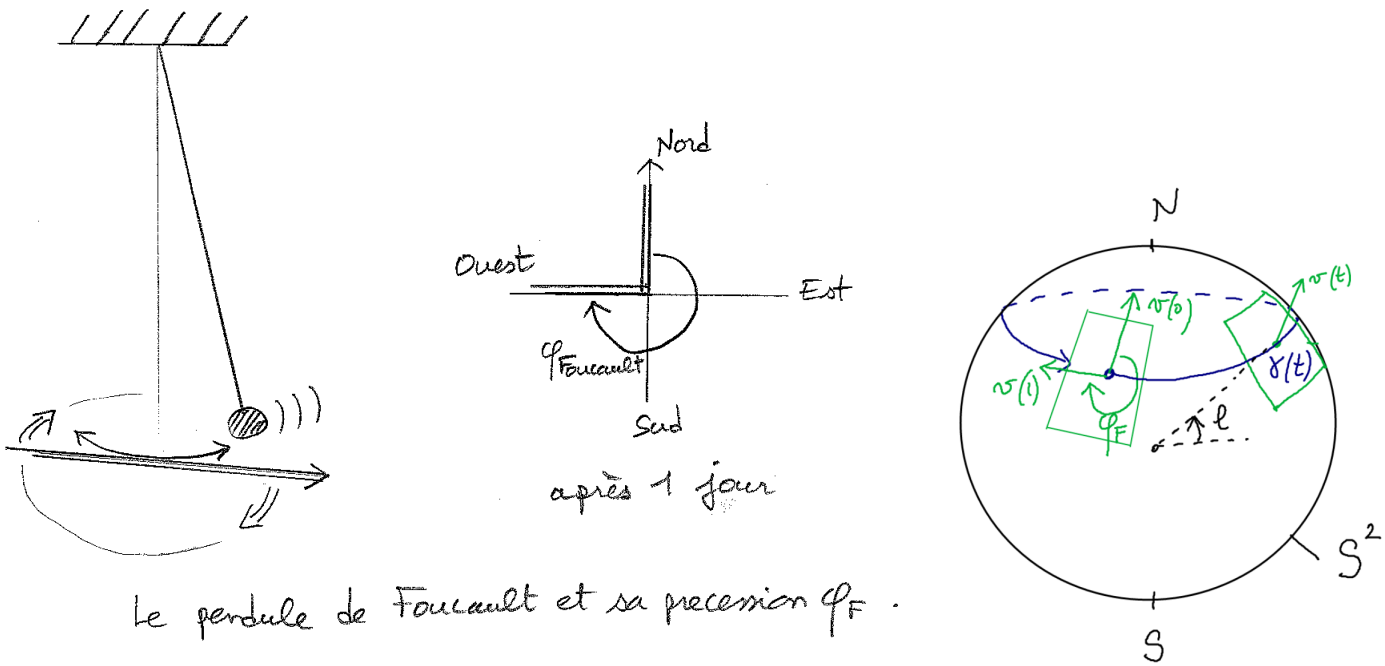
Un petit calcul (en exercice 1.1.1), en utilisant la force de Coriolis (1832), montre que la direction des oscillations du pendule tourne à vitesse constante dans le sens indirect par rapport au bâtiments, et précisément, après 1 jour sidéral (un tour de la Terre par rapport aux étoiles [1], soit 23h56'), l'angle est :

$$\begin{aligned} \varphi_{Foucault} &= -2\pi \sin l, \qquad l = \text{latitude} = 48^o 52' \\ &= -271^o = -3/4 \text{ tour} \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Deux cas extrêmes sont facilement compréhensibles : au pôle nord ($l = \pi/2$), le pendule aurait tourné de $\varphi_F = -2\pi$, et à l'équateur ($l = 0$), $\varphi_F = 0$. La formule (1.1.1) n'est pas si simple, et en 1852 Foucault invente le gyroscope, dans lequel, l'axe de rotation reste exactement fixe par rapport aux étoiles (référentiel d'inertie).

Dans la suite on va décrire le mouvement de la direction des oscillations du pendule et expliquer (1.1.1), en adoptant un point de vue géométrique.

1. Le jour solaire est de 24h, c'est la période pour que le Soleil repasse au méridien. Le jour sidéral T est la période pour qu'une étoile donnée repasse au méridien. L'année contient 365.25 jours solaires et donc $365.25+1$ jours sidéral. Donc $(365.25+1)\,T = 365.25\,.24\text{h}$, donc $T = \frac{365.25}{366.25} 24\text{h} = 23\text{h}56\text{m}04\text{s}$.



Le pendule de Foucault et sa precession φ_F.

Exercice 1.1.1. (cet exercice concerne la preuve non géométrique de (1.1.1), assez standard dans les livres de mécanique). Obtenir (1.1.1) par un calcul qui tient compte de la force de Coriolis et dans l'approximation que la fréquence d'oscillation du pendule et grande devant la fréquence de rotation de la Terre.

Solution : Voir [Arn76, chap.6, p.132].

1.2 Connexion de Levi-Civita

vidéo de cette section.

Surface $\mathcal{S}$: On note $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ la sphère[2] de dimension 2 inclue dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$. Dans le cas du pendule, S^2 est la forme de la surface de la Terre qui est fixe par rapport aux étoiles. Les objets à la surface de la Terre comme le pendule se déplacent donc sur cette surface et font un tour en 1 jour.

Le choix de la sphère S^2 est un choix pédagogique, et tout ce que l'on raconte dans ce chapitre dans le cas de la sphère S^2 se généralise au cas d'une surface quelconque notée $\mathcal{S}$ plongée dans l'espace $\mathbb{R}^3$, lisse compacte et sans bord. La figure 1.9.1 page 48 illustre d'autres surfaces possibles.

Trajectoire γ sur la surface $\mathcal{S}$: A la date $t \in \mathbb{R}$, la position du pendule sur la Terre est notée $\gamma(t) \in S^2$. La trajectoire γ est donc le cercle à latitude l fixée suivit par le pendule entrainé par la rotation de la Terre. (la Terre tourne, mais dans notre description S^2 ne tourne pas, seul le point $\gamma(t)$ tourne).

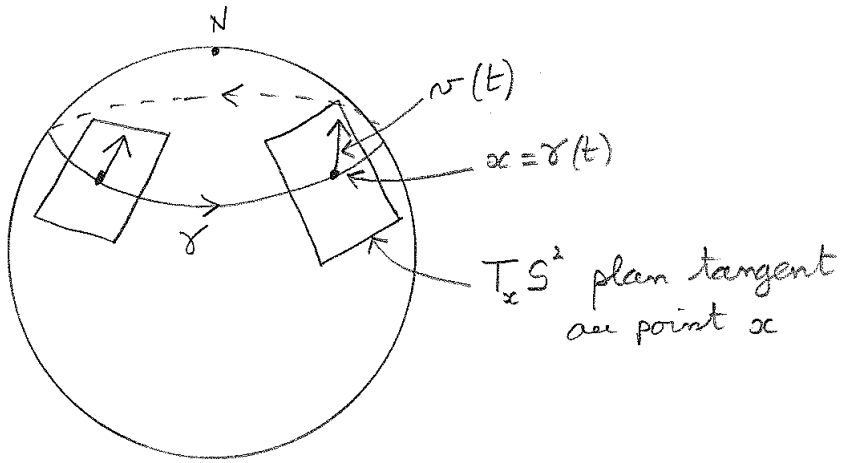
Plus générallement, on considère un chemin γ sur la surface $\mathcal{S}$[3], $t \to \gamma(t) \in \mathcal{S}$, paramétré par $t \in \mathbb{R}$.

2. Plus généralement, pour un entier $n \in \mathbb{N}$, la sphère S^n est l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ à la distance 1 de l'origine.

3. au moins C^1 par morceaux

Plans tangents à $\mathcal{S}$: La direction $v(t)$ des petites oscillations du pendule est représenté par un vecteur $v(t)$ dans le plan horizontal. Introduisons d'abord ce plan horizontal.

Définition 1.2.1. Si $\mathcal{S}$ est une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$ et $x \in \mathcal{S}$ un point, on note $T_x\mathcal{S}$: **le plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ au point $x \in \mathcal{S}$. ($T_x\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$)** qui est le plan contenant tous les **vecteurs tangents** à $\mathcal{S}$ au point x.

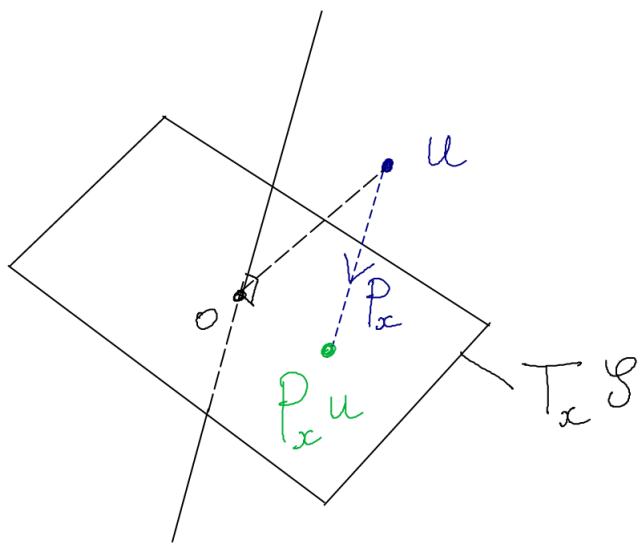


Ainsi la direction $v(t)$ des petites oscillations du pendule est représentée par un vecteur tangent à la sphère S^2 au point $\gamma(t) \in S^2$, noté :

$$v(t) \in T_{\gamma(t)}S^2.$$

Comme expliqué plus haut, le principe d'inertie "voudrait" obliger $v(t) \in \mathbb{R}^3$ à rester un vecteur constant dans $\mathbb{R}^3$ (i.e. $\frac{dv}{dt} = 0$), mais cela n'est pas possible, car l'attraction terrestre contraint $v(t)$ à être horizontal c'est à dire dans le plan $T_{\gamma(t)}S^2$ à chaque instant t. Pour formuler cela, pour chaque point $x \in \mathcal{S}$ fixé on introduit le projecteur orthogonal sur la plan tangent

$$P_x : \mathbb{R}^3 \to T_x\mathcal{S}. \tag{1.2.1}$$

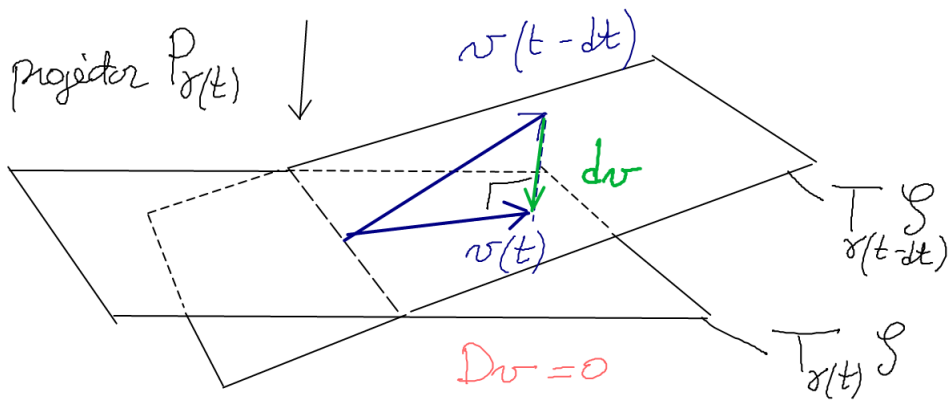


Proposition 1.2.2. *Considérons une surface orientée $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$, une courbe paramétrée $t \in \mathbb{R} \to \gamma(t) \in \mathcal{S}$ et en chaque point $\gamma(t)$, un pendule avec des petites oscillations selon la direction $v(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{S}$ (le pendule est soumis à une force normale à la surface et oscille près de sa position d'équilibre). Alors dans la* ***limite adiabatique*** *(où la fréquence du pendule est grande devant le paramétrage, ici la rotation de la Terre), l'****évolution de la direction du pendule*** *$v(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{S}$ partant d'une direction initiale donnée $v(0) \in T_{\gamma(0)}\mathcal{S}$* ***est déterminée*** *par l'équation :*

$$P_{\gamma(t)} \frac{dv(t)}{dt} = 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.2.2}$$

On admettra la proposition précedente qui est raisonnable d'après les remarques qui précèdent. On établit rigoureusement ce résultat à l'aide du théorème adiabatique, voir Section 2.6. L'existence et l'unicité de la solution $v(t)$ vient de ce que l'équation (1.2.2) est du premier ordre en t (théorème de Cauchy-Lipchitz).

Signification de l'équation (1.2.2) : Sur la figure suivante, on observe que cette équation signifie que en passant d'un plan $T_{\gamma(t)}S^2$ au plan voisin $T_{\gamma(t+dt)}S^2$ avec $dt \ll 1$, le vecteur $v(t)$ est projeté orthogonalement (et ne subit pas de rotation supplémentaire). C'est le meilleur compromis pour le principe d'inertie, pour avoir $v(t)$ le plus constant (ou parallèle) possible dans $\mathbb{R}^3$.



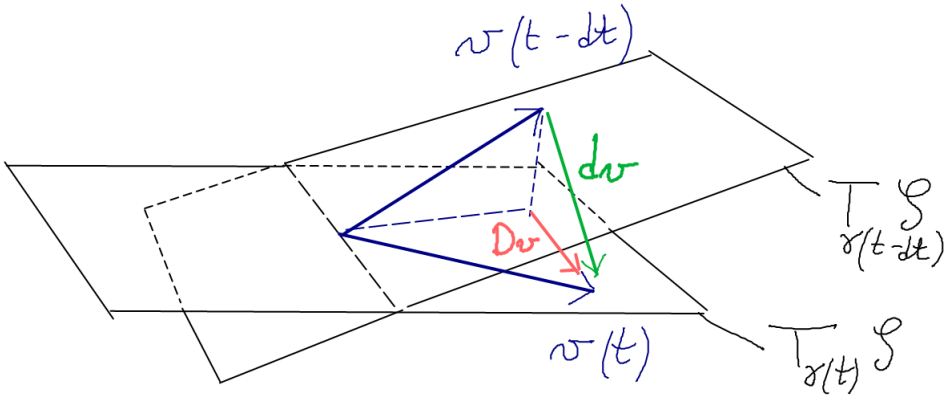
Avant d'étudier le comportement de la solution $v(t)$ de l'équation (1.2.2), on va donner une définition générale.

Définition 1.2.3. Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ une surface, $\gamma(t)$ un chemin paramétré sur $\mathcal{S}$. Soit $v(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{S}$ une famille de vecteurs tangents en chaque point de $\gamma(t)$. La **dérivée covariante** au point $\gamma(t)$ de cette famille de vecteurs est

$$\frac{Dv}{dt} := P_{\gamma(t)} \frac{dv(t)}{dt} \in T_{\gamma(t)}\mathcal{S} \tag{1.2.3}$$

appelée **dérivée covariante** ou **connexion de Levi-Civita.** En particulier, on dit que "$v(t)$ **suit la connexion de Levi-Civita**" ou "$v(t)$ **suit le transport parallèle**" le long de γ si la dérivée covariante est nulle :

$$\frac{Dv}{dt} = P_{\gamma(t)} \frac{dv(t)}{dt} = 0, \qquad \forall t \tag{1.2.4}$$



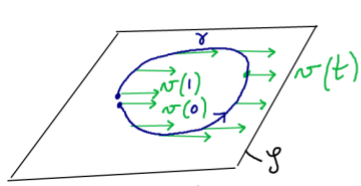
Remarque 1.2.4.

— Comme dit plus haut, la dérivée covariante est la composante tangentielle de la dérivée dv/dt dans $\mathbb{R}^3$.

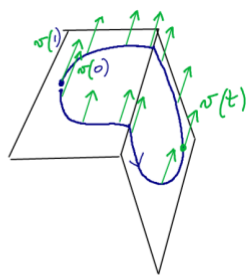
— Ainsi la proposition 1.2.2 énonce que la direction du pendule suit le transport parallèle le long de la courbe $\gamma(t)$ à une longitude donnée.

— Une définition précise de la dérivée covariante, donnant un sens précis à la notation $D = P_x d$ sera donné dans [Fau10b]. En particulier il apparaîtra que la dérivée covariante est une **notion intrinsèque** à la surface (plus généralement à la variété) c'est à dire qu'elle ne dépend que du champs de tenseur métrique $g(x)$ qui est le produit scalaire restreint à la surface. Ainsi on verra qu'il est possible de définir la dérivée covariante D sans supposer que l'espace ici $\mathcal{S}$ soit inclue dans un espace euclidien plus grand. Cette propriété est essentielle en relativité générale où il n'est pas supposé que l'espace temps (qui est une variété avec un champ de tenseur métrique g) soit inclue dans un espace Euclidien plus grand. Il serait intéressant de pouvoir démontrer directement et simplement cette propriété à partir de la définition (1.2.3).

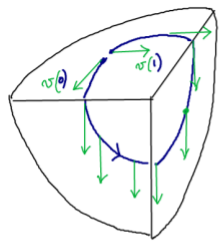
Exemple 1.2.5. On considère ici le cas très particulier de surfaces plates, mais ayant des points de singularité. Dans ce cas le transport parallèle est très explicite.



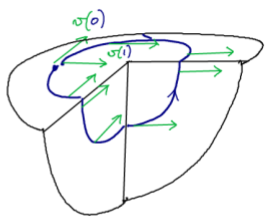
$\varphi = (\widehat{v(0), v(1)}) = 0$



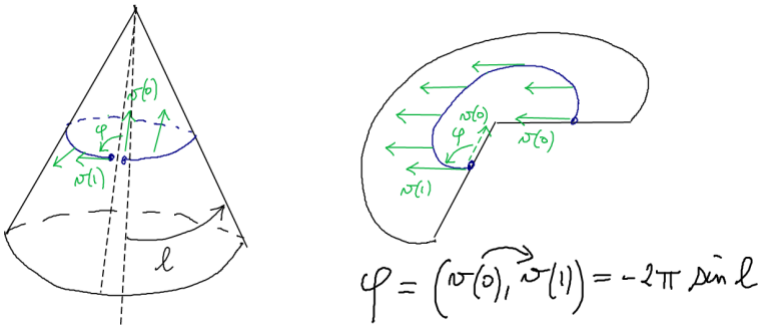
$\varphi = (\widehat{v(0), v(1)}) = 0$



$\varphi = (\widehat{v(0), v(1)}) = \frac{\pi}{2}$



$\varphi = (\widehat{v(0), v(1)}) = -\frac{\pi}{2}$



Exercice 1.2.6. "Pendule de Foucault et transport parallèle sur un smartphone"

Soit $\mathcal{R}$ un repère attaché au plan tangent $T_x\mathcal{S}$ et soit $\mathcal{R}_0$ un repère fixe par rapport aux étoiles (repère Galiléen en physique).

Rappel : le **vecteur rotation** $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ caractérise la rotation de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ de sorte que si $U(t) \in \mathbb{R}^3$ est une famille de vecteurs alors [4]

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{U} \wedge \vec{\omega} + \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} \tag{1.2.5}$$

où $\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$ est la variation du vecteur U par rapport au repère $\mathcal{R}$ (respect. $\mathcal{R}_0$). Supposons que $v(t) \in T_x\mathcal{S}$ suive le transport parallèle.

1. Montrer que
$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \omega_z . (\vec{v} \wedge \vec{n}) \tag{1.2.6}$$
où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal au plan tangent $T_x\mathcal{S}$ est $\omega_z = \vec{n}.\vec{\omega}$ est la composante normale de $\vec{\omega}$. Déduire que avec les coordonnées polaire $(|v|, \varphi)$ de $\vec{v}$ on a $|v| = cste$ et
$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega_z = -\vec{\omega}.\vec{n}$$
et donc après une durée t, $\vec{v}$ a tourné d'un angle φ dans le repère $\mathcal{R}$, sans changer de longueur, et donné par
$$\varphi = -\int_0^t \omega_z(t')\, dt' \tag{1.2.7}$$
2. Utiliser la formule (1.2.6) dans le cas particulier du pendule de Foucault pour déduire la formule (1.1.1) pour l'angle $\varphi_{Foucault}$.
3. Si vous avez un smartphone Android qui possède un capteur gyromètre (i.e. qui mesure à chaque instant le vecteur rotation $\vec{\omega}$ du repère $\mathcal{R}$ de l'appareil) vous pouvez utiliser l'application Android "`Transport.apk`" disponible sur la page web du cours [Fau10a] qui montre en temps réel un vecteur tangent à l'écran du smartphone qui suit le transport parallèle (comme le pendule de Foucault). Ce programme ne fait que intégrer en temps réel l'équation (1.2.6). En particulier si vous inclinez le smartphone à $l = 45°$ et effectuez un tour, vous observerez l'angle de Foucault $\varphi_F = -3/4$ tour.

Solution 1.2.7. de l'exercice 1.2.6.

4. Preuve :si (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathcal{R}_0$ on a $\left(\frac{de_i}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = e_i \wedge \vec{\omega}$ par définition de $\vec{\omega}$. Si $\vec{U}(t) = \sum_i u_i e_i$ alors $\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \sum_i \left(\frac{du_i}{dt}\right) e_i$ et

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \sum_i \left(\frac{du_i}{dt}\right) e_i + u_i \left(\frac{de_i}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + \vec{U} \wedge \vec{\omega}$$

1. La condition de transport parallèle est d'après (1.2.4) :

$$P\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = 0$$

où P est la projection sur le plan tangent. D'après la formule (1.2.5),

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{v} \wedge \vec{\omega} + \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0}$$

donc

$$0 = P\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = P\left(\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} - \vec{v} \wedge \vec{\omega}\right)$$

Donc (on sait que $\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$ est dans le plan tangent)

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} &= P\left(\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}\right) = P\left(\vec{v} \wedge \vec{\omega}\right) \\ &= \vec{v} \wedge \left(\omega_z \vec{n}\right) = \omega_z . \left(\vec{v} \wedge \vec{n}\right)\end{aligned}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal au plan tangent $T_x\mathcal{S}$ est $\omega_z = \vec{n}.\vec{\omega}$ est la composante normale de $\vec{\omega}$. D'après cette formule $\vec{v}$ ne change pas de longueur car

$$\frac{d\left\|\vec{v}\right\|^2}{dt} = \frac{d\left(\vec{v}.\vec{v}\right)}{dt} = 2\vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\omega_z \vec{v}.\left(\vec{v} \wedge \vec{n}\right) = 0$$

Et l'angle est

$$\varphi = -\int_0^t \omega_z\left(t'\right) dt'$$

2. Dans le cas de la trajectoire du pendule de Foucault, on a $\omega_z = \omega \cos\left(\frac{\pi}{2} - l\right) = \frac{2\pi}{1 \text{ jour}} \sin l$, donc après 1 jour,

$$\varphi_{Foucault} = -\int_0^t \omega_z dt' = -2\pi \sin l$$

1.2.1 Dérivée covariante et métrique

Pour deux vecteurs $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ notons leur produit scalaire Euclidien dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\langle u|v\rangle_{\mathbb{R}^3} := \sum_{i=1}^{3} u_i v_i \tag{1.2.8}$$

et leur norme (carré) par

$$\|u\|^2 := \langle u|u\rangle.$$

Définition 1.2.8. "Métrique induite g sur $\mathcal{S}$". Pour tout point de la surface $x \in \mathcal{S}$, on note g_x le produit scalaire sur l'espace tangent $T_x\mathcal{S}$ définit par le produit scalaire ambiant :

$$u, v \in T_x\mathcal{S}, \quad g_x\left(u, v\right) := \langle u|v\rangle_{\mathbb{R}^3}$$

On dit que g_x est la **métrique sur $\mathcal{S}$ induite** par le produit scalaire de l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$. La fonction $g : x \in \mathcal{S} \to g_x$ s'appelle le **champ de tenseur métrique** g sur la surface. On notera aussi $g_x\left(u, v\right) = \langle u|v\rangle_{g_x}$.

Theorem 1.2.9. ***"Compatibilité entre la dérivée covariante D et la métrique g"*** *Si $v_t, w_t \in T_{\gamma(t)}\mathcal{S}$ sont deux familles de vecteurs sur la courbe $\gamma(t)$ alors*

$$\frac{d}{dt} g_{\gamma(t)}(v_t, w_t) = g_{\gamma(t)}\left(\frac{Dv_t}{dt}, w_t\right) + g_{\gamma(t)}\left(v_t, \frac{Dw_t}{dt}\right) \tag{1.2.9}$$

En particulier, si ces vecteurs sont transportés parallèlement, c'est à dire si $\frac{Dv_t}{dt} = 0$ et $\frac{Dw_t}{dt} = 0$ alors $\frac{d}{dt} g_{\gamma(t)}(v_t, w_t) = 0$ et donc $\frac{d}{dt}\|v_t\|^2 = \frac{d}{dt} g_{\gamma(t)}(v_t, v_t) = 0$ ce qui signifie que la connexion de Levi-Civita conserve le produit scalaire entre vecteurs transportés parallèlement et en particulier conserve la norme de ces vecteurs.

Démonstration. On a

$$\frac{d}{dt}\langle v_t | w_t\rangle = \left\langle \frac{dv_t}{dt} | w_t \right\rangle + \left\langle v_t | \frac{dw_t}{dt} \right\rangle$$

or $v_t = P_{\gamma(t)} v_t$ car $v_t \in T_{\gamma(t)}S^2$ est dans l'image du projecteur, et $P_{\gamma(t)} = P^{\dagger}_{\gamma(t)}$ (son adjoint) car c'est un projecteur orthogonal. Donc

$$\left\langle v_t | \frac{dw_t}{dt} \right\rangle = \left\langle P_{\gamma(t)} v_t | \frac{dw_t}{dt} \right\rangle = \left\langle v_t | P^{\dagger}_{\gamma(t)} \frac{dw_t}{dt} \right\rangle = \left\langle v_t | P_{\gamma(t)} \frac{dw_t}{dt} \right\rangle = \left\langle v_t | \frac{Dw_t}{dt} \right\rangle$$

De même pour le premier terme $\left\langle \frac{dv_t}{dt} | w_t \right\rangle = \left\langle \frac{Dv_t}{dt} | w_t \right\rangle$. □

Théorème 1.2.10. *Le transport parallèle de $v(t)$ définit par Eq.(1.2.4) ne dépend pas de son paramétrage (On dit qu'il dépend que de la géométrie du chemin γ). Autrement dit, si $t = \varphi(t')$ est un changement de paramètres, et si $v'(t') := v(\varphi(t'))$ alors $v'(t')$ suit aussi le transport parallèle.*

Démonstration. On écrit

$$\frac{Dv'}{dt'} = P_{\gamma(t')} \frac{dv(\varphi(t'))}{dt'} = \underbrace{\left(P_{\gamma(t')} \frac{dv(t)}{dt}\right)}_{0} \frac{d\varphi}{dt'} = 0.$$

□

Théorème 1.2.11. *Si $\gamma(t)$ est un chemin paramétré et $v(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{S}$ une famille de vecteurs le long de γ et $f(t) \in \mathbb{R}$ une fonction alors on a la* ***formule de Leibnitz :***

$$\frac{D}{dt}(f(t)\, v(t)) = \left(\frac{df}{dt}\right) v(t) + f(t) \frac{Dv}{dt} \tag{1.2.10}$$

Démonstration. Cela découle de la définition de $\frac{D\cdot}{dt}$:

$$\begin{aligned}\frac{D}{dt}(f(t)\, v(t)) &= P_{\gamma(t)} \frac{d}{dt}(f(t)\, v(t)) = P_{\gamma(t)}\left(\frac{df}{dt} v(t) + f(t)\frac{dv}{dt}\right) \\ &= \left(\frac{df}{dt}\right) P_{\gamma(t)} v(t) + f(t)\frac{Dv}{dt} = \left(\frac{df}{dt}\right) v(t) + f(t)\frac{Dv}{dt}\end{aligned}$$

□

1.3 Holonomie et courbure

1.3.1 Holonomie d'un chemin fermé

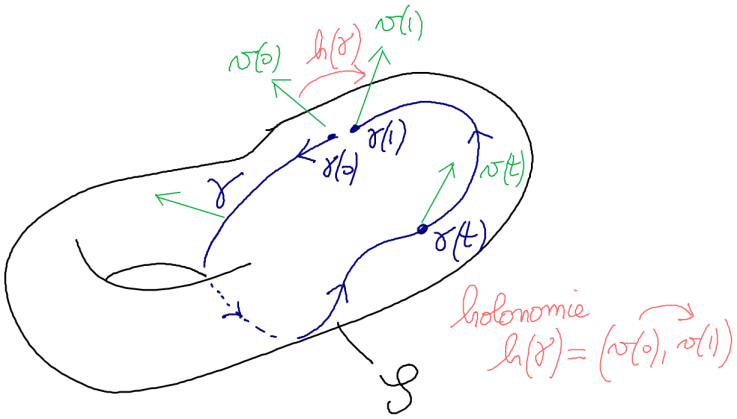
Video de cette section.

Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ une surface orientée. Cela signifie que sur chaque espace tangent $T_x\mathcal{S}$, $x \in \mathcal{S}$, on peut choisir une orientation (un sens direct) pour mesurer les angles et ce choix est continu par rapport à $x \in \mathcal{S}$. Par exemple S^2 est orientable. On verra dans les suite des surfaces non orientables comme la surface de Moebius.

Définition 1.3.1. Soit $\gamma \subset \mathcal{S}$ une **courbe paramétrée fermée** c'est à dire $\gamma(1) = \gamma(0)$ et soit $t \to v_t \in T_{\gamma(t)}\mathcal{S}$ une famille de vecteurs tangents **suivant le transport parallèle** (i.e. $Dv_t/dt = 0, \forall t$). Alors les vecteurs de départ et de fin $v_0, v_1 \in T_{\gamma(0)}\mathcal{S} = T_{\gamma(1)}\mathcal{S}$ appartiennent au même espace tangent et ont la même longueur d'après le théorème 1.2.9. v_1 se déduit donc de v_0 par une rotation d'un angle noté

$$h(\gamma) = \left(\widehat{v_0, v_1}\right)$$

appelé **holonomie du chemin fermé** γ**.** (Cet angle $h(\gamma)$ est défini modulo 2π).



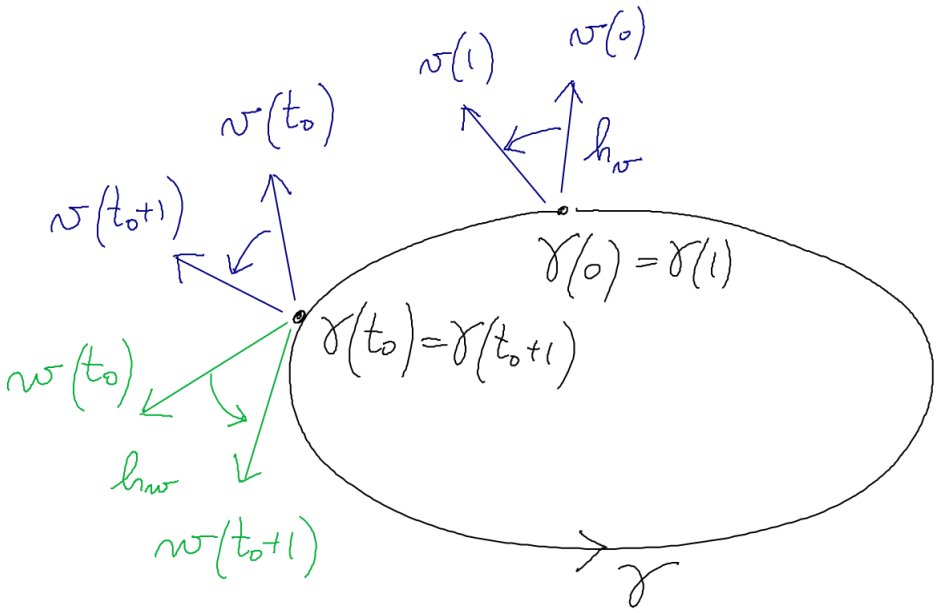
Remarques :

— Dans le cas $\mathcal{S}$ orientable, l'angle $h(\gamma)$ représente en fait une rotation dans l'espace tangent c'est à dire $h(\gamma) \in SO\left(T_{\gamma(0)}\mathcal{S}\right)$. Si $\mathcal{S}$ n'est pas orientable, alors $h(\gamma) \in O(2) = (\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})) \times SO(2)$. La définition du transport parallèle que nous avons vu peut se faire pour un espace $\mathcal{M}$ de dimension n plongé dans un espace euclidien de dimension $n+1$ ou plus. Alors l'holonomie serait une rotation dans l'espace tangent $T_{\gamma(0)}\mathcal{M}$ de dimension n, donc $h(\gamma) \in O\left(T_{\gamma(0)}\mathcal{M}\right) \equiv O(n)$. Il faudrait plus qu'un angle pour caractériser l'holonomie. On verra cette généralisation dans [Fau10b].

Exemple 1.3.2. Exemple d'holonomies sur des surfaces plates, voir exemple 1.2.5.

Théorème 1.3.3. *L'holonomie $h(\gamma)$ est indépendante de la paramétrisation du chemin γ, du point initial $x_0 \in \gamma$, et du vecteur initial v_0. On dit qu'elle ne dépend que de la géométrie du chemin γ.*

Démonstration. Le chemin $\gamma(t)$ supposé fermé, périodique de période 1 : $\gamma(t+1) = \gamma(t), \forall t \in \mathbb{R}$. Supposons que v_t, w_t soient deux familles de vecteurs transportées parallèlement.



Utilisant la famille de vecteurs v on définit comme ci-dessus l'holonomie $h_v = \left(\widehat{v(0), v(1)}\right)$ et avec la famille w, on définit $h_w = \left(\widehat{w(t_0), w(t_0+1)}\right)$ où on est partit d'un autre point de départ $\gamma(t_0)$. La question est de montrer que $h_v = h_w$. On utilisera le théorème 1.2.9 qui montre que le transport parallèle conserve le produit scalaire, et donc conserve les angles, donc $\left(\widehat{v(0), v(1)}\right) = \left(\widehat{v(t_0), v(t_0+1)}\right)$ et $\left(\widehat{w(t_0+1), v(t_0+1)}\right) = \left(\widehat{w(t_0), v(t_0)}\right) = -\left(\widehat{v(t_0), w(t_0)}\right)$. On écrit

$$\begin{aligned} h_v &= \left(\widehat{v(0), v(1)}\right) = \left(\widehat{v(t_0), v(t_0+1)}\right) \\ &= \left(\widehat{v(t_0), w(t_0)}\right) + \left(\widehat{w(t_0), w(t_0+1)}\right) + \left(\widehat{w(t_0+1), v(t_0+1)}\right) \\ &= \left(\widehat{v(t_0), w(t_0)}\right) + h_w - \left(\widehat{v(t_0), w(t_0)}\right) = h_w. \end{aligned}$$

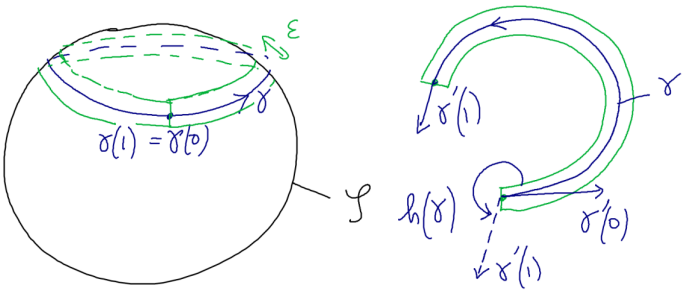
□

Proposition 1.3.4. *"**Calcul pratique et intuitif de l'holonomie**". Si $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ est une surface orientée et $\gamma \subset \mathcal{S}$ une courbe paramétrée fermée avec un point de départ $\gamma(0) = \gamma(1)$ choisit.*

1. *Découpons la surface de part et d'autre de γ sur une largeur ϵ très petite, de sorte à obtenir une fine bande. On sectionne cette bande en $\gamma(0)$.*
2. *Posons cette bande "à plat" sur le plan $\mathbb{R}^2$ (c'est possible au premier ordre en ϵ). L'holonomie alors est simplement l'angle*

$$h(\gamma) = \left(\widehat{\gamma'(0), \gamma'(1)}\right) \ mod 2\pi$$

où $\gamma'(t)$ est le vecteur tangent à la courbe.



Démonstration. On admet la preuve pour le moment. □

Remarque 1.3.5.

— A la dernière étape la bande ne se referme pas sur le plan en général. Si elle se referme alors $h(\gamma) = 0$.

— En pratique si on ne veut pas découper la surface, on peut de proche en proche coller une feuille de papier sur $\mathcal{S}$ le long de γ et marquer le chemin γ sur la feuille.

1.3.2 Courbure de Gauss d'une surface et formule de Gauss Bonnet

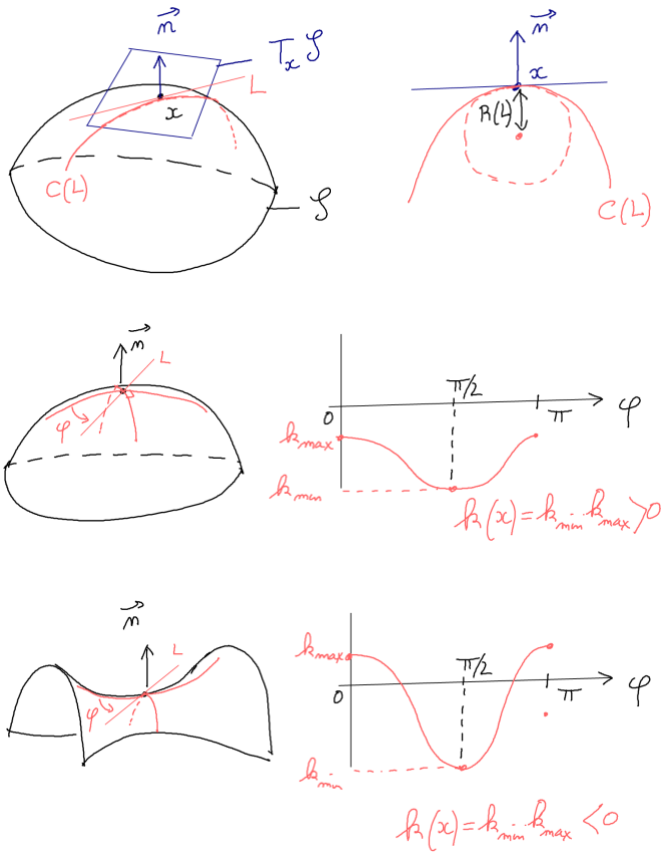
video de cette section.
(voir [Tay96b] p.492 pour plus de détails)

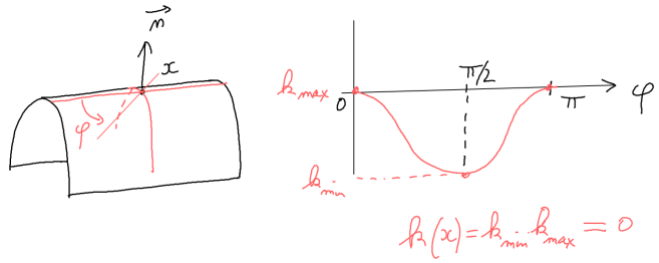
Définition 1.3.6. Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ une surface et $x \in \mathcal{S}$ un point de la surface. Si $L \subset T_x\mathcal{S}$ est une droite sur le plan tangent passant par l'origine, et $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ le vecteur normal à $T_x\mathcal{S}$, l'intersection du plan $P(L) := \mathrm{Vect}(L, \vec{n})$ et de la surface forme un courbe $C(L) := P(L) \cap \mathcal{S}$ et on note $R(L)$ le rayon de courbure de cette courbe au point x. Comme $R(L)$ peut être infini si la surface est plate, on préfère noter $k(L) = 1/R(L)$ appelée courbure selon cette même direction avec le signe négatif si $C(L)$ est de l'autre côté de $\vec{n}$ par rapport au plan $T_x\mathcal{S}$. La **courbure de Gauss** de $\mathcal{S}$ au point x est

$$k(x) = k_{min}k_{max}$$

avec $k_{\min} = \min_L(k(L))$, $k_{\max} = \max_L(k(L))$ les courbures minimales, respect. maximales de la fonction $k(L)$ (obtenues pour des directions L orthogonales).

Illustration de la définition de la courbure de Gauss :





Exemple 1.3.7. En particulier, observer que la courbure de Gauss d'une sphère de rayon R est partout égale $k = \frac{1}{R^2}$.

Théorème 1.3.8. ***"Formule de Gauss-Bonnet locale".*** *Si $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ est une surface orientée et $\gamma \subset \mathcal{S}$ est un chemin fermé orienté qui borde un domaine $\mathcal{C}$, c'est à dire $\partial\mathcal{C} = \gamma$, alors*

$$h(\gamma) = \iint_{x \in \mathcal{C}} k(x)\, d^2 s \tag{1.3.1}$$

où $k(x)$ est la courbure de Gauss de la surface au point $x \in \mathcal{S}$.

Démonstration. On admet ce théorème pour le moment. □

Remarques :

— Dans le cas de la **sphère** de rayon R, on a $k = \frac{1}{R^2}$ donc

$$k ds^2 = \frac{d^2 s}{R^2} = d^2\Omega$$

est **la mesure d'angle solide** ainsi la formule de Gauss Bonnet locale pour la surface S^2 s'écrit

$$h(\gamma) = \iint_{\mathcal{C}} d^2\Omega \mod 2\pi$$

Par exemple pour $\mathcal{C} = S^2$ (i.e. γ réduit à un point), on a $h(\gamma) = 0$ et $\iint_{S^2} d^2\Omega = 4\pi$ donc la formule est vérifiée.

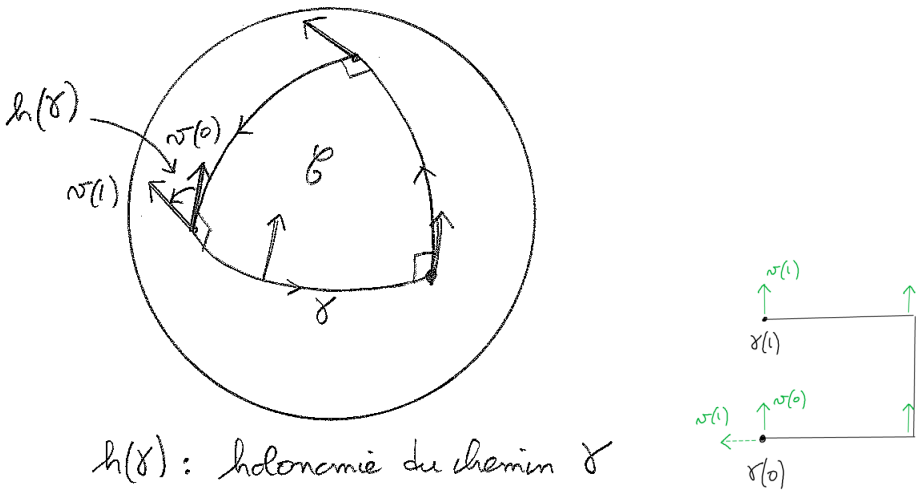
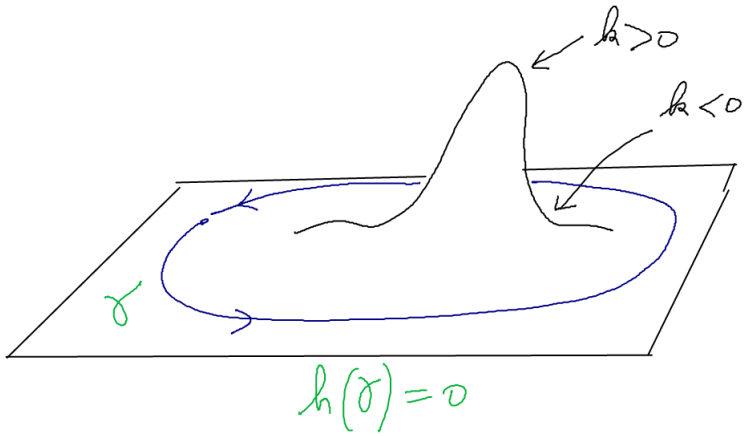


FIGURE 1.3.1 – Exemple de chemin γ dont l'holonomie est $h(\gamma) = \frac{\pi}{2}$. Dans cet exemple, la surface encerclée un 1/8 de la sphère totale donc $\iint_{\mathcal{C}} k ds^2 = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ conformément à la formule de Gauss-Bonnet locale. La deuxième figure montre la courbe mise à plat.

— La **formule de Gauss Bonnet est remarquable** par le fait que si on change la forme de la surface à l'intérieur stricte du domaine $\mathcal{C}$ (sans toucher au bord γ), alors la fonction $k(x)$ change, mais $h(\gamma)$ est inchangé donc l'intégrale de $k(x)$ ne doit pas changer. Par exemple, si on déforme en ajoutant une bosse avec de la courbure positive, cela va forcément rajouter de la courbure négative qui compense. Sur l'exemple de la figure suivante γ se trouve sur une région plate, donc $h(\gamma) = 0$, inchangé si on rajoute une bosse.



— On peut vérifier la formule de Gauss Bonnet dans le cas particulier de la surface S^2.Considérons tout d'abord le cas où γ est le cercle à la latitude l fixe. On utilise la proposition 1.3.4. Les plans tangents à γ sont aussi tangents à un cône d'angle d'ouverture l. Le cône peut être aplati, et sur ce cône aplati qui a un angle d'ouverture[5] $\theta = 2\pi(1 - \sin l)$, les vecteurs tangents transportés parallèlement sont strictement parallèles une fois le cône aplati. Cela correspond à la définition du transport parallèle qui requiert qu'il n'y a pas de rotation supplémentaire dans le plan tangent (voir p.8). On calcule facilement que l'holonomie est

$$h(\gamma) = \left(\widehat{v_0, v_1}\right) = \theta = 2\pi(1 - \sin l) \tag{1.3.2}$$

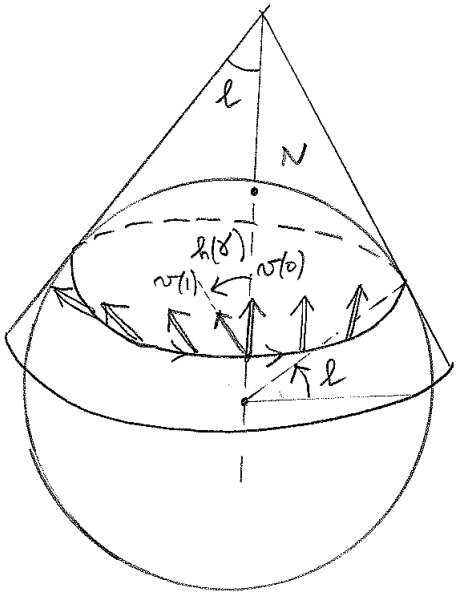
Par ailleurs, pour ce chemin, la calotte a comme surface

$$\iint_{\mathcal{C}} \frac{d^2 s}{R^2} = \iint_{\mathcal{C}} d\Omega = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}-l} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\theta d\theta d\varphi = 2\pi\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}-l} \tag{1.3.3}$$

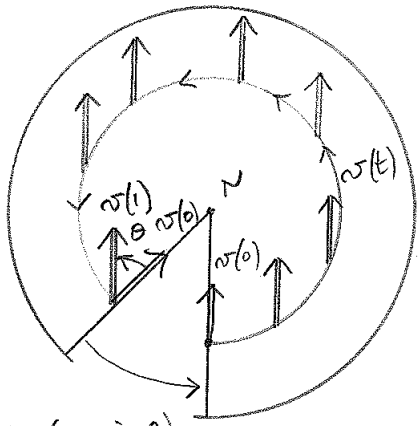
$$= 2\pi\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} - l\right) + 1\right) = 2\pi(1 - \sin l) \tag{1.3.4}$$

donc la formule est vérifiée. Si maintenant γ est un chemin quelconque, on décompose γ comme somme de petites boucles circulaires. Pour chacune de ces boucles circulaires, on a vérifié la formule. Or l'intégrale et l'holonomie sont additives, donc la formule est aussi valable pour γ. (Ce dernier argument sera mieux exprimé en utilisant l'intégrale de 2-formes de courbures)

5. en effet la longueur du cercle γ de latitude l est $L = 2\pi(R\cos l)$. Or la distance d de ce cercle au sommet du cône est donnée par $\frac{R}{d} = \tan l$. Ainsi une fois aplati, le rayon du cercle obtenu est $d = R\cot l$, donc sa circonférence est $L' = 2\pi R\cot l$. L'angle d'ouverture est donc $\theta = 2\pi\frac{L'-L}{L'} = 2\pi\frac{\cot l - \cos l}{\cot l} = 2\pi(1 - \sin l)$.



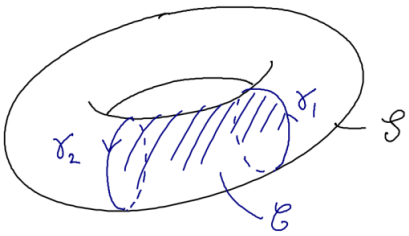
Transport parallèle sur S^2



$\theta = 2\pi(1 - \sin l)$

Remarques :

— Dans la formule (1.3.1), γ peut être composé de plusieurs parties comme le montre l'exemple sur le tore $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$.



— Pour le pendule de Foucault, et après un jour, l'angle $\varphi_{Foucault}$ Eq.(1.1.1) est relié à l'holonomie $h(\gamma)$ Eq.(1.3.2) sur le cercle à la latitude l par :

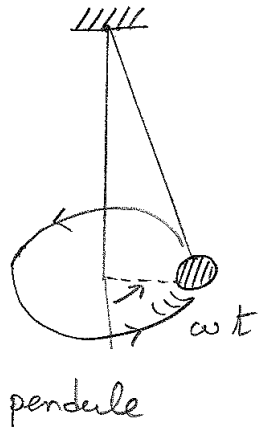
$$\varphi_F = h(\gamma) - 2\pi$$

Le terme supplémentaire 2π provient du fait que le référentiel local où est mesuré φ_F subit un tour de (-2π) à cause de la rotation de la Terre. Ainsi avec (1.3.2) on déduit (1.1.1).

— Si le pendule de Foucault tourne à la fréquence ω, au lieu d'osciller rectilignement, alors on peut mesurer la position angulaire du pendule φ_F après 1 jour, et l'on trouverait :

$$\varphi_F = -2\pi + \underbrace{h(\gamma)}_{\varphi_{geom}} + \underbrace{\omega t}_{\varphi_{dyn}}$$

dans cette expression que l'on retrouvera dans le cadre de la mécanique quantique, on appelle $\varphi_{geom} := h(\gamma)$ la **phase géométrique,** car liée à la géométrie du chemin γ, et $\varphi_{dyn} := \omega t$ la **phase dynamique**. Noter que $\omega t \gg 1$ est très grand et "masque" complètement $h(\gamma)$



Exercice 1.3.9. « Holonomie sur le fibré TS^2 » On considère un angle $\theta \in [0, 2\pi]$ donné. Trouver un chemin fermé γ sur la sphère S^2, tel que l'holonomie soit

$$h(\gamma) = \theta$$

Même question pour une surface non plate (i.e. si il existe un point de courbure non nulle).

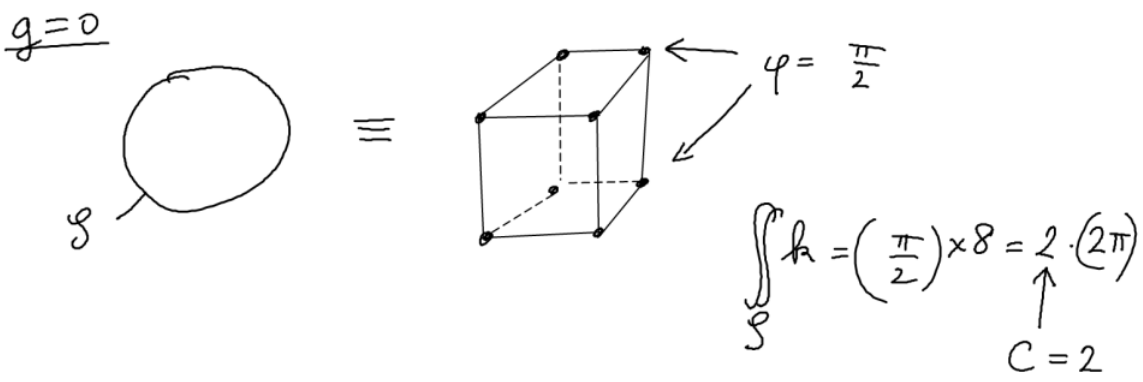
Théorème 1.3.10. ***"Formule de Gauss Bonnet globale"***. *Pour une surface $\mathcal{S}$ orientée compacte sans bord l'integrale de la courbure sur toute la surface est*

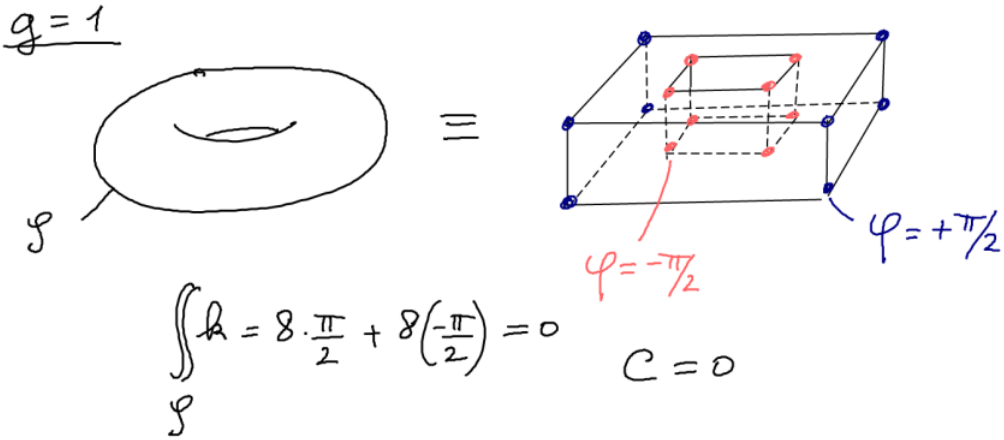
$$\iint_{\mathcal{S}} k(x)\, d^2 s = 2\pi C \tag{1.3.5}$$

où $k(x)$ est la courbure de Gauss et $C \in \mathbb{Z}$ est un ***entier*** *(appelé indice de Euler). Par conséquent c'est un* ***invariant topologique****, c'est à dire invariant par déformation de la surface. Pour une surface de* ***genre*** *g (c'est à dire avec g trous), on a*

$$C = 2(1 - g). \tag{1.3.6}$$

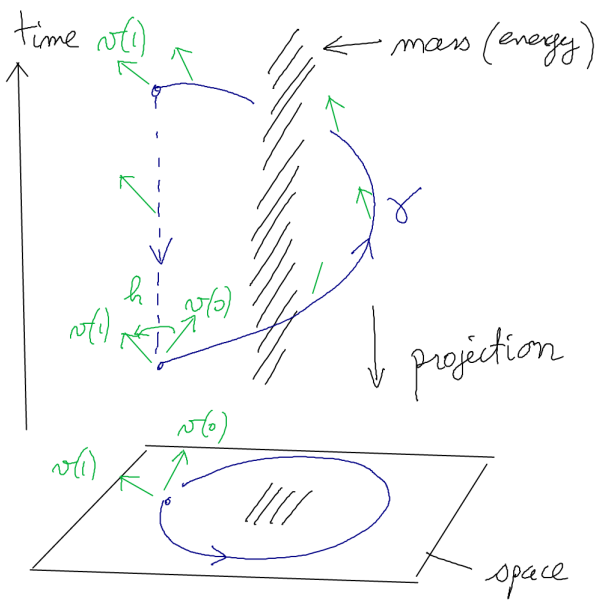
Démonstration. On considère un chemin γ réduit en un point. Alors $h(\gamma) = 0$ modulo 2π. Alors (1.3.1) implique (1.3.5). Pour montrer (1.3.6), on peut déformer la surface de sorte qu'elle ne possède que des coins. Pour chaque coin on calcule que l'holonomie est $h = \pm\frac{\pi}{2}$. Le comptage donne (1.3.6). En effet, pour $g \geq 0$ quelconque, $\int k d^2 s = 8\left(\frac{\pi}{2}\right) + 8g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi(2 - 2g) = 2\pi C$ avec $C = 2 - 2g$.





□

Exemple 1.3.11. En relativité générale, dans le cas d'un espace-temps stationnaire (i.e. invariant dans le temps), l'équivalent du pendule de Foucault est la **precession geodetic** ou **l'effet Einstein de Sitter** (1917) qui correspond à la précession d'un gyroscope après un chemin fermé dans l'espace. On utilise la stationnarité pour refermer le chemin dans l'espace-temps. Si l'espace temps a de la courbure due à la présence de masse ou d'énergie alors cette précession est non nulle. Observée expérimentalement avec précision sur l'axe d'étoiles à neutron et plus finement sur l'axe d'un gyroscope en orbite autour de la Terre, voir cette discussion et https://arxiv.org/abs/1809.01730.



1.4 Trajectoires géodésiques

1.4.1 Définition d'une trajectoire géodésique

Video de cette section.

Considérons un chemin paramétré $\gamma(t)$ sur une surface $\mathcal{S}$. On note

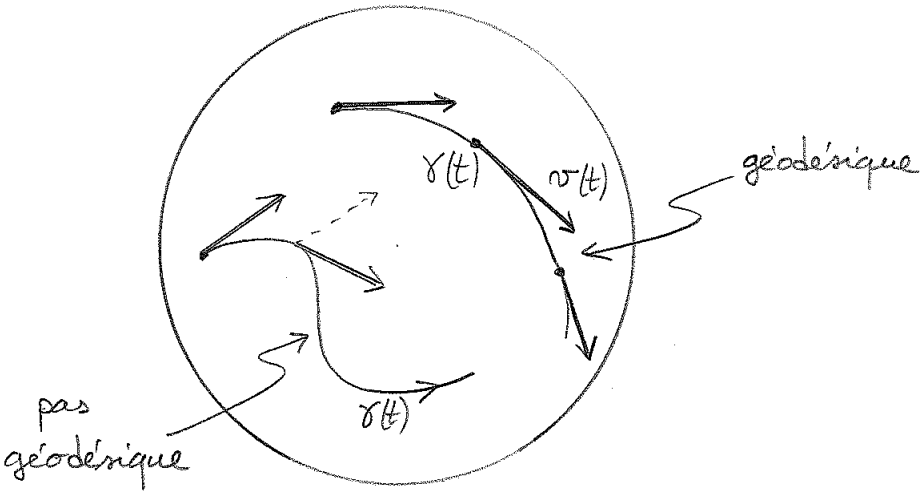
$$v(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt} \in T_{\gamma(t)}\mathcal{S}$$

le vecteur vitesse tangent [6] au point $\gamma(t)$.

Définition 1.4.1. La courbe γ est une **géodésique** si

$$\frac{Dv}{dt} = 0, \qquad \forall t \tag{1.4.1}$$

c'est à dire si le vecteur vitesse $v(t)$ est aussi le transporté parallèle de $v(0)$ le long de la courbe γ.



Exemple 1.4.2. Sur une surface plate (ou dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$), les géodésiques sont des droites. Les géodésiques sur la sphère S^2 sont les grands cercles. Pour une surface quelconque $\mathcal{S}$, ce peut être beaucoup plus compliqué, voir impossible à prédire. Voir ci-dessous.

Remarque :

— La trajectoire géodésique correspond au **mouvement libre** d'une particule contrainte cependant à rester sur la surface $\mathcal{S}$. En effet dans $\mathbb{R}^3$, une particule "libre" mais contrainte à rester sur la surface, ne subit que la force de réaction $R_{\gamma(t)}$ qui est normale à la surface donc $P_x R_x = 0$ où $P_x : \mathbb{R}^3 \to T_x\mathcal{S}$ est le projecteur introduit en (1.2.1), et d'après la loi de Newton $m\frac{dv}{dt} = R$ cela implique $P\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}PR = 0$ soit $\frac{Dv}{dt} = 0$. De façon plus générale, pour une particule contrainte à rester sur la surface, l'**équation de Newton sur la surface** s'écrit :

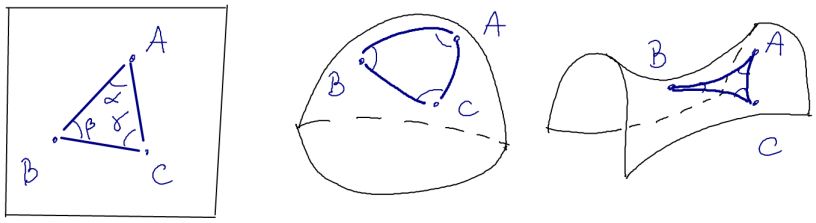
$$m\frac{Dv}{dt} = F$$

6. Noter que $v_t = \frac{d\gamma(t)}{dt} = \lim_{s\to 0} \frac{\gamma(t+s)-\gamma(t)}{s}$ signifie que la dérivée se calcule dans $\mathbb{R}^3$. On a donc besoin de l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$ fixe, pour définir le vecteur tangent. On verra dans le cours [Fau10b] comment définir un vecteur tangent $v(t)$ de façon intrinsèque, c'est à dire sans faire intervenir le plongement de $\mathcal{S}$ dans un espace Euclidien plus grand.

où $F \in T_{\gamma(t)}\mathcal{S}$ est la **force** que subit la particule et $\frac{Dv}{dt}$ est l'**accélération** de la particule. Dans le cas particulier de la particule libre (1.4.1), la force et l'accélération sont nulles.

Théorème 1.4.3. *Sur une surface $\mathcal{S}$ orientée, si $T = (A, B, C)$ est un **triangle géodésique**, c'est à dire que les trois points A,B,C sont reliés par des géodésiques et que $\mathcal{C}$ est l'intérieur du triangle ($T = \partial C$), et si $\alpha, \beta, \varepsilon$ sont les angles aux sommets, alors*

$$h(\gamma) = \iint_{\mathcal{C}} k d^2 s = \alpha + \beta + \varepsilon - \pi \tag{1.4.2}$$



Remarquer que sur **le plan euclidien** $\mathbb{R}^2$ qui est de **courbure nulle**, cela donne la formule bien connue : $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Exercice 1.4.4. écrire la preuve du Théorème 1.4.3.

Solution 1.4.5. On considère des vecteurs tangents U_0, V_0, W_0 aux trois géodésiques aux points A, B, C respectivement, et transportés autour du triangle (donnant $U_0 \to U_1 \to U_2 \to U_3$, $V_0 \to V_1$ etc...). Alors utilisant la propriété 1.2.9 que le transport parallèle conserve les angles. On déduit que $(W_1, V_2) = (W_0, V_1)$, etc.. Alors modulo 2π on a

$$\begin{aligned} h(\gamma) &= (U_0, U_3) \\ &= (U_0, W_1) + (W_1, V_2) + (V_2, U_3) \\ &= (U_0, W_1) + (W_0, V_1) + (V_0, U_1) \\ &= (\alpha - \pi) + (\gamma - \pi) + (\beta - \pi) \\ &= \alpha + \gamma + \beta - 3\pi = \alpha + \gamma + \beta - \pi \text{ modulo } 2\pi \end{aligned}$$

Or

$$h(\gamma) = \int_{\mathcal{C}} k ds^2 \text{ mod} 2\pi$$

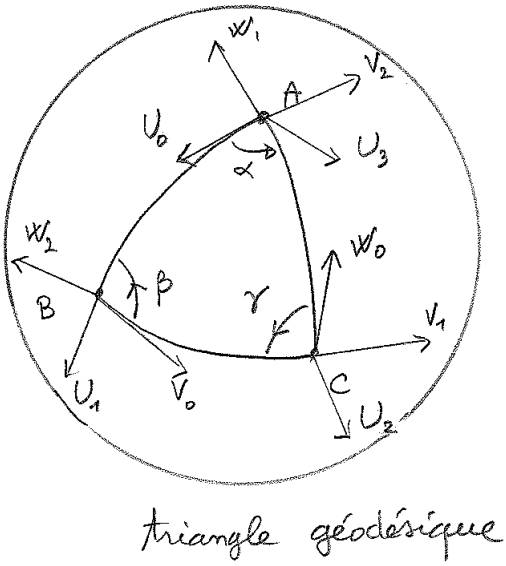
donc

$$\alpha + \gamma + \beta - \pi = \int_{\mathcal{C}} k ds^2 + 2\pi\kappa$$

avec un entier $\kappa \in \mathbb{Z}$ que l'on va déterminer pour terminer la preuve. On modifie la surface *continuement* près du triangle de façon a la rendre plate (courbure nulle). Durant cette déformation, κ reste contant car c'est un entier. Le triangle devient un triangle sur un plan, et la formule devient

$$\alpha' + \gamma' + \beta' - \pi = 0 + 2\pi\kappa$$

Or $\alpha' + \gamma' + \beta' - \pi = 0$ donc $\kappa = 0$.



Exercice 1.4.6. Donner un exemple de triangle géodésique sur S^2 avec les angles $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$.

1.4.2 Comportement relatif de géodésiques voisines

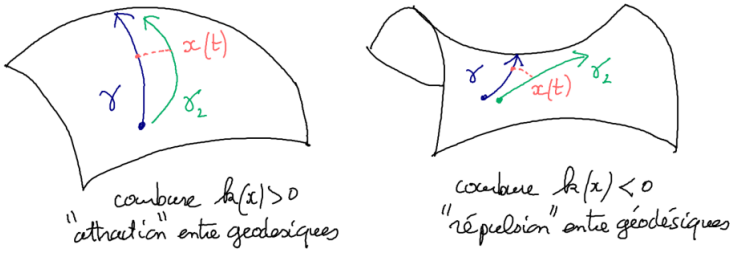
video de cette Section

1.4.2.1 Réalisation concrète de géodésique

Considérons un objet solide dont la surface est lisse (i.e. C^∞). Utilisant la proposition 1.3.4 montrer que si l'on colle un ruban de scotch assez étroit sur cette surface, alors le ruban va suivre une géodésique. Voir figures (réalisation par Claude Gignoux).

1.4.2.2 Comportement relatif de géodésiques voisines

Sur la figure remarquer l'effet des zones de courbure négative (creux du vase) sur l'écartement de géodésiques voisines, et inversement le rapprochement des géodésiques dans les zones de courbure positive (bosse du vase). Cette relation entre la courbure de l'espace et l'écartement de géodésiques voisines appelée **théorie de Jacobi** est à la base de la formulation de la relativité générale qui exprime les trajectoires comme des géodésiques dans l'espace temps et relie la courbure de l'espace temps à l'écartement de géodésiques voisines, ce qui se traduit par une accélération des trajectoires. Ainsi la courbure de l'espace temps remplace la notion de force de Newton pour la gravitation. Voir la vidéo. et exercice suivant.

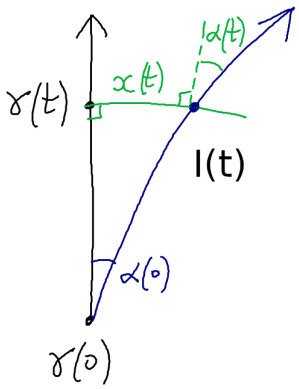


Exercice 1.4.7. Sur une surface, considérons une géodésique de référence $\gamma(t)$, paramétrée par sa longueur t. Au point $\gamma(0)$, part une autre géodésique $\gamma'(t')$, c'est à dire $\gamma'(0) = \gamma(0)$ avec un angle $\alpha(0) = (\dot{\gamma}'(0), \dot{\gamma}(0))$ supposé très petit. A la date t, on mesure la distance entre les deux géodésique, en partant de $\gamma(t)$ à la perpendiculaire, selon une géodésique jusqu'à intersecter γ'. On note $x(t)$ cette distance. En remarquant qu'il y a un triangle géodésique et supposant $\alpha(0) \ll 1$, montrer que $x(t) \ll 1$ est gouverné par « l'équation de Newton » effective

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k(t)\,x(t) \tag{1.4.3}$$

où $k(t)$ est la courbure de Gauss de la surface au point $\gamma(t)$. Noter que la force $F(t) = -k(t)\,x(t)$ est attractive si $k(t) > 0$ et répulsive si $k(t) < 0$. En déduire le comportement des géodésiques sur le vase ci-dessus, selon que $k(t) = k_0 > 0$ ou $k(t) = k_0 < 0$?

Solution 1.4.8. Voir Schéma



Dans le triangle géodésique formé par les trois points $\gamma(0), \gamma'(t), \gamma(t)$, Eq(1.4.2) donne

$$\alpha(t) = \alpha(0) - \iint_C k$$

donc si $x(t) \ll 1$,

$$\frac{d\alpha}{dt} = -k(t)\,x(t)\,.$$

Or $\frac{dx}{dt} = \tan\alpha \approx \alpha$. On déduit (1.4.3).

1. Si $k(t) = k_0 > 0$, l'équation $\frac{d^2x}{dt^2} = -k_0 x(t)$ admet comme solution générale $x(t) = A\sin\left(\sqrt{k_0}t + \varphi_0\right)$ avec $A \geq 0, \varphi_0 \in \mathbb{R}$, qui sont des oscillations comme observées sur le vase. La fréquence dépend de la courbure.
2. Si $k(t) = k_0 < 0$, l'équation $\frac{d^2x}{dt^2} = -k_0 x(t)$ admet comme solution générale $x(t) = A\sinh\left(\sqrt{-k_0}t + \varphi\right) = \frac{A}{2}\left(e^{\sqrt{-k_0}t+\varphi} - e^{-\sqrt{-k_0}t-\varphi}\right)$ avec $A \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, qui montre une instabilité exponentielle dans le future ou passé comme observées sur le vase. Le coefficient d'instabilité dépend de la courbure.

1.5 Choix de Jauge, potentiel de Jauge

Jusqu'à présent nous avons défini et étudié la dérivée covariante, l'holonomie d'un chemin de façon géométrique. Dans ce paragraphe nous montrons comment faire des « calculs pratiques », par exemple si le chemin parcouru et le champ de vecteur sont donnés explicitement par des coordonnées par rapport à des axes et un système de coordonnées, comment exprimer la dérivée covariante dans ces coordonnées et comment **calculer l'holonomie explicitement par une formule numérique**.

Ce paragraphe est un peu plus technique et son intérêt est aussi de montrer que l'on retrouve la forme de certaines équations de la physique physique quantique en présence d'un champ électromagnétique. Cette similitude a été remarquée en physique dans les années 1940 et a permis inversement de formuler les lois l'électromagnétisme de façon géométrique avec une dérivée covariante sous le terme de « théorie de Jauge ». Il a ensuite été observé que les autres forces fondamentales dans la nature sont aussi de cette nature géométrique (théorie de Yang-Mills). On en parlera plus loin.

1.5.1 Choix de Jauge ou trivialisation locale du fibré tangent

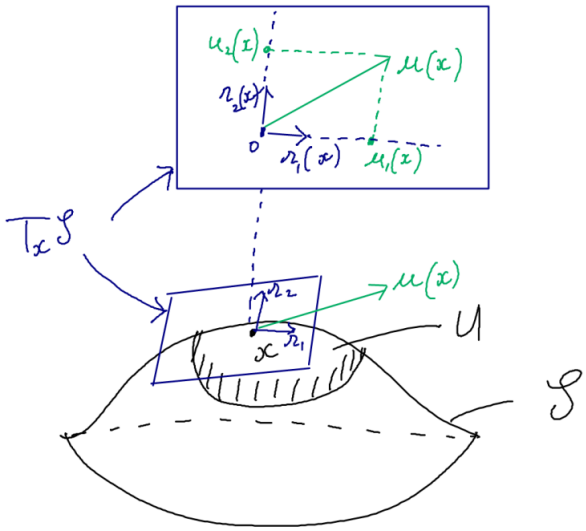
Vidéo de cette section.

Définition 1.5.1. Supposons $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ une surface orientée et $U \subset \mathcal{S}$ un petit domaine. Un **choix de Jauge** dans le domaine U est le choix pour tout $x \in U$ d'un repère orthonormé direct $r_1(x), r_2(x) \in T_x\mathcal{S}$ de l'espace tangent en x. Ainsi un vecteur tangent $u(x) \in T_x\mathcal{S}$ s'écrit

$$u(x) = u_1(x)\, r_1(x) + u_2(x)\, r_2(x)$$

avec des composantes réelles $(u_1(x), u_2(x)) \in \mathbb{R}^2$.

Le choix de Jauge sur un domaine U s'appelle aussi **trivialisation locale du fibré tangent.**



Structure complexe : Dans chaque espace $T_x\mathcal{S}$ on définit l'opérateur linéaire $J_x : T_x\mathcal{S} \to T_x\mathcal{S}$ appelé **structure complexe**, par $J_x(r_1(x)) = r_2(x)$ et $J_x(r_2(x)) = -r_1(x)$ (c'est une rotation de $+\pi/2$) qui vérifie $J_x^2 = -\mathrm{Id}$. Pour $i \in \mathbb{C}$ on définit la multiplication d'un vecteur $u \in T_x\mathcal{S}$ par le nombre complexe $i \in \mathbb{C}$ par $iu := Ju$. Alors

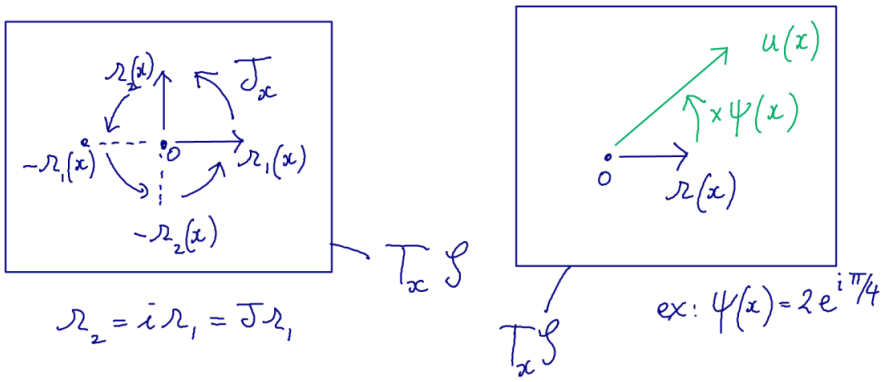
$$\begin{aligned} u(x) &= u_1(x)\, r_1(x) + u_2(x)\, r_2(x) = u_1(x)\, r_1(x) + u_2(x)\, i r_1(x) \\ &= \psi(x)\, r_1(x) \in T_x\mathcal{S}, \qquad \psi(x) = u_1 + i u_2 \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

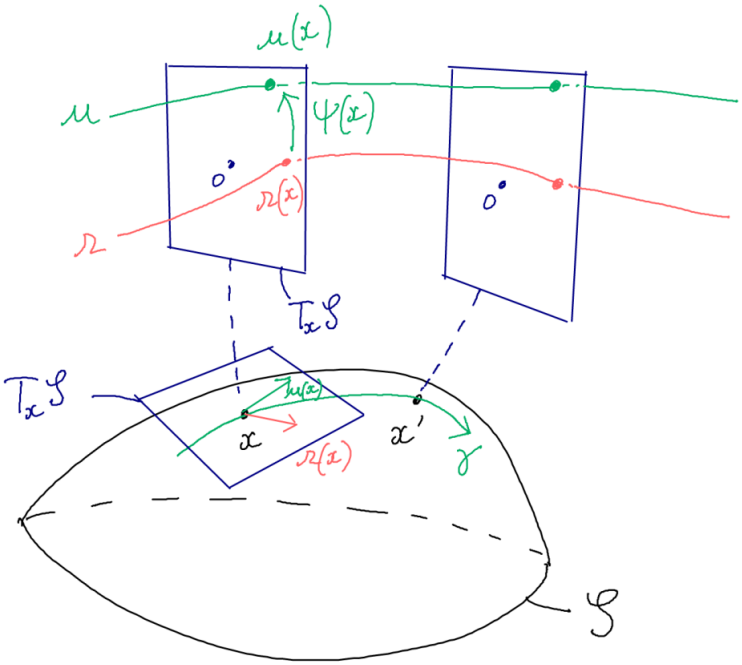
Ainsi si u est un champ de vecteur sur U, le vecteur tangent en chaque point x s'écrit

$$u(x) = \psi(x)\, r_1(x) \in T_x\mathcal{S}, \qquad \psi(x) \in \mathbb{C}$$

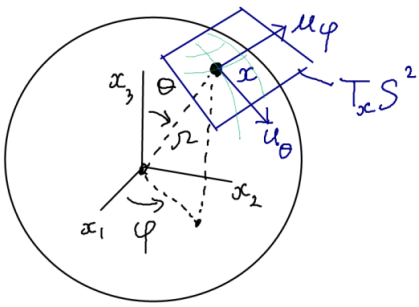
Autrement dit, le champ de vecteur est caractérisé par la fonction complexe $\psi(x)$ (relativement à ce choix de Jauge), que l'on appelle coordonnée, ou **champ scalaire complexe** en physique.

Dans la suite, on note $r = r_1$ pour simplifier, sachant que r_2 se déduit par $r_2 = ir$.





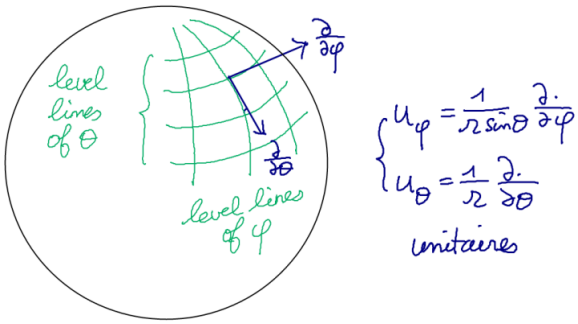
Exemple 1.5.2. sur la sphère unité $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, comme choix de Jauge sur $T\mathcal{S}$, on peut choisir le vecteur unitaire $r(x) = u_\varphi$ unitaire et tangent aux parallèles ou $r(x) = u_\theta$ tangent aux méridiens.



1.5.2 Potentiel de Jauge

Vidéo de cette section.

Dans la suite, on va utiliser des coordonnées locales quelconques sur la surface, notées $\vec{x} = (x_1, x_2)$. Ce peut être les coordonnées sphériques (φ, θ) par exemple.



Avant de plonger dans la proposition suivante qui est technique, rappelons nous que la dérivée covariante $\frac{Du}{dt}$

mesure tout simplement la déviation d'un champ de vecteur $u(t)$ par rapport au transport parallèle. Le but de la proposition suivante est de donner une valeur numérique à cette dérivée covariante, i.e. la composante de $\frac{Du}{dt}$ dans le repère local $r(x)$.

Proposition 1.5.3. *« **Expression de la dérivée covariante** ». Soit $U \subset \mathcal{S}$, et $r(x) \in T_x\mathcal{S}$ un **choix de Jauge** (i.e. vecteur de base unitaire) pour chaque $x \in U$. On suppose que $\vec{x} = (x_1, x_2)$ est un **choix de coordonnées locales** sur U. On définit le **potentiel de Jauge** $\vec{\mathcal{A}}(x) = (\mathcal{A}_1(x), \mathcal{A}_2(x)) \in \mathbb{R}^2$ par*

$$\left(\frac{Dr}{\partial x_k}\right) = (i\mathcal{A}_k(x))\, r, \qquad k = 1, 2.$$

*Autrement dit, les **composantes réelles** $\vec{\mathcal{A}}(x) = (\mathcal{A}_1(x), \mathcal{A}_2(x))$ mesurent les dérivées covariante du choix de base $r(x)$ par rapport aux variations de coordonnées (x_1, x_2). En géométrie différentielle, on note*

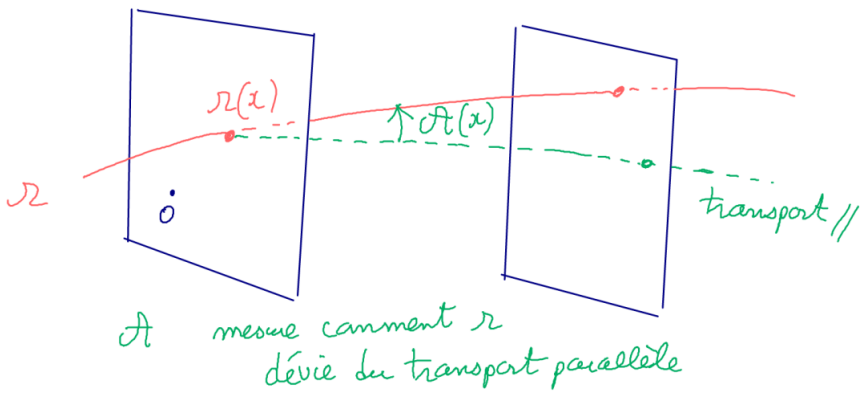
$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1(x)\, dx_1 + \mathcal{A}_2(x)\, dx_2 \equiv \vec{\mathcal{A}} \cdot d\vec{x}$$

appelée la "1-forme de connexion".
*Soit $\gamma : t \in [0,1] \to \gamma(t) \in U$ un chemin paramétré donné de coordonnées $(x_1(t), x_2(t)) = \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ et u un champ de vecteur sur U c'est à dire $u(x) = \psi(x)\, r(x) \in T_x\mathcal{S}$ donné pour chaque x, de composante $\psi(x)$. Alors la **dérivée covariante** de u au point $x = \gamma(t)$ le long du chemin $\gamma(y)$ est donnée par*

$$\frac{Du}{dt} = \left(i\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right) \cdot \left(\vec{p} + \vec{\mathcal{A}}(x)\right)\psi\right) r(x) \tag{1.5.1}$$

*avec "**l'opérateur impulsion**" $\vec{p} := -i\vec{\nabla} = \left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}, -i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$. Par conséquent,*

$$\|Du\|^2 = \left\|\left(\vec{p} + \vec{\mathcal{A}}(x)\right)\psi\right\|^2. \tag{1.5.2}$$



Remarque 1.5.4. L'expression (1.5.2) qui mesure la norme au carré de la dérivée covariante, donc son intensité, correspond à une « énergie en physique ». On reconnaît la formule du "couplage minimal" utilisé par exemple en électromagnétisme, i.e. le terme d'énergie d'une fonction d'onde ψ en présence d'un champ électromagnétique $\vec{\mathcal{A}}$.

Remarque 1.5.5. La formule (1.5.1) parait compliquée, son intérêt est qu'elle exprime explicitement $\frac{Du}{dt}$ par rapport à des choix de coordonnées et de choix de Jauge. Bien sûr, le résultat ne dépend pas de ces choix puisqu'on l'a définit avant, mais dans les livres de physique, on définit la dérivée covariante par le terme de droite, et le fait qu'il est invariant par changement de trivialisation est donc une propriété appelée « invariance de Jauge ».

Démonstration. On a $u = \psi r$. On a définit $\left(\frac{Dr}{\partial x_k}\right) = (i\mathcal{A}_k(x))\, r$. Montrons que $\mathcal{A}_k \in \mathbb{R}$. Du fait que la connexion préserve la norme, $\|r\|^2 = \langle r|r\rangle = 1$, on déduit

$$0 = \frac{\partial \|r\|^2}{\partial x_k} \underset{(1.2.9)}{=} \langle \frac{Dr}{\partial x_k}|r\rangle_g + \langle r|\frac{Dr}{\partial x_k}\rangle_g = 2\mathrm{Re}\langle r|\frac{Dr}{\partial x_k}\rangle = 2\mathrm{Re}\langle r|i\mathcal{A}_k r\rangle = 2\mathrm{Re}\left(i\mathcal{A}_k\langle r|r\rangle\right) = -2\mathrm{Im}\left(\mathcal{A}_k\right),$$

donc $\mathcal{A}_k \in \mathbb{R}$. Avec la formule de Leibnitz on déduit

$$\begin{aligned}
\frac{Du}{dt} &= \frac{D(\psi r)}{dt} \underset{(1.2.10)}{=} \frac{d\psi}{dt} r + \frac{Dr}{dt}\psi \\
&= \sum_k \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_k}\right)\left(\frac{dx_k}{dt}\right) r + \left(\frac{Dr}{\partial x_k}\right)\left(\frac{dx_k}{dt}\right)\psi \\
&= \sum_k \left(\frac{dx_k}{dt}\right)\left(\left(\frac{\partial .}{\partial x_k}\right) + i\mathcal{A}_k(x)\right)\psi r \\
&= \left(i\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)\cdot\left(\vec{p} + \vec{\mathcal{A}}(x)\right)\psi\right) r.
\end{aligned}$$

Pour déduire (1.5.2), en un point x on somme le carré de la norme la dérivée covariante selon deux directions orthogonales et unitaires. □

Exercice 1.5.6. (Exemple suite) Calculer le potentiel de Jauge $\mathcal{A}$ (1 forme de connexion) sur la sphère S^2, si le choix de Jauge (trivialisation locale) est $r(x) = u_\varphi(x)$. Montrer que

$$\mathcal{A} = \cos\theta d\varphi \tag{1.5.3}$$

c'est à dire que les composantes sont $\vec{\mathcal{A}} = (0, \cos\theta)$. Aide : sur un cône, l'ouverture est $2\pi(1-\cos\theta)$ donc $\frac{Du_\varphi}{d\varphi} = \frac{du_\varphi}{d\varphi} = \frac{du_\varphi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{d\varphi} = 1.\cos\theta$.

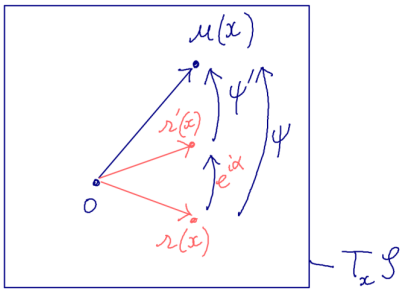
1.5.3 Changement de Jauge

Section en vidéo.

Définition 1.5.7. Un **"changement de Jauge"** ou **"Changement de trivialisation"** est un autre choix de vecteur unitaire de base $r'(x)$ que l'on exprime par rapport à l'ancien choix par :

$$r'(x) = e^{i\alpha(x)} r(x)$$

avec une phase $\alpha(x) \in \mathbb{R}$. (Noter que $e^{i\alpha(x)} \in U(1)$ est un élément du groupe unitaire).



Proposition 1.5.8. *Par changement de Jauge le champ de vecteur s'exprime comme*

$$u(x) = \psi(x) r(x) = \psi'(x) r'(x)$$

avec

$$\psi'(x) = e^{-i\alpha(x)} \psi(x)$$

et le potentiel de Jauge est changé en

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} + d\alpha$$

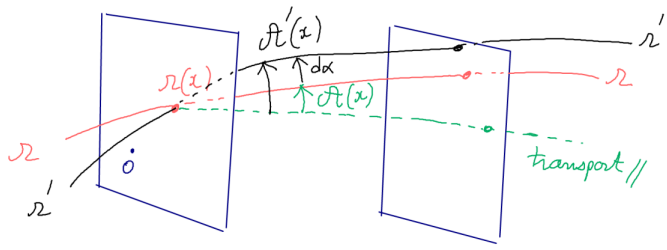
c'est à dire

$$\mathcal{A}'_k = \mathcal{A}_k + \frac{\partial \alpha}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2.$$

Démonstration. $\psi(x) r(x) = \psi'(x) r'(x) = \psi'(x) e^{i\alpha(x)} r(x)$ donc $\psi'(x) = e^{-i\alpha(x)} \psi(x)$. Et d'une part $Dr' = i\mathcal{A}' r'$. D'autre part par Leibnitz,

$$\begin{aligned} Dr' = D\left(e^{i\alpha} r\right) &\underset{(1.2.10)}{=} i d\alpha e^{i\alpha} r + e^{i\alpha} Dr \\ &= i d\alpha e^{i\alpha} r + e^{i\alpha} i\mathcal{A} r = i\left(d\alpha + \mathcal{A}\right) r' \end{aligned}$$

donc $\mathcal{A}' = d\alpha + \mathcal{A}$. □



1.5.4 Courbure

Vidéo de la section.

Proposition 1.5.9. *Si $\mathcal{C} \subset U$ est un sous domaine de bord $\gamma = \partial\mathcal{C}$ (formant un chemin fermé) alors l'holonomie $h(\gamma)$ s'exprime par l'**intégrale de courbure** :*

$$h(\gamma) = -\oint_\gamma \mathcal{A} = -\iint_{\mathcal{C}} B$$

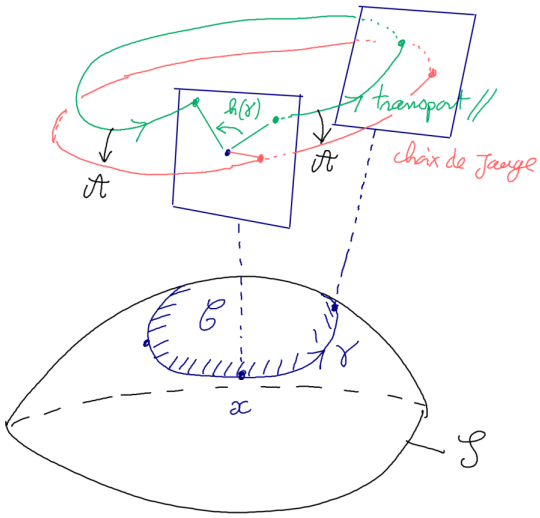
avec le tenseur de courbure

$$B = \left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1}\right)(dx_1 \wedge dx_2)$$

qui est indépendant du choix de Jauge. On a

$$B = -k.ds^2$$

*où k est la courbure de Gauss de la surface, ds^2 l'élément de surface. On retrouve la **formule de Gauss Bonnet locale** (**??**).*



Remarque 1.5.10. En géométrie différentielle, on note

$$B = d\mathcal{A}$$

en l'analogie avec l'électromagnétisme, la courbure est semblable au champ magnétique. L'intégrale curviligne du potentiel vecteur (donc l'holonomie) intervient dans l'effet Aharanov-Bohm.

Démonstration. Considérons une famille de vecteurs $u(t)$, $t \in [0,1]$ sur le chemin γ fermé, *transportée parallèlement*. Alors par définition, l'holonomie $h(\gamma)$ est donnée par $u(1) = e^{ih(\gamma)}u(0)$. On écrit $u(t) = \psi(t)\, r(t)$. Comme $r(1) = r(0)$, on déduit $\psi(1) = \psi(0)\, e^{ih(\gamma)}$. On a

$$\begin{aligned} 0 = \frac{Du}{dt} &= \frac{d\psi}{dt} r + \psi \frac{Dr}{dt} \\ &= \frac{d\psi}{dt} r + \psi \sum_k \left(\frac{Dr}{\partial x_k}\right)\left(\frac{dx_k}{dt}\right) \\ &= \left(\frac{d\psi}{dt} + \psi i \vec{\mathcal{A}}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)\right) r \end{aligned}$$

donc

$$\frac{d\psi}{dt} = -i\vec{\mathcal{A}}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)\psi$$

En intégrant on déduit

$$\psi(1) = \psi(0)\exp\left(-i\int_0^1 \vec{\mathcal{A}}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)dt\right) = \psi(0)\exp\left(-i\oint_\gamma \vec{\mathcal{A}} d\vec{x}\right),$$

donc $h(\gamma) = -\oint_\gamma \vec{\mathcal{A}} d\vec{x}$. Puis par la formule de Stokes, on exprime cette intégrale curviligne par une intégrale double sur l'intérieur du domaine. La courbure est indépendante du choix de Jauge d'après

$$d\mathcal{A}' = d(\mathcal{A} + d\alpha) = d\mathcal{A} + \underbrace{dd\alpha}_{0} = d\mathcal{A}.$$

En effet avec la formule précédente,

$$dd\alpha = \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right)}{\partial x_2} - \frac{\partial \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right)}{\partial x_1} \right) dx_1 \wedge dx_2 = 0$$

□

Exemple 1.5.11. (suite) Dans le cas de la sphère S^2 de rayon R et d'après (1.5.3) on calcule la courbure, sachant que $ds^2 = R^2 \sin\theta d\theta \wedge d\varphi$,

$$\begin{aligned} B = d\mathcal{A} = d(\cos\theta d\varphi) &= \partial_\theta(\cos\theta)\, d\theta \wedge d\varphi + \partial_\varphi(\cos\theta)\, d\varphi \wedge d\varphi \\ &= -\sin\theta d\theta \wedge d\varphi \\ &= -\frac{1}{R^2} ds^2 \end{aligned}$$

Il apparaît bien la courbure de Gauss $k = \frac{1}{R^2}$ de la sphère.

Remarque 1.5.12. en électromagnétisme, cela correspond à un champ magnétique positif sur la sphère qui serait créée par un "monopole magnétique de charge" $C = +2$ (On verra après, que l'indice de Chern est $C = C(TS^2) = +2)$; Dans la nature, les monopoles magnétiques ne sont pas connus (pas observés, ou n'existent pas).

1.6 Espace fibré vectoriel

1.6.1 Définitions

Vidéo.

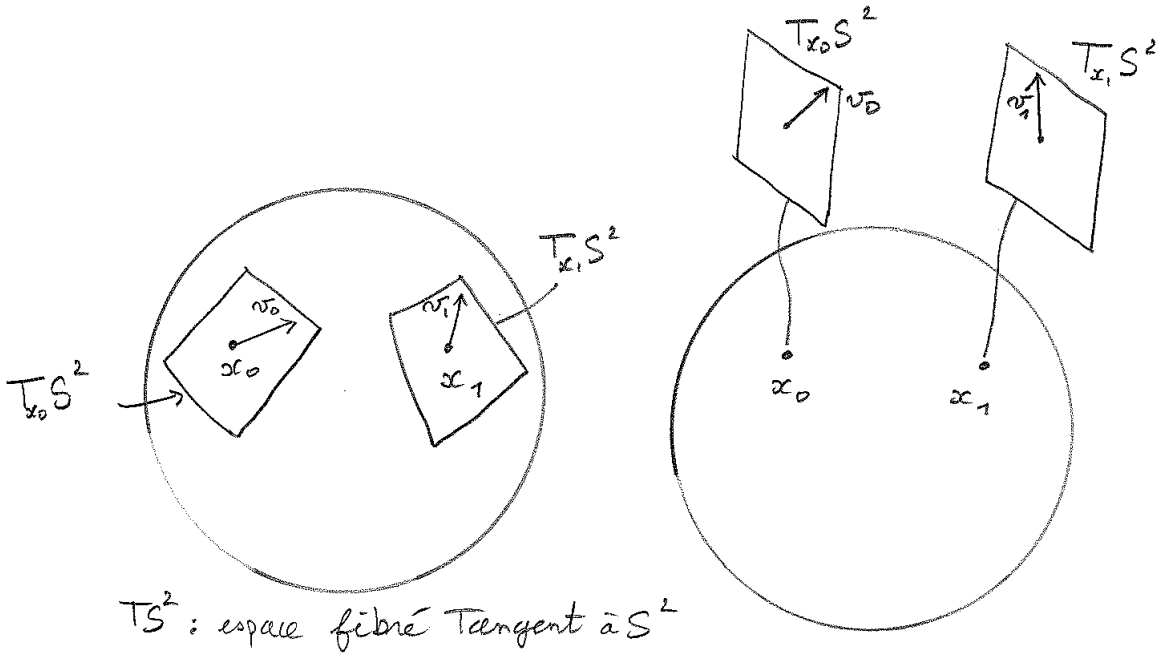
1.6.1.1 Rappels sur l'espace fibré tangent

Jusqu'à présent on a considéré $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ une surface contenue dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, et pour chaque point $x \in \mathcal{S}$, $T_x\mathcal{S}$ est le plan tangent à $\mathcal{S}$ au point x. L'ensemble de ces plan tangents est noté

$$T\mathcal{S} = \{(x, v),\, x \in \mathcal{S},\, v \in T_x\mathcal{S}\} \tag{1.6.1}$$

et appelé **espace fibré tangent** de la surface $\mathcal{S}$. Autrement dit $T\mathcal{S}$ est la collection des espaces vectoriel $T_x\mathcal{S}$ paramétrée par $x \in \mathcal{S}$. On notera aussi $\pi : T\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ qui est l'application qui à $(x, v) \in T\mathcal{S}$ associe $x \in \mathcal{S}$.

Voici donc le schéma que l'on peut se faire de l'espace fibré $T\mathcal{S}$ où un espace vectoriel $T_x\mathcal{S}$ appelé **fibre** est "attaché" à chaque point $x \in \mathcal{S}$:



Choix de Jauge local, trivialisation locale : De plus lorsque le point $x \in \mathcal{S}$ varie, l'espace vectoriel $T_x\mathcal{S}$ varie continument (ou même de façon différentiable) et par conséquent nous avons vu avec la Définition 1.5.1 que dans le voisinage U de tout point $x \in \mathcal{S}$, pour tout $x' \in U$, on peut faire le choix d'un repère $r_1(x'), r_2(x')$ de l'espace $T_{x'}\mathcal{S}$, de sorte que $v \in T_{x'}\mathcal{S}$ s'écrit $v = v_1(x')\, r_1(x') + v_2(x')\, r_2(x')$ et ainsi on a un difféomorphisme (i.e bijection C^∞ d'inverse C^∞)

$$h : \begin{cases} T_U\mathcal{S} & \to U \times \mathbb{R}^2 \\ (x', v) & \to (x', v_1(x'), v_2(x')) \end{cases} \tag{1.6.2}$$

appelé **trivialisation locale** du fibré $T_U\mathcal{S}$ (i.e. $T\mathcal{S}$ restreint au domaine U). Autrement dit, cette application h identifie chaque fibre $F_{x'}$ au plan $\mathbb{R}^2$.

1.6.1.2 Définition générale

Il y a un concept plus général d'espace fibré qui apparait souvent en physique et que l'on considèrera dans ce cours. L'idée est de remplacer l'espace tangent $T_x\mathcal{S}$ précédent par un espace vectoriel quelconque F_x.

Dans la définition suivante, penser qu'une « variété différentiable » est une courbe $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ ou une surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ ou plus généralement un ensemble de point avec des coordonnées locales.

Définition 1.6.1. Soit B une variété différentiable appelée **espace de base.** Pour chaque point $x \in B$ on considère un espace vectoriel F_x de dimension n (constant indépendant de x), appelé **fibre** au dessus de x. La collection de ces espaces vectoriels

$$F = \{(x, v),\, x \in B,\, v \in F_x\} \tag{1.6.3}$$

est appelé **espace fibré vectoriel de rang** n **sur** B. On notera $\pi : F \to B$ l'application $\pi(x, v) = x$.
On suppose que tout $x \in B$, il existe un voisinage $U \subset B$ tel que l'espace $F_U := \{(x, v),\, x \in U,\, v \in F_x\}$ est difféomorphe au produit direct $U \times \mathbb{R}^n$ comme en (1.6.2).

Remarques :

— Si B est une variété de dimension n (ex : courbe $n = 1$ ou surface $n = 2$), **l'espace fibré tangent** TB est un cas particulier d'espace fibré vectoriel, c'est le cas $F_x = T_xB$ comme en (1.6.1). Dans ce cas, $\dim B = n = \dim T_xB$, le fibré TB est de rang n.

— La définition 1.6.3 généralise le cas du fibré tangent, car en général on ne suppose pas que la fibre F_x soit relié d'aucune façon à l'espace tangent T_xB. Un exemple simple d'espace fibré vectoriel est :

$$F = B \times \mathbb{R}^n = \{(x, v)\,,\, x \in B,\, v \in \mathbb{R}^n\} \tag{1.6.4}$$

appelé l'**espace fibré trivial**[7] de rang n où chaque fibre est $F_x = \mathbb{R}^n$, le même espace vectoriel pour tous les point $x \in B$. On peut donc penser qu'**un espace fibré vectoriel général, sert à étendre la notion du produit direct**.

— En physique des particules, en Théorie de Jauge (théorie de Yang-Mills), on utilise des fibrés vectoriel avec connexion où F_x est un espace vectoriel complexe, de dimension $n = 1, 2, 3$ (respectivement, en théorie de Jauge $U(1)$ de l'electromagnétisme, $SU(2)$ de la théorie électrofaible ou $SU(3)$ de la QCD), sur l'espace temps B.

1.6.1.3 Equivalence entre fibrés vectoriels

Vidéo

La définition suivante définit en quel sens deux espaces fibrés sont équivalents.

Définition 1.6.2. Si $F \to B$ et $F' \to B$ sont deux espaces fibrés vectoriels de rang n (avec le même espace de base B), on dit que F et F' sont **isomorphes,** et on note $F \sim F'$ si il existe un homéomorphisme (i.e. bijection continue et d'inverse continue)

$$h : F \to F'$$

tel que pour tout $x \in B$, $h : F_x \to F'_x$ est un isomorphisme d'espace vectoriels (i.e. application linéaire inversible).
La relation $\sim$ est une relation d'équivalence. On notera

$$\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{R}}(B)$$

les classes d'équivalences de fibrés isomorphes de rangs n sur B.

On établira la liste des classes d'équivalences $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{R}}(B)$ dans les sections suivantes, dans des cas simples, comme $B = S^1$, $n = 1$ ou $B = S^2$, $n = 2$.

Exemples

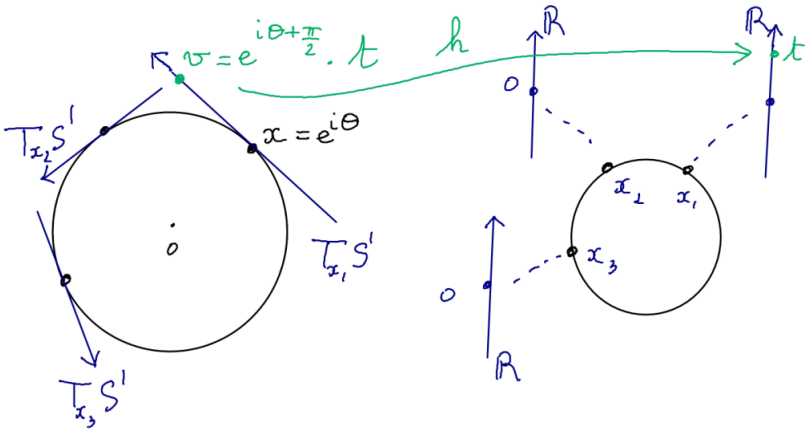
— L'espace tangent TS^1 est isomorphe au fibré trivial de rang 1 :

$$TS^1 \sim S^1 \times \mathbb{R}$$

En effet en notation complexe, on note $e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ un point de S^1. Alors un point de l'espace tangent $T_{e^{i\theta}}S^1$ s'écrit $ite^{i\theta}$, $t \in \mathbb{R}$. Alors on a un homéomorphisme :

$$h : \left(e^{i\theta}, ite^{i\theta}\right) \in TS^1 \to \left(e^{i\theta}, t\right) \in S^1 \times \mathbb{R}$$

7. l'adjectif **trivial** est utilisé en mathématique pour signifier que le cas considéré est le plus simple (à la limite de l'intérêt).

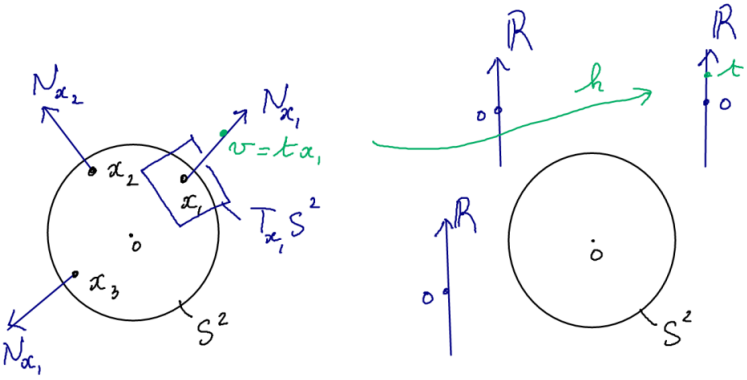


— Si $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ est une surface, l'**espace fibré normal** $N\mathcal{S}$ est par définition la collection des droites N_x orthogonales à $\mathcal{S}$ au point $x \in \mathcal{S}$. Montrons que le fibré NS^2 à la sphère S^2 est trivial :

$$NS^2 \sim S^2 \times \mathbb{R}$$

En effet, si $x \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$, on note $tx \in NS^2$ avec $t \in \mathbb{R}$. Alors on a un homéomorphisme :

$$h : (x, tx) \in NS^2 \to (x, t) \in S^2 \times \mathbb{R}$$



— Un résultat important (mais difficile) montre que le fibré tangent TS^n est trivial seulement pour $n = 1, 3, 7$, et ces trois cas sont reliés respectivement aux nombres complexes, quaternions et octonions [Hat98]. On montrera plus loin que le fibré TS^2 n'est pas trivial (Th. 3 page 44).

1.6.1.4 Section d'un fibré vectoriel

Vidéo

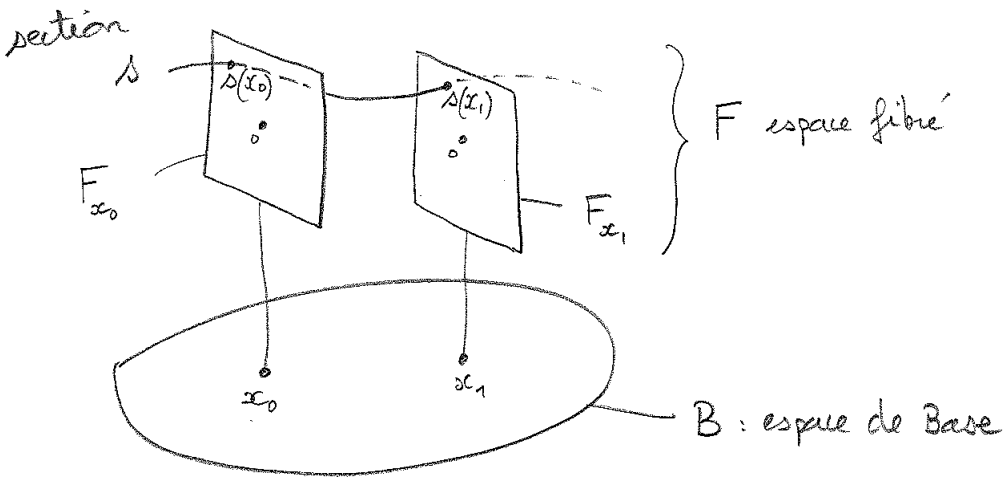
Définition 1.6.3. Si $F \to B$ est un espace fibré vectoriel, une **section globale** du fibré est une application (continue ou C^∞)

$$s : \begin{cases} B & \to F \\ x & \to s(x) \in F_x \end{cases}$$

On note

$$C^\infty(B; F) \tag{1.6.5}$$

l'espace des sections C^∞ du fibré F.



Remarques :

— Par exemple si $F = B \times \mathbb{R}$ est le fibré trivial de rang 1, alors une section $s \in C^\infty(B, F)$ est simplement une fonction numérique à valeurs réelles $s : x \in B \to s(x) \in \mathbb{R}$ (aussi noté $s \in C^\infty(B)$ habituellement). Si $F = B \times \mathbb{R}^n$ est le fibré trivial de rang n, alors une section s est simplement une fonction numérique ayant n composantes réelles $s(x) \in \mathbb{R}^n$. Pour un fibré quelconque, **la notion de section généralise donc la notion de fonction numérique.**

— Une section globale du fibré tangent $s \in C^\infty(\mathcal{S}; T\mathcal{S})$ est tout simplement un **champ de vecteur** sur $\mathcal{S}$. $s(x) \in T_x\mathcal{S}$.

— Tout espace fibré admet des sections, en particulier la **section nulle** : $s(x) = 0, \forall x$.

Voici un résultat utile pour détecter si un espace fibré est trivial ou non.

Théorème 1.6.4. *L'espace fibré $F \to B$ est trivial si et seulement si il existe n sections globales $(s_1, \ldots, s_n)$ telles que en tout point $x \in B$, les vecteurs $(s_1(x), \ldots s_n(x))$ forment une base de l'espace vectoriel F_x (la fibre au dessus de x). On dit que $(s_1, \ldots, s_n)$ est **une trivialisation globale du fibré** F (ou **choix de Jauge global**).*

Démonstration. Supposons qu'il existe n section globales $(s_1, \ldots, s_n)$ telles que $(s_1(x), \ldots s_n(x))$ forment une base de l'espace vectoriel F_x pour tout $x \in B$. En effet si $x \in B$ et $v \in F_x$ est un point quelconque dans une fibre, on le décompose dans la base : $v = \sum_{i=1}^n t_i s_i(x)$, avec $t_i \in \mathbb{R}$, et on a un isomorphisme entre le fibré F et le fibré trivial $B \times \mathbb{R}^n$:

$$h : \qquad (x, v) \in F \to (x, t_1, \ldots, t_n) \in B \times \mathbb{R}^n$$

□

1.6.2 Fibré normal à une courbe $\gamma \subset \mathbb{R}^3$

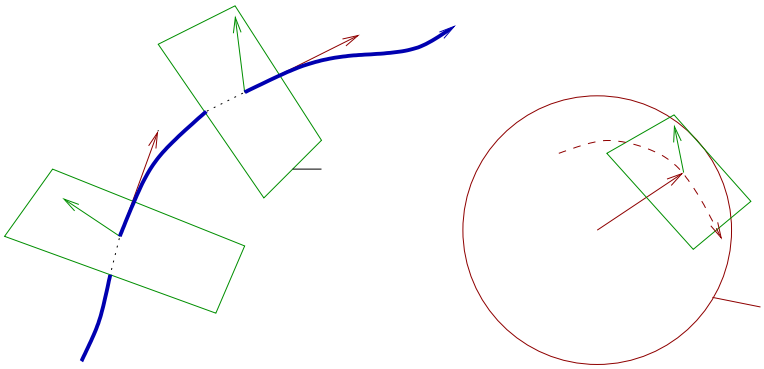
On va étudier le cas particulier où l'espace de base est une courbe $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ et le fibré vectoriel est le fibré normal à γ.

Exercice 1.6.5. Fibré normal à une courbe dans $\mathbb{R}^3$ et connection de Levi-Civita.

On considère une courbe paramétrée $\gamma : t \in \mathbb{R} \to \gamma(t) \in \mathbb{R}^3$, et en chaque point $\gamma(t)$, on note $\vec{n}(t)$ le vecteur tangent unitaire (i.e. $|\vec{n}(t)| = 1$), et $N_{\gamma(t)} \subset \mathbb{R}^3$ le plan orthogonal à $\vec{n}(t)$. On note

$$N = \{(x, v), x \in \gamma, v \in N_x\}$$

la collection des plans orthogonaux. Alors $N \to \gamma$ forme un espace fibré vectoriel de rang 2 sur γ, appelé **fibré normal** à γ. Ce fibré est munit d'une connexion induite par la métrique dans $\mathbb{R}^3$ que l'on va étudier.



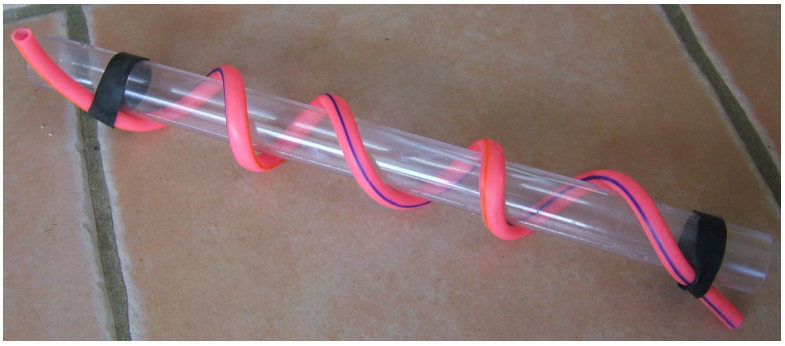
1. Si $v(t) \in N_{\gamma(t)}$ est une section du fibré, donner l'expression géométrique de la dérivée covariante $\frac{Dv}{dt}$? (similaire à (1.2.4))
2. On place le vecteur $\vec{n}(t)$ à l'origine, et on considère le mouvement de $\vec{n}(t)$ sur la sphère S^2 unité (appelé application de Gauss). Montrer l'équivalence entre cette connexion et la connexion de Levi-Civita sur le fibré tangent TS^2.
3. Si γ est un chemin fermé dans $\mathbb{R}^3$ (i.e. un nœud), déduire une formule simple pour l'holonomie $h(\gamma)$.
4. Supposons que γ soit une hélice d'angle l (l'angle entre $n(t)$ et l'axe de l'hélice est $\pi/2 - l$). Supposons qu'un vecteur $v(t)$ suive le transport parallèle le long de γ. Après N tours, exprimer l'angle entre $v(t)$ et $v(0)$ (qui est une holonomie si on ramène le point final au point initial par translation dans $\mathbb{R}^3$ pour les comparer).

Solution :

$$h(\gamma) = 2\pi N (1 - \sin l)$$

Remarque : Ce modèle géométrique est important pour décrire le comportement de la polarisation d'un rayon lumineux qui suit une fibre optique γ. En effet, si la polarisation est rectiligne, elle est décrite par un vecteur $\vec{v} \in N_x$ qui suit le transport parallèle. (cela se justifie avec l'approximation WKB en optique ondulatoire)

Exercice 1.6.6. Importance de l'holonomie pour la raideur d'un ressort
(exercice inventé et illustré par Claude Gignoux). Solution : voir page **??**.
Cet exercice fait suite à l'exercice 1.6.5.



1. On considère un tube droit de rayon r (en rose sur la photo). On marque ce tube par un trait noir droit parallèle à l'axe du tube. Ce tube est souple et on l'enroule sur un cylindre de rayon $R \gg r$ avec le moins de contrainte possible (i.e. minimum d'énergie de déformation) en formant une hélice de pente angulaire l. Exprimer la position angulaire que prendra le trait noir après N tours, et en particulier la période à laquelle il réapparait.

2. Un ressort est modélisé par un tube rigide de petit rayon r de longueur L enroulé en hélice (de rayon R), dont les spires sont fixées aux extrémitiés. On note C le couple de raideur du tube par unité de longueur (autrement dit, le couple induit par un angle de torsion α est $M = C\alpha/L$). Exprimer la raideur K du ressort ? (Aide : écrire que l'énergie de torsion est $E = \frac{1}{2}\left(\frac{C}{L}\right)(\delta\alpha)^2 = \frac{1}{2}K(\delta x)^2$)
3. Exprimer C à partir du module de cisaillement μ du matériau.

Solution 1.6.7.

1. On a vu que l'holonomie est $h(\gamma) = N2\pi(1 - \sin l)$. C'est la position angulaire que prendra le trait noir après N tours. La longueur de l'hélice est $L = N2\pi R/\cos l$ et la longueur du ressort (longueur de la projection de l'hélice sur l'axe) est

$$X = N2\pi R \tan l = L \sin(l)$$

La période s'obtient pour $h(\gamma) = 2\pi$ correspondant à une longueur :

$$X_{periode} = \frac{2\pi R \tan l}{(1 - \sin l)}$$

2. On a obtenu que la longueur du ressort est $X = L\sin(l)$. Si on comprime le ressort de $\delta X \ll X$, cela va modifier l par $\delta l = \left(\frac{dl}{dX}\right).\delta X$. Par conséquent si les spires n'étaient pas fixées aux extrémités, alors au repos l'holonomie varie de

$$\delta h = \left(\frac{dh}{dl}\right).\left(\frac{dl}{dX}\right)\delta X$$

Mais comme les extrémités sont fixées (noter que N et L sont fixes mais R dépend de l), cela induit une torsion égale et opposée à cette holonomie :

$$\delta\alpha = -\delta h = -\left(\frac{dh}{dl}\right).\left(\frac{dX}{dl}\right)^{-1}\delta X = \frac{2\pi N\cos l}{L\cos(l)}\delta X = \frac{\cos l}{R}\delta X$$

Or l'énergie du ressort est

$$E = \frac{1}{2}\frac{C}{L}(\delta\alpha)^2 = \frac{1}{2}K(\delta X)^2$$

donc

$$K = \frac{C}{L}\left(\frac{\delta\alpha}{\delta X}\right)^2 = \frac{C}{L}\frac{\cos^2 l}{R^2} = \frac{C\cos^3 l}{2\pi N R^3}$$

En notant $D = 2R$ le diamètre et pour un ressort à spires jointives, $l \ll 1$, on obtient

$$K = \frac{4C}{\pi N D^3}$$

qui est une formule bien connue pour les ressorts (voir Wikipedia "Ressorts").

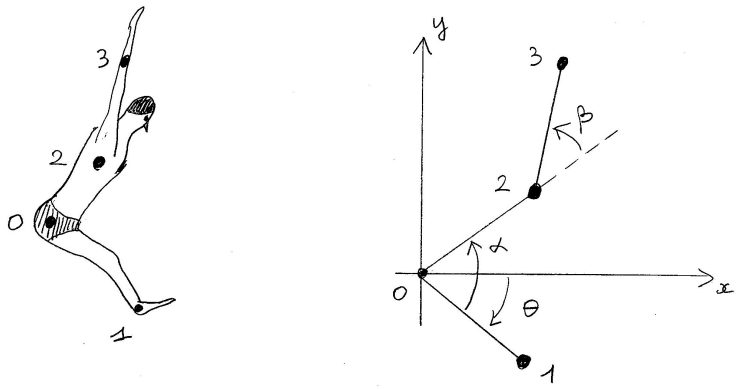
3. $C = \mu\pi(2r)^4/32$.

Exercice 1.6.8. Orientation dans l'espace d'un plongeur en chute libre

Solution : voir page 39.

Le modèle qui suit sert de modèle simplifié pour décrire la chute libre d'un chat, et comprendre comment il peut se rétablir sur ses pattes. Cela peut aussi servir pour comprendre comment changer l'orientation d'un satellite qui serait libre dans l'espace. (Exercice inspiré d'un article de Surya Ganguli 1999, Voir aussi l'article de Montgomery "Gauge theory of the falling cat" , article wikipedia sur le Falling cat problem, redressement du chat).

On considère une personne qui plonge dans une piscine depuis un sautoir. On modèlise son corps par 3 masses égales aux points 1,2,3. Voir figure.



La **configuration interne** est caractérisée par les angles $(\alpha, \beta) \in [0, 2\pi]^2 \equiv \mathbb{T}^2$. La **configuration externe** est caractérisée par l'angle $\theta \in [0, 2\pi[\equiv S^1$. L'état total est donc spécifié par $(\theta, \alpha, \beta) \in E = S^1 \times \mathbb{T}^2$ (espace des états). En terme géométrique on a donc un fibré (trivial)

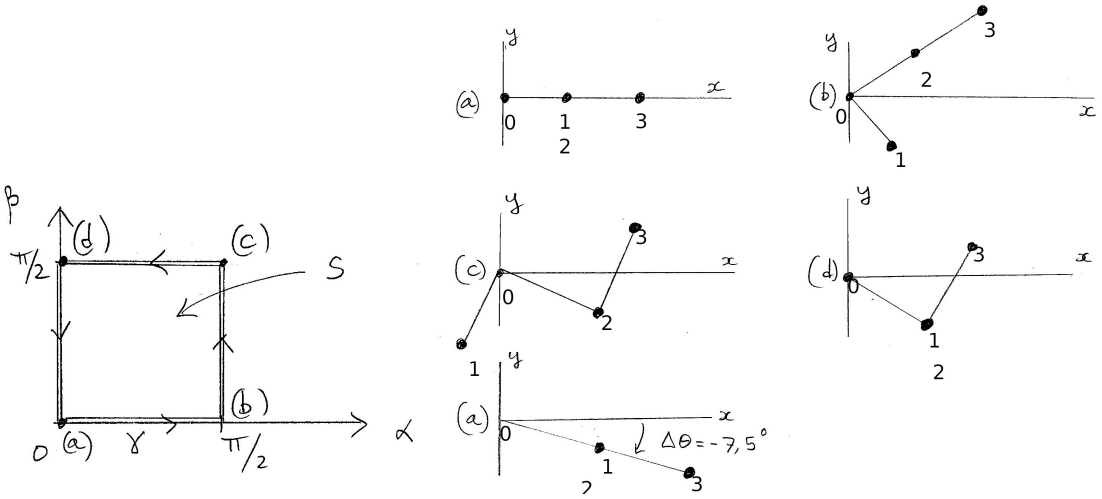
$$S^1 \to E \to \mathbb{T}^2$$

Le sauteur est en chute libre. Par conséquent il y a **conservation du moment angulaire total** par rapport à l'origine (ou n'importe quel autre point). Pendant le saut, la personne a un contrôle pour modifier les paramètres $\alpha(t), \beta(t)$ au cours du temps comme elle le souhaite. Par contre elle n'a aucun contrôle direct sur l'évolution de la configuration externe $\theta(t)$. C'est la conservation du moment angulaire qui va l'imposer. L'**objectif du plongeur** est, partant la tête vers le haut, d'arriver la tête en bas au niveau de l'eau (on néglige les frottements etc).

1. Utilisant la conservation du moment angulaire dans le référentiel du centre de masse, $0 = L = L_1 + L_2 + L_3$ (supposée nulle au départ), montrer que une variation $(d\alpha, d\beta)$ de la configuration interne entraîne une variation de la configuration externe :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} =& d\theta = \mathcal{A}_\alpha d\alpha + \mathcal{A}_\beta d\beta, \\ \mathcal{A}_\alpha =& -\frac{3 + 2\cos\beta}{4 + 2\cos\beta}, \qquad \mathcal{A}_\beta = -\frac{1 + \cos\beta}{4 + 2\cos\beta} \end{aligned}$$

On dit que $\mathcal{A}$ est la **1-forme de connexion**. Aide : pour le point 1 de coordonnée polaire (r, θ), son moment angulaire est $L_1 = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ (etc pour les autres points). Pour simplifier les calculs on pourra utiliser la coordonnée complexe $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$.



2. Le plongeur effectue le chemin fermé γ dans le plan (α, β), représenté sur la figure ci-dessus. Déduire que l'holonomie (changement d'orientation après un cycle) est

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \oint_\gamma \mathcal{A} \\ &= [\mathcal{A}_\alpha]_{\beta=0}^{\beta=\pi/2} = -75^o + 67.5^o \\ &= -7.5^o \end{aligned}$$

Que doit faire le plongeur pour tourner de $\Delta\theta = -\pi$ (afin de se retrouver la tête en bas) ?

3. Montrer que d'après la formule de Stokes

$$\Delta\theta = \oint_\gamma \mathcal{A} = \iint_{\mathcal{S}} d\mathcal{A}$$

où S est la surface encerclée par le cycle et

$$d\mathcal{A} = \left(\frac{\partial \mathcal{A}_\beta}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathcal{A}_\alpha}{\partial \beta}\right) d\alpha \wedge d\beta = \frac{-2\sin\beta}{(4+2\cos\beta)^2} d\alpha d\beta$$

est la **2-forme de courbure**. Donc

$$\Delta\theta = \int\int d\mathcal{A} = [-\mathcal{A}_\alpha]_{\beta=0}^{\beta=\pi/2}$$

Solution 1.6.9. Exercice 1.6.8 page 37 :

1. un point est repéré par sa coordonnées complexe $z = re^{i\theta}$. On a

$$dz = dre^{i\theta} + r\,(id\theta)\,e^{i\theta} = z\frac{dr}{d} + izd\theta$$

donc

$$\frac{dz}{z} = \frac{dr}{r} + id\theta,$$
$$d\theta = \Im\left(\frac{dz}{z}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{dz}{z} - \frac{d\overline{z}}{\overline{z}}\right)$$

On a

$$L = r^2 d\theta = |z|^2\, d\theta = \frac{1}{2i}\left(\overline{z}dz - zd\overline{z}\right) = \Im\left(\overline{z}dz\right)$$

Pour les points 1,2,3 on a respectivement :

$$z_1 = e^{i\theta}, \quad z_2 = e^{i(\theta+\alpha)}, \quad z_3 = e^{i(\theta+\alpha)} + e^{i(\theta+\alpha+\beta)}$$

Alors

$$L_1 = d\theta, \qquad L_2 = d\theta + d\alpha,$$
$$dz_3 = i\,(d\theta + d\alpha)\,e^{i(\theta+\alpha)} + i\,(d\alpha + d\alpha + d\beta)\,e^{i(\theta+\alpha+\beta)}$$
$$\overline{z_3}dz_3 = i\,(d\theta + d\alpha)\left(1 + e^{-i\beta}\right) + i\,(d\alpha + d\alpha + d\beta)\left(1 + e^{i\beta}\right)$$
$$L_3 = (d\theta + d\alpha)\,(1+\cos\beta) + (d\alpha + d\alpha + d\beta)\,(1+\cos\beta)$$

Or

$$\begin{aligned} 0 = L &= L_1 + L_2 + L_3 \\ &= d\theta\,(4 + 2\cos\beta) + d\alpha\,(3 + 2\cos\beta) + d\beta\,(1+\cos\beta) \end{aligned}$$

donnant le résultat

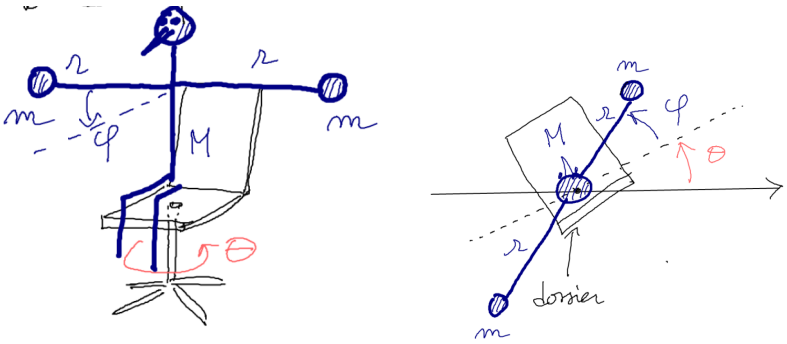
$$d\theta = \left(-\frac{3+2\cos\beta}{4+2\cos\beta}\right) d\alpha + \left(-\frac{1+\cos\beta}{4+2\cos\beta}\right) d\beta.$$

2. On calcule sur les 4 portions du chemin γ
3. On calcule

$$\left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{A}_\beta}{\partial \alpha}}_{=0} - \frac{\partial \mathcal{A}_\alpha}{\partial \beta}\right) = \ldots = \frac{-2\sin\beta}{(4+2\cos\beta)^2}$$

Exercice 1.6.10. Comment se retourner sur une chaise tournante de bureau ?.

On considère une personne sur un siège de bureau qui tourne sans frottement.



Les données de ce modèle simplifié sont :

— On note θ l'orientation du siège par rapport à la pièce.

— La chaise et le corps central combinés ont un moment d'inertie par rapport à l'axe fixé noté M. Autrement dit la contribution au moment angulaire est $M\frac{d\theta}{dt}$. La masse de chaque main est m, située à la distance r de l'axe avec $r \in [0, R]$ qui est variable. On suppose $2mR^2 = M$

— La personne peut décider la distance $r \in [0, R]$ entre ses mains et l'axe et l'angle φ entre ses bras et la chaise.

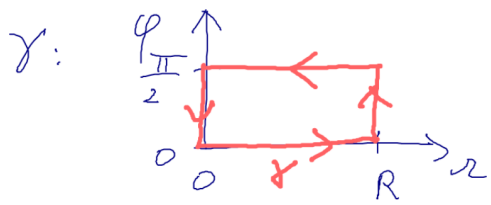
— Au départ, la chaise et la personne sont immobiles et dans la configuration $r = 0$, $\varphi = 0$, $\theta = 0$.

La personne souhaite se retourner, c'est à dire atteindre l'état immobile dans la configuration $r = 0$, $\varphi = 0$, $\theta = \pi$. Pour l'aider,

1. Décrire l'espace fibré à considérer (préciser l'espace de base, les fibres)
2. Expliciter la connexion du fibré sous la forme

$$d\theta = \mathcal{A} = \mathcal{A}_r dr + \mathcal{A}_\varphi d\varphi$$

3. Déduire l'holonomie pour le chemin γ suivant



4. Calculer la courbure du fibré.
5. Comment utiliser ces résultats pour se retourner ?
6. Faire l'expérience.

Solution 1.6.11.

1. La base est la configuration interne avec les coordonnées r, φ. La fibre est l'orientation externe avec la coordonnée θ.
2. Le moment angulaire total par rapport à l'axe est

$$L = M\frac{d\theta}{dt} + 2mr^2\frac{d(\theta + \varphi)}{dt}.$$

La conservation du moment angulaire $L = 0$ (nul au départ) implique donc

$$0 = Md\theta + 2mr^2(d\theta + d\varphi)$$
$$\Leftrightarrow d\theta = -\left(\frac{2mr^2}{M + 2mr^2}\right)d\varphi.$$

3. Sur le parcourt γ,

$$\begin{aligned} h(\gamma) = \Delta\theta &= -\left(\frac{2mR^2}{M+2mR^2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

4. La courbure est

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} = d\left(-\left(\frac{2mr^2}{M+2mr^2}\right)d\varphi\right) &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2mr^2}{M+2mr^2}\right)dr\wedge d\varphi \\ &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2mr^2}{M+2mr^2}\right)dr\wedge d\varphi \\ &= -\frac{4mrR}{(M+2mr^2)^2}dr\wedge d\varphi \end{aligned}$$

et on observe qu'elle est non nulle comme attendu.

5. A chaque cycle on obtient un décalage $\Delta\theta = -\frac{\pi}{4}$. Pour se retourner i.e. obtenir $\Delta\theta = -\pi$, il faut donc effectuer 4 cycles.

1.7 Topologie d'un fibré vectoriel de rang 1 sur S^1

Vidéo

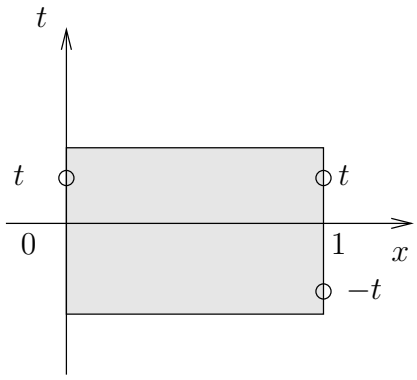
Après la définition 1.6.2 d'isomorphisme entre espaces fibrés, il est naturel de se demander si un espace fibré vectoriel $F \to B$ donné de rang n, est isomorphe au fibré trivial Eq.(1.6.4), et plus généralement de classifier (si possible) tous les fibrés vectoriels de rang n fixé au dessus d'un espace de base B fixé, i.e. déterminer l'espace $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{R}}(B)$. Cette question est très difficile en général, sauf en petites dimensions.

L'exemple le plus simple est le cas où l'espace de base est le cercle $B = S^1$ et le rang est $n = 1$, c'est à dire que chaque fibre est isomorphe (comme espace vectoriel) à la droite $\mathbb{R}$.

On imagine sans peine deux exemples d'espace fibré de rang 1 sur S^1 :

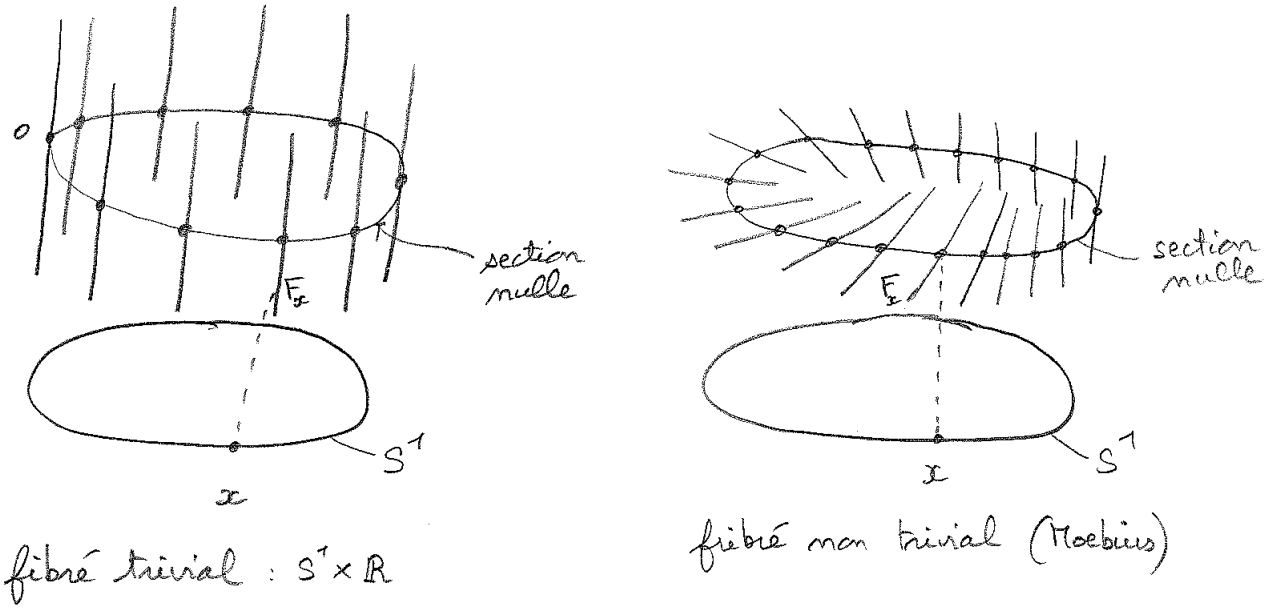
— Le **fibré trivial** $S^1 \times \mathbb{R}$ que l'on obtient à partir du fibré $[0,1]\times\mathbb{R}$ sur le segment $x \in [0,1]$, en identifiant les points $(0,t) \sim (1,t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

— Le **fibré de Moëbius**, que l'on obtient à partir du fibré $[0,1]\times\mathbb{R}$ sur le segment $x \in [0,1]$, en identifiant $(0,t) \sim (1,-t)$, $t \in \mathbb{R}$, c'est à dire que l'on recolle les extrémités à "l'envers".



Proposition 1.7.1. *Le fibré de Moebius n'est pas trivial.*

Démonstration. Une façon de le justifier est que dans le cas du fibré trivial, le complément de la section nulle ($s(x) = 0, \forall x$) a deux composantes connexes, alors que pour le fibré de Moebius, le complément n'a qu'une composante. (Faire une construction en papier que l'on coupe au ciseaux selon $s(x) = 0$). □



Theorem 1. Tout espace fibré réel $F \to S^1$ de rang 1 est isomorphe au fibré trivial ou au fibré de Möebius. Autrement dit il y a seulement deux classes d'équivalences :

$$\mathrm{Vect}^1_{\mathbb{R}}\left(S^1\right) = \{0, 1\}$$

associée à un indice $SW = 0$: fibré trivial, $SW = 1$: fibré de Moebius, qui s'appelle l'indice de **Stiefel-Whitney**. On dit que l'indice SW caractérise la topologie du fibré F.

Démonstration. Partant d'un fibré quelconque $F \to S^1$ de rang 1, on coupe l'espace de base S^1 en un point, et on se retrouve avec le fibré $[0, 1] \times \mathbb{R}$ sur le segment $x \in [0, 1]$. Pour reconstruire le fibré initial F, il y a deux possibilités : pour tout $t \in \mathbb{R}$, identifier $(0, t) \sim (1, t)$, ou $(0, t) \sim (1, -t)$, ce qui donne respectivement le fibré trivial ou de Moebius. Plus précisément cette construction montre l'existence d'un homéomorphisme entre F et le fibré trivial ou le fibré de Moebius.

□

Remarque :

- l'indice de Stiefel-Whitney $SW = 0, 1$ donne donc le nombre de $1/2$ tours que font les fibres au-dessus de l'espace de base S^1. Le cas $SW = 2$ (1 tour complet) est isomorphe au fibré trivial. On convient donc que l'indice $SW \in \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$, c'est à dire SW est un entier modulo 2. On verra plus loin, Théorème 4 page 46 qu'il est intéressant d'avoir la structure additive sur les indices SW ($1 + 1 = 0$ par exemple).
- Remarquer que dans l'espace $\mathbb{R}^3$, un ruban faisant un tour, ne peut pas être déformé continûment vers le fibré trivial [8]. Cette restriction est due au plongement dans l'espace $\mathbb{R}^3$ (dans $\mathbb{R}^4$, cela serait possible), et n'est pas une propriété intrinsèque du fibré qui est trivial d'après la définition 1.6.2.

1.8 Topologie d'un fibré vectoriel de rang 2 sur S^2

Vidéo

On considère un espace fibré $F \to S^2$ réel de rang 2 sur la sphère S^2. Pour étudier sa topologie, nous procédons de façon similaire au cas précédent.

8. Preuve : si on découpe ce ruban sur la section $s = 0$, on obtient deux rubans entrelacés, alors que la même découpe pour un ruban trivial donne deux rubans séparés.

Construction d'un fibré de rang 2 sur S^2. Voyons tout d'abord comment construire un espace fibré de rang 2 sur S^2. On découpe la sphère S^2 le long de l'équateur, obtenant deux hémisphères H_1 et H_2. On considère les fibrés triviaux $F_1 = H_1 \times \mathbb{R}^2$ et $F_2 = H_2 \times \mathbb{R}^2$ sur chaque hémisphère. Pour construire un fibré sur S^2, il suffit de décider comment "coller" ou "identifier" les fibres de F_1 au-dessus de l'équateur avec celles de F_2. Notons $\theta \in S^1$ l'angle[9] (longitude) qui caractérise un point sur l'équateur. Notons $\varphi(\theta) \in S^1$ l'angle qui signifie que la fibre $F_2(\theta)$ est recollée à la fibre $F_1(\theta)$ après une rotation d'angle $\varphi(\theta)$. En notation complexe, $F_2(\theta) = e^{i\varphi(\theta)} F_1(\theta)$. Après recollement des deux hémisphères et des fibres au dessus de l'équateur, on obtient un fibré $F \to S^2$ de rang 2. Ainsi le fibré F que l'on vient de construire est défini par sa **fonction de recollement** sur l'équateur :

$$\varphi : \theta \in S^1 \to \varphi(\theta) \in S^1$$

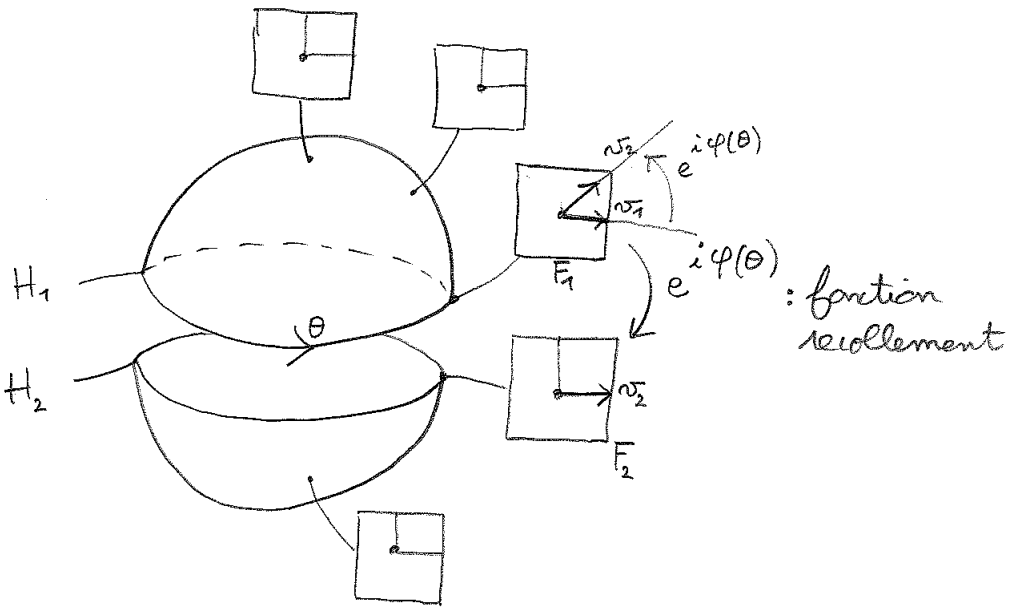
C'est une fonction continue et périodique donc : $\varphi(2\pi) \equiv \varphi(0)\,[2\pi]$, soit

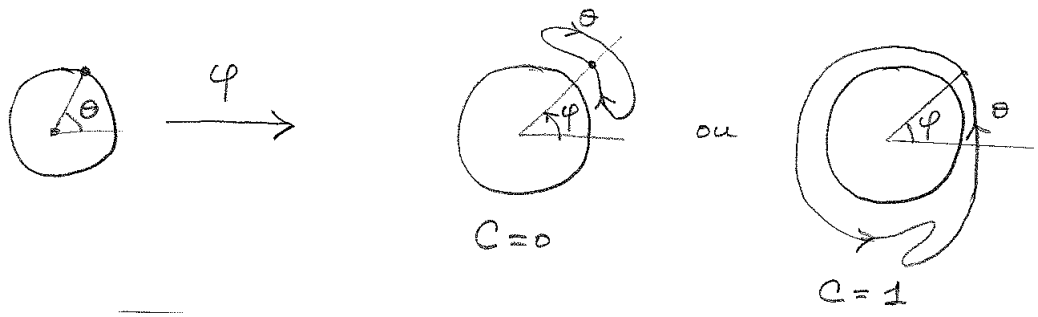
$$\varphi(2\pi) = \varphi(0) + 2\pi C, \qquad C \in \mathbb{Z} \tag{1.8.1}$$

l'indice entier $C \in \mathbb{Z}$ représente le nombre de tours que fait φ, lorsque θ fait un tour. Une façon de calculer C est de fixer $\varphi_0 \in S^1$ et

$$C = \sum_{\theta = \varphi^{-1}(\varphi_0)} \operatorname{sign}\left(\frac{d\varphi}{d\theta}(\theta)\right).$$

On appelle C le **degré de l'application** $\varphi : S^1 \to S^1$ (ou winding number).





9. Ici on note S^1 le cercle. $\theta \in S^1$ est donc repéré par un angle $\theta \in [0, 2\pi]$.

Theorem 2. Tout fibré réel $F \to S^2$ de rang 2 est isomorphe à un fibré construit comme ci-dessus avec une fonction de recollement sur l'équateur $\theta \to \varphi(\theta)$ ayant un degré $C \in \mathbb{Z}$. La classe d'équivalence du fibré F est caractérisée par l'entier $C \in \mathbb{Z}$ appelé (1er) **indice de Chern**. Autrement dit

$$\mathrm{Vect}^2_{\mathbb{R}}\left(S^2\right) = \mathbb{Z}$$

Démonstration. Il nous faut montrer que tout fibré F est isomorphe à un fibré construit comme ci-dessus. Partant d'un tel fibré F, on coupe l'espace de base S^2 le long de l'équateur noté E pour obtenir deux fibrés $F_1 \to H_1$ et $F_2 \to H_2$. Chacun de ces fibrés est trivial car [10] les espaces de base sont des disques (espaces contractiles). Le fibré F est donc défini par sa fonction de recollement au dessus de l'équateur E. □

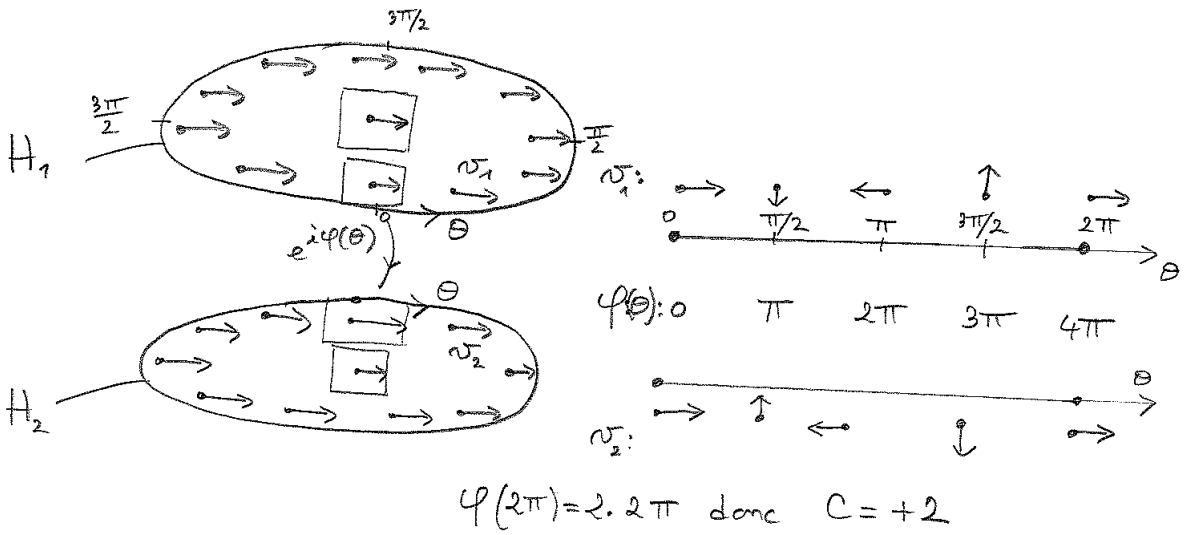
Theorem 3. Le fibré tangent TS^2 n'est pas trivial, son indice de Chern est :

$$C\left(TS^2\right) = +2 \tag{1.8.2}$$

Exercice 1.8.1. Ecrire la preuve du théorème 3. Aide : utiliser deux champs de vecteurs v_1, v_2 sur les Hémisphères H_1, H_2, comme pour la définition de l'indice de Chern. Solution : voir page 44.

Solution 1.8.2. Exercice 1.8.1 page 44 :

On va calculer le degré C de sa fonction de recollement défini par Eq.(1.8.1). On procède comme dans la preuve ci-dessus. On trivialise le fibré au dessus de H_1, et H_2, et on déduit le degré C de la fonction de recollement. Voir figure qui représente les deux hémisphères vues par dessus et dessous avec un champ de vecteur sur chacune. On trouve $C = +2$.



10. Voir [Hat98, corrollaire 1.8 p.21] ou d'après l'explication suivante : on choisit un vecteur non nul $v_0 \in F_1(x_0)$ où $x_0 \in H_1$ est le pôle nord. Soit $x_\theta \in E$ un point sur l'équateur. En utilisant un transport parallèle, on transporte le vecteur v_0 du point x_0 vers $x_\theta \in E$, radialement. Cela définit une section v_1 jamais nulle du fibré $F_1 \to H_1$, montrant que ce fibré est trivial, donc isomorphe à $F_1 \simeq H_1 \times \mathbb{R}^2$. De même pour $F_2 \simeq H_2 \times \mathbb{R}^2$.

Remarques :

— Le fibré trivial $S^2 \times \mathbb{R}^2$ a l'indice de Chern $C = 0$.

— On verra plus loin un exemple important en physique[11] de fibré $F \to S^2$ de rang 2 réel avec l'indice de Chern $C(F) = -1$. Cela nous fera donc trois exemples de fibrés sur S^2, avec indice $C = 0, +2, -1$.

— Dans les exemples précédents, l'indice de Chern permet de caractériser la topologie du fibré (à isomorphisme près). En dimension supérieure, il existe plusieurs indices de Chern, mais ceci ne suffisent pas en général à caractériser complètement la topologie du fibré. L'exemple le plus simple est un fibré complexe de rang 2 sur S^5, pour qui $\mathrm{Vect}^2_{\mathbb{C}}(S^5) = \pi_4(U(2)) = \{0, 1\}$ (appelé "domaine instable"), mais dont les indices de Chern sont toujours nuls. La K-théorie est une théorie qui fournit une classification partielle des fibrés vectoriels[Hat98].

1.8.0.1 Connexion et indice de Chern

Dans le cas du fibré tangent sur la sphère TS^2, on a vu que ce fibré est muni d'une connexion (dérivée covariante Eq.(1.2.4)), et on a établi la formule d'intégrale de Courbure Eq.(1.3.1). Dans cette formule considérons un chemin γ sur une latitude donnée, qui entoure la calotte $\mathcal{C}$ contenant le pôle nord. A la limite où γ rejoint le pôle sud, on a évidemment $h(\gamma) \equiv 0\ [2\pi]$ donc $h(\gamma) = 2\pi C$ avec $C \in \mathbb{Z}$. Le domaine entouré par γ est la sphère S^2 entière. Eq.(1.3.1) donne donc : $2\pi C = h(\gamma) = \iint_{S^2} k d^2 s = 4$, donc : $C = +2$. On retrouve (1.8.2). On obtient aussi une expression pour l'indice de Chern à partir de l'intégrale de courbure, appelée **formule de Gauss-Bonnet**, et qui est valable pour une surface $\mathcal{S}$ quelconque où k est la courbure de Gauss :

$$C(T\mathcal{S}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{S}} k d^2 s \tag{1.8.3}$$

Remarque :

— La courbure d'une surface est une **notion de géométrie**. Elle varie continûment et change si on déforme la surface. Il en est de même pour l'holonomie d'une courbe. Au contraire, l'indice de Chern d'un fibré est un entier, c'est un **indice topologique** qui ne varie pas lorsque l'on déforme continûment la surface. C'est une quantité plus "robuste", et indépendante de la géométrie. La formule de Gauss-Bonnet (1.8.3) est un exemple de formule où **on déduit des quantités topologiques à partir de quantités géométriques** (Si on modifie la surface continûment l'intégrant varie, mais le résultat de l'intégrale reste un entier constant).

1.9 Topologie d'un espace fibré F de rang 2 sur $\mathcal{S}$ à partir des zéros d'une section

Cette section en vidéo.

Nous avons donné la définition 1.6.3 d'une section s d'une fibré $F \to B$. On appelle **zéro de la section** s les points $x \in B$ tels que $s(x) = 0$.

1.9.1 Cas d'un fibré de rang 1 sur S^1

Considérons tout d'abord le cas très simple et instructif d'un fibré F de rang 1 sur S^1. On rappelle que son indice topologique de Stiefel Whitney est $SW(F) \in \{0, 1\}$, selon que le fibré est trivial ou équivalent au fibré de Moebius. Dans la suite on note

$$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}) = \{0, 1\},$$

11. en rapport avec le spin 1/2 ou les systèmes quantiques à 2 états

le groupe à deux éléments (i.e. les entiers modulo 2) avec la règle commutative $0+0=0$, $1+0=1$, $1+1=0$.

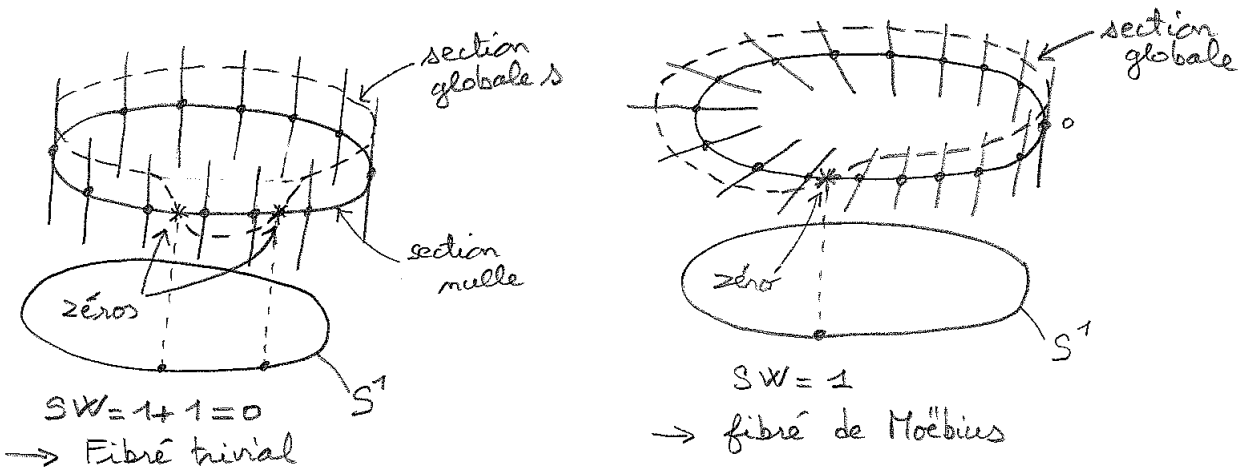
Une section est localement comme une fonction numérique à valeur réelle, donc génériquement, elle s'annule transversalement en des points isolés. Noter que "générique" signifie "sauf cas exceptionnel".

La figure suivante montre que l'on a le résultat suivant :

Theorem 4. Si $F \to S^1$ est un fibré réel de rang 1 sur S^1, et s est une section globale "générique", alors l'indice topologique $SW(F)$ est donné par

$$SW(F) = \sum_{x \text{ t.q. } s(x)=0} \sigma_s(x) \in \mathbb{Z}_2$$

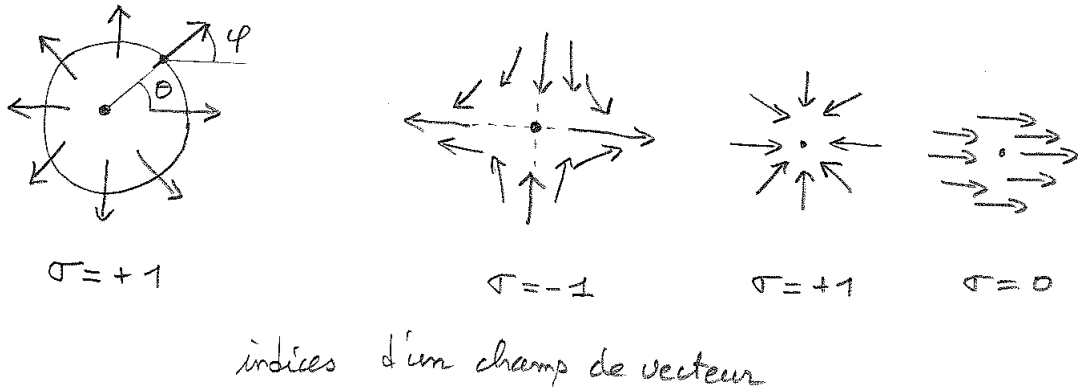
où $\sigma_s(x) = 1$ pour un zéro générique de la section s. Le résultat est indépendant de la section s choisie.



1.9.2 Cas d'un fibré de rang 2 sur $\mathcal{S}$

Il y a un résultat analogue pour un fibré réel orientable $F \to \mathcal{S}$ de rang 2 sur une surface orientable $\mathcal{S}$. Penser par exemple au fibré tangent TS^2.

Avant de l'établir, remarquons qu'une section s d'un tel fibré est localement comme une fonction à deux variables et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, donc génériquement, elle s'annule transversalement en des points isolés. Si $\theta \in S^1$ paramétrise un petit cercle de points x_θ autour d'un zéro $x \in S^2$ de s, alors par hypothèse, la valeur de la section $s(x_\theta) \in F_{x_\theta} \equiv \mathbb{R}^2$ est non nulle pour tout x_θ, et l'on note $\varphi \in S^1$ son argument. Au point x est donc associé une application $\varphi : \theta \to \varphi(\theta)$ dont le degré aussi appelé **indice** du zéro de la section s (défini par Eq.(1.8.1)), sera noté $\sigma_s(x) \in \mathbb{Z}$. Génériquement, $\sigma_s(x) = \pm 1$. (Noter que le signe de $\sigma_s(x)$ dépend de l'orientation choisie de l'espace de base et de la fibre. Dans le cas du fibré tangent, ces deux orientations ne sont pas indépendantes, et le résultat $\sigma_s(x)$ devient indépendant de l'orientation).



Theorem 5. Si $F \to \mathcal{S}$ est un fibré réel orientable de rang 2 sur une surface $\mathcal{S}$, et s est une section "générique", alors l'indice topologique de Chern $C(F)$ est donné par

$$C(F) = \sum_{x \text{ t.q. } s(x)=0} \sigma_s(x) \qquad \in \mathbb{Z} \tag{1.9.1}$$

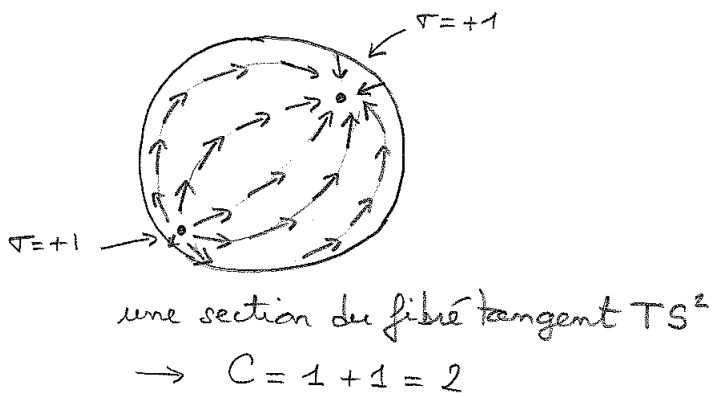
où $\sigma_s(x) = \pm 1$ caractérise le degré du zéro. Le résultat est indépendant de la section s choisie.

Démonstration. Dans la preuve du théorème 2, on a construit des sections jamais nulles v_1, v_2 respectivement des fibrés $F \to H_1$, $F \to H_2$. Si on modifie ces sections v_1, v_2 pour les faire coïncider sur l'équateur dans le but de construire une section globale s du fibré $F \to S^2$, on peut y arriver sauf en des points isolés, qui seront les zéros de s, et on s'aperçoit que la somme des indices sera égale au degré de la fonction de recollement φ donc à $C(F)$.

□

1.9.3 Exemple du fibré TS^2

La figure suivante montre un champ de vecteur sur la sphère S^2. C'est une section globale du fibré tangent TS^2. Ce champ de vecteur a deux zéros d'indice $+1$ chacun. Ainsi on retrouve $C(TS^2) = +2$, soit Eq.(1.8.2).



Remarque : La preuve précédente repose sur un dessin. Si l'on souhaite expliciter le champ de vecteur utilisé, on peut prendre le vecteur fixe dans $\mathbb{R}^3$: $V = (0, 0, 1)$ orienté selon l'axe z. Alors pour un point $x \in S^2$ donné, on choisit :

$$V_x = P_x V \in TS^2 \tag{1.9.2}$$

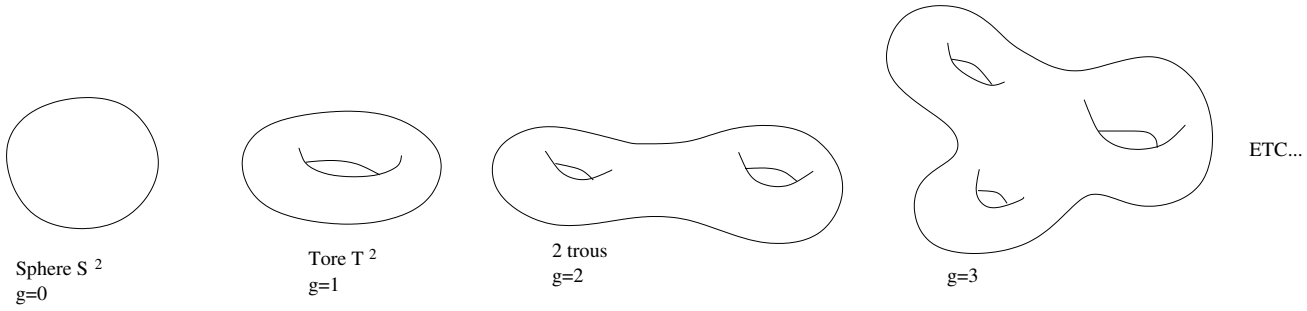


FIGURE 1.9.1 – Surfaces de genre g

est un vecteur tangent (ici $P_x : \mathbb{R}^3 \to T_x S^2$ est le projecteur orthogonal (1.2.1)). Le champ de vecteur V_x s'annule au pôle nord et sud, avec un indice $+1$.

Exercice 1.9.1. Surfaces fermées orientées
Solution : voir page 48.

On admet le résultat suivant dit "théorème de classification des surfaces" : une surface $\mathcal{S}$ orientée fermée sans bord est homéomorphe à l'une des surface suivante, caractérisée par son **genre** $g \in \mathbb{N}$, qui est le nombre de "trous" c'est à dire de "ances" :

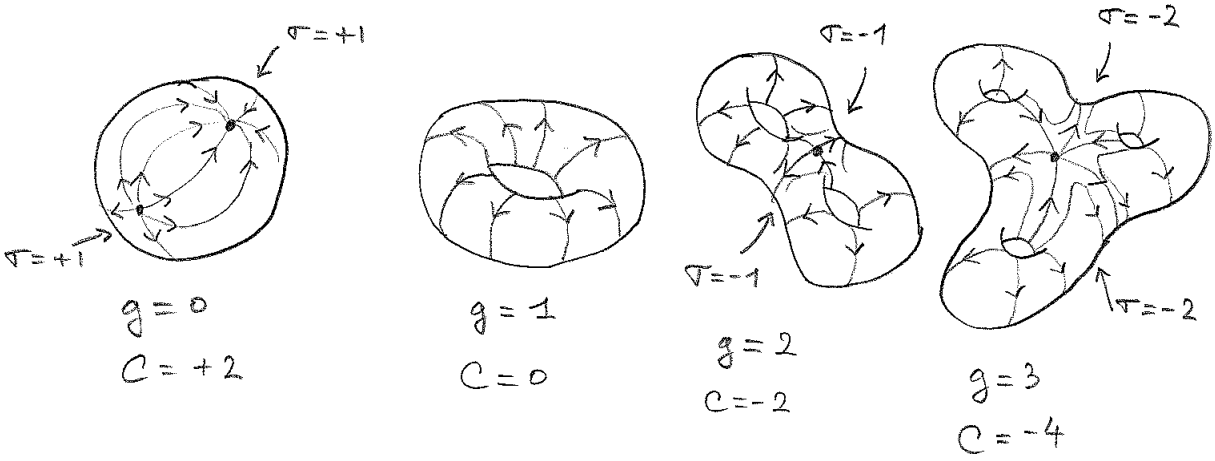
On note $\mathcal{S}$ une telle surface, et on considère l'expression suivante de l'indice de Chern du fibré tangent $T\mathcal{S}$ donnée en (1.9.1) :

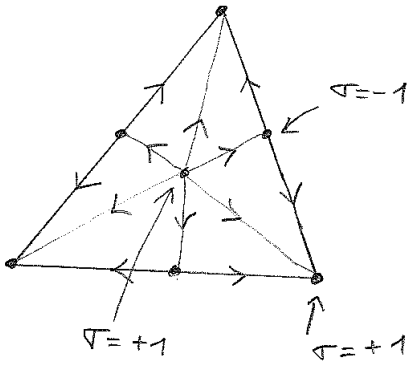
$$C(T\mathcal{S}) = \sum_{x^* \in \mathcal{S}, / s(x^*)=0} \sigma_s(x^*) \in \mathbb{Z}$$

où s est une section générique de $T\mathcal{S}$ (i.e. champ de vecteur), et $\sigma_s(x^*) = \pm 1$ est le degré du zéro de la section en x^* mais qui ne dépend pas du choix de la section s.

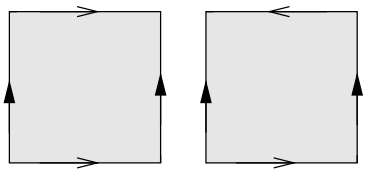
1. On choisissant une section appropriée, montrer graphiquement que
$$C(T\mathcal{S}) = 2 - 2g$$
2. Une **triangulation** (respect. polygonation) de la surface est un graphe recouvrant la surface et dont les faces sont des triangles (respect. polygones). On note
$$\begin{aligned} V &= \text{nombre de sommets (Vertices)} \\ E &= \text{nombre d'arêtes (Edges)} \\ F &= \text{nombre de faces} \end{aligned}$$
et l'on définit l'**indice d'Euler Poincaré** par
$$\chi(\mathcal{S}) = V - E + F$$
Montrer que
$$\chi(\mathcal{S}) = C(T\mathcal{S})$$
et déduire donc que $\chi(\mathcal{S})$ est indépendant de la triangulation. (Aide : utiliser une section globale de $T\mathcal{S}$ adaptée à chaque triangle, avec un zéro au centre de la face, au milieu des arêtes, et aux sommets)
3. Choisir des exemples de triangulation (ou polygonation) de la sphère (ou du tore) et vérifier la formule $\chi(\mathcal{S}) = C(T\mathcal{S}) = 2 - 2g$. (Ex : tétraèdre, etc...).

Solution 1.9.2. Exercice 1.9.1 page 48 :





Exercice 1.9.3. On considère les surfaces suivantes définies par un "patron". Les flèches signifient que les côtés opposés sont identifiés. Montrer que ce sont des surfaces compactes lisses. Dire si elles sont orientables et calculer leur genre g.



Chapitre 2

L'espace fibré canonique en mécanique quantique et la connexion de Berry

2.0.0.1 Rappels de mécanique quantique

video de cette section 2.0 Rappels de MQ.

En mécanique quantique, un état est décrit à l'instant t par un vecteur $\psi(t) \in \mathcal{H}$ dans un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$. L'évolution de $\psi(t)$ est déterminée par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = \hat{H}(t)\,\psi(t) \tag{2.0.1}$$

où

$$\hat{H}(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

est un opérateur auto-adjoint pouvant dépendre de t (si les forces extérieurs dépendent du temps), $\hbar$ est la constante de Planck.

On notera :

$$\langle \psi | \varphi \rangle \in \mathbb{C}$$

le produit scalaire entre $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ (qui est linéaire à droite et antilinéaire à gauche), et

$$\langle \psi | := \langle \psi | . \rangle$$

la forme linéaire sur $\mathcal{H}$ associé au vecteur $\psi \in \mathcal{H}$, et appelée "bra".

Par exemple

— pour décrire une particule à une dimension d'espace $x \in \mathbb{R}$, l'état quantique est décrit par une "fonction d'onde" $\psi : x \mapsto \psi(x)$, et $\psi \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. Noter ici que $\dim \mathcal{H} = \infty$.

— Pour décrire un spin 1/2, alors $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, ($\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = 2$), et admet pour base $|+\rangle \equiv (1,0) \in \mathbb{C}^2$ appelé "spin up", et $|-\rangle \equiv (0,1) \in \mathbb{C}^2$ appelé "spin down". Un état général $\psi \in \mathbb{C}^2$ s'écrit

$$\psi = a|+\rangle + b|-\rangle = (a,b) \in \mathbb{C}^2$$

Remarques :

1. Ce qui suit dans ce chapitre est basé seulement sur la linéarité de l'équation de Schrödinger par rapport à ψ. Ce sera donc valable plus généralement pour des équations aux dérivées partielles linéaires (qui se rencontrent en optique, acoustique,...).
2. L'opérateur $\hat{H}(t)$ étant autoadjoint, cela implique que $\langle \psi | \hat{H}\psi \rangle \in \mathbb{R}$ et donc que la norme de $\psi(t)$ est constante au cours du temps :

$$\frac{d\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle}{dt} = 2\Re\left(\langle \psi | \frac{d\psi}{dt} \rangle\right) = 2\Re\left(\frac{1}{i\hbar}\langle \psi | \hat{H}\psi \rangle\right) = -\frac{2}{\hbar}\Im\left(\langle \psi | \hat{H}\psi \rangle\right) = 0.$$

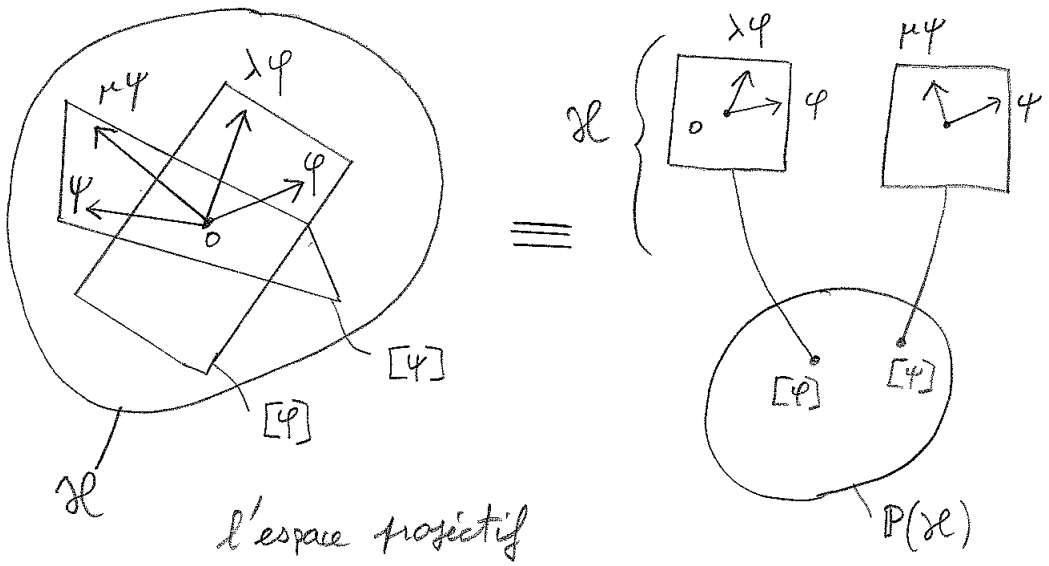
2.1 L'espace projectif $\mathbb{P}(\mathcal{H})$

2.1.1 Remarque de base

Video de cette section 2.1.1.

L'équation de Schrödinger eq.(2.0.1) est linéaire en ψ donc si $\psi(t)$ est solution alors pour toute constante $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi(t) := \lambda\psi(t)$ est aussi solution. Il est donc naturel d'identifier les vecteurs ψ et $\lambda\psi$ (si $\psi \neq 0, \lambda \neq 0$). On note $\sim$ cette relation d'équivalence, et on note $[\psi]$ **la classe d'équivalence** du vecteur ψ, qui est constitué des vecteurs non nuls qui lui sont proportionnels (auquel on rajoute le vecteur nul). Ainsi $[\psi]$ est un espace vectoriel de dimension 1 complexe (isomorphe à $\mathbb{C}$), inclu dans $\mathcal{H}$, et qui sera aussi noté $F_{[\psi]}$.

Definition 1. L'ensemble des classes d'équivalences $[\psi]$ est appelé **espace projectif de** $\mathcal{H}$ et noté $\mathbb{P}(\mathcal{H})$.
On note (aussi) $F = \{([\psi], \psi), \psi \in \mathcal{H}\}$ qui forme un espace fibré complexe de rang 1 au dessus de $\mathbb{P}(\mathcal{H})$, appelé **fibré canonique de** $\mathcal{H}$**.**

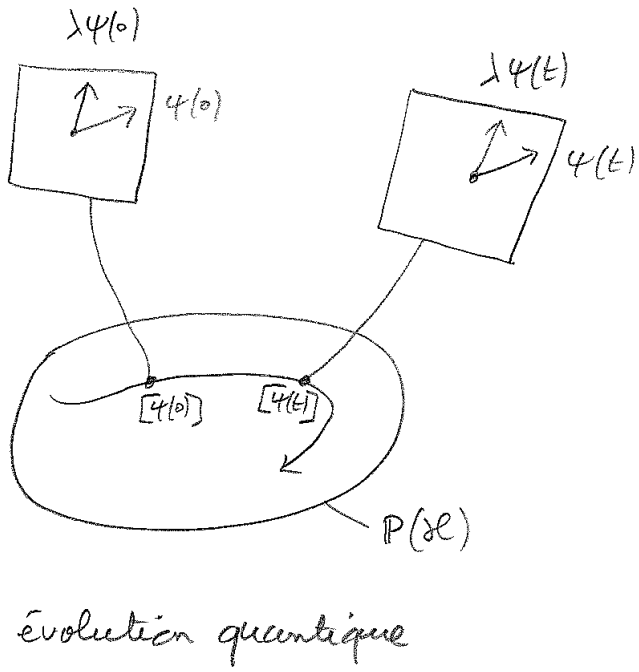


Remarques :

- La situation est assez analogue au fibré TS^2 décrit page 31. Le fibré $TS^2 \to S^2$ est une collection de plans tangents T_xS^2 inclus dans l'espace $\mathbb{R}^3$ fixé. Ici le fibré $F \to \mathbb{P}(\mathcal{H})$ est une collection d'espaces $F_{[\psi]}$ (de dimension 1 complexe) inclus dans $\mathcal{H}$ fixé (voir figure).
- Si $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = n+1$ alors $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{P}(\mathcal{H}) = n$. On note :

$$\mathbb{P}^n := \mathbb{P}\left(\mathbb{C}^{n+1}\right)$$

- Comme l'équation de Schrödinger est linéaire, elle définit une trajectoire $[\psi(t)]$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ (indépendante du vecteur représentant $\psi(t)$).
- Si $\hat{H}$ est un opérateur, un vecteur propre est défini à un facteur près, donc c'est naturellement un point sur l'espace projectif. C'est un point fixe pour l'évolution.



— On peut aussi définir de la même manière l'espace projectif pour un espace vectoriel réel. Dans ce cas chaque fibre est isomorphe à $\mathbb{R}$ (droite réelle).

Exercice 2.1.1. Montrer que l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ est le cercle S^1 et que le fibré canonique $F \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ est le fibré de Moebius.

Exercice 2.1.2. Décrire l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ (par son "patron"). Montrer que c'est une surface non orientable.

Proposition 2.1.3. *Pour $\psi \in \mathcal{H}$, $\psi \neq 0$, la fibre $F_{[\psi]}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{H}$ (de dimension $\dim_{\mathbb{C}} F_{[\psi]} = 1$), et* ***le projecteur orthogonal*** *sur $F_{[\psi]}$ est donné par :*

$$\boxed{P_{[\psi]} = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}} \tag{2.1.1}$$

En d'autres termes $\varphi \to P_{[\psi]}\varphi = \frac{\langle\psi|\varphi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}\psi$. Cette expression est indépendante du choix de ψ dans $F_{[\psi]}$.

Démonstration. On vérifie que : $P_{[\psi]}^2 = P_{[\psi]}$ et $P_{[\psi]}^* = P_{[\psi]}$, ce qui montre que $P_{[\psi]}$ est un projecteur orthogonal, et $P_{[\psi]}\varphi = \varphi$ si et seulement si $\varphi = \lambda\psi$, soit $\varphi \in F_{[\psi]}$.

□

2.1.2 Exemple simple mais important : $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$

Video de cette section 2.1.2.
Cet exemple intervient pour les systèmes à deux états comme le spin 1/2.

Proposition 2.1.4. *1. L'espace projectif de $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ est une sphère :*

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}\left(\mathbb{C}^2\right) \equiv S^2$$

appelée ***sphère de Riemann*** *ou* ***sphère de Bloch****.*

2. Plus explicitement, si $\psi = (a, b) \in \mathbb{C}^2$, alors le point $[\psi]$ est représenté en coordonnées cartésiennes par un point $\vec{s} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sur la sphère de rayon $1/2$ donné par :

$$\vec{s}_{[\psi]} = (x, y, z) = \frac{\langle\psi|\vec{S}\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}, \qquad |\vec{s}| = \frac{1}{2} \tag{2.1.2}$$

où $\vec{S} = \frac{1}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ sont les matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.1.3}$$

En coordonnées sphériques *(θ, φ) on a la relation suivante entre (θ, φ) et $\psi = (a, b)$ si $b \neq 0$:*

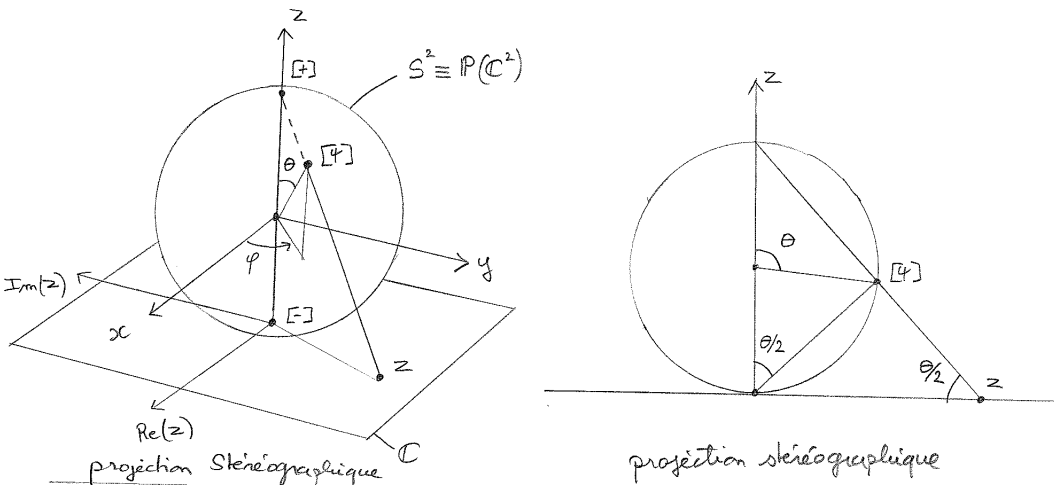
$$z = \frac{a}{b} = e^{-i\varphi} cotg\frac{\theta}{2}$$

(et $\theta = \frac{\pi}{2}$, si $b = 0$). Le passage $(\theta, \varphi) \to z = \frac{a}{b} \in \mathbb{C}$ est ***la projection stéréographique*** *de la sphère. Voir figure.*

3. L'indice de Chern de l'espace fibré canonique est :

$$C\left(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{P}\left(\mathbb{C}^2\right)\right) = -1 \tag{2.1.4}$$

(d'après Eq.(1.8.3) sa courbure est $d\Omega = kd^2s = -\frac{1}{2}\frac{d^2s}{R^2}$. Cela sera plus précis au chapitre suivant)



Démonstration. 1. Si $\psi = (a, b)$, et $b \neq 0$, on a $\psi = (a, b) = b\left(\frac{a}{b}, 1\right) \sim (z, 1)$ avec $z = \frac{a}{b} \in \mathbb{C}$, donc l'espace projectif est paramétré par $z \in \mathbb{C}$ (le plan complexe). Si $b = 0$ (qui correspond à $|z| \to \infty$), alors $\psi = (a, 0) \sim (1, 0)$ est un point unique. Donc l'espace projectif est le plan où l'infini est identifié à un point. C'est une sphère.

2. Si $\psi = (a, b)$, on calcule

$$s_x = \frac{1}{2}\frac{\langle\psi|\sigma_x\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{1}{|a|^2 + |b|^2}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \bar{a}, & \bar{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\frac{2\Re(z)}{1 + |z|^2}$$

de même :

$$s_y = \frac{1}{2}\frac{\langle\psi|\sigma_y\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = -\frac{1}{2}\frac{2\Im(z)}{1+|z|^2}, \quad s_z = \frac{1}{2}\frac{\langle\psi|\sigma_z\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{1}{2}\frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}$$

Donc $s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.
En coordonnées sphériques (s,θ,φ), $s_x = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\varphi$, $s_y = \frac{1}{2}\sin\theta\sin\varphi$, $s_z = \frac{1}{2}\cos\theta$, on obtient

$$z\overline{z} = \frac{1+2s_z}{1-2s_z} = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = \operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}$$

et

$$z = \left(1+|z|^2\right)(s_x - is_y) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)(\cos\varphi - i\sin\varphi)\sin\theta$$

donc $z = \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}$.

3. On va calculer l'indice de Chern en utilisant une section globale du fibré, via la formule Eq.(1.9.1) page 47. Le résultat ne dépend pas de la section choisit, on va donc faire un choix simple et utiliser un procédé standard (déjà utilisé avec Eq.(1.9.2)) : on considère le vecteur fixé noté $|+\rangle = (1,0) \in \mathbb{C}^2$ et sa projection sur la fibre $F_{[\psi]}$, noté $s_{[\psi]} = P_{[\psi]}|+\rangle$ avec le projecteur (2.1.1). Ainsi $[\psi] \to s_{[\psi]} \in F_{[\psi]}$ est une section globale du fibré. Explicitement, si $\psi = (a,b) = b\left(\frac{a}{b},1\right) \sim (z,1)$ avec $z = \frac{a}{b}$, on calcule:

$$s_{[\psi]} = P_{[\psi]}|+\rangle = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|+\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\overline{z}}{1+|z|^2}(z,1)$$

On observe que la section est nulle seulement au point $z=0$ (au point $z\to\infty$, la section est non nulle : $s_{[\psi]} = (1,0) \neq 0$). Près du zéro en $z \simeq 0$, on a (au premier ordre) $s_{[\psi]} \simeq \overline{z}(0,1)$, or $z = e^{i\theta} \to \overline{z} = e^{-i\theta}$ est une application de degré $\sigma = -1$, d'après la définition Eq.(1.8.1). Donc $C = -1$.

□

Remarque : On verra en Eq.(2.5.5) comment l'indice de Chern $C = -1$ s'obtient par une "intégrale de courbure", comme dans la formule de Gauss-Bonnet (1.8.3).

2.2 Connexion de Berry sur l'espace fibré canonique $F \to \mathbb{P}(\mathcal{H})$

Video de cette section 2.2.

Nous procédons comme dans le cas du fibré tangent TS^2 traité dans la section 1.2.

Ici chaque fibre $F_{[\psi]}$ est un espace vectoriel complexe de dimension 1, inclue dans l'espace $\mathcal{H}$ fixe, qui lui même est munit d'un produit scalaire. Ce sont les ingrédient qu'il faut pour définir la connexion de Levi-Civita. (rappel : dans le cas de S^2, une fibre est un sous espace de $\mathbb{R}^3$: $T_xS^2 \subset \mathbb{R}^3$).

Definition 2. Si $\psi(t) \in \mathcal{H}$ est une famille d'états paramétrée par $t \in \mathbb{R}$, la **dérivée covariante** ou **connexion de Berry** est

$$\frac{D\psi}{dt} := P_{[\psi(t)]}\frac{d\psi}{dt} \quad \in F_{[\psi(t)]}$$

En particulier, on dit que $\psi(t)$ **suit le transport parallèle** (ou suit la **connexion de Levi-Civita**, ou suit la **connexion de Berry**) au dessus de $[\psi(t)] \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$ si la dérivée covariante est **nulle** $\frac{D\psi}{dt} = 0, \quad \forall t$.

Proposition 2.2.1. *On a l'expression utile*

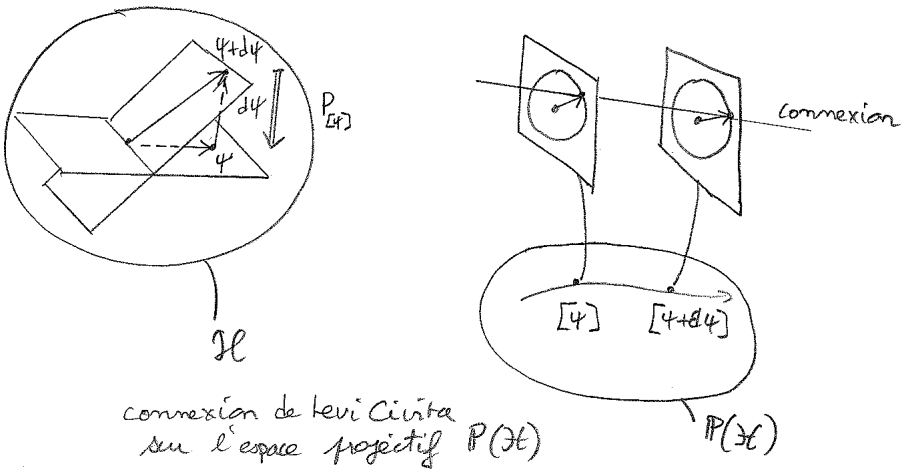
$$\frac{D\psi}{dt} = \left(\frac{\langle\psi|\frac{d\psi}{dt}\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}\right).\psi(t) \tag{2.2.1}$$

Donc $\psi(t)$ suit le transport parallèle si $\langle\psi|\frac{d\psi}{dt}\rangle = 0, \forall t$.

Démonstration. D'après Eq.(2.1.1),

$$\frac{D\psi}{dt} = P_{[\psi(t)]}\frac{d\psi}{dt} = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|d\psi/dt\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \left(\frac{\langle\psi|\frac{d\psi}{dt}\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}\right).\psi(t)$$

□



Proposition 2.2.2. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction dérivable, on a la* ***loi de Leibnitz :***

$$\frac{D(f\psi)}{dt} = \left(\frac{df}{dt}\right)\psi + f\frac{D\psi}{dt}$$

Démonstration. Même preuve que pour Th.1.2.11. □

Remarque :

- Dans la définition ci-dessus, $\tilde{\psi}(t)$ est une famille quelconque, par forcément solution de l'eq. de Schrödinger. On considère ce cas précis dans la section suivante.
- Comme montré page 12, la connexion préserve le produit scalaire et la norme.
- Comme pour la connexion sur TS^2, la condition de transport parallèle Eq.(**??**) s'interprète en disant qu'il n'y a pas de rotation supplémentaire dans le plan $F_{[\tilde{\psi}]}$, et que le transport est le plus parallèle possible dans l'espace $\mathcal{H}$, en compromis avec la contrainte $\tilde{\psi}(t) \in F_{[\tilde{\psi}(t)]}$.

2.3 Evolution quantique et connexion de Berry

Video de cette section 2.3.

Supposons que $\psi(t) \in \mathcal{H}$ soit solution de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{d\psi}{dt} = \hat{H}(t)\psi$$

Alors d'après (2.2.1) la dérivée covariante est

$$\frac{D\psi}{dt} = \left(\frac{\langle\psi|\frac{d\psi}{dt}\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}\right).\psi(t) = -\frac{i}{\hbar}\left(\underbrace{\frac{\langle\psi|\hat{H}\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}}_{E_\psi}\right).\psi(t) = -\frac{i}{\hbar}E_{\psi(t)}.\psi(t)$$

où

$$E_{\psi(t)} := \frac{\langle \psi | \hat{H} \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

est l'**énergie moyenne** de l'état ψ. Donc si cette énergie est non nulle, **l'évolution quantique $\psi(t)$ ne suit pas pas la connexion de Berry.**

Mais comme la norme de $\psi(t)$ est conservée et que le transport parallèle conserve aussi la norme, on déduit (théorème suivant) que l'évolution $\psi(t)$ ne diffère du transport parallèle que par une phase. Voir figure.

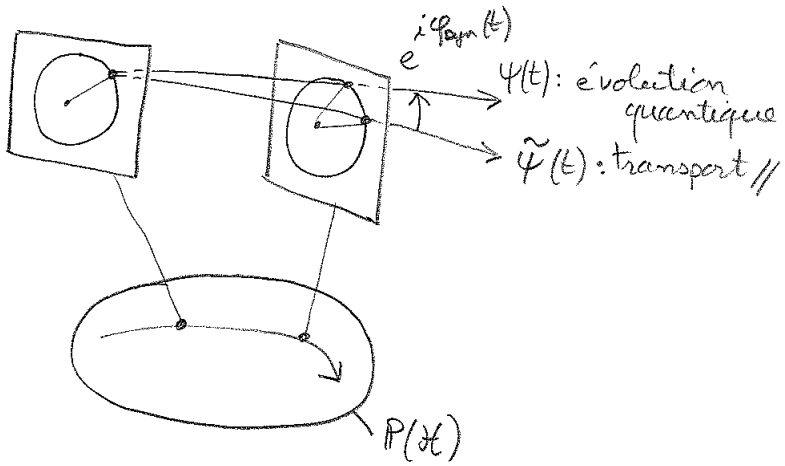
Theorem 6. Si on note $\tilde{\psi}(t)$ le transport parallèle au dessus de $[\psi(t)]$ partant du vecteur $\tilde{\psi}(0) = \psi(0)$ alors

$$\psi(t) = e^{i\varphi_{dyn}(t)} \tilde{\psi}(t) \tag{2.3.1}$$

où

$$\varphi_{dyn}(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_{\psi(t')} dt'$$

est appelée **phase dynamique**



Démonstration. Notons $\psi(t) = e^{i\varphi_{dyn}(t)} \tilde{\psi}(t)$ avec $\varphi_{dyn}(t)$ que l'on cherche. D'après la formule de Leibnitz

$$\frac{D\psi}{dt} = i\dot{\varphi}\psi + e^{i\varphi} \frac{D\tilde{\psi}}{dt} = i\dot{\varphi}\psi$$

Par ailleurs on a vu que $\frac{D\psi}{dt} = -\frac{i}{\hbar} E_{\psi(t)} . \psi(t)$. On déduit que

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{\hbar} E_{\psi(t)}$$

donc $\varphi_{dyn}(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_{\psi(t')} dt'$.

□

Une conséquence est :

Proposition 2.3.1. *Si $[\psi(t)] \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$ parcourt une courbe* fermée *γ dans l'espace projectif pour $t = 0 \to T$, (cad $[\psi(T)] = [\psi(0)]$, alors l'évolution quantique vérifie :*

$$\psi(T) = e^{i\varphi}\psi(0)$$

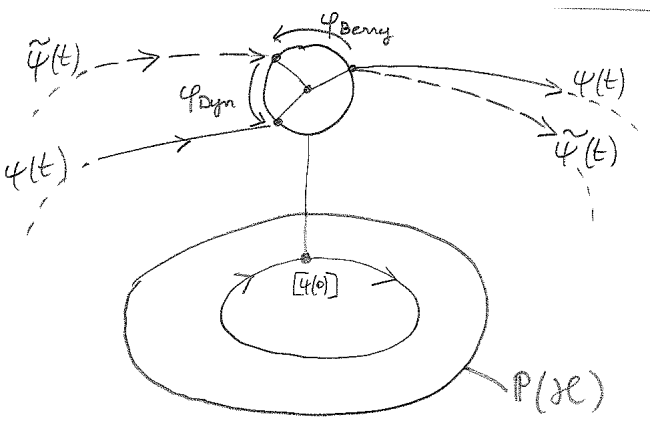
où la phase φ est donnée par :

$$\varphi = \varphi_{Berry} + \varphi_{dyn}$$

$$\varphi_{Berry} = h(\gamma) : \text{holonomie ou phase de Berry du chemin } \gamma$$

$$\varphi_{dyn} = -\frac{1}{\hbar}\int_0^T E_{\psi(t)}dt : \ \textit{phase dynamique}$$

(l'holonomie $h(\gamma)$ a été définie page 13)



Exercice 2.3.2. "Formule pratique pour calculer la phase de Berry". Si $\psi(\lambda)$ est une famille d'états quantique quelconque dépendant (de façon différentiable) d'un paramètre $\lambda \in [0,1]$ et telle que $\psi(1) = \psi(0)$, alors il est clair que $[\psi(\lambda)]$ forme une courbe fermée γ dans l'espace projectif. Montrer que l'holonomie de ce chemin qui est aussi appelée phase de Berry est donnée par :

$$\boxed{\varphi_{Berry} = h(\gamma) = -i\int_0^1 \frac{\langle\psi|\frac{d\psi}{d\lambda}\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}d\lambda \mod 2\pi}$$

Cette formule est très souvent présente dans les articles de physique. (en particulier on observe que si $\psi(\lambda)$ suit le transport parallèle, alors $\langle\psi|\frac{d\psi}{d\lambda}\rangle = 0$ d'après (2.2.1), et $h(\gamma) = 0$ comme attendu).

Solution : voir page 57

Solution 2.3.3. Solution de l'exercice 2.3.2 :

Notons $\tilde{\psi}(\lambda) = e^{i\varphi(\lambda)}\psi(\lambda)$ le vecteur qui suit le transport parallèle ($\varphi(\lambda)$ est une phase si $\psi(\lambda)$ est normalisé).La condition que $\tilde{\psi}(\lambda)$ suit le transport parallèle s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\langle\tilde{\psi}|\frac{d\tilde{\psi}}{d\lambda}\rangle = 0\\
&\Leftrightarrow \langle\psi|\psi\rangle i\frac{d\varphi}{d\lambda} + \langle\psi|\frac{d\psi}{d\lambda}\rangle = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{d\varphi}{d\lambda} = -i\frac{\langle\psi|\frac{d\psi}{d\lambda}\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}
\end{aligned}$$

donc

$$\varphi(1) - \varphi(0) = -i\int_0^1 \frac{\langle\psi|\frac{d\psi}{d\lambda}\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}d\lambda$$

Par ailleurs, la définition de l'holonomie

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(1) &= e^{i\varphi_{Berry}}\tilde{\psi}(0)\\ \Leftrightarrow & e^{i\varphi(1)}\psi(1) = e^{i\varphi_{Berry}}e^{i\varphi(0)}\psi(0)\end{aligned}$$

Or $\psi(1) = \psi(0)$, donc

$$\begin{aligned}\varphi_{Berry} &= \varphi(1) - \varphi(0) \mod 2\pi\\ &= -i\int_0^1 \frac{\langle\psi|\frac{d\psi}{d\lambda}\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}d\lambda \mod 2\pi\end{aligned}$$

Remarques :

— En 1984 M. Berry [Ber84] a initié les études de la phase géométrique φ_{Berry} en mécanique quantique (il a été montré dans [Sim83] que φ_{Berry} est l'holonomie de la connexion de Levi-Civita). Dans son papier M. Berry suppose que l'évolution de $\hat{H}(t)$ est adiabatique, c'est à dire lente. Ce n'est que en 1988 dans [AA87, AA90] qu'il est devenu clair que la phase de Berry φ_{Berry} est indépendante de l'hypothèse d'adiabaticité, mais est directement lié à l'évolution quantique linéaire, comme présenté ci-dessus. L'intérêt de l'hypothèse adiabatique est seulement qu'elle engendre de façon controlée des trajectoires fermée sur l'espace projectif, comme nous le verrons dans la section 2.6 page 62.

— Il y a quelques situations en physique quantique qui révèlent l'importance des aspects géométriques ou topologiques décris ci-dessus (la phase géométrique φ_{berry} ou les indices de Chern). Citons les cas que nous détaillerons plus loin :

  — Evolution semi-classique d'un paquet d'onde quantique sur une orbite périodique classique : Dans ce cas on montre que

  $$\varphi_{Berry} = h(\gamma) = \frac{1}{\hbar}\oint pdq = \frac{1}{\hbar}Action$$

  où $Action = \oint pdq = \iint dqdp$ est l'**action classique** de la trajectoire.
  Preuve : partant de $[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar$, et $\hat{T}_Q = e^{-iQ(\hat{p}-p)}$, $\hat{T}_P = e^{iP(\hat{q}-q)}$ qui transportent dans l'espace de phase un paquet d'onde en (q,p) respectivement selon $(Q,0)$ et $(0,P)$, en suivant le transport parallèle (pour cela on a soustrait la phase dynamique, termes en q,p). On calcule que sur un chemin fermé (en rectangle) $\hat{T}_P^{-1}\hat{T}_Q^{-1}\hat{T}_P\hat{T}_Q = e^{iAction/\hbar}$. Pour un chemin quelconque que l'on décompose en somme de petits rectangles, le resultat est encore vrai.

  — On remarque que la condition naturelle $\varphi_{Berry} = h(\gamma) = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (ce qui garantit une "interférence constructive" sur la trajectoire périodique, voir exercice suivant) donne :

  $$2\pi n = \frac{1}{\hbar}\oint pdq \Leftrightarrow \oint pdq = (2\pi\hbar)\,n \tag{2.3.2}$$

  qui sont les **conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld**.

  — Citons que l'indice de Chern d'un fibré canonique d'états quantique a une importance dans l'effet Hall quantique, dans le transport adiabatique de charges, ou encore dans le nombre d'états dans les bandes moléculaires. Voir projets associés à ce cours.

Exercice 2.3.4. Soit $\tilde{\psi}_t$ une famille d'états quantiques avec $t \in \mathbb{R}$ telle que $\left[\tilde{\psi}_{t+T}\right] = \left[\tilde{\psi}_t\right], \forall t$ (i.e. chemin périodique sur l'espace projectif), qui suit le transport parallèle, et donc qui évolue d'après l'équation de Schrödinger : $\left[\hat{U}_\tau\tilde{\psi}_t\right] = \left[\tilde{\psi}_{t+\tau}\right]$ avec $\hat{U}_\tau = e^{-i\hat{H}\tau/\hbar}$. D'après (2.3.1) cela implique que

$$\hat{U}_\tau\tilde{\psi}_t = e^{-iE\tau/\hbar}\tilde{\psi}_{t+\tau}$$

avec $E = \frac{\langle\tilde{\psi}(t)|\hat{H}\tilde{\psi}(t)\rangle}{\langle\tilde{\psi}|\tilde{\psi}\rangle}$. (Par exemple $\tilde{\psi}_t$ peut représenter un paquet d'onde qui évolue sur une trajectoire classique périodique). On considère l'état Ψ qui est une superposition de ces états sur une période :

$$\Psi := \int_0^T \tilde{\psi}_t dt$$

montrer que l'état Ψ est un état stationnaire (i.e. $\hat{U}_\tau \Psi = e^{-iE\tau/\hbar}\Psi$) si

$$\varphi_{Berry} = 0 \qquad \mod 2\pi$$

En particulier dans le cas de paquets d'ondes sur une orbite périodique classique, cela donne les conditons de Bohr-Sommerfeld (2.3.2), et on vient de montrer ces conditions garantissent l'existence d'un état quantique Ψ localisé sur l'orbite périodique.

Solution : voir page 59.

Solution 2.3.5. Solution de l'exercice 2.3.4 :

D'après la définition de l'holonomie, $\tilde{\psi}(t+T) = e^{i\varphi_{Berry}}\tilde{\psi}(t)$. On calcule :

$$\begin{aligned}\hat{U}_\tau \Psi &= \int_0^T \hat{U}_\tau \tilde{\psi}_t dt = e^{-iE\tau/\hbar}\int_0^T \tilde{\psi}_{t+\tau} dt \\ &= e^{-iE\tau/\hbar}\int_\tau^{T+\tau} \tilde{\psi}_t dt \\ &= e^{-iE\tau/\hbar}\left(\int_\tau^T \tilde{\psi}_t dt + e^{i\varphi_{Berry}}\int_0^\tau \tilde{\psi}_t dt\right)\end{aligned}$$

le dernier terme est égal à $\Psi := \int_0^T \tilde{\psi}_t dt$ si $e^{i\varphi_{Berry}} = 1$.

2.4 Vitesse du point $[\psi(t)]$ sur l'espace projectif

Pour terminer cette description géométrique de l'évolution d'un état quantique $\psi(t)$ mentionnons la propriété suivante (montrée dans [AA90]).

L'espace projectif a une métrique naturelle, et **la distance infinitésimale** $d([\psi],[\psi+d\psi])$ entre deux points proches est donnée par

$$d^2([\psi],[\psi+d\psi]) = 1 - |_n\langle\psi|\psi+d\psi\rangle_n|^2$$

où $\psi_n = \psi\frac{1}{\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}}$ désigne le vecteur normalisé. Cette métrique est appelée **métrique de Fubini-Study**.

On peut vérifier que la distance entre deux points $[\psi]$ et $[\varphi]$ est

$$\cos\left(\sqrt{2}\,([\psi],[\varphi])\right) = |_n\langle\psi|\varphi\rangle_n|^2$$

montrant que l'espace projectif est de diamètre $\pi/2\sqrt{2}$. (Deux points sont à la distance maximale $\pi/2$ si et seulement si les vecteurs sont orthogonaux)

Theorem 7. Notons $v(t) := \frac{d[\psi(t)]}{dt}$ le vecteur vitesse du point $[\psi(t)] \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$. La norme de la vitesse (mesurée avec la métrique de Fubiny-Study) est

$$\|v(t)\| = \frac{1}{\hbar}\Delta E_{\psi(t)}$$

où ΔE_ψ est l'incertitude en énergie de l'état ψ, définit par

$$\Delta E^2 = \frac{\langle\psi|\left(\hat{H}-E_\psi\right)^2\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\langle\psi|\hat{H}^2\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} - \left(\frac{\langle\psi|\hat{H}\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}\right)^2$$

Remarques :

— **Signification :** le temps Δt pour que deux états deviennent différents, soit à la distance maximale $\pi/2$ est donné par

$$v.\Delta t \simeq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \Delta E \Delta t \simeq \frac{\pi}{2}\hbar$$

qui est **"relation d'incertitude temps-énergie"**

— Si $\hat{H}$ est indépendant de t, un vecteur propre de $\hat{H}$ évolue comme $\psi e^{-iEt/\hbar}$ (appelé état stationnaire). Le point $[\psi(t)]$ sur le projectif est donc un point fixe (vitesse nulle). C'est aussi un état dont l'incertitude en énergie est nulle.

2.5 Exemple d'une matrice 2×2

Soit $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ l'espace à deux états. Une matrice hermitienne générale s'écrit

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} c+z & x-iy \\ x+iy & c-z \end{pmatrix} = c\hat{Id} + \vec{B}.\vec{\sigma} \tag{2.5.1}$$

avec les paramètres notés $c \in \mathbb{R}$, $\vec{B} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, et $\vec{\sigma}$ les matrices de Pauli Eq.(2.1.3).

Remarques :

— Pour l'étude spectrale qui va suivre, le paramètre c n'a pas d'importance car il décale les valeurs propres de $\hat{H}$. **On pose donc $c = 0$.** L'espace des paramètres est donc $\vec{B} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

— Mis à part le facteur $\frac{\hbar}{2}$ manquant, $\hat{H} = \vec{B}.\vec{\sigma}$ décrit un spin 1/2 dans un champ magnétique $\vec{B}$.

Les deux valeurs propres de $\hat{H}$ sont

$$E_\pm = \pm\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \pm\left|\vec{B}\right| \tag{2.5.2}$$

Les deux valeurs propres sont distinctes si et seulement si $\vec{B} = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ des paramètres, $\vec{B} = 0$ correspond à une **dégénérescence** du spectre $E_+ = E_-$. Voir figure.

Si $\vec{B} \neq 0$, les deux vecteurs propres associés à $E_\pm$ sont notés $[\psi_\pm] \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \equiv S^2$ sur la sphère de Riemmann sont respectivement parallèles et anti-parallèles au vecteur $\vec{B}$ dans la représentation Eq.(2.1.2) :

$$\vec{s}_{[\psi_+]} = \frac{1}{2}\frac{\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|}, \qquad \vec{s}_{[\psi_+]} = -\vec{s}_{[\psi_-]}$$

(preuve : il est connu (et on vérifie) que l'état de spin 1/2 d'énergie E_+ est parallèle à $\vec{B}$, respect. anti-parallèle pour E_-). @@Faire @@

Pour la proposition suivante, supposons que $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ soit homéomorphe à une boule. Son bord $\mathcal{S} = \partial\mathcal{B}$ est donc homéomorphe à une sphère. On suppose $0 \notin \mathcal{S}$. On considère $\mathcal{S}$ comme une famille de paramètres $\vec{B} \in \mathcal{S}$. La famille d'états quantiques $\vec{B} \in \mathcal{S} \to F_{\psi_+[\vec{B}]}$ définit un espace fibré F_+ au-dessus de $\mathcal{S}$. (Si $0 \in \mathcal{S}$, alors le fibré $\vec{B} \in \mathcal{S} \to F_{\psi_+[\vec{B}]}$ n'est pas défini, car en $\vec{B} = 0$, $E_+ = E_-$ et donc les espaces propres $[\psi_+]$ et $[\psi_-]$ ne sont plus définis.)

Proposition 2.5.1. *L'indice de Chern du fibré $F_+ \to \mathcal{S}$ défini ci-dessus est :*

$$C(F_+) = -1 : \ \ si\ 0 \in \mathcal{B} \tag{2.5.3}$$

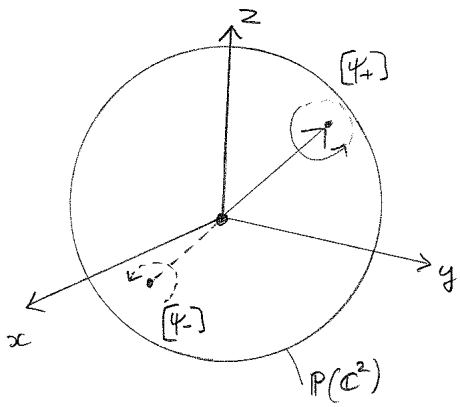
$$C(F_+) = 0 : \ \ si\ 0 \notin \mathcal{B}$$

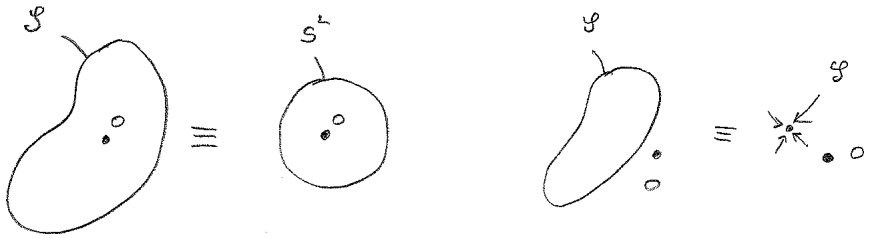
selon que $\mathcal{B}$ (intérieur de $\mathcal{S}$) contienne ou non la dégénérescence 0.

Démonstration. Dans le cas où $\mathcal{S} = S^2$ est la sphère de rayon $1/2$, alors le fibré est le fibré canonique donc $C = -1$ d'après Eq.(2.1.4). Si $0 \in \mathcal{B}$, on peut déformer continuement la surface vers ce dernier cas (sans rencontrer la dégénérescence), ce qui modifie continument le fibré sans changer sa topologie. Donc $C\left(\vec{B} \in \mathcal{S} \to F_{\psi_+[\vec{B}]}\right) = -1$.

Si $0 \notin \mathcal{B}$, on peut déformer la surface vers un point fixe (sans rencontrer la dégénérescence), et donc $\vec{B} \in \mathcal{S} \to F_{\psi_+[\vec{B}]}$ devient le fibré trivial, d'indice $C = 0$.

□





Proposition 2.5.2. *Si $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ est un chemin fermé orienté, alors l'holonomie au dessus de γ dans le fibré F_+ est*

$$h(\gamma) = \iint d\Omega, \qquad d\Omega = -\frac{1}{2}(\sin\theta d\theta d\varphi) \tag{2.5.4}$$

c'est à dire que $\iint d\Omega$ est l'angle solide formé par γ vu depuis l'origine (la dégénérescence) et multiplié par $(-1/2)$.
En particulier si S^2 est la sphère entourant la dégénérescence placé à l'origine, on obtient l'indice de Chern par intégrale de courbure comme en Eq.(1.8.3) pour le fibré tangent :

$$C = \frac{1}{2\pi}\iint_{S^2} d\Omega = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)(4\pi) = -1 \tag{2.5.5}$$

Démonstration. On a vu cette formule si $\gamma \subset S^2$. Cette formule est encore vrai si $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, car un mouvement radial ne change pas la fibre.

□

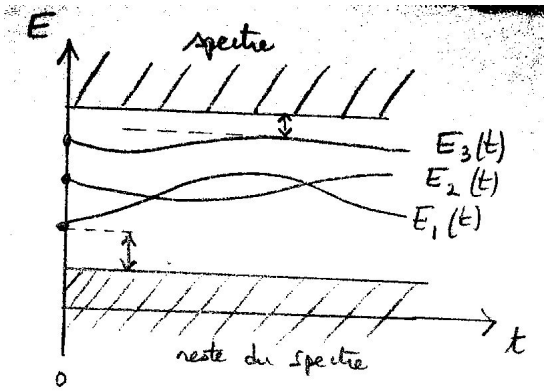
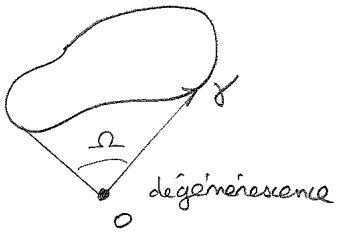


FIGURE 2.6.1 – Hypothèse de "gap spectral" pour le théorème adiaatique.



2.6 Le théorème adiabatique

Ce théorème a été énoncé tout d'abord par Born et Fock en 1928 (ref @@), puis énoncé rigoureusement et démontré par Kato en 1950, dans le cas d'une valeur propre isolée.

Référence : A.Joye-G. Hagedorn 2001. @@

Hypothèses : supposons que $H(\alpha)$ soit une famille d'opérateurs autoadjoints, dépendant du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ (et de domaine indépendant de α).

On va supposer que ce paramètre varie lentement au cours du temps. Pour exprimer cela, on introduit ε que l'on suppose très petit, $\varepsilon \ll 1$, et on suppose que $\alpha(t') = \varepsilon t'$. Un état quantique $\psi(t')$ évolue d'après l'équation de Schrödinger :

$$i\frac{d\psi}{dt'} = H(\varepsilon t')\psi$$

qui s'écrit aussi

$$i\varepsilon\frac{d\psi}{dt} = H(t)\psi$$

après le changement d'échelle de temps $t = \varepsilon t'$.

En particulier, un intervalle de temps fixe $t = 0 \to T$ correspond à l'intervalle $t' = 0 \to \frac{T}{\varepsilon}$ (qui grandit lorsque $\varepsilon \to 0$).

Le théorème suivant montre qu'avec des hypothèses convenables, si ψ est un état quantique appartenant à un espace propre de $H(0)$ à l'instant 0 (c'est à dire superposition d'un nombre restreint de vecteurs propres), alors il reste dans un tel espace attaché à l'opérateur $H(t)$ au cours de son évolution sur un tel intervalle de temps, et avec une erreur qui décroit très vite lorsque $\varepsilon \to 0$. Le cas le plus simple est lorsqu'il s'agit d'un seul vecteur propre ($n = 1$ ci-dessous).

Théorème 2.6.1. ***Le théorème adiabatique***. *On suppose qu'il y a des valeurs propres de $H(t)$ notées $(E_i(t))_{i=1\ldots n}$ séparées du reste du spectre par une distance minimale d_0 appelée "gap". Voir figure 2.6.1.*
On note $F(t) \subset \mathcal{H}$ l'espace propre associé aux n valeurs propres $(E_i)_i$ (donc $\dim_{\mathbb{C}} F(t) = n$) et $\pi_0(t) : \mathcal{H} \to F(t)$ le projecteur orthogonal associé. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, il existe une unique série :

$$\pi(t) = \pi_0(t) + \varepsilon\pi_1(t) + \varepsilon^2\pi_2(t) + \ldots + \varepsilon^k\pi_k(t) + O\left(\varepsilon^{k+1}\right) \tag{2.6.1}$$

telle que

$$\pi_j(t)^+ = \pi_j(t), \qquad (\pi(t))^2 = \pi(t) \tag{2.6.2}$$

$$i\varepsilon\frac{d\pi(t)}{dt} = [H(t), \pi(t)] + C'_{k,t}\varepsilon^{k+1} \tag{2.6.3}$$

La preuve que nous donnons ci-dessous est inspirée de [C. 96] et Sjostrand 92 @@. Une autre preuve sera donnée plus loin, Section @@, moins constructive mais plus simple et plus conceptuelle, comme cas particulier d'un résultat adiabatique plus général, où le paramètre lent (ici $\alpha(t)$) sera lui même une variable dynamique d'un système quantique.

2.6.0.1 Remarques :

— Dans les équations (2.6.1) (2.6.3) l'erreur porte sur la norme de l'opérateur.

— Les équations (2.6.2) signifient que $\pi(t)$ est un **projecteur orthogonal** de rang n (comme $\pi_0(t)$ car $\pi(t)$ et $\pi_0(t)$ ne diffèrent que de $\varepsilon \ll 1$ donc leur rang est le même).

— L'équation (2.6.3) est l'équation d'évolution d'Heisenberg et elle signifie que **l'espace** $Im(\pi(t))$ **de dimension** n **suit l'évolution quantique** à l'erreur $C'_{k,t}\varepsilon^{k+1}$ près. En effet cette équation peut aussi s'écrire :

$$\pi(t) = U_{0,t}\pi(0)U_{0,t}^{-1} + O\left(\varepsilon^{k+1}\right)$$

où $U_{0,t}$ est l'opérateur unitaire d'évolution entre les instants 0 et t, solution de $i\varepsilon\frac{dU_{0,t}}{dt} = H(t)U_{0,t}$. Si à l'instant $t = 0$ l'état $\psi(0) \in Im(\pi(0))$, autrement dit $\pi(0)\psi(0) = \psi(0)$, on déduit que $\psi(t) = U_{0,t}\psi(0)$ vérifie :

$$\begin{aligned}\pi(t)\psi(t) &= \left(U_{0,t}\pi(0)U_{0,t}^{-1}\right)(U_{0,t}\psi(0)) + O\left(\varepsilon^{k+1}\right)\\ &= U_{0,t}\pi(0)\psi(0) + O\left(\varepsilon^{k+1}\right) = \psi(t) + O\left(\varepsilon^{k+1}\right)\end{aligned}$$

donc $\psi(t) \in Im(\pi(t))$ avec une erreur $O\left(\varepsilon^{k+1}\right)$.

— Remarquer que l'opérateur $\pi(t)$ est différent du projecteur spectral $\pi_0(t)$ à cause des termes suivants qui commence à l'ordre ε. En d'autres termes l'espace $Im(\pi(t))$ a des composantes sur les autres espaces spectrals de $H(t)$. On peut dire aussi que ce sont des corrections qui tiennent compte du mouvement de $H(t)$.

— L'hypothèse que $H(t)$ soit self-adjoint n'est pas cruciale. Comme le montre la preuve, le théorème est aussi vrai pour les opérateurs non auto-adjoints. Par contre, concernant l'évolution des états au cours du temps, les parties imaginaires des valeurs propres engendrent des termes qui peuvent croitre ou décroitre exponentiellement vite. Ainsi, pour déduire un résultat d'évolution, comme ci-dessus, il faut faire des hypothèses sur ces parties imaginaires, afin de garder que les corrections ε^{k+1} que l'on néglige ne se mettent pas à croite exponentiellement vite, et dominer. L'hypothèse standard est donc que $max_i(Im(E_i))$ soit atteint par les valeurs propres de l'espace spectral étudié.

2.6.0.2 Relation avec la phase de Berry

La relation entre le théorème adiabatique ci-dessus et la phase de Berry n'est pas immédiate, et contrairement à ce qui est écrit dans de nombreux textes, nous allons argumenter que la relation n'est pas directe, mais que la relation existe simplement parce que la phase de Berry et la description géométrique donnée en Section 2.3, est très générale en mécanique quantique.

Considérons le cas particulier d'une seule valeur propre $E(t)$ (c'est à dire le cas $n = 1$). Supposons de plus que l'opérateur $H(t)$ effectue **un cycle périodique**, de période T :

$$H(t+T) = H(t)$$

Alors l'espace propre $F(t)$ est périodique, tout comme son projecteur $\pi_0(t)$ et le projecteur $\pi(t)$ corrigé (à tout ordre).

Ainsi si $\psi(0)$ est un état propre de $H(0)$ (à $t = 0$), vérifiant $H(0)\psi(0) = E(0)\psi(0) \Leftrightarrow \psi(0) \in F(0)$ alors son évolué $\psi(t) = U_{0,t}\psi(0)$ va vérifier $\psi(t) \in F(t)$ avec une erreur $O(\varepsilon)$.

En particulier après une période T, $\psi(T) \in F(T) = F(0)$, donc $[\psi(T)] = [\psi(0)]$ dans l'espace projectif, et on peut appliquer la proposition 2.3.1 page 57 donnant :

$$\psi(T) = e^{i\varphi}\psi(0) + O(\varepsilon), \qquad \varphi = \varphi_{Berry} + \varphi_{Dyn} \tag{2.6.4}$$

Ainsi le théorème adiabatique dans le cas d'une valeur propre isolée et d'un Hamiltonien périodique, n'est que le prétexte pour créer un chemin fermé dans l'espace projectif. C'est alors que la phase de Berry apparait pour des raisons géométriques.

2.6.0.3 Exemple simple

Un spin 1/2, $\psi(t) \in \mathbb{C}^2$ soumis au Hamiltonien

$$H(t) = \vec{\sigma}.\vec{B}(t) \tag{2.6.5}$$

comme dans Eq.(2.5.1), avec les paramètres $\vec{B} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qui dépendent de t. On reprends les notations de la Section 2.5. Alors le théorème adiabatique et Eq.(2.6.4) donnent :

Proposition 2.6.2. *Si à l'instant $t = 0$, l'état $\psi(0)$ est un état propre $\psi(0) = \psi_+$ d'énergie $E_+ = +\left|\vec{B}\right|$, et si les paramètres $\vec{B}(t)$ effectuent un chemin fermé γ dans $\mathbb{R}^3$ évitant l'origine, i.e. $\vec{B}(T) = \vec{B}(0)$, alors l'évolution $i\varepsilon\frac{d\psi}{dt} = H(t)\psi(t)$ amène l'état ψ en :*

$$\psi(T) = e^{i\varphi}\psi(0) + O(\varepsilon), \qquad \varphi = \varphi_{Berry} + \varphi_{Dyn}$$

où, d'après (2.5.4),

$$\varphi_{Berry} = h(\gamma) = \iint d\Omega, \qquad d\Omega = -\frac{1}{2}(\sin\theta d\theta d\varphi)$$

est $(-1/2)$ l'angle solide formé par γ et vu de l'origine, et d'après proposition 2.3.1 :

$$\varphi_{Dyn} = -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T E_{\psi_+(\vec{B})}dt = -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \left|\vec{B}(t)\right| dt$$

2.6.0.4 Preuve du Théorème adiabatique 2.6.1.

Démonstration. On va construire les opérateurs π_k par récurrence sur k. Tout d'abord, notons

$$p_t := -i\varepsilon\frac{d}{dt}$$

qui est comme un opérateur "impulsion" associé au temps t. Posons

$$\mathbf{H} := p_t + H(t)$$

qui est un opérateur qui agit sur les vecteurs $\psi(t) \in \mathcal{H}$ dépendant du temps (on peut écrire $\mathbf{H} = p_t \otimes I_{\mathcal{H}} + H(t)$, où $I_{\mathcal{H}}$ est l'opérateur identité sur $\mathcal{H}$). On remarque que

$$[\pi, p_t]\,\psi(t) = \pi p_t \psi - p_t \pi \psi = -i\varepsilon\pi \frac{d}{dt}\psi + i\varepsilon \frac{d}{dt}(\pi(t)\psi) = i\varepsilon\left(\frac{d\pi}{dt}\right)\psi \tag{2.6.6}$$

$$[\pi, \mathbf{H}] = i\varepsilon \frac{d\pi(t)}{dt} + [\pi(t), H(t)]$$

Et donc (2.6.3) s'écrit plus simplement :

$$[\pi, \mathbf{H}] = O\left(\varepsilon^{k+1}\right)$$

Hypothèse de récurrence : on suppose que pour $k \geq 0$

$$\pi^2 - \pi = \varepsilon^{k+1} A + O\left(\varepsilon^{k+2}\right) \tag{2.6.7}$$

$$[\pi, \mathbf{H}] = \varepsilon^{k+1} F + O\left(\varepsilon^{k+2}\right) \tag{2.6.8}$$

où $A(t), F(t)$ sont des opérateurs indépendants de ε. Ces hypothèses sont déjà vraies pour $k = 0$.

Comme $[\pi_0, H] = 0$, on peut trouver une base commune où ces opérateurs sont diagonaux :

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} (E_i)_i & 0 \\ 0 & (E'_j)_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{00} & 0 \\ 0 & H_{11} \end{pmatrix} \tag{2.6.9}$$

avec ces notations, l'hypothèse sur le gap spectral s'écrit :

$$\forall t, \forall i, j, \quad \left|E_i(t) - E'_j(t)\right| \geq d_0 > 0 \tag{2.6.10}$$

Dans cette même base, on écrit :

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} \\ F_{10} & F_{11} \end{pmatrix},$$

A l'ordre $k+1$, on pose

$$\pi' = \pi + \varepsilon^{k+1} K \tag{2.6.11}$$

et l'on cherche l'opérateur $K = \begin{pmatrix} K_{00} & K_{01} \\ K_{10} & K_{11} \end{pmatrix}$, tel que la récurrence fonctionne à l'ordre suivant :

$$\pi'^2 - \pi' = O\left(\varepsilon^{k+2}\right) \tag{2.6.12}$$

$$[\pi', \mathbf{H}] = O\left(\varepsilon^{k+2}\right) \tag{2.6.13}$$

Tout d'abord, (2.6.7) donne

$$\left[\pi, \varepsilon^{k+1} A\right] = \left[\pi, \pi^2 - \pi\right] + O\left(\varepsilon^{k+2}\right) = O\left(\varepsilon^{k+2}\right)$$

donc à l'ordre dominant,

$$[\pi_0, A] = 0 \tag{2.6.14}$$

ce qui implique

$$A_{01} = 0, \qquad A_{10} = 0$$

Ensuite (2.6.8) donne

$$\begin{aligned} \pi[\pi, \mathbf{H}]\pi &= \varepsilon^{k+1}\pi F \pi + O\left(\varepsilon^{k+2}\right) \\ \Leftrightarrow \pi^2 \mathbf{H}\pi - \pi \mathbf{H} \pi^2 &= \varepsilon^{k+1} F_{00} + O\left(\varepsilon^{k+2}\right) \\ \Leftrightarrow \left(\pi + \varepsilon^{k+1} A\right)\mathbf{H}\pi - \pi\mathbf{H}\left(\pi + \varepsilon^{k+1} A\right) &= \varepsilon^{k+1} F_{00} + O\left(\varepsilon^{k+2}\right) \\ \Leftrightarrow A\mathbf{H}\pi - \pi\mathbf{H}A &= F_{00} + O(\varepsilon) \\ \Leftrightarrow AH\pi - \pi H A &= F_{00} \end{aligned}$$

(le terme p_t a disparu car comme dans (2.6.6) le commutatteur est à l'ordre ε). Or $[\pi_0, H] = 0$, mais aussi d'après (2.6.14) $[\pi_0, A]$. On déduit que

$$F_{00} = [A_{00}, H_{00}] \tag{2.6.15}$$

En faisant de même avec l'opérateur $(1-\pi)[\pi, \mathbf{H}](1-\pi)$, on obtient

$$F_{11} = [A_{11}, H_{11}] \tag{2.6.16}$$

Ensuite (2.6.12) et (2.6.11) donnent

$$\begin{aligned} \left(\pi + \varepsilon^{k+1}K\right)^2 &= \pi + \varepsilon^{k+1}K + O\left(\varepsilon^{k+2}\right) \\ \Leftrightarrow \pi^2 + \varepsilon^{k+1}\left(K\pi + \pi K\right) &= \pi + \varepsilon^{k+1}K + O\left(\varepsilon^{k+2}\right) \\ \Leftrightarrow A + K\pi + \pi K - K &= O\left(\varepsilon\right) \\ \Leftrightarrow K_{00} = -A_{00} \text{ et } K_{11} &= -A_{11} \end{aligned} \tag{2.6.17}$$

De même (2.6.13) donne

$$\begin{aligned} \left[\pi + \varepsilon^{k+1}K, \mathbf{H}\right] &= O\left(\varepsilon^{k+2}\right) \\ \Leftrightarrow F + [K, \mathbf{H}] &= O\left(\varepsilon\right) \\ \Leftrightarrow F + [K, H] + i\varepsilon\dot{K} &= O\left(\varepsilon\right) \\ \Leftrightarrow F + [K, H] &= 0 \end{aligned} \tag{2.6.18}$$

or

$$[K, H] = \begin{pmatrix} [K_{00}, H_{00}] & K_{01}H_{11} - H_{00}K_{01} \\ K_{10}H_{00} - H_{11}K_{10} & [K_{11}, H_{11}] \end{pmatrix}$$

donc (2.6.18) donne

$$\begin{aligned} F_{00} &= -\left[K_{00}, H_{00}\right] = \left[A_{00}, H_{00}\right] \\ F_{11} &= -\left[K_{11}, H_{11}\right] = \left[A_{11}, H_{11}\right] \end{aligned}$$

(on retrouve (2.6.15) et (2.6.16)), et :

$$\begin{aligned} F_{01} &= H_{00}K_{01} - K_{01}H_{11} \\ F_{10} &= H_{11}K_{10} - K_{10}H_{00} \end{aligned}$$

Soit, si on note les éléments de matrice par $(F_{01})_{ij}$, et utilisant les notations de (2.6.9) et l'hypothèse de gap (2.6.10) :

$$\begin{aligned} (F_{01})_{ij} &= \left(E_i - E'_j\right)(K_{01})_{ij} \Leftrightarrow (K_{01})_{ij} = (F_{01})_{ij}\left(E_i - E'_j\right)^{-1} \\ (F_{10})_{ij} &= \left(E'_j - E_i\right)(K_{10})_{ij} \Leftrightarrow (K_{10})_{ij} = (F_{10})_{ij}\left(E'_j - E_i\right)^{-1} \end{aligned}$$

Au final, les équations (2.6.17) donnent K_{00}, K_{11} et ces dernières équations K_{01}, K_{10} finissant de déterminer l'opérateur recherché K. □

Exercice 2.6.3. En mécanique quantique, on considère un spin 1/2 dans un champ magnétique externe $\vec{B} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ fixé. L'opérateur Hamiltonien dans l'espace de spin $\mathbb{C}^2$ est

$$\hat{H} = -\vec{B}.\vec{S}, \qquad \vec{S} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma},$$

avec $\vec{\sigma}$ matrices de Pauli.

1. Montrer que l'état fondamental de $\hat{H}$ correspond à un point de $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ que l'on identifiera.

2. Si le champ varie très lentement avec le temps, $\vec{B}(t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et parcourt un chemin fermé, $\vec{B}(T) = \vec{B}(0)$, calculer la phase de Berry φ_{Berry} (=holonomie $h(\gamma)$) de l'état fondamental en donnant une formule générale puis la valeur de φ_{Berry} si la direction de $\vec{B}$ parcourt le cône faisant l'angle l avec le plan horizontal ? puis si $l = 0$?
3. Montrer que l'ensemble des états fondamentaux paramétrés par $\vec{B} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ forme un espace fibré vectoriel que l'on identifiera et calculer son indice topologique de Chern.

Solution 2.6.4.

Chapitre 3

Systèmes couplés lents-rapide en dimension 2. Exemple du spin-orbite

Dans cette section on présente une classe de problèmes de physique quantique qui correspond à un des deux problèmes suivants :

— **"Système quantique lent-rapides couplés" :** Deux dynamiques couplées, dont une est plus lente que l'autre.

— **"Equation d'onde vectorielle" :** Un système quantique en régime de petite longueur d'onde couplé à un autre système quantique quelconque dont l'état est représenté par un vecteur.

L'équivalence de ces deux problèmes sera discutée plus loin.

Comme nous le verrons dans la section suivante, ce genre de problème est très courant en physique, et d'autre part il possède des propriétés topologiques très interessantes et non élémentaires. Nous verrons que ce genre de problème fait intervenir de façon très explicite la formule de l'indice d'Atiyah Singer, qui est le fruit d'une théorie mathématique développée dans les années 60 et qui relie de façon remarquable l'analyse et la topologie (dans le contexte physique, il s'agit de la mécanique quantique et la topologie).

Dans cette section nous présentons cette classe de problèmes à partir d'un exemple simple que nous généralisons ensuite pour obtenir un résultat en dimension 2 (i.e. lorsque la dynamique lente a un degré de liberté seulement, espace de phase de dimension 2).

Le cas de la dimension supérieure est bien plus riche et technique et sera abordé dans la section suivante.

La présentation que nous donnons est issue des articles [FZ00, FZ01].

3.1 Exemples en physique

3.1.0.1 Système quantique lent-rapides couplés :

La physique regorge d'exemples de systèmes dynamiques couplés mais fonctionnant sur des échelles de temps différentes. Voici différents exemples.

1. Une **petite molécule** (comme CH_4, H_2O etc..) constituée de quelques noyaux nucléaires et électrons en interactions :
   — Les électrons légers ont une dynamique rapide (temps caractéristiques $\tau_e \simeq 10^{-15} \to 10^{-16} s.$),
   — Les noyaux plus lourds ont des mouvement de vibration plus lent ($\tau_v \simeq 10^{-14} \to 10^{-15} s.$,)
   — L'axe de rotation de la molécule dans son ensemble précesse encore plus lentement ($\tau_{rot} \simeq 10^{-10} \to 10^{-12} s.$).
2. **L'effet Hall quantique** met en jeu des **électrons soumis à un fort champ magnétique**. Alors

— A cause du fort champ magnétique, les électrons ont un mouvement rapide de rotation "cyclotron"
— Ces cercles dérivent lentement sous l'effet d'un potentiel ou de la non homogénéité du champ magnétique.

3. **En mécanique céleste**, **une planète** tourne sur son orbite elliptique, et cette orbite se déforme lentement sous l'effet des perturbations des autres planètes.
4. Un gaz ou **un fluide** est constitué de petites molécules qui s'agitent rapidement et se mettent localement à l'équilibre thermodynamique. A une échelle plus grande et plus lentement, les propriétés du fluide (temp.,pression, vitesse, densité) sont modifiées d'après une équation de type Navier-Stokes.
5. Les systèmes biologiques ou économiques ou sociologiques sont riches de tels exemples (mais c'est plus complexe).

3.1.0.2 Equation d'onde vectorielle :

Cela signifie que l'onde $\psi(x,t)$ est à valeur dans un espace $\mathbb{C}^n$, et a donc n composantes.

1. Une équation d'onde avec polarisation, comme la lumière, les ondes-électromagnétiques, les ondes acoustiques ou sismiques ($n = 3$).
2. L'équation de Dirac en physique des particules ($n = 4$). Dans les équations de Yang-Mills, les ondes de matières sont des sectinos d'un fibré de rang $n = 1, 2, 3$. En physique de la matière condensée, etc...

3.2 Le modèle quantique

Nous commençons ici avec un modèle très simple qui a l'avantage d'être soluble et de montrer clairement un phénomène topologique.

Moment angulaire $\vec{J}$: $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ est un moment angulaire d'intensité j, ($j = 1/2, 1, 3/2, \ldots$ est fixé) qui décrit par exemple le moment angulaire d'une petite molécule.

Cela signifie précisément que J_x, J_y, J_z sont des opérateurs qui satisfont les relations de commutation de l'algèbre de rotation $so(3)$:$[J_x, J_y] = iJ_z$, etc. Ces opérateurs agissent dans un **espace de représentation irréductible de dimension** $(2j+1)$, noté $\mathcal{H}_j$ et que $\vec{J}^2 = j(j+1)\,Id$.

Changement d'échelle : On s'intéressera à la limite $j \gg 1$. Pour cela il est naturel de travailler plutôt avec :

$$\vec{J'} = \frac{1}{j}\vec{J} \tag{3.2.1}$$

Ainsi $\vec{J'}^2 = \frac{1}{j^2}\vec{J}^2 \simeq 1$. De plus on notera $\vec{J}$ au lieu de $\vec{J'}$ (sans le prime). Les relations de commutation deviennent :

$$\boxed{[J_x, J_y] = \frac{i}{j}J_z, \quad [J_y, J_z] = \frac{i}{j}J_x, \quad [J_z, J_x] = \frac{i}{j}J_y}$$

Spin $\vec{S}$: De même $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ (où $\vec{\sigma}$ sont les matrices de Pauli, Eq.(2.1.3)) sont les opérateurs du spin $s = 1/2$ qui agit dans l'espace $\mathcal{H}_{1/2} \equiv \mathbb{C}^2$ de dimension 2.

Hamiltonien : On considère le Hamiltonien suivant qui couple $\vec{J}$ avec $\vec{S}$ et qui dépend du paramètre fixe $\lambda \in [0,1]$:

$$\boxed{H_\lambda = (1-\lambda)\, S_z + \lambda \vec{J}.\vec{S}} \tag{3.2.2}$$

H_λ agit dans l'espace total :

$$\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_j \otimes \mathbb{C}^2$$

de dimension $(2j+1)\,2$.

Remarques :

— On peut écrire explicitement H_λ comme une matrice 2×2 où chaque élément de matrice est un opérateur agissant dans $\mathcal{H}_j$:

$$H_\lambda = (1-\lambda)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix} J_z & J_x + iJ_y \\ J_x - iJ_y & -J_z \end{pmatrix} \tag{3.2.3}$$

— On verra que dans la limite $j \gg 1$, $\vec{J}$ est comme **une variable dynamique "lente"**. (On peut le deviner déjà : à cause du changement d'échelle imposé en Eq.(3.2.1), les termes en $\vec{J}$ sont diminués d'un facteur $1/j$ dans le Hamiltonien). Par comparaison, on dira que **la dynamique de $\vec{S}$ est "rapide"**. Par conséquent dans le deuxième terme de Eq.(3.2.2), $\vec{S}$ ressent $\vec{J}$ comme un champ magnétique externe $\vec{B}(t)$, comme dans Eq.(2.6.5).

3.2.0.1 Le spectre de H_λ :

on peut facilement calculer les valeurs propres de H_λ dans les cas particulier $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

— Si $\lambda = 0$, $H_0 = S_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a deux valeurs propres $\pm 1/2$ qui ont une multiplicité

$$\mathcal{N}_\pm = (2j+1)$$

car H_0 ne dépend pas de $\vec{J}$.

— Si $\lambda = 1$, $H_1 = \vec{J}.\vec{S}$ appelé communément "couplage spin-orbite". Son spectre se déduit de la théorie du "couplage du moment angulaire". Il a deux valeurs propres :

$$E_+ = \frac{1}{2}, \qquad \text{multiplicité } \mathcal{N}_+ = (2j+1)+1$$

$$E_- = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2j} \underset{j\to\infty}{\simeq} -\frac{1}{2}, \qquad \text{multiplicité } \mathcal{N}_- = (2j+1)-1$$

Démonstration. On reprends momentanement la notation de Eq.(3.2.1) avant changement d'échelle. On peut écrire

$$H_1 = \vec{J}'.\vec{S} = \frac{1}{j}\vec{J}.\vec{S} = \frac{1}{2j}\left(\left(\vec{J}+\vec{S}\right)^2 - \vec{J}^2 - \vec{S}^2\right)$$

Il apparait le moment angulaire total $\vec{N} = \vec{J} + \vec{S}$. D'après la règle de la décomposition de Clebsh-Gordan (théorie des représentations du groupe $SU(2)$) :

$$\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_{1/2} = \mathcal{H}_{j-1/2} \oplus \mathcal{H}_{j+1/2}$$

il apparait les espaces $\mathcal{H}_N$ avec

$$N = j \pm 1/2 = j + \varepsilon\frac{1}{2}, \qquad \varepsilon = \pm 1$$

Chaque espace $\mathcal{H}_N$ est de dimension

$$\dim \mathcal{H}_N = (2N+1) = (2j+1) + \varepsilon$$

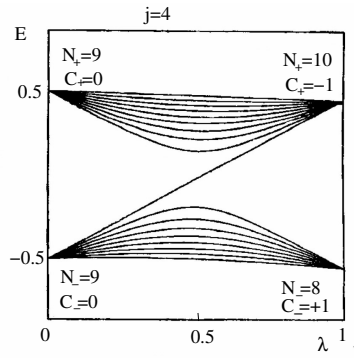


FIGURE 3.2.1 – Spectre de H_λ, Eq.(3.2.2) en fonction de $\lambda \in [0,1]$, pour $j = 4$. $N_\pm$ sont le nombre de valeurs propres dans chaque groupe appelées **"bandes quantiques"**.

Dans l'espace $\mathcal{H}_N$, l'opérateur H_1 s'écrit simplement comme un multiple de l'identité :

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2j}\left(N(N+1) - j(j+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right) \\ &= \varepsilon\frac{1}{2} + \frac{1}{4j}(\varepsilon - 1) = E_\varepsilon \end{aligned}$$

□

Le spectre de H_λ peut se calculer numériquement [1] pour les valeurs intermédiaires $\lambda \in [0,1]$ et il est représenté sur la figure 3.2.1. Pour chaque valeur de λ, il y a $2(2j+1)$ valeurs propres qui dépendent continument du paramètre λ. , On observe les deux cas limites $\lambda = 0, 1$ où il y a des dégénérescences. Près de $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ les valeurs propres sont regroupées en deux "**bandes quantiques**" (terme de physique moléculaire, atomique).

En $\lambda = 1/2$, **un niveau unique transite** de la bande inférieure vers la bande supérieure. Cela est attendu d'après les multiplicitées de H_1 que nous avons calculées.

3.3 Le modèle semi-quantique. Interprétation topologique des bandes

Nous reprenons le Hamiltonien Eq.(3.2.2), (3.2.3) mais dans cette section **les opérateurs $\vec{J}$ sont remplacés par des variables classiques notées $\vec{j} = (j_x, j_y, j_z) \in \mathbb{R}^3$,** c'est à dire un vecteur de norme 1, $\left|\vec{j}\right| = 1$, donc un point sur la sphère S^2 de rayon 1. Par contre $\vec{S}$ sont toujours des opérateurs agissant dans $\mathbb{C}^2$.

Ainsi à $\vec{j} \in S^2$ fixé, le Hamiltonien $H_\lambda\left(\vec{j}\right)$ est simplement une matrice 2×2 qui décrit la dynamique "rapide" du spin 1/2 dans l'espace $\mathbb{C}^2$:

$$H_\lambda\left(\vec{j}\right) = (1-\lambda)\, S_z + \lambda\vec{j}.\vec{S} = (1-\lambda)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix} j_z & j_x + ij_y \\ j_x - ij_y & -j_z \end{pmatrix} \tag{3.3.1}$$

Cette matrice a deux valeurs propres $E_\pm\left(\lambda, \vec{j}\right)$ qui dépendent des paramètres, et que l'on peut calculer explicitement (voir formule (2.5.2)) :

$$E_\pm\left(\lambda, \vec{j}\right) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 + 2\lambda(1-\lambda)(j_z - 1)} \tag{3.3.2}$$

1. Le calcul numérique est facile : dans une base de l'espace total $\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}_j$, H_λ est représenté par une matrice de taille $2(2j+1) \times 2(2j+1)$. L'ordinateur diagonalise numériquement cette matrice. @@ donner le programme en python @@.

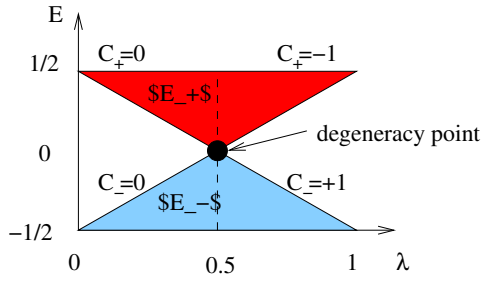


FIGURE 3.3.1 – **Bandes semi-quantiques**. Pour chaque valeur de λ, les bandes rouges et bleues sont respectivement les valeurs propres $E_+\left(\lambda,\vec{j}\right)$,$E_-\left(\lambda,\vec{j}\right)$ lorsque $\vec{j}\in S^2$ prend toutes les valeurs possibles (Eq.(3.3.2)).

On dit qu'il y a une **dégénéréscence** si $E_+\left(\lambda,\vec{j}\right)=E_-\left(\lambda,\vec{j}\right)$. D'après (3.3.2), on calcule que dans l'espace total des paramètres $\lambda\in\mathbb{R}$, $\vec{j}\in S^2$ (qui est de dimension 3), **il y a un seul point de dégénérescence**, c'est

$$\lambda^*=\frac{1}{2},\qquad \vec{j}^*=(0,0,-1)\,,\qquad E_\pm\left(\lambda^*,\vec{j}^*\right)=0$$

Pour les autres valeurs des paramètres, les deux valeurs propres $E_\pm\left(\lambda,\vec{j}\right)$ sont différentes, et il y a deux espaces propres associés notés $F_\pm\left(\lambda,\vec{j}\right)$, chacun est de dimension 1 complexe. Chaque espace dépend continument des paramètres $\left(\lambda,\vec{j}\right)$ (sauf à la dégénérescence $\left(\lambda^*,\vec{j}^*\right)$).

La figure 3.3.1 montre les valeurs d'énergie $E_\pm\left(\lambda,\vec{j}\right)$ possibles pour les deux niveaux. On appelle ces deux ensembles des **bandes semi-quantiques**.

Considérons une valeur fixée de λ et $\lambda\neq\lambda^*=\frac{1}{2}$. Fixons aussi $\varepsilon=+1$ ou $\varepsilon=-1$ (bande supérieure ou inférieure). La famille d'espace $F_\varepsilon\left(\lambda,\vec{j}\right)$ dépendant de $\vec{j}\in S^2$ forme un **espace fibré vectoriel** complexe de rang 1 sur la sphère S^2, noté $F_\pm(\lambda)$ (d'après la définition générale 1.6.1). D'après le théorème 2 la topologie d'un tel fibré est caractérisée par son **indice de Chern** noté ici

$$C_\varepsilon(\lambda)\in\mathbb{Z}.$$

C'est un entier qui dépend continuement de λ tant que $\lambda\neq\lambda^*=\frac{1}{2}$, par conséquent il est constant pour $\lambda>1/2$ et constant pour $\lambda<1/2$.

Afin de calculer $C_\pm(\lambda)$, regardons précisément les espaces propres $F_\pm\left(\lambda,\vec{j}\right)$ en $\lambda=0,1$ et déduisons la topologie de ces espaces fibrés.

— En $\lambda=0$, $H_0\left(\vec{j}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ et les espaces propres $F_\pm\left(\lambda,\vec{j}\right)$ sont tout simplement les deux sous espaces canoniques de $\mathbb{C}^2$ indépendants de $\vec{j}$. On déduit que les fibrés $F_\pm(0)$ sont triviaux (d'après Eq.(1.6.4)) et donc d'indice de Chern $C_\pm(0)=0$.

— En $\lambda=1$, $H_1\left(\vec{j}\right)=\vec{j}.\vec{S}$ est le modèle (2.5.1) déjà étudié (où le paramètre est $\vec{j}\equiv\vec{B}\in S^2$) . En particulier on a calculé en Eq.(2.5.3) que les indices de Chern des espaces fibrés formés par les espaces propres sont $C_\pm(1)=\mp1$.

Au final :

$$\begin{aligned}C_\pm(\lambda)&=C_\pm(0)=0\text{ si }\lambda<1/2\\&=C_\pm(1)=\mp1\text{ si }\lambda>1/2\end{aligned}$$

3.3.0.1 Observations

— On observe aussi que pour j "assez grand" le spectre quantique de H_λ (figure 3.2.1) est contenu (ou très proche) des bandes semi-quantiques de H_λ (figure 3.3.1). Dans le

premier modèle, la dynamique $\vec{J}$ est quantique donnant des niveaux discrets, alors que dans le deuxième modèle $\vec{j}$ est une variable classique donnant des valeurs continues. Par conséquent, tant que les bandes semi-quantiques sont séparées, chaque bande quantique a un nombre constant de valeurs propres.

— Dans le spectre semi-quantique (figure 3.3.1), on observe que le point de contact entre les bandes correspond au point de dégénérescence $\lambda^* = \frac{1}{2}$. C'est à ce point précis que la topologie des bandes semi-quantiques change (l'indice de Chern varie de ± 1). C'est aussi à ce point qu'un niveau transite entre les bandes quantiques. A tout instant on a la relation suivante entre le nombre de niveaux $\mathcal{N}$ contenu dans une bande quantique et l'indice de Chern de la bande semi-quantique associée :

$$\boxed{\mathcal{N} = (2j+1) - C} \tag{3.3.3}$$

3.4 Les dégénérescences et leur "codimension"

@@

[Arn72][vNW29]

Dans l'exemple ci-dessus, Eq.(3.3.1), $H_\lambda\left(\vec{j}\right)$ est une matrice 2×2 qui dépend des paramètres $\lambda, \vec{j} \in \mathbb{R} \times S^2$. Cette famille de paramètres est de dimension $p = 3$ (car $\left|\vec{j}\right| = 1$, localement (λ, j_x, j_y) sont des paramètres indépendants et j_z est déterminé par $j_z = \pm\sqrt{1 - j_x^2 - j_y^2}$). On a observé que dans cet espace de paramètres il y a une dégénérescence entre les deux valeurs propres seulement au point $\left(\lambda^*, \vec{j}^*\right)$. Le lieu de dégénérescence est un point de dimension 0 dans un espace de dimension $p = 3$. On dit aussi que c'est un lieu de codimension $3 = p - 0$.

Définition 3.4.1. Si M est un espace de dimension m, et $N \subset M$ est un sous espace de dimension n, alors on dit que N est de **codimension** $m - n$.

Définition 3.4.2. (@@ vérifier) Une propriété qui s'applique à un ensemble d'objets $o \in O$ est **générique** si elle est vraie sur un ensemble ouvert $U \subset O$, c'est à dire si elle reste vraie dans un voisinage d'un objet auquel elle s'applique. On dit aussi qu'elle est stable par "perturbation".

Exemple 3.4.3. (@@ vérifier) :

— Génériquement, une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ admet un seul maximum.
— Génériquement, une fonction C^∞, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ s'annulle en un nombre fini de points isolés.

Théorème 3.4.4. *Génériquement, si $H(\gamma)$ est une famille de **matrices hermitiennes** ou **unitaires** $n \times n$ dépendant de paramètres $\gamma \in \mathbb{R}^p$, alors l'ensemble des paramètres W_k pour lesquels k **valeurs propres dégénèrent** (i.e. $H(\gamma)$ a un espace propre de dimension k, et $k \leq n$) est un ensemble de codimension :*

$$codim\,(W_k) = k^2 - 1$$

*Si $H(\gamma)$ est une famille de **matrices symmétriques réelles**, ou **orthogonales** alors*

$$codim\,(W_k) = \frac{1}{2}k\,(k+1) - 1$$

*Si $H(\gamma)$ est une famille de **matrices complexes quelconques**, alors*

multiplicité k :	2	3	4
cas hermitien	3	8	15
cas sym. réel	2	5	9
cas complexe général			

Démonstration. Traitons cas par cas :

— **Cas hermitien.** une matrice hermitienne $k \times k$ a k^2 paramètres réels indépendants (car k valeurs réelles sur la diagonale, et $\frac{1}{2}k(k-1)$ valeurs complexes sur le triangles supérieur, soit $k + 2\frac{1}{2}k(k-1) = k^2$). Par celles-ci les matrices dont les k valeurs propres sont égales sont les les matrices multiples de l'identité, formant un sous espace W_k de dimension 1, donc de codimension $k^2 - 1$.

— **Cas unitaire.** Une matrice unitaire U s'écrit $U = \exp(iH)$ où H est hermitienne.

□

3.5 Résultat général

Les observations faites dans le modèle précédent correspondent à un résultat très général que l'on peut énoncer ici, et qui relie le nombre de niveaux $\mathcal{N}$ dans une bande du spectre quantique à l'indice de Chern C associé à la bande du modèle semi-quantique, comme dans la formule (3.3.3).

Modèle plus général : Pour généraliser Eq.(3.2.2), Eq.(3.2.3), on considère un **"Hamiltonien quantique"** H qui est une matrice $n \times n$ dont les éléments de matrices H_{ij} dépendent des opérateurs $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$. On suppose que H est autoadjoint, ce qui s'écrit : $H_{ij}^+ = H_{ji}$.

Le moment angulaire $\vec{J}$ agit dans l'espace de représentation irréductible $\mathcal{H}_j$ de dimension $(2j+1)$.

L'espace quantique total est $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_j \otimes \mathbb{C}^n$, de dimension $(2j+1)n$, et l'opérateur H admet $(2j+1)n$ valeurs propres.

On note $H\left(\vec{j}\right)$ la matrice $n \times n$ appelée **"Hamiltonien semi-quantique"** où les opérateurs $\vec{J}$ ont été remplacés par les variables $\vec{j} = (j_x, j_y, j_z) \in S^2$, $\left|\vec{j}\right| = 1$. Pour $\vec{j}$ fixé, $H\left(\vec{j}\right)$ admet n valeurs propres notées $E_i\left(\vec{j}\right)$, $i = 1, \ldots, n$ que l'on peut supposer classées par ordre croissant $E_1\left(\vec{j}\right) \leq E_2\left(\vec{j}\right) \leq \ldots \leq E_n\left(\vec{j}\right)$. (Il peut y avoir des dégénérescences).

Théorème 3.5.1. *Dans le modèle semi-quantique, on considère un niveau $i \in [1, n]$ fixé. Supposons que la valeur propre $E_i\left(\vec{j}\right)$ soit **isolée** du reste du spectre pour toute valeur de $\vec{j} \in S^2$, i.e. :*

$$\exists E_{min}, E_{max}, \forall \vec{j} \in S^2, \quad E_{i-1}\left(\vec{j}\right) < E_{min} < E_i\left(\vec{j}\right) < E_{max} < E_{i+1}\left(\vec{j}\right)$$

*(Voir figure 3.5.1). On note $F_i\left(\vec{j}\right)$ l'espace propre associé qui est de dimension 1, et qui définit un espace fibré complexe de rang 1 sur S^2 appelée **"bande semi-quantique"**. On note $C_i \in \mathbb{Z}$ son indice de Chern. Alors pour j assez grand, le spectre quantique de H aura exactement*

$$\mathcal{N}_i = (2j+1) - C_i \tag{3.5.1}$$

*valeurs propres contenues dans l'intervalle $]E_{min}, E_{max}[$, et appelée **"bande quantique"**.*

Remarques :

— D'après la propriété générale @@, comme $\vec{j} \in S^2$ forme une famille de dimension 2 de paramètres, on s'attend à ce que "génériquement" il n'y ait pas de dégénérescence. Il se peut cependant que les bandes semi-quantiques se recouvrent (i.e. $E_{i-1}\left(\vec{j}\right) > E_i\left(\vec{j'}\right)$

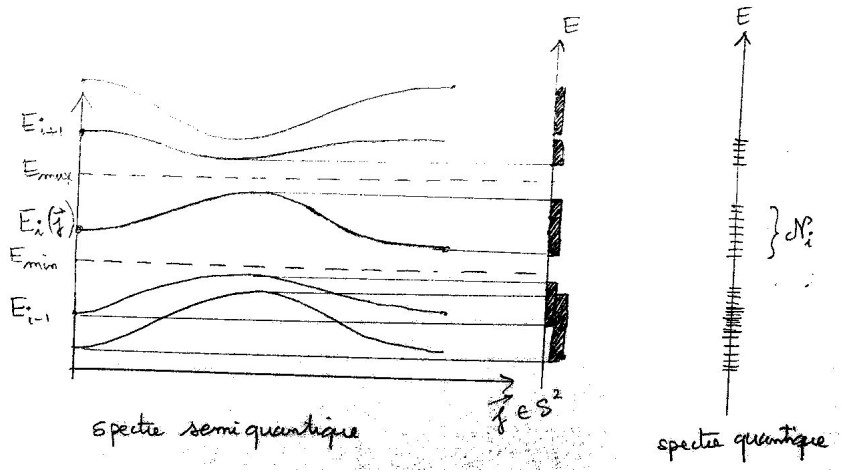


FIGURE 3.5.1 – Spectre semi-quantique et quantique.

pour $\vec{j}' \neq \vec{j}$). Si ce n'est pas le cas et que toutes les valeurs propres E_i sont isolées, alors le spectre de H est formé de n bandes, contenant chacune $\mathcal{N}_i = (2j+1) - C_i$ niveaux. Au total il y a $(2j+1)\,n$ niveaux, donc forcément :

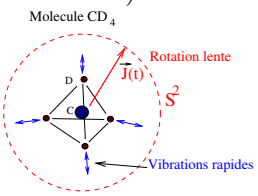
$$\sum_{i=1}^{n} C_i = 0 \tag{3.5.2}$$

(cela se comprends directement d'après le fait que "l'espace rapide" $\mathbb{C}^n$ est fixé et indépendant de $\vec{j}$. Il forme un espace fibré trivial de rang n sur S^2. Dans une théorie générale des indices de Chern, son indice de Chern est $C_{tot} = 0$, et par ailleurs d'après sa décomposition en bandes $C_{tot} = \sum_{i=1}^{n} C_i$).

— Si H_λ dépend d'un paramètre extérieur $\lambda \in \mathbb{R}$, alors au total $\left(\vec{j}, \lambda\right) \in S^2 \times \mathbb{R}$ forment un ensemble de paramètres de dimension 3. D'après @@, génériquement, dans le spectre semi-quantique de $H_\lambda\left(\vec{j}\right)$ il peut y avoir des dégénérescences en des points isolés $\left(\lambda^*, \vec{j}^*\right)$, comme dans l'exemple ci-dessus. Ces dégénérescences sont responsables d'un contact entre bandes semi-quantiques, et d'une modification de la topologie de celles-cies : ΔC_i (avec la contrainte globale (3.5.2)) impliquant une transition de niveaux quantiques $\Delta\mathcal{N}_i = -\Delta C_i$. Génériquement $\Delta C_i = \pm 1$.

Application en physique moléculaire : Pour le moment observons la figure 3.5.2 qui montre le spectre de la molécule CF_4 (similaire au méthane CH_4). On apercoit cette structure en bandes, ici en fonction du module du moment angulaire j (la molécule tourne de plus en plus vite). Lors de contact des bandes, un (ou plusieurs) niveaux transitent. Cela correspond à des bifurcations topologiques d'après notre étude.

Nous pouvons aussi donner une explication heuristique à l'existence de bandes. En effet le mouvement lent de $\vec{J}$ donne lieu à un spectre fin avec $2j+1$ niveaux serrés, alors que la structure $n \times n$ de la matrice (dynamique rapide) donne lieu à n niveaux. Au total on devrait avoir n "bandes" contenant chacune $\mathcal{N} = 2j+1$ niveaux serrés. Le fait que la véritable valeur de $\mathcal{N} = (2j+1) - C$ diffère de $(2j+1)$ est due au couplage entre la dynamique rapide de la matrice et $\vec{J}$. Le couplage doit être assez fort (et le problème ne peut pas se traiter en théorie perturbative).



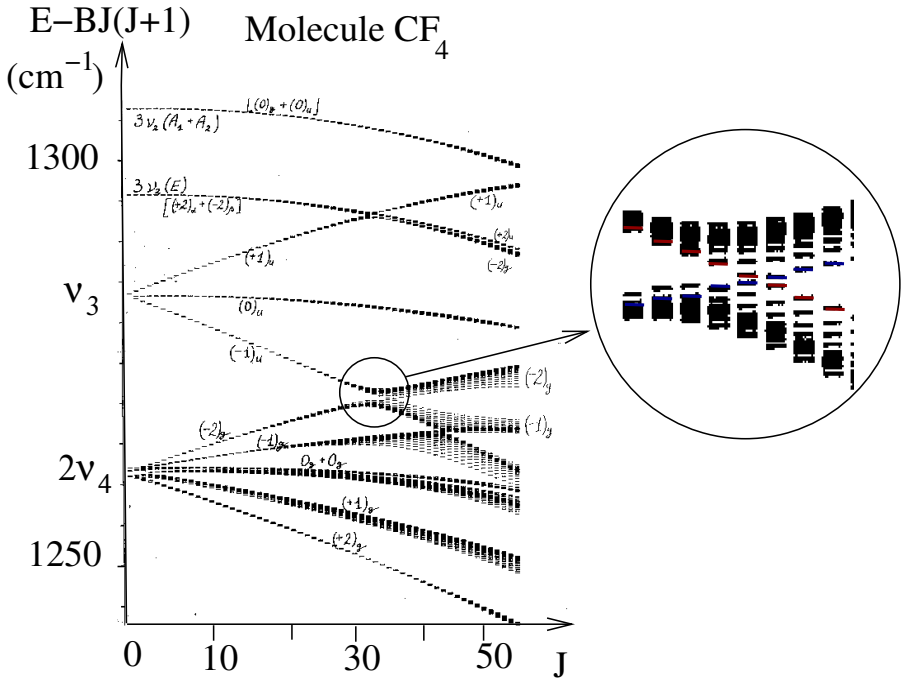


FIGURE 3.5.2 – Spectre expérimental ro-vibrationnel de la molécule CF_4 en fonction du moment angulaire total J. Lorsque des bandes sont en contact, il y a des échanges de niveaux (ici dans les deux sens). On donnera une **interprétation topologique** des ces phénomènes.

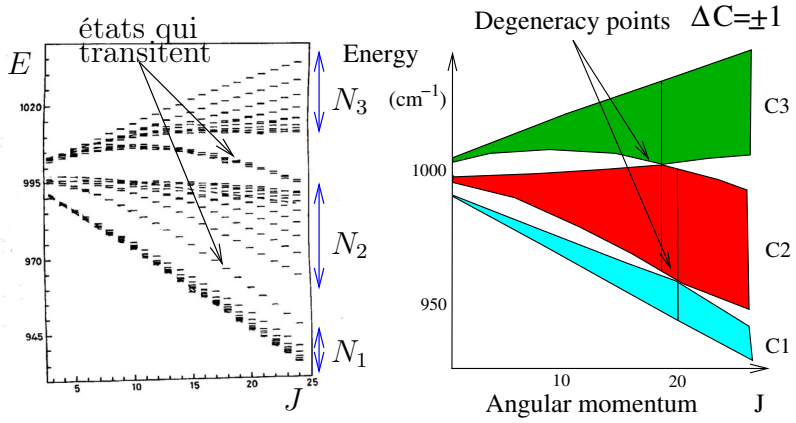


FIGURE 3.5.3 – (a) Spectre expérimental ro-vibrationnel de la molécule CD_4 en fonction du moment angulaire total J. On observe que les niveaux sont regroupés en trois bandes, et que le nombre de niveaux N_i dans chaque bande varie à cause d'états qui transitent d'une bande à une autre. (b) Spectre semi-quantique après une analyse semi-classique du modèle.

La limite semi-classique : A la base de ce résultat est la possibilité de remplacer les opérateurs quantiques du moment angulaire $\vec{J}$ par des variables classiques $\vec{j}$ dans la limite $1/j \to 0$ appelée **"limite semi-classique"**. C'est le sujet de la "théorie semi-classique" ou "Analyse semi-classique". On aura besoin des bases de cette théorie pour démontrer le résultat général dans la section @@.

En physique cette correspondance quantique-classique est surtout connue entre les opérateurs position-impulsion $\left(\hat{q}, \hat{p} \equiv -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)$ et les variables classiques $(q,p) \in \mathbb{R}^2$ dans l'espace de phase $\mathbb{R}^2$. La limite semi-classique est ici jouée par le paramètre $\hbar \to 0$. L'exemple du moment angulaire $\vec{j} \in S^2$ est d'un certain point de vue plus intéressant car l'espace de phase classique est la sphère S^2 qui est compacte, et cela a permis d'avoir des espaces fibrés non triviaux dans l'exemple précédent. L'espace de phase pourrait être n'importe quelle surface compacte de genre g. En particulier le cas du tore $\mathbb{T}^2$, genre $g = 0$ est important pour modéliser les électrons dans un potentiel périodique et soumis à un fort champ magnétique ("modèle de Harper"). Dans le cas d'un espace de phase compact de dimension 2 et de genre g, on montre que la formule (3.5.1) est remplacée par @@ :

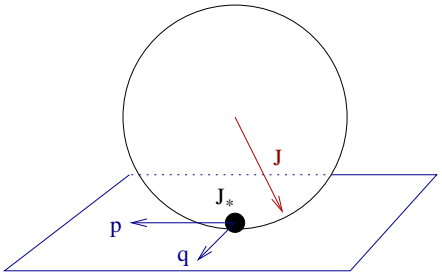
$$\mathcal{N}_i = N + (2-g) - C_i$$

où N est le paramètre de quantification de la surface (dans le cadre de la quantification géométrique). (Le cas de la sphère S^2 est $N = 2j$, $g = 1$).

3.6 Forme normale topologique [2]

Présenté sous forme de problème.

3.6.0.1 Modèle semi-quantique



1. En s'inspirant de la figure @@ montrer que au voisinage de la dégénérescence, le modèle semi-quantique se réduit au modèle très simple (appelé "forme normale") :

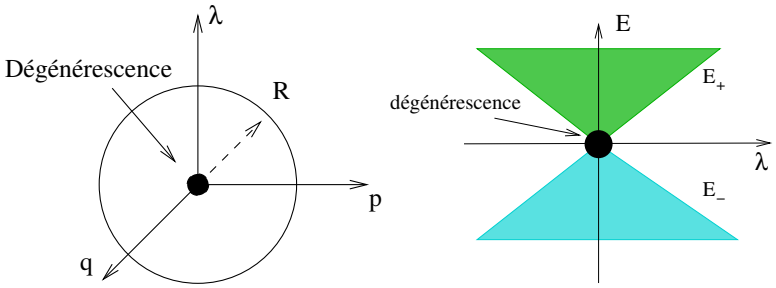
$$H_\lambda(q,p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\lambda & q+ip \\ q-ip & +\lambda \end{pmatrix}$$

   Pour cela on utilise les coordonnées canoniques $(q,p) \in \mathbb{R}^2$, tangentes à la sphère de $\vec{j}$, au point $\vec{j}^*$, et on change $\lambda \to \lambda - 1/2$.

2. Montrer que les valeurs propres sont

$$E_\pm(\lambda, q, p) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 + q^2 + p^2} = \pm\frac{1}{2}R$$

2. Il ne s'agit pas de **forme normale symplectique** étudiée par Y. Colin de Verdière . Une forme normale symplectique donne le spectre correct. Notre **forme normale topologique** ne donne que le nombre correct de valeurs propres échangées et non leur position.

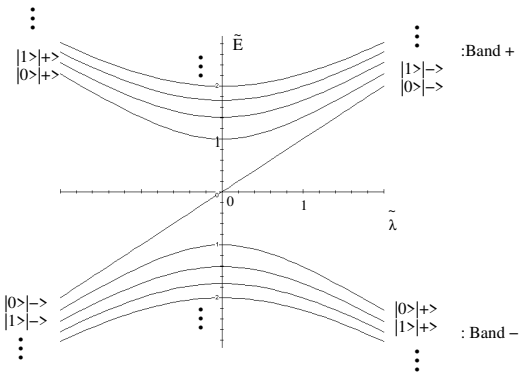


3. Monter qu'il y a une dégénérescence à l'origine de l'espace (q, p, λ). (on reconnaît l'expression du "monopole magnétique"). Montrer que pour la bande supérieure $\Delta C = -1$, en considérant une sphère qui entoure cette dégénérescence.

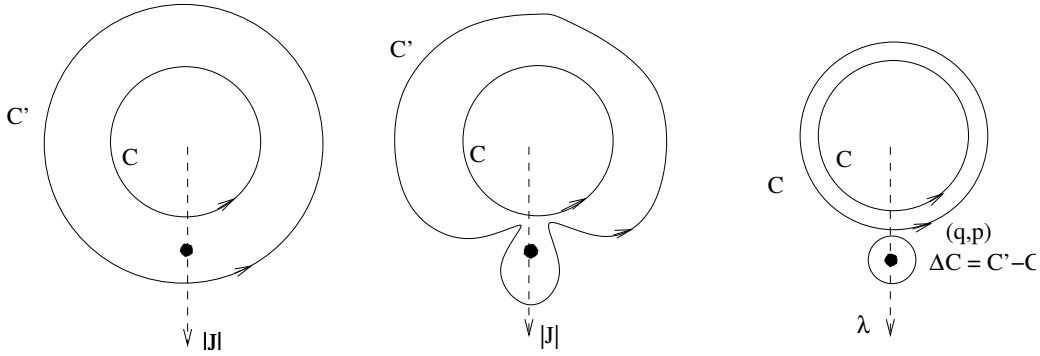
3.6.0.2 Modèle quantique

$$H_\lambda = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\lambda & \hat{q} + i\hat{p} \\ \hat{q} - i\hat{p} & +\lambda \end{pmatrix}, \tag{3.6.1}$$

1. Calculer le spectre, montrer qu'il y a un échange de niveaux $\Delta\mathcal{N} = +1$ vers la bande supérieure. Dans ce modèle, on observe donc la relation $\Delta\mathcal{N}_i = -\Delta C_i$ pour chaque bande.



2. Argumenter pour montrer comment la formule générale (3.5.1) peut se déduire de cette forme normale topologique.



Bibliographie

[AA87] Y. Aharonov and J. Anandan. "phase change during a cyclic quantum evolution". *Phys. Rev. Lett.*, 58 :1593, 1987.

[AA90] J. Anandan and Y. Aharonov. "geometry of quantum evolution ". *Phys. Rev. Lett.*, 65 :1697, 1990.

[Arn72] Arnol'd, V.I. Modes and quasimodes. *Funct. Anal. Appl.*, 6 :94–101, 1972.

[Arn76] V.I. Arnold. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique.* Ed. Mir. Moscou, 1976.

[Ber84] M.V. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, 45 :392, 1984.

[Bou92] J.P. Bourguignon. Transport parallÃšle et connexions en gÃ©omÃ©trie et physique. *Lectures Notes in Physics. 1830-1930 A century of geometry.*, pages 150–166, 1992.

[C. 96] C. Emmrich and A. Weinstein. Geometry of the transport equation in multicomponent WKB approximations. *Commun. Math. Phys.*, 3(176) :701–711, 1996.

[dV02] Y. Colin de VerdiÃšre. *Une introduction Ã la topologie : graphes, surfaces et noeuds. Cours de M2 Physique. http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~ycolver/.* 2002.

[Fau10a] F. Faure. *Cours de géométrie et topologie pour la physique pour Master M2 de physique.* link, 2010.

[Fau10b] F. Faure. *Cours de MathÃ©matiques pour la physique. Niveau Master 1.* link, 2010.

[FZ00] F. Faure and B. Zhilinskii. Topological Chern indices in molecular spectra. *Phys. Rev.Lett., link*, 85(5) :960–963, 2000.

[FZ01] F. Faure and B. Zhilinskii. "Topological properties of the Born-Oppenheimer approximation and implications for the exact spectrum". *Lett. in Math. Phys., link*, 55 :219–238, 2001.

[Hat98] A. Hatcher. *Vector Bundles and K-Theory.* http ://www.math.cornell.edu/~hatcher/, 1998.

[Nak03] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics.* Institute of Physics Publishing, 2003.

[Sim83] B. Simon. Holonomy, the quantum adiabatic theorem and berry's phase. *Phys. Rev. Lett.*, 51 :2167, 1983.

[Tay96a] M. Taylor. *Partial differential equations, Vol I.* Springer, 1996.

[Tay96b] M. Taylor. *Partial differential equations, Vol II.* Springer, 1996.

[Tay96c] M. Taylor. *Partial differential equations, Vol III.* Springer, 1996.

[vNW29] J. von Neumann and E. Wigner. *Phys. Z.*, 30 :467, 1929.