Sur l'uniformisation des variétés projectives algébriques complexes

Philippe Eyssidieux
CNRS - Laboratoire Emile Picard, Université Paul Sabatier, Toulouse, France
eyssi@picard.ups-tlse.fr

3 Décembre 2004

à Anne et Héloïse.

Ce texte, préparé en vue d'obtenir l'Habilitation à Diriger des Recherches, est une synthèse des travaux de recherche que j'ai menés à bien depuis le début de ma thèse sous la direction de Ngaiming Mok (Hong-Kong University (Chine), alors à l'Université Paris XI) en 1990 jusqu'à aujourd'hui.

Motivé par des problèmes de caractérisation des sous-variétés complexes totalement géodésiques des variétés hermitiennes localement symétriques qui étaient mon sujet de thèse, je me suis rendu compte du fait que la structure du revêtement universel de ces variétés était la clef de nombre de leurs propriétés algébro-géometriques.

Revêtements universels et groupes fondamentaux des variétés algébriques de dimension au moins 2 sont en fait des objets bien mystérieux. Voici deux opinions citées dans des ouvrages d'initiation: 'On ignore à peu près tout de quels groupes peuvent être groupes fondamentaux de variétés algébriques ' (Deligne, 1987, cité dans la préface de [ABCKT1996]), 'At present almost nothing is known on universal covering varieties of arbitrary algebraic varieties' (Shafarevich, 1977, [Sha1977]).

La période 1988-1994 vit la publication de travaux importants sur ces questions. La technique des applications harmoniques [EelSam1964] [Siu1980] [Sam1986] s'épanouit dans la Théorie de Hodge non abélienne de Corlette-Simpson [Cor1988] [Sim1988] [Sim1992] [Sim1993a] [Sim1993b] [Sim1994] et Gromov-Schoen menèrent à bien la construction d' applications harmoniques vers les immeubles de Bruhat-Tits [GroSch1992]. D'autre part, apparurent des applications spectaculaires de la cohomologie L_2 et du théorème d'indice d'Atiyah [Cam1994] [Cam1995] [Kol1993] dans la ligne du travail pionnier [Gro1991].

Comme ces outils puissants permettaient enfin de progresser, mon intérêt pour l'uniformisation en plusieurs variables complexes devint prédominant. La plupart de mes efforts furent consacrés au développement de ces techniques et de leurs applications. Les deux principales problématiques que je suivis furent: comment la stucture du revêtement universel influence-t'elle la géometrie algébrique d'une variété algébrique complexe? Et inversement comment comprendre la structure du revêtement universel de la variété à partir de sa géometrie ou des propriétés de son groupe fondamental?

Ce mémoire contient une sélection des principaux résultats de mes travaux organisée thématiquement et accompagnée de notes historiques sur les problèmes abordés. Plusieurs problèmes ouverts sont également signalés. Aucune preuve n'est donnée, le lecteur étant renvoyé aux articles originaux.

Les techniques que j'ai utilisées dans les différentes parties de mon travail de recherche sont les applications harmoniques et les méthodes L_2 sur le revêtement universel qui, tout en s'inscrivant respectivement dans la tradition de la théorie de Hodge et de l'approche de Hörmander aux problèmes fondamentaux de l'analyse complexe, comptent parmi les plus modernes et les plus puissantes des méthodes transcendantes (analytiques, devrait-on dire plus modestement) de la géométrie algébrique complexe.

Je remercie C. Simpson pour avoir accepté d'être le directeur de cette HDR, pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux et pour les conversations mathématiques que nous avons eues. Je remercie N. Mok pour l'initiation qu'il m'a donnée à la recherche mathématique et pour les encouragements qu'il m'a toujours prodigués. Parmi les nombreux autres mathématiciens qui ont au cours de discussions éclairé pour moi des points difficiles et/ou m'ont apporté soutien, amitié et critiques constructives, je tiens à remercier tout particulièrement A. Beauville, A. Berthommieu, L. Bonavero, F. Campana, J. Carlson, J.P. Demailly, A. Hirschowitz, L. Katzarkov, B. Klingler, J.M. Landsberg, T. Pantev, M. Paun, M. Ramachandran, J.M. Schlenker, J.C. Sikorav, B. Toën et K. Zuo. Je remercie C. Voisin, J.P. Demailly et J. Carlson pour avoir accepté d'écrire un rapport sur ce travail dans un si court délai et V. Schechtman pour avoir accepté de faire partie du jury. Je remercie également les membres du Laboratoire Emile Picard où j'ai effectué la plus grande partie des travaux décrits ici ainsi que ceux du Laboratoire de Mathématiques de Paris XI et du département de Mathématiques de Columbia University où j'ai préparé ma thèse.

1 Variations de structure de Hodge

Cette section décrit les travaux que j'ai effectué sur les VSH dans ma thèse et développé dans [Eys1997].

L'idée force est la suivante: les variétés algébriques qui portent des Variations de Structure de Hodge (VSH) (qui sont un certain type de systèmes locaux sur les variétés complexes, voir plus loin) 'assez grosses', classe qui comprend mais est plus vaste que celle des sous-variétés algébriques de quotients de domaines symétriques bornés, se comportent dans une large mesure comme celles-ci.

L'article [Gro1991] mettait en lumière quelques aspects nouveaux de leur géometrie; à sa suite, [Eys1997] développa une nouvelle approche de certaines propriétés des VSH qui culmina en une série d'inégalités nouvelles portant sur les classes de Chern des fibrés attachés aux VSH.

1.1 Définitions

Définition 1.1.1 *Soit M une variété complexe. Un quadruplet $(M, \mathbb{V}, F^\bullet, S)$ est appelé une Variation de Structure de Hodge polarisée complexe (VSH) si $\mathbb{V}$ est un fibré vectoriel complexe plat muni de la connexion plate D, $F^\bullet$ une filtration décroissante par des sous-fibrés vectoriels holomorphes de $\mathbb{V}$ indexée par les entiers et S un accouplement sesquilinéaire plat tels que:*

1. *Le fibré vectoriel C^∞ V sous-jacent à $\mathbb{V}$ se décompose comme une somme directe $V = \oplus_p H^p$ avec $F^P = \oplus_{p \geq P} H^p$.*

2. *$p \neq r \Rightarrow S(H^p, H^r) = 0$ et $(-1)^p S$ est définie positive sur H^p.*

3. *$D^{1,0} F^p \subset F^{p-1} \otimes \Omega^{1,0}_M$ (transversalité de Griffiths).*

Griffiths a démontré que, si une variété complexe Y est base d'une famille analytique de variétés kählériennes compactes, les parties primitives des faisceaux de cohomologie relatifs forment des VSH sur Y [Gri1973].

Indépendamment de toute réalisation géométrique concrète du type précédent, on trouvera dans [Zuc1981] des construction de VSH sur des domaines symétriques bornés qui sont homogènes par rapport au groupe des automorphismes du domaine à partir de représentations réelles de l'algèbre de Lie du dit groupe. Elles descendent à tout quotient du domaine. Les VSH ainsi construites seront dites *localement homogènes*.

Tout système local complexe d'une variété projective lisse peut être déformé en un système local sous-jacent à une VSH [Sim1988]. C'est le fameux phénomène d'ubiquité des VSH.

1.2 Kähler-hyperbolicité

Rappelons une notion dûe à Gromov.

Définition 1.2.1 *([Gro1991]) Soit X une variété complexe compacte de revêtement universel $\pi^u : \tilde{X}^{univ} \to X$. Soit $\mu \in C^\infty(X, \Omega^{1,1})$. On dit que (X, μ) est Kähler-hyperbolique si et seulement si:*

- *$\mu > 0$.*
- *Le relèvement de μ au revêtement universel $\tilde{X}^{univ}$ de X possède une primitive bornée par rapport à toute métrique riemannienne sur $\tilde{X}^{univ}$ induite par une métrique riemannienne sur X.*

Les quotients compacts d'un domaine symétrique borné et leurs sous-variétés sont Kähler-hyperboliques. Les variétés de type Mostow-Siu également.

Il est affirmé dans [Eys1994], avec une démonstration fautive[1], qu'une variété complexe compacte portant une VSH 'assez grosse ' est Kähler-hyperbolique. L'intuition provient du fait que les VSH 'générales ' se comportent comme les

[1] L'erreur a été débusquée par J. Carlson en Juin 1995 à Toulouse.

VSH provenant d'une VSH localement homogène. Il n'a malheureusement pas été possible à ce jour de construire de primitives sur le revêtement universel pour les formes kählériennes attachées aux VSH. Un résultat plus faible est donné dans [Eys1997], que nous allons énoncer.

Définition 1.2.2 *On dit que (X, μ) est semi-hyperbolique au sens faible si et seulement si:*

- *μ est fermée.*
- *$\mu \geq 0$ et $\mu > 0$ hors d'un ensemble de mesure nulle.*
- *$\exists \alpha \in C^\infty(\tilde{X}^{univ}, \Omega^1_{\tilde{X}^{univ}}), \exists K, C, c > 0$*

$$d\alpha \in \Omega^{1,1},\ c\pi^{u*}\mu \leq d\alpha \leq C\pi^{u*}\mu \text{ et } \forall v \in T_{\tilde{X}^{univ}},\ |\alpha(v)| \leq K\|v\|_{\pi^{u*}ds^2_X}$$

Si, de plus, μ est définie positive partout, on dit que cette métrique kählérienne est Kähler-hyperbolique au sens faible.

Les propriétés d'une VSH sont reflétées dans son *application de périodes*, voir [Gri1973][GriSch1969]. S'inspirant des propriétés d'hyperbolicité au sens de Kobayashi mises en évidence par [Gri1973], on a:

Proposition 1.2.3 *([Eys1997]) Soit $(X, \mathbb{V}, F^\bullet, S)$ une VSH de base X projective compacte connexe et lisse.*

Si son application de périodes est génériquement immersive, X possède une structure semi hyperbolique au sens faible et si, de plus, cette application est discrète sur son image (i.e.: est génériquement immersive sur chaque germe de courbe complexe contenue dans X), la structure est Kähler hyperbolique au sens faible.

1.3 Théorème d'annulation

Comme observé dans [Eys1994], les propriétés de Kähler-hyperbolicité des VSH sont particulièrement intéressantes en raison du théorème d'annulation de [Gro1991] dont nous allons exposer une généralisation.

Soit (M, g) une variété Riemannienne complète et (E, D, h) un fibré vectoriel complexe muni d'une connexion plate et d'une métrique hermitienne non nécéssairement parallèle. On munit l'espace des p-formes lisses à support compact à valeurs dans E de la métrique préhilbertienne

$$\|\phi\|^2 = \int_M |\phi|^2 + |D\phi|^2 dVol_M.$$

$L^2dR^p(X, g, E, D, h)$ est le complété de cet espace et l'opérateur de De Rham se prolonge à $D : L^2dR^p(X, g, E, D, h) \longrightarrow L^2dR^{p+1}(X, g, E, D, h)$, ce qui définit un complexe d'espaces topologiques isomorphes à des espaces de Hilbert dont la cohomologie est appelée cohomologie L^2 de (X, g, E, D, h). Il est possible que l'image de D ne soit pas fermée. Dans le cas contraire on dit que la cohomologie L^2 est réduite et la cohomologie L^2 est représentée par les formes harmoniques L^2. Dans le cas général, les formes harmoniques L^2 représentent la cohomologie réduite $\ker(D)/\overline{\mathrm{im}(D)}$.

Dans le cas où M est le revêtement universel d'une variété compacte riemannienne (N, g_N) et (E, D) est l'image réciproque M d'un couple (E_N, D_N) défini sur N, on supposera tacitement que g et h sont les images réciproques de métriques g_N et h_N définies sur N. Dans ces conditions, la cohomologie L_2 est indépendante des données (g_N, h_N) qu'on passera donc sous silence. Elle s'interprète topologiquement comme la cohomologie du faisceau localement constant $E_N \otimes Rl^2$ où Rl^2 est le système local sur N attaché à la représentation régulière droite du groupe fondamental.

Théorème 1 *([Eys1997]) Soit X une variété complexe projective lisse de dimension n Kähler-hyperbolique au sens faible. Soit $(M, \mathbb{V}, F^\bullet, S)$ une VSH. Alors la cohomologie L^2 de $(\tilde{X}^{univ}, \mathbb{V})$ est réduite en tout degré et nulle en degré $\neq n$.*

1.4 Inégalités Arakeloviennes

En utilisant le théorème d'indice L_2 d'Atiyah [Ati1976], on déduit des inégalités de classes de Chern pour les fibrés de Hodge d'une VSH, inégalités baptisées 'Arakeloviennes ' dans ma thèse.

Théorème 2 *([Eys1997]) Soit M une variété projective lisse de dimension n. Soit $(M, \mathbb{V}, F^\bullet, S)$ une VSH d'application de périodes finie sur son image et de vecteur de Hodge $\mathbf{h} = (h^{w0}, \ldots, h^{0w})$. On a :*

$$A^n_w(\mathbf{h})_{p+w,n-p} : \ (-1)^{n-p}(\sum_{i=0}^{w}(-1)^i ch(H^{w-i,i} \otimes \Omega_M^{p+i})).Todd(T_M).[M] \geq 0$$

Le cas où $n = 1$, $w = 1$, $p = 0$ et où la VSH provient d'une famille *lisse* de variétés abéliennes est un cas particulier d'une inégalité d'Arakelov. On notera qu'une version de cette inégalité d'Arakelov est disponible dans le cas d'une famille quelconque de variétés abéliennes (avec fibres singulières). La généralisation de ce théorème au cas de VSH avec des dégénerescences reste ouverte (et n'a pas été étudiée).

Les métriques des différents fibrés rencontrés ont une courbure explicitement connue et des calculs fastidieux montrent que la plupart de ces inégalités *ne se déduisent* pas d'inégalités portant sur les formes de Chern-Weil.

2 Phénomène des lacunes pour les sous-variétés des quotients de domaines symétriques bornés

Cette section décrit les résultats obtenus sur le problème du phénomène des lacunes, posé par N. Mok en 1990, dans les références [Eys1994] [EysMok1995] [Eys1997], [Eys1999a] [EysMok2004] qui ont paru entre 1995 et 2004.

Ces résultats sont le fruit d'une activité de recherche de N. Mok et de moi-même qui a pour but de donner des caractérisations algébro-géométriques ou de géométrie différentielle des sous-variétés totalement géodésiques des quotients de domaines symétriques bornés. Les techniques mobilisées à cet effet ont été relativement variées et sortent parfois du cadre de l'uniformisation à plusieurs variables complexes.

2.1 La conjecture du phénomène des lacunes

Cette activité s'est organisée autour d'une conjecture (le phénomène des lacunes) formulée dans [Mok1991] et attribuée à Gromov que nous allons décrire.

Soit Ω un domaine symétrique borné [2]. Ω porte une métrique kählérienne complète symétrique de courbure négative, unique à homothétie près, quand Ω est irréductible [3] (auquel cas cette métrique est proportionnelle à la métrique de Bergmann et est Kähler-Einstein.). Le groupe (transitif) des automorphismes de Ω est l'ensemble des points réels d'un groupe algébrique réel semi-simple. On écrira $\Omega = G/K$ où G est semi-simple, connexe et algébriquement simplement connexe [4] et K est un sous-groupe compact maximal possédant un sous-groupe $U(1)$ dans son centre qui induit la structure complexe de Ω. Les domaines symétriques bornés irréductibles ont été classifiés par E. Cartan. Les domaines dits classiques se répartissent en les 4 séries suivantes:

$$\begin{array}{lcll}
D^I_{p,q} & = & \{Z \in M_{p,q}(\mathbb{C})|\ I_p - Z^t\bar{Z} > 0\} & p \leq q \in \mathbb{N} \\
D^{II}_n & = & \{Z \in M_n(\mathbb{C})|\ Z +^t Z = 0,\ I_n -^t \bar{Z}Z > 0\} & n \in \mathbb{N} \\
D^{III}_n & = & \{Z \in M_n(\mathbb{C})|\ Z =^t Z,\ I_n -^t \bar{Z}Z > 0\} & n \in \mathbb{N} \\
D^{IV}_n & \subset & \{[z_1 : \ldots : z_{n+2}] \in \mathbb{P}^{n+1} | z_1^2 + \ldots + z_{n+2}^2 = 0\} & n \in \mathbb{N}
\end{array}$$

Il y a deux domaines dits exceptionnels D^V resp. D^{VI} pour lesquels G est de type E_6 resp. E_7. Il y a également quelques isomorphismes en petite dimension entre domaines classiques de différentes séries.

Le groupe G possède des réseaux uniformes mais aussi des non-uniformes. Rappelons qu'un sous-groupe $\Gamma \subset G$ est dit un réseau s'il est discret et de covolume fini pour la mesure de Haar et est dit uniforme si de plus $\Gamma\backslash G$ est compact. Un réseau est dit net s'il est sans torsion.

Une variété X est dite localement symétrique hermitienne de type non-compact s'il existe un domaine symétrique borné Ω et Γ un réseau net de G tels que X s'identifie au quotient $\Gamma\backslash\Omega$. X est alors une variété quasiprojective (projective si Γ est uniforme). Des objets de ce type apparaissent comme solution du problème des modules des variétés abéliennes munies de structures supplémentaires (polarisations, structures de niveau, anneau d'endomorphismes...) et comme variétés des points complexes des variétés de Shimura. Les quotients arithmétiques ou non de la boule fournissent une autre classe d'exemples. Ces objets sont très étudiés, notamment en liaison avec les formes modulaires.

[2] Un synonyme peut être plus informatif est: espace symétrique hermitien de type non-compact.

[3] Si Ω est réductible, on a $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_m$ où les Ω_i sont irréductibles.

[4] G est un revêtement fini de la composante neutre du groupe des automorphismes de Ω.

X porte une métrique kählérienne complète qui est le quotient de la métrique symétrique. Une sous-variété complexe $i : X' \subset X$ totalement géodesique de X est encore localement symétrique et peut s'écrire $X' = \Gamma' \backslash \Omega'$ où $\Omega' = G'/K'$ est un domaine symétrique borné, i est uniformisée par un plongement de domaines symétriques bornés, i.e.: un plongement holomorphe totalement géodésique $j : \Omega' \to \Omega$ induit par $\phi : G' \to G$ une représentation fidèle telle que $\phi(K') \subset K$.

Pour chaque domaine Ω, il n'y a qu'un nombre fini (à $Aut(\Omega)$-près) de plongements (Ω, Ω', j) comme ci-dessus. Ils ont été classifiés par S. Ihara après des travaux de I. Satake [Iha1966].

Parmi les sous-variétés complexes $j : C \hookrightarrow \Omega$, les sous-domaines de Ω sont caractérisés par l'annulation de la seconde forme fondamentale $\sigma_{C,\Omega}$. On notera, pour toute immersion $k : Z \to Y$ d'une variété complexe Z dans Y une variété kählérienne, $\sigma_{Z,Y}$ la seconde forme fondamentale de k.

La question du phénomène des lacunes [Mok1991] peut se formuler ainsi:

Question 1 *Soit $\Omega = G/K$ un domaine symétrique borné. Existe-t'il une constante $\epsilon_\Omega > 0$ vérifiant la propriété (P_1) suivante?*

(P_1): Soit Γ un réseau net dans G. Soit $i : X \subset \Gamma \backslash \Omega$ une immersion d'une variété complexe compacte. Si $\sup_{x \in X} \|\sigma_{X,\Gamma\backslash\Omega}\| \leq \epsilon_\Omega$, alors i est totalement géodésique.

La propriété (P_1) implique que les composantes du schéma de Chow de $\Gamma \backslash \Omega$ qui contiennent une sous-variété complexe totalement géodésique ne contient que des variétés immergées totalement géodésiques, un fait bien connu. C'est donc une propriété de rigidité forte des cycles géodésiques holomorphes.

Dès le début, la possibilité avait été envisagée qu'il était nécessaire de formuler de façon plus précise ce problème. En effet, sous les hypothèses de la question 1, [EysMok1995] montre qu'il est possible de supposer qu'en tout point de $\tilde{X}^{univ}$, le germe de i est proche en topologie C^2 de la translatée par un automorphisme de Ω du germe d'un plongement bien déterminé de domaines symétriques bornés (Ω, Ω', j) qu'on appelera le *modèle* de i.

Le développement du problème semble indiquer que l'hypothèse de discrétude sur Γ n'est pas forcément nécessaire et invite à une reformulation. Soit X une variété compacte. Soit $\rho : \pi_1(X) \to G$ une représentation du groupe fondamental de X. Le groupe $\pi_1(X)$ agit sur Ω par l'intermédiaire de ρ et de l'action de G sur Ω. Si cette action est discrète et factorise via un réseau net, la donnée d'une immersion $X \to \Omega/\Gamma$ équivaut à celle une immersion ρ-équivariante $i : \tilde{X}^{univ} \to \Omega$.

Problème 2 *Pour quels plongements (Ω, Ω', j) de domaines symétriques bornés, existe-t'il une constante $\epsilon_{(\Omega,\Omega',j)} > 0$ telle que la propriété (P_2) suivante est vérifiée?*

(P_2) Soit X une variété kählérienne compacte. Soit $\rho : \pi_1(X) \to G$ une représentation du groupe fondamental de X et $i : \tilde{X}^{univ} \to \Omega$ une immersion holomorphe ρ-équivariante. Si $\sup_{x \in X} \|\sigma_{\tilde{X}^{univ},\Omega}\| \leq \epsilon_{(\Omega,\Omega',j)}$ et i est modelée sur j, alors i est totalement géodésique.

Si tel est le cas, on dit que le phénomène des lacunes (ou Gap phenomenon) a lieu pour (Ω, Ω', j).

Il en effet indispensable de reformuler ce problème -et de ne plus en faire une conjecture- puisque la réponse à la question 1 est NON dès que le rang de Ω est au moins 2 [EysMok2004]. Le phénomène des lacunes n'a en effet pas lieu pour le plongement $(\Delta \times o, \Delta^2)$ et plus généralement pour tout plongement totalement géodesique du disque de Poincaré dans un domaine Ω de rang au moins 2 qui n'est pas diagonal dans un polydisque maximal de Ω.

Le point clef de la conjecture est l'indépendance vis à vis de Γ et surtout l'absence de toute borne sur le volume de X par rapport à la métrique symétrique[5]. Celà dit, dans la question 1, l'existence d'une constante $\epsilon_{\Omega,\Gamma} > 0$, dépendant donc explicitement de Γ, vérifiant la propriété ci-dessus reste ouverte.

2.2 Premiers résultats positifs

La première instance connue du phénomène des lacunes remonte à [Mok1991]. Ce travail implique que le phénomène des lacunes a lieu pour le plongement diagonal du demi-plan de Poincaré dans le demi-plan de Siegel. Dans [EysMok1995], le phénomène des lacunes est démontré pour le plongement diagonal d'un domaine symétrique borné irréductible Ω dans sa puissance cartésienne Ω^n en utilisant l'unicité des métriques de Kähler-Einstein de courbure négative.

2.3 Phénomène des lacunes et VSH

Les inégalités du théorème 2 furent découvertes avec l'espoir suivant:

Question 3 *Est-il vrai que les cas d'égalité non-triviaux du théorème 2 sont tous localement symétriques?*

Voici le lien avec le phénomène des lacunes pour (Ω, Ω', j). Supposons que vive sur Ω une VSH homogène $(\Omega, \mathbb{W}, G^\bullet, S)$ (celles-ci sont en correspondance biunivoque avec les représentations complexes de G) et que pour tout réseau uniforme $\Gamma' \subset G'$, la VSH $\Gamma' \backslash (\Omega', j^*(\mathbb{W}, G^\bullet, S))$ soit cas d'égalité du théorème 2 pour l'entier p. Alors, si l'immersion i dans le problème 2 est modelée sur (Ω, Ω', j), la VSH $(\pi_1(X) \backslash (\tilde{X}^{univ}, i^*(\mathbb{W}, G^\bullet, S))$ est encore un cas d'égalité.

La question 3 est largement ouverte, malgré quelques résultats positifs partiels dans [Eys1997]. C'est en l'étudiant que j'ai trouvé dans [Eys1997] puis [Eys1999a] plusieurs exemples de plongements de domaines symétriques bornés qui soient des cas d'égalité du théorème 2. Néanmoins, l'étude de [Eys1999a] qui conclut au fait qu'il y a beaucoup de cas d'égalité localement homogènes et que leur structure est nettement plus compliquée que celle des premiers exemples de [Eys1997] m'incite à ne plus poser cette question comme une conjecture.

Dans ces exemples de réponses positives à la question 3, une preuve alternative beaucoup plus simple du phénomène des lacunes est d'ailleurs disponible.

[5] Si on rajoute une borne sur le volume de X à cet énoncé, la réponse est positive et ne demande pas trop de peine.

Ce qui incite à penser que la question 3 est plus compliquée que le problème 2 et que ce problème n'a pas à être envisagé sous l'angle des VSH.

2.4 Résultats positifs sur le phénomène des lacunes

Un travail indépendant de N. Mok [Mok2002] permit de rajouter à la liste de [Eys1999a] de nouveaux exemples de plongements de domaines symétriques bornés satisfaisant le phénomène des lacunes et fit apparaître clairement que l'approche du problème 2 par les VSH n'était pas la plus adéquate puisque la technique des VSH ne permettait pas de les retrouver.

Tous les plongements de domaines symétriques bornés pour lesquels une réponse positive au problème 2 était connue avant [EysMok2004] (ceux des listes de [Eys1999a] [Mok2002]) avaient de nombreux traits en commun mais il n'y avait pas de théorie plus systématique qu'une accumulation hétérogène d'exemples. Une surprise fut que le concept de stabilité au sens de la Théorie des Invariants Géometriques de Mumford et son lien avec le concept symplectique d'application moment devaient permettre d'unifier ces exemples et de dresser un tableau systématique.

Dans tous les exemples connus du phénomène des lacunes, l'information infinitésimale d'ordre 1 suffit à conclure et il n'est pas nécessaire de faire usage de l'information d'ordre 2. Le cas irréductible étant plus facile à énoncer, on s'y bornera renvoyant à [EysMok2004] pour le cas général.

Soit Ω un domaine symétrique borné irréductible. Le groupe d'isotropie K en l'origine conventionnelle o agit sur l'espace tangent $T_o\Omega$ et donc sur la Grassmannienne $\mathrm{Gr}(p, T_o\Omega)$ de ses p-plans. On dira que $\mathcal{A} \in \mathrm{Gr}(p, T_o\Omega)$ est GIT-semistable s'il existe une hypersurface complexe fermée K-invariante $\mathcal{Z}_o \subset \mathrm{Gr}(p, T_o\Omega)$ telle que $\mathcal{A} \notin \mathcal{Z}_o$.

Proposition 2.4.1 *Les plongements* $((\Omega', o), (\Omega, o), j)$ *de domaines symétriques bornés irréductibles tels que* $T_o\Omega'$ *est GIT-semistable dans* $\mathrm{Gr}(\dim \Omega', T_o\Omega)$ *vis à vis de l'action d'isotropie de* K *sont précisément les plongements* (H_2) *de [Sat1980], p. 83-88.*

Un pas essentiel de la classification des plongements de domaines symétriques bornés de Ihara [Iha1966] est la classification complète des plongements (H_2).

La preuve du théorème suivant a pour corollaire une réponse positive au problème 2 dans le cas des plongements (H_2) de domaines symétriques bornés irréductibles.

Théorème 3 *([EysMok2004]) Soit* $\Omega = G/K$ *un domaine symétrique borné irréductible. Soit* Γ *un groupe discret sans torsion d'automorphismes biholomorphes de* Ω*, et écrivons* $S := \Omega/\Gamma$*. On suppose que* Ω *est le but d'un plongement* (H_2) $D \subset \Omega$ *d'un domaine irréductible* D*. On pose* $\dim(D) := p$*. On peut supposer que* $o = eK \in D$*.*

Fixons une hypersurface projective K*-invariante* $\mathcal{Z}_o \subset \mathrm{Gr}(p, T_o\Omega)$ *telle que* $[T_o(D)] \notin \mathcal{Z}_o$*. Notons* $\pi : \mathbb{G}(S) \to S$ *le fibré en Grassmanniennes paramétrisant* *les p-plans tangents de S et $\mathcal{Z}_S \subset \mathbb{G}(S)$ le sous-fibré localement homogène d'hypersurfaces projectives correspondant à $\mathcal{Z}_o$.*

Soit $X \subset S$ une sous-variété compacte complexe de dimension p telle que pour tout $x \in X$, $[T_x(X)] \notin \mathcal{Z}_x$. Alors, $X \subset S$ est totalement géodésique .

La preuve consiste à étudier une intégrale de Chern-Weil représentant le degré de l'intersection de l'image de l'application de Gauss de X avec $\mathcal{Z}_S$. Le principe de cette preuve est déjà dans [Eys1997] et [Mok2002]. La contribution de [EysMok2004] est l'identification de la classe de plongements à laquelle la méthode s'applique.

Nous n'excluons pas la possibilité que S soit uniformisée par un sous-domaine $D' \subset \Omega$ qui n'est pas équivalent à D sous $Aut(\Omega)$. Ceci peut effectivement se produire. Le résultat est énoncé comme dans [EysMok2004] mais la discrétude du groupe de monodromie n'est pas nécessaire et ceci répond bien positivement au Problème 2 pour les plongements (H_2) de domaines symétriques bornés irréductibles.

Dans les cas particuliers mis à jour dans [Eys1999a], l'hypersurface invariante est définie par le déterminant de la cohomologie du complexe de Gauss-Manin.

On trouvera dans [EysMok2004] des tables systématiques de plongements de domaines symétriques bornés vérifiant le phénomène des lacunes. Le cas le plus compliqué du phénomène des lacunes ainsi mis en évidence est celui d'un plongement de D_6^{II} dans D^{VI} que nous aurions été bien en peine de découvrir à la main.

Citons enfin une série de réponses positives au phénomène des lacunes qui n'entre pas dans la catégorie précédente. Le plongement $(\Omega \times o, \Omega \times \Omega')$ où Ω est une domaine irréductible de rang supérieur à 2 et Ω' un domaine quelconque vérifie le phénomène des lacunes. C'est une application directe de [Mok1987] et on observera que le fait que X soit localement symétrique est immédiat ce qui simplifie considérablement le problème.

Pour une liste des instances ouvertes les plus pertinentes du Problème 2, voir [EysMok2004]. La plus vexante est celle du plongement du disque de Poincaré dans la boule de dimension ≥ 2 qui évidemment demande que l'information infinitésimale de degré 2 soit exploitée, celle de degré 1 étant triviale.

2.5 Phénomène des lacunes et domaines de Griffiths

L'approche par les VSH, si elle n'est probablement pas la plus adaptée à ce problème, permet quand même de formuler le problème 2 dans un cadre élargi.

Soit G un groupe de type Hodge. Soit U le centralisateur du sous-groupe $U(1) \subset G$ définissant la structure de Hodge de G.

On appellera le quotient $\mathcal{D} = G/U$ le domaine de Griffiths associé à G. Le fibré tangent $T\mathcal{D}$ contient un certain sous-fibré $T_h\mathcal{D}$ dit horizontal jouant le rôle suivant:

Proposition 2.5.1 *Soit $(X, \mathbb{V}, F^\bullet, S)$ une VSH dont le groupe de monodromie en le point $x \in \tilde{X}^{univ}$ est dans G via une représentation complexe fidèle ϕ :*

$G \to GL(\mathbb{V}_x)$. Il existe alors une application holomorphe f horizontale (i.e.: vérifiant $df(T_X) \subset T_h\mathcal{D}$) $f : \tilde{X}^{univ} \to \mathcal{D}$ équivariante sous la représentation $\pi_1(X) \to G$.

Inversement, la donnée d'une application horizontale et d'une représentation complexe de G permet de construire une VSH.

Voir [GriSch1969] pour plus de détails sur cette amplification des travaux de Griffiths sur l'application des périodes. La formulation élargie du problème 2 est la suivante:

Problème 4 *Pour quels plongements horizontaux $(\Omega, \mathcal{D}, j)$ d'un domaine symétrique borné dans un domaine de Griffiths, existe-t'il une constante $\epsilon_{(\Omega,\mathcal{D},j)} > 0$ telle que la propriété suivante (P_3) est vérifiée?*

(P_3): Soit X une variété kählérienne compacte. Soit $\rho : \pi_1(X) \to G$ une représentation du groupe fondamental de X et $i : \tilde{X}^{univ} \to \mathcal{D}$ une immersion holomorphe ρ-équivariante . Si $\sup_{x \in X} \|\sigma_{X,T_h\mathcal{D}}\| \leq \epsilon_{(\Omega,\mathcal{D},j)}$ et i est modelée sur j, alors i est totalement géodésique.

Plusieurs résultats positifs sur ce problème peuvent être trouvés dans [Eys1997] [Eys1999a]. Les méthodes de [EysMok2004] s'appliquent mais un travail de classification assez lourd est encore nécessaire pour arriver à une compréhension aussi satisfaisante que dans le cas hermitien symétrique.

2.6 Caractérisation de cycles géodésiques holomorphes non-compacts

Comme premier problème de thèse, N. Mok me proposa de généraliser au cas non compact un théorème de pincement relatif à des courbes algébriques compactes dans un quotient du domaine de Siegel paru dans [Mok1991]. Voici l'énoncé obtenu, que je cite en dépit du fait qu'il n'a pas été publié:

Théorème 4 *([Eys1994]) Soit n un entier positif et $\mathcal{H}_n = \{Z \in M_n(\mathbb{C}) |\ {}^tZ = Z \ \ Im(Z) > 0\}$ le demi plan de Siegel, muni de la métrique symétrique normalisée en demandant que les courbures sectionnelles holomorphes varient entre $\frac{-1}{n}$ et -1. Soit $\Gamma \subset Sp_{2n}(\mathbb{Z})$ un sous-groupe d'indice fini qui opérant par automorphismes sur $\mathcal{H}_n$*

Si $i : S \hookrightarrow \mathcal{H}_n/\Gamma$ est une courbe algébrique dont la courbure gaussienne vérifie:

$$-\frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} \leq G^S \leq -\frac{1}{n}$$

S est totalement géodésique et l'application $\mathcal{H} \to \mathcal{H}_n$ qui uniformise i se déduit par un élément de $Sp_{2n}(\mathbb{R}) = Aut(\mathcal{H}_n)$ du plongement diagonal du demi-plan de Poincaré $\mathcal{H} \stackrel{diag}{\to} \mathcal{H}^n \stackrel{geod}{\to} \mathcal{H}_n$.

La preuve mobilise deux références importantes [AMRT1975] [Zuc1979].

Il y a eu depuis peu d'activité sur le problème d'étendre au cas non-compact les instances connues du phénomène des lacunes. La méthode de [EysMok2004] n'est pas inadaptable, au prix des difficultés techniques usuelles liées à l'usage des compactifications toroïdales [AMRT1975].

3 Cohomologie L_2 des faisceaux cohérents et applications

Cette section décrit les résultats obtenus dans [Eys1999b] [Eys2000] [Eys1998] sur la cohomologie L_2 des faisceaux cohérents.

Cette technique est l'une des armes principales dont nous disposons pour comprendre la géométrie d'une variété projective dont le groupe fondamental est 'gros' et notamment pour transférer les informations sur son revêtement universel à la variété elle-même; son origine remonte au théorème d'indice L_2 d'Atiyah [Ati1976] mais il a fallu attendre [Gro1991] pour que son potentiel en géometrie algébrique soit exploité systématiquement. Son développement a également permis, ce qui peut-être est plus étonnant, de réaliser un progrès en direction de la caractérisation numérique du cône kählérien d'une variété projective.

3.1 Historique

Popularisant auprès des géometres complexes le théorème d'indice L_2 d'Atiyah [Ati1976], les idées de l'article [Gro1991] ouvraient des perspectives nouvelles en géometrie kählérienne et furent immédiatement exploitées, notamment par Kollár [Kol1993] et Campana [Cam1994] [Cam1995].

Dans le livre [Kol1995], se trouvent posées plusieurs questions auxquelles j'ai pu contribuer. Premièrement une adaptation aux faisceaux cohérents du théorème d'indice L_2 d'Atiyah est implicitement conjecturée et considérée comme très probable (p.169, preuve du thm 16.5). Ensuite diverses applications de nature géometrique sont conjecturées au chapitre 18.

Une bonne partie de ces questions fut réglée par [Eys1999b] et un travail indépendant de Takayama [Tak1999]. Takayama poursuivit cet effort dans la direction de phénomènes de simple connexité en théorie de Mori [Tak2001].

3.2 Théorie d'indice L_2 d'Atiyah et faisceaux cohérents

3.2.1 Caractéristiques principales de la théorie

Dans [Eys1999b] est développé le formalisme suivant: à tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur une variété complexe *projective lisse* $X^{(n)}$ de dimension n et tout revêtement galoisien non ramifié $\pi : \tilde{X} \to X$ de groupe de Galois Γ, on associe des groupes de cohomologie L_2 notés $H_2^q(\tilde{X}, \mathcal{F})$ tels que:

1. Les $H_2^q(\tilde{X}, \mathcal{F})$ s'organisent en un foncteur cohomologique sur la catégorie des faisceaux cohérents sur X[6].

[6]Ce qui signifie qu'on dispose de la suite exacte longue de cohomologie attachée à une suite exacte courte de faisceaux.

2. Si $\mathcal{F}$ est localement libre, $H^0_2(\tilde{X},\mathcal{F})$ s'identifie au groupe des sections holomorphes L^2 du relevé à $\tilde{X}$ du fibré sous-jacent à $\mathcal{F}$.

3. Les $H^q_2(\tilde{X},\mathcal{F})$ appartiennent à une catégorie de Γ-modules sur laquelle existe une fonction dimension $\dim_\Gamma$ à valeurs réelles.

4. On a le théorème d'indice L^2 d'Atiyah [Ati1976]:

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^q \dim_\Gamma H^q_2(\tilde{X},\mathcal{F}) = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q \dim H^q(X,\mathcal{F}).$$

Le travail [Eys2000] avait pour but de formuler un analogue pour le cas des espaces complexes les plus généraux.

3.2.2 Faisceaux cohérents périodiques

Soit Γ un groupe dénombrable discret. Un Γ-*espace complexe* est un triplet $(\tilde{X},\Gamma,\rho)$ où $\tilde{X}$ désigne un espace complexe paracompact séparé, et ρ une action à gauche proprement discontinue de Γ sur $\tilde{X}$ par biholomorphismes [7]. Un *faisceau analytique cohérent* Γ-*périodique* sur le Γ-espace complexe $(\tilde{X},\Gamma,\rho)$ est un faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ sur $\tilde{X}$ muni d'une action compatible de Γ. Les faisceaux cohérents périodiques forment une catégorie abélienne $C_\Gamma(\tilde{X})$ dont la catégorie dérivée bornée sera notée $DC_\Gamma(\tilde{X})$.

La première partie de [Eys2000] construit par des méthodes faisceautiques des groupes de cohomologie L_p, $1 \leq p < \infty$, $H^*_{(p)}(\tilde{X},\mathcal{F})$ qui sont des Γ-modules topologiques et vérifient les propriétés 1 et 2 de notre liste de désiderata. Leur topologie est non séparée, ce qui n'est pas si grave; ce qui est plus grave est que pour $p \neq 2$, ils sont à ma connaissance presque incontrôlables.

3.2.3 Catégorie de Farber-Lück

Pour $p = 2$, il est agréable d'utiliser un joli formalisme dû à Farber et Lück indépendamment qui permet une très élégante nouvelle preuve [Farb1996] de l'invariance par homotopie des invariants de Novikov-Shubin. Les références originelles sur ces objets [NovShu1986] [NovShu1987] [GroShu1991] [GroShu1992] sont ainsi notablement simplifiées.

Soit Γ un groupe discret. On définit une algèbre involutive à trace $(\mathbb{C}\Gamma,*,\tau)$ en posant $(\sum a_g g)^* = \sum \bar{a}_g g^{-1}$, $\tau(\sum a_g g) = a_e$. Soit $\mathbb{C}\Gamma \xrightarrow{i} \mathcal{B}(l^2\Gamma)$ la représentation régulière gauche. Soit $W^*_l\Gamma$ la sous-algèbre de $\mathcal{B}(l^2\Gamma)$ qui est l'adhérence de l'image de i pour la topologie forte des opérateurs. Si $a \in \mathbb{C}\Gamma$, $a_g = (i(a)\delta_e,\delta_g)$. De ce fait, tout $a \in W^*_l\Gamma$ se représente comme somme d'une famille sommable (pour la topologie forte des opérateurs) $a = \sum a_g i(g)$. On peut construire une trace τ sur l'algèbre $\mathcal{A} = W^*_l\Gamma$ par la formule $\tau(a) = a_e = (a\delta_e,\delta_e)$. Posons $\mathcal{A}_2 = l^2\Gamma$ vu comme $\mathcal{A}$-module à gauche.

[7] Le noyau de $\Gamma \to Biholo(\tilde{X})$ peut être non trivial mais sera automatiquement fini

Définition 3.2.1 *Un $\mathcal{A}$-module à gauche $\mathcal{W}$ est dit hilbertien projectif s'il admet un produit scalaire hilbertien $(.,.)$ tel que $(ax,y)=(x,a^*y)$ et se plonge isométriquement dans le $\mathcal{A}$-module $\mathcal{A}_2\hat{\otimes}H$, H étant un espace de Hilbert sur lequel $\mathcal{A}$ agit trivialement. $\mathcal{W}$ est dit de type fini si H peut être pris de dimension finie. Un morphisme entre deux modules hilbertiens est une application linéaire bornée commutant aux actions respectives de $\mathcal{A}$.*

Proposition 3.2.2 *[Farb1996] Les catégories $E_f(\Gamma)$ et $\subset E(\Gamma)$ définies comme suit:*

- *Les objets de $E(\Gamma)$ sont les triplets (E_1,E_2,e) où E_1 et E_2 sont deux $\mathcal{A}$-modules hilbertiens et e une application linéaire continue commutant à $\mathcal{A}$.*
- *$Hom_{E(\Gamma)}((E_1,F_2,e),(F_1,F_2,f))$ est l'ensemble des classes d'équivalence de paires d'applications linéaires continues commutant à $\mathcal{A}$ $(\phi_1:E_1\to F_1,\phi_2:E_2\to F_2)$ telles que $\phi_2e=f\phi_1$, sous la relation d'équivalence $(\phi_1,\phi_2)\sim(\phi_1',\phi_2')\Leftrightarrow\exists T\in L_{\mathcal{A}}(E_2,F_1),\ \phi_2'-\phi_2=fT$.*
- *$E_f(\Gamma)$ est la sous-catégorie de $E(\Gamma)$ formée des objets (E_1,E_2,e) avec E_2 de type fini.*

sont des catégories abéliennes.

La catégorie abélienne $E_f(\Gamma)$ a une structure vraiment très simple. C'est une sous-catégorie de la catégorie des Γ-modules, elle est de dimension projective 1 et pour tout objet X, on dispose de la suite exacte canonique:

$$0\to T(X)\to X\to P(X)\to 0.$$

où $P(X)$ est un projectif de $E_f(\Gamma)$ [8] et $T(X)$ est un objet de torsion (sans morphisme non nul vers un projectif).

Invariants numériques des objets de $E_f(\Gamma)$

Γ-dimension Un Γ-module hilbertien projectif de type fini W réalisé dans $l_2\Gamma\otimes\mathbb{C}^n$ peut se laisser décrire par son projecteur orthogonal $p=(p_{ij})\in M_n(\mathcal{A}^{op})$. $\mathcal{A}^{op}$ est l'analogue de $\mathcal{A}$ construite à partir de la représentation régulière droite et possède une trace τ. On pose $\dim_\Gamma(W)=\sum_i\tau(p_{ii})$. Cette définition est indépendante de la réalisation. Cette fonction dimension se manipule comme dans l'algèbre linéaire classique, la principale différence est qu' elle peut prendre des valeurs réelles positives arbitraires:

- $\dim_\Gamma W=0\Longleftrightarrow W=0$.
- $\dim_\Gamma l_2\Gamma=1$.
- $\alpha\in Mor_{P(\Gamma)}(V,W)\Longrightarrow\dim_\Gamma V=\dim_\Gamma Ker(\alpha)+\dim_\Gamma\overline{Im(\alpha)}$.

[8] Les projectifs de $E_f(\Gamma)$ sont les modules hilbertiens projectifs.

- Si (W_n) est une suite décroissante de $\mathcal{A}$- modules hilbertiens de type fini, $\dim_\Gamma \cap_n W_n = \lim_n \dim_\Gamma W_n$.

- Si (W_n) est une suite croissante de sous-modules d'un module hilbertien de type fini $\dim_\Gamma \overline{\cup_n W_n} = \lim_n \dim_\Gamma W_n$.

La Γ-*dimension* d'un objet de $X \in P_f(\Gamma)$ est le nombre réel $\dim_\Gamma X := \dim_\Gamma P(X)$. Une propriété importante est que pour toute suite exacte $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$, on a $\dim_\Gamma X = \dim_\Gamma X' + \dim_\Gamma X''$.

Invariants de Novikov-Shubin Soit **NS** l'ensemble des germes en zéro de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$, croissantes, positives, nulles en 0. On appelle $\mathbf{NS}_d$ le quotient de **NS** par la relation d'équivalence $\sim_d$ définie par:

$$F \sim_d G \Longleftrightarrow \exists x_o > 0\ \exists C, c > 0,\ \forall x \leq x_o,\ cF(cx) \leq G(x) \leq CF(Cx).$$

Soit $A = (A_1, A_2, a)$ un objet de $E_f(\Gamma)$. Fixons deux métriques hilbertiennes h_1, h_2 sur A_1, A_2. Alors on peut construire la famille $\{E(\lambda)\}_{\lambda \geq 0}$ des projecteurs spectraux de a^*a. On a :

$$a^*a = E(0) + \int_0^{\|a\|^2} \lambda dE(\lambda).$$

On pose $F^{A,h_1,h_2}(x^2) = \dim_\Gamma E(x) - \dim_\Gamma E(0)$. Il est trivial que, pour tout autre couple de métriques h_1', h_2', $F^{A,h_1,h_2} \sim_d F^{A,h_1',h_2'}$ et on peut donc définir F^A comme la classe de $\sim_d$-équivalence de F^{A,h_1,h_2}. Moins trivial est le fait suivant: soient A et A' deux objets isomorphes de $T_f(\Gamma)$. Alors, $F^A = F^{A'} \in NS_d$. L'*invariant de Novikov-Shubin* d'un objet A de $E_f(\Gamma)$ est $NS(A) = F^{(T(A))}$.

3.2.4 Enoncés des principaux théorèmes de [Eys2000]

On note $D^b(E_f(\Gamma))$ la catégorie dérivée bornée de la catégorie abélienne $E_f(\Gamma)$.

Théorème 5 *([Eys2000]) Soit $\tilde{X}$ un Γ-espace complexe cocompact. Il existe un ∂-foncteur triangulé*

$$\mathbb{H}_2(\tilde{X}, \_) : D(C_{\Gamma,\chi}(\tilde{X})) \to D^b(E_f(\Gamma))$$

tel que, utilisant la notation $\mathbb{H}_2^k(\tilde{X}, \_) := H^k(\mathbb{H}_2(\tilde{X}, \_))$:

- *Pour tout faisceau cohérent périodique $\mathcal{F}$ et $i \in \mathbb{Z}$, l'élément de $\mathbb{H}_2^i(\tilde{X}, \mathcal{F})$ s'identifie au Γ-module $H^i_{(2)}(\tilde{X}, \mathcal{F})$.*

- *(Suite Spectrale de Leray) Pour tout morphisme propre Γ-équivariant $f : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ $\mathbb{H}_2(\tilde{X}, \_)$ et $\mathbb{H}_2(\tilde{Y}, \_) \circ Rf_*$ sont deux foncteurs naturellement isomorphes.*

- *(Théorème d'indice L_2 d'Atiyah) Pour tout complexe borné de faisceaux cohérents périodiques $\mathcal{F}^\bullet$,*

$$\sum_i (-1)^i \dim_\Gamma \mathbb{H}_2^i(\tilde{X}, \mathcal{F}^\bullet) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{H}_\Gamma^i(\tilde{X}, \mathcal{F}^\bullet)$$

où H_Γ^* désigne la cohomologie équivariante.

Remarque [Eys2000] travaille dans un degré de généralité légérement supérieur avec des faisceaux cohérents projectivement périodiques. Ceci pour accomoder le 'Vafa-Witten twisting trick' de [Gro1991].

Relation avec un travail de Campana et Demailly Un travail indépendant et simultané de Campana et Demailly [CamDem2001] permet également de retrouver la totalité des applications connues de cette théorie en dépit du fait que les faisceaux projectivement périodiques n'y sont pas envisagés et que la construction d'invariants de Novikov-Shubin n'y est pas abordée. Quant aux faisceaux projectivement périodiques, [Gro1991] indiquait clairement que cette généralisation ne coûtait pas grand chose.

Questions sur le comportement des invariants de Von Neumann Le comportement des invariants de Novikov-Shubin des faisceaux cohérents reste mystérieux. Il en va d'ailleurs ainsi de leur contrepartie topologique. L'étude de ce comportement me semble plus être un problème ouvert intéressant qu'un outil pour la géometrie complexe. Dans tous les exemples que je sais calculer, ils exhibent le comportement décrit dans la question suivante:

Question 5 *Est-il vrai que pour tout faisceau cohérent périodique $\mathcal{F}$ sur un Γ-espace complexe cocompact $\tilde{X}$ et pour tout entier q, on ait*

- $\dim_\Gamma(H_2^q(\tilde{X}, \mathcal{F})) \in \mathbb{Q}$*?*
- $NS(H_2^q(\tilde{X}, \mathcal{F}))(x) = 0$ *(cohomologie réduite) ou bien* $\sim_d x^\alpha$ *avec* $\alpha \in \mathbb{Q}$*?*

Un tel comportement est conjecturé pour le cas topologique[9].

3.3 Applications

Une question de Kollár Soit X une variété kählérienne connexe de revêtement universel $\tilde{X}$ et de groupe fondamental Γ. Soit $\Delta \subset \Gamma$ un sous-groupe. Soit $\pi_\Delta : \tilde{X}_\Delta = \Delta \backslash \tilde{X} \to X$ le revêtement non ramifié associé. F. Campana, [Cam1994], Théorème 3.5, construit une application méromorphe $\rho_\Delta : \tilde{X}_\Delta \to \tilde{Z}_\Delta$ de lieu d'indétermination I, deux ouverts analytiques non vides $\tilde{X}_\Delta^0 \subset \tilde{X}_\Delta$ et $\tilde{Z}_\Delta^0 \subset \tilde{Z}_\Delta$ tels que $I \cap \tilde{X}_\Delta^0 = \emptyset$, $\rho_\Delta(\tilde{X}_\Delta^0) = \tilde{Z}_\Delta^0$, $\rho_\Delta : \tilde{X}_\Delta^0 \to \tilde{Z}_\Delta^0$ est propre à fibres connexes

[9] Pour tout Γ-CW-complexe cocompact $\tilde{C}$, on définit par le complexe des cochaînes L_2 un invariant d'homotopie $H_2^*(\tilde{C})$. La première question connue sous le nom de conjecture d'Atiyah est un peu moins mal comprise que la seconde.

et, pour presque tout $p \in \tilde{X}^0_\Delta$, $\rho_\Delta^{-1}(\rho_\Delta(p))$ est le plus grand sous-espace analytique complexe compact et connexe de $\tilde{X}^0_\Delta$ contenant p. Lorsque Δ est distingué, $G = \Gamma/\Delta$ agit proprement discontinuement sur $\tilde{Z}_\Delta$, l'application $X \to G\backslash\tilde{Z}^0_\Delta$ déduite par passage au quotient coïncide avec l'application de Shafarevich sh^Δ construite par [Kol1993].

Théorème 6 *([Eys1999b]) Soit X une variété projective algébrique et $\Delta \subset \pi_1(X)$ un sous-groupe distingué d'indice infini.*

Soit X_g une fibre générale de ρ_Δ et $i : X_g \to X$ le morphisme naturel. Soit L un fibré holomorphe linéaire sur X de dimension de Kodaira maximale [10] *et de négativité modérée près de $i(X_g)$* [11].

Si le diviseur $K_{X_g} \otimes i^*L$ est effectif, le diviseur $K_X \otimes L$ est également effectif.

Cet énoncé est conjecturé par Kollár (conjecture 18.8.1 de [Kol1995]). La restriction sur la positivité modérée est absente de la conjecture, mais un contre-exemple existe pour cet énoncé plus ambitieux. Ce résultat a été démontré indépendamment dans [Tak1999].

Variétés kählériennes à petit π_2 Présentons une généralisation d'un résultat de Green et Lazarsfeld pour les variétés de dimension d'Albanese maximale [GreLaz1987]. Si T est un complexe simplicial, T possède une application simpliciale $n : T \to B\pi_1(T)$ où $B\pi_1(T)$ est un complexe simplicial asphérique de groupe fondamental $\pi_1(T)$. On a $H^*(\pi_1(T), \mathbb{R}) = H^*(B\pi_1(T), \mathbb{R})$. On dit qu'un classe de cohomologie $c \in H^*(T, \mathbb{R})$ provient du groupe fondamental si elle est contenue dans $n^*H^*(\pi_1(T), \mathbb{R})$.

Théorème 7 *([Eys1999b]) Soit X une variété kählérienne connexe compacte de dimension n, possédant une classe de cohomologie $c \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ provenant de $\pi_1(X)$ et représentable par un courant strictement positif fermé T*[12]*, alors $\chi(X, K_X) \geq 0$.*

Si, de plus, $\chi(X, K_X) > 0$, alors $\tilde{X}$ porte un espace de dimension infinie de formes holomorphes L^2 de degré n. En particulier, le noyau de Bergmann de $\tilde{X}$ est non nul.

Ce résultat apporte une réponse partielle aux conjectures 18.8.1 p.185 et 18.12.1 p.187 de [Kol1995]. La preuve est inspirée directement du 'Vafa-Witten twisting trick ' de [Gro1991] et consiste à faire jouer au théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg le rôle du théorème d'annulation sur les formes harmoniques L^2 de [Gro1991].

Un corollaire est que si X est une variété kählérienne telle que $\chi(X, K_X) < 0$, alors $\pi_2(X) \otimes \mathbb{Q}$ est non nul. Un autre corollaire est que X est de type général sous les conditions du théorème 7, si $\chi(X, K_X) \neq 0$. Si on suppose K_X nef, ce

[10] L'inélégant anglicisme 'big' se dit aussi couramment.

[11] C'est le cas, par exemple, si L est big et nef. Un fibré linéaire holomorphe big est *de négativité modérée (resp. près de $Z \subset X$)* s'il possède une métrique singulière de courbure strictement positive dont l'idéal de Nadel [Dem1996] est trivial (resp. au voisinage de Z).

[12] i.e.: $\exists a > 0,\ T \geq a\omega$

fait est un corollaire de la proposition 13.14 dans le livre de J.Kollár [Kol1995] ou encore du théorème 4.1 de [Cam1995] et résulte d'un argument de F. Campana [Cam1994].

L'hypothèse que $[T]$ provient de $\pi_1(X)$ signifie qu'il existe une famille $(L_\epsilon)_{\epsilon\in\mathbb{R}}$ de fibrés linéaires holomorphes définis sur le revêtement universel de X et sur lesquels agit de façon compatible une extension centrale de $\pi_1(X)$ par S^1. Ces objets sont des exemples des faisceaux cohérents projectivement périodiques de [Eys2000].

Théorème de Nakai-Moishezon réel [CamPet1990] étend aux diviseurs réels le classique critère de Nakai-Moishezon et démontre l'énoncé suivant:

Soit X une varieté compacte projective sur $\mathbb{C}$. Soit $NS(X)$ le groupe de Néron-Severi de X. Toute classe $[\omega] \in NS(X) \otimes \mathbb{R}$ vérifiant $[\omega]^d.Z > 0$ pour tout sous-espace algébrique Z réduit de dimension d de X est une classe de Kähler.

Le problème de l'extension aux classes transcendantes fut ouvert quelque temps. Est-il vrai que toute classe $[\omega]$ de type $(1,1)$ sur une variété projective algébrique X vérifiant $[\omega]^d.Z > 0$ pour tout sous-espace algébrique Z réduit de dimension d de X est une classe de Kähler?

Après [CamPet1990], deux progrès partiels furent enregistrés sur cette question; Lamari -et indépendamment Buchdahl-, établit cet énoncé quand X est une surface [Lam1999]. Dans le cas de dimension supérieure [Eys1998] a apporté une contribution que nous allons décrire.

Soit X une variété projective algébrique complexe. On note $H^2(\pi_1(X),\mathbb{R})^{1,1}$ l'intersection de $H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ avec l'image de l'application $H^2(\pi_1(X),\mathbb{R}) \to H^2(X,\mathbb{R})$ induite par l'application classifiante $X \to B\pi_1(X)$.

Théorème 8 *([Eys1998]) Soit X une variété complexe projective lisse compacte.*

Soit $[\omega] \in H^2(\pi_1(X),\mathbb{R})^{1,1} + NS(X) \otimes \mathbb{R}$. $[\omega]$ est la classe de cohomologie d'une métrique de Kähler si et seulement si pour chaque sous-espace algébrique d-dimensionnel réduit $Z \subset X$, $[\omega]^d.Z > 0$.

L'hypothèse $[\omega] \in H^2(\pi_1(X),\mathbb{R})^{1,1} + NS(X)\otimes\mathbb{R}$ signifie que la classe $[\omega]$ est la limite d'une suite de premières classes de Chern de fibré linéaire holomorphe hermitien projectivement périodique.

J'avais pensé publier ce résultat dans [Eys2004] puisque c'est un des principaux outils de cette étude. Comme le problème reçut une solution inconditionnelle dans le cas kählérien -une généralité bienvenue et qui me surprit- par [DemPau2001] avec une méthode reposant sur la solution d'Aubin-Yau de l'équation de Monge-Ampère complexe, [Eys1998] ne fut pas publié et remplacé dans [Eys2004] par une référence à [DemPau2001].

Un programme que je cherchais à développer pour le cas projectif fut également abandonné. Il me semble très probable toutefois que les méthodes de cohomologie L_2 convenablement développées puissent établir ce résultat et possible d'obtenir une caractérisation numérique du cône pseudo-effectif d'une variété projective algébrique X généralisant le résultat obtenu dans [BDPP2004] qui caractérise sa trace sur $NS(X) \otimes \mathbb{R}$.

4 Conjecture de Shafarevich de convexité holomorphe

Cette section décrit le résultat principal de [Eys2004].

4.1 Historique

Un outil essentiel dans le développement historique des théories classiques des surfaces de Riemann des fonctions abéliennes et des fonctions modulaires est la structure du revêtement universel des variétés algébriques auxquelles elles se rapportent, structure donnée par le théorème d'uniformisation de Riemann dans le premier cas. Ceci est apparent dans le classique traité de Siegel [Sie1969-1972].

Le problème ouvert principal sur l'uniformisation en plusieurs variables complexes est connu sous le nom de conjecture[13] de Shafarevich de convexité holomorphe. Il se formule ainsi:

Question 6 *Est-il vrai que le revêtement universel d'une variété projective algébrique complexe soit holomorphiquement convexe?*

Rappelons qu'une variété complexe est *holomorphiquement convexe* s'il elle possède une application propre vers un espace de Stein [14] ou, de façon équivalente, si pour toute suite de points s'échappant à l'infini il existe une fonction holomorphe dont les valeurs sur les points de cette suite tendent vers l'infini.

La réponse à cette question est positive pour les courbes et les surfaces elliptiques [GurSha1985] (plus généralement pour les surfaces de dimension de Kodaira ≤ 1), mais le problème est ouvert pour les surfaces de type général. Une opinion très répandue et que je partage est que la réponse à cette question est probablement négative, que des candidats à être des contre-exemples se trouvent dans [BogKat1998] et que leur statut ne pourra être établi que par la théorie géometrique (ou combinatoire) des groupes.

4.2 Comment approcher la conjecture de Shafarevich?

Soit X une variété projective lisse complexe connexe non vide. Soit H un sous-groupe distingué de $\pi_1(X)$. Selon Kollár [Kol1993], pour prouver que $\widetilde{X^{univ}}/H$ est holomorphiquement convexe, la première étape est de construire a priori un morphisme de Shafarevich.

[13]Bien que [Sha1977], p.408 ne s'avance pas jusqu'à poser ce problème comme une conjecture au sens strict: il se contente de formuler un espoir.

[14]Si on demande que l'espace de Stein en question soit normal et que l'application holomorphe propre soit surjective à fibres connexes, ces deux objets sont alors uniquement déterminés et connus comme la réduction de Cartan-Remmert de la variété.

Définition 4.2.1 *Un morphisme surjectif à fibres connexes entre variétés normales projectives complexes $sh^H : X \to sh^H(X)$ est un morphisme de Shafarevich s'il vérifie la propriété suivante:*

Soit Z une variété propre lisse connexe et $f : Z \to X$ un morphisme. $sh^H \circ f$ est un morphisme constant si et seulement si $Im(\pi_1(Z) \to \pi_1(X)/H)$ est fini .

Quand un morphisme de Shafarevich existe, au sens de la définition 4.2.1, il est uniquement déterminé. L'exemple le plus simple est que la factorisation de Stein du morphisme d'Albanese est le morphisme de Shafarevich $sh^{\mathcal{C}_1\pi_1(X)}$, $\mathcal{C}_1\pi_1(X)$ désignant le groupe dérivé [Kol1995]. Ce morphisme est aussi le morphisme de Shafarevich $sh^{\mathcal{C}_\infty\pi_1(X)}$, $\mathcal{C}_\infty\pi_1(X)$ désignant l'intersection des termes de la série centrale descendante [Kat1997]. Si on choisit un quotient net $H^n_{\mathbb{C}}/\Gamma$, la factorisation de Stein de tout morphisme $X \to H^n_{\mathbb{C}}/\Gamma$ est le morphisme de Shafarevich $sh^{\ker(\pi_1(X)\to\Gamma)}$, [Kol1995]. On peut remplacer l'espace hyperbolique complexe par tout domaine symétrique borné.

Les références [Cam1994] [Kol1993] réalisent un progrès substantiel en construisant une version biméromorphe du morphisme de Shafarevich, mais ne construisent pas de fonctions holomorphes.

Si $\widetilde{X^{univ}}/H$ est holomorphiquement convexe, $sh^H(X)$ est le quotient de sa réduction de Cartan-Remmert $S(\widetilde{X^{univ}}/H)$ par $\pi_1(X)/H$ (qui opère proprement discontinuement). Plus généralement, un corollaire de l'existence de sh^H est qu'existe une application holomorphe propre $\widetilde{X^{univ}}/H \to S(\widetilde{X^{univ}}/H)$ dont les fibres sont les sous-espaces complexes compacts connexes maximaux de $\widetilde{X^{univ}}/H$.

La seconde étape, la première étant supposée acquise, consiste à montrer que $S(\widetilde{X^{univ}}/H)$ est de Stein; pour ce faire le moyen le plus puissant consiste à construire une fonction fortement plurisousharmonique exhaustive sur cet espace complexe normal, car il est bien difficile de produire des fonctions holomorphes directement.

En raison de nos difficultés à comprendre la partie du groupe fondamental qui n'est pas vue par les représentations de dimension finie, il est difficile de faire des progrès supplémentaires sur les deux étapes de la conjecture de Shafarevich sans supposer d'une façon comme d'une autre l'existence de représentations de dimension finie et d'image infinie du groupe fondamental. Les progrès réalisés dans les références [Nap1990] [Kat1997] et [KatRam1998] suivent cette direction.

Selon une communication personnelle de N. Mok, c'est au début des années 1980 qu'a été reconnue par Y.T. Siu le potentiel des applications harmoniques pour approcher la conjecture de Shafarevich dans ce contexte et c'est cette approche que [Eys2004], comme [KatRam1998], suit. C'est pour la seconde étape que cette idée me semble la plus utile. En effet, le but de l'application harmonique équivariante associée à une représentation réductive du groupe fondamental dans $GL_n(\mathbb{C})$ est l'espace des matrices hermitiennes définies positives, un espace symétrique non-compact qui porte de nombreuses fonctions convexes non constantes. Or la composée d'une fonction convexe et d'une application harmonique (resp. pluriharmonique) est faiblement sous-harmonique (resp. plurisousharmonique).

Dès lors, si H est contenu dans le noyau d'une représentation réductive non unitaire dans $GL_n(\mathbb{C})$, $S(\widetilde{X^{univ}/H})$ porte une fonction faiblement plurisousharmonique non triviale. Pour produire une fonction fortement plurisousharmonique, il faut bien sûr plus travailler.

4.3 Conjecture de Shafarevich réductive

Il est donc possible d'essayer de prouver la convexité holomorphe de $\widetilde{X}/H_S$ où S est un ensemble de représentations de dimension finie du groupe fondamental de X, une variété kählérienne compacte et H_S l'intersection de leurs noyaux.

Le cas abélien enseigne que des conditions relevant de la théorie de Hodge et portant sur S sont nécessaires pour que ce revêtement puisse être holomorphiquement convexe.

Théorème 9 *([Eys2004]) Soit X une variété projective-algébrique complexe connexe lisse. Soit M un ensemble constructible absolu (au sens de [Sim1993a]) et quasi compact de classes de conjugaison de représentations complexes linéaires réductives* [15] *de $\pi_1(X)$ dans un groupe algébrique réductif G défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Le revêtement Galoisien de X, $\widetilde{X}_M = \widetilde{X^{univ}/\cap_{\rho\in M(\overline{\mathbb{Q}})}\ker(\rho)}$ correspondant à l'intersection des noyaux des éléments de M est holomorphiquement convexe.

Plutôt que de donner une définition complète des ensembles constructibles absolus, nous nous contenterons des faits suivants:

- L'espace des modules $M(X,G)$ des représentations réductives de $\pi_1(X)$ dans G est constructible absolu et quasi compact (acqc).
- Les acqc sont stables par intersection finie, réunion finie, passage au complémentaire et passage à l'adhérence.
- Dès que ρ est un point isolé dans $M(X,G)$, le singleton $\{\rho\}$ est acqc.
- Les ensembles acqc sont invariants sous plusieurs constructions; étant donné un morphisme $f : Y \to X$ de variétés projectives lisses connexes, l'image et l'image réciproque sous $f^* : M(X,G) \to M(Y,G)$ d'un acqc est acqc; étant donné $\mu : G \to G'$ un morphisme, l'image et l'image réciproque sous $\mu_* : M(X,G) \to M(X,G')$ d'un acqc est acqc.
- Etant donné $f : Y \to X$ un morphisme dominant et $i \in \mathbb{N}$ l'ensemble $M^i_f(X, GL_n)$ des systèmes locaux V sur Y tels que $R^i f_* V$ est un système local est acqc et l'image et l'image réciproque sous $R^i f_* : M^i_f(X, GL_n) \to M(Y, GL_{n'})$ d'un acqc est acqc.

[15] Par défintion, une représentation est réductive si et seulement si l'adhérence de Zariski de son groupe de monodromie est un groupe algébrique réductif.

- Les points complexes d'un ensemble acqc fermé M sont stables sous l'action de $\mathbb{C}^*$ definie par by [Sim1988] en termes de fibrés de Higgs, dont l'ensemble des points fixes M^{VHS} est constitué de VSH.

Donnons quelques corollaires. Si $\rho : \pi_1(X) \to GL_n(\bar{\mathbb{Q}})$ est une représentation réductive rigide, $\widetilde{X}_\rho$ est holomorphiquement convexe. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Soit M_n l'ensemble des représentations réductives à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$, $\widetilde{X}_{M_n}$ le revêtement correspondant à l'intersection de leurs noyaux est holomorphiquement convexe. D'où la conjecture de Shafarevich sous l'hypothèse que l'intersection de ces noyaux est un groupe fini. Si X est une variété projective algébrique complexe connexe dont le π_1 posséde une représentation linéaire complexe d'image infinie, le revêtement universel de X porte une fonction holomorphe non constante.

La description de ce résultat serait incomplète si n'était pas mis en exergue l'usage technique crucial dans la preuve de [Eys2004] de [JosZuo2000], [LasRam1996] et [Zuo1999] et l'inspiration apportée par [Mok1992] et [Kat1998].

Les ingrédients nouveaux qu'utilise [Eys2004] sont au nombre de trois. Le premier est une utilisation systématique du théorème d'ubiquité de Simpson pour construire et étudier le morphisme de Shafarevich. Comme les VSH peuvent être décrites comme les représentations du groupe fondamental telles que l'application harmonique associée se relève en une application holomorphe, la preuve se passe intégralement dans le cadre holomorphe, ce qui permet plus facilement d'avoir des énoncés biréguliers plutôt que birationnels. Le second est l'usage du critère [Eys1998]. Celui-ci sert à comprendre comment à partir des fonctions faiblement plurisousharmoniques attachées aux représentations réductives archimédiennes et non-archimédiennes, selon l'idée de Siu décrite plus haut, produire une fonction fortement plurisousharmonique. Ce problème est analogue (et ramené dans [Eys2004]) au problème suivant: étant donnée une famille de classes nef (ie. dans l'adhérence du cône kählérien) sur une variété kählérienne compacte donnée, donner des conditions pour qu'une classe kählérienne se trouve dans l'enveloppe convexe de cette famille de classes nef, problème auquel [Eys1998] répond en donnant une série de conditions numériques[16]. Le troisième ingrédient consiste en la généralisation au cas non archimédien et l'étude des propriétés numériques des classes nef attachées aux représentations réductives archimédiennes du groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte qui avaient été introduites par [Mok1992][17]. La reconnaissance du rôle des ensembles constructibles absolus s'est faite au cours de l'élaboration de ce troisième ingrédient.

[16]La restriction de [Eys1998] est satisfaite ici quitte à passer à un revêtement ramifié fini; ce qui est inoffensif.

[17]En liaison avec ce qui rétrospectivement apparaît comme une approche à la construction du morphisme de Shafarevich dans certains cas particuliers.

4.4 Conjecture de Shafarevich linéaire

Nous terminons ce mémoire en citant un travail en préparation avec L. Katzarkov, T. Pantev et M. Ramachandran. Soit M comme dans le theorème 9. Soit $\mathcal{T}_M^{VHS}$ la sous-catégorie Tannakienne pleine de la catégorie Tannakienne des systèmes locaux engendrée par les élements de M^{VHS}. Ses objets se laissent décrire comme suit. Ce sont les sous-quotients de $\alpha_1(\rho_1) \otimes \ldots \otimes \alpha_s(\rho_s)$, avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ une collection finie de représentations linéaires rationelles de G et $\rho_1, \ldots, \rho_s$ sont des éléments de M^{VHS}. Les objets de $\mathcal{T}_M^{VHS}$ sont sous-jacents à des VHS. Soit T_M^{VMHS} la catégorie Tannakienne épaisse des Variations de Structure de Hodge Mixte dont les gradués sont des objets de $\mathcal{T}_M^{VHS}$. Soit Γ_M^∞ le quotient de $\pi_1(X)$ par l'intersection des noyaux des objets de T_M^{VMHS} et de ceux de M. Le groupe Γ_M^∞ a des quotients Γ_M^k correspondant à l'intersection des noyaux des VSHM de T_M^{VMHS} dont la filtration par les poids est de longueur $k+1$. En particulier $\Gamma_M^0 = \Gamma_M$. Notation : H_M^k désigne le noyau de $\pi_1(X) \to \Gamma_M^k$.

Lorsqu'il sera achevé, [EysKatPanRam2004] contiendra une preuve de l'énoncé suivant. Soit X une variété projective algébrique complexe connexe lisse. Soit M un ensemble constructible absolu quasi compact, défini over $\mathbb{Q}$ de classes de conjugaison de représentations linéaires réductives de $\pi_1(X)$ dans un groupe algébrique réductif G défini sur $\mathbb{Q}$. Pour tout sous-groupe H de $\pi_1(X)$ tel que $H_M^\infty \subset H \subset H_M^1$, le revêtement topologique de X, $\widetilde{X^{univ}}/H$ est holomorphiquement convexe. En particulier, la conjecture de Shafarevich est vraie quand le groupe fondamental est presque linéaire.

5 Conclusion

La totalité des résultats présentés ici concernent des variétés algébriques dont le groupe fondamental est infini et dont la structure du revêtement universel exerce une influence dominante sur leur géometrie. Ils illustrent le fait que cette classe est vaste et intéressante.

Ils ne constituent aucunement un point final sur l'uniformisation en plusieurs variables complexes dont la complexité est reconnue depuis longtemps.

De nombreux développements de ces idées sont possibles dans diverses directions, déjà évoquées dans ces notes. Prolonger les résultats sur le phénomène des lacunes au cas non-compact semble moins difficile -mais moins intéressant- que de trouver la bonne formulation du théorème 2 dans ce cas. [Eys2004] [EysKatPanRam2004] permettent de commencer à comprendre en assez grand détail la structure du revêtement universel d'une variété projective lisse complexe dont le groupe fondamental est linéaire et, plus généralement, des revêtements linéaires d'une variété projective lisse complexe arbitraire. J'espère pouvoir dans un futur proche utiliser cette compréhension pour étudier dans le cas des variétés projectives algébriques complexes la conjecture d'Atiyah de rationalité des nombres de Betti L_2 et la rationalité des invariants de Novikov-Shubin.

Pour le cas général, le point d'achoppement pour comprendre l'uniformisation en plusieurs variables complexes, reste le peu d'information que nous avons sur les groupes kählériens du moins lorsqu'ils ont peu de représentations linéaires d'image infinie. On ignore par exemple s'il existe un groupe kählérien infini n'ayant pas d'autre représentation linéaire de dimension finie que la représentation triviale ou s'il en existe un possédant la propriété (T) de Kazhdan, résiduellement fini, et n'ayant pas de représentations linéaires de dimension finie et d'image infinie.

References

[ABCKT1996] Amoros, J. , Burger, M. , Corlette, K. , Kotschick, D. et Toledo, D. *Fundamental Groups of Compact Kähler Manifolds*, Math. Surv. and Mono. **44**, AMS (1996).

[Ati1976] Atiyah, M. *Elliptic operators, discrete groups and Von Neumann algebras* Soc. Math.Fr. Asterisque **32-33** (1976) 43-72.

[AMRT1975] Ash, A.; Mumford, D.; Rapoport, M.; Tai, Y. *Smooth compactification of locally symmetric varieties. Lie Groups: History, Frontiers and Applications*, Vol. IV. Math. Sci. Press, Brookline, Mass., 1975.

[BogKat1998] Bogomolov, F. et Katzarkov, L. *Complex projective surfaces and infinite groups*, Geom. Funct. Anal. **8** (1998), 243-272.

[BDPP2004] Boucksom, S. , Demailly, J.P. , Paun, M. et Peternell, T. *The pseudo-effective cone of a compact Khler manifold and varieties of negative Kodaira dimension.* math.AG/0405285.

[Cam1994] Campana, F. *Remarques sur le revêtement universel des variétés kählériennes*, Bull. Soc. Math. Fr. **122** (1994), 255-284.

[Cam1995] Campana, F. *Fundamental group and positivity of cotangent bundles of compact Kähler manifolds*, J. Alg. Geo. **4** (1995), 487-502.

[CamDem2001] Campana, F. et Demailly, J.P. *Cohomologie L_2 sur les revêtements d'une variété complexe compacte*, Ark. Mat. **39** (2001), 263-282.

[CamPet1990] Campana, F. et Peternell, T. *Algebraicity of the ample cone of projective varieties*, J. reine angew. Math. **407** (1990) 160-166.

[Cor1988] Corlette, K. *Flat G-bundles with canonical metrics*, J. Diff. Geo. **28** (1988), 361-382.

[Dem1996] Demailly J.P. *L^2 Vanishing theorems for Positive Line Bundles and Adjunction Theory*, in *Transcendental Methods in Algebraic Geometry*, édité par F. Catanese et C. Ciliberto, Lect. Notes in Math. **1646** (1996), Springer Verlag.

[DemPau2001] Demailly, J.P. et Paun, M.*Numerical characterization of the Kähler cone of a compact Kähler manifold*, math.AG/0105176, à paraitre dans Annals of Math.

[EelSam1964] Eells J. et Sampson, J.H. *Harmonic mappings of Riemannian manifolds* Amer. Journ. Math. **86** (1964) 109-160.

[Eys1994] Eyssidieux, P. *Variations de Structure de Hodge: Inégalités d'Arakelov locales et globales*, Thèse, Paris XI (1994).

[Eys1997] Eyssidieux, P. *La caractéristique d'Euler du complexe de Gauss-Manin*, J. reine angew. Math **490** (1997),155-212.

[Eys1999a] Eyssidieux, P. *Kähler hyperbolicity and variations of Hodge structures*, in *New Trends in Algebraic Geometry*, ed. K. Hulek, F. Catanese, C. Peters and M. Reid, Cambridge University Press (1999), 71-92.

[Eys1999b] Eyssidieux, P. *Systèmes linéaires adjoints* L_2, Ann. Inst. Fourier **49** (1999), 141-176.

[Eys2000] Eyssidieux, P. *Invariants de Von Neumann des faisceaux cohérents*, Mathematische Annalen **317**(2000), 527-566.

[Eys1998] Eyssidieux, P. *Un théoréme de Nakai-Moishezon pour certaines classes de type (1,1)*, Prépublication n. **133** du Laboratoire Emile Picard, math.AG/9811065, non publié.

[Eys2004] Eyssidieux, P.*Sur la convexité holomorphe des revêtements linéaires réductifs d'une variété projective algébrique complexe*, Inv. Math. **156** (2004), 503-564.

[EysMok1995] Eyssidieux, P. et Mok, N. *Characterization of certain holomorphic geodesic cycles on Hermitian locally symmetric manifolds of the non-compact type*, in *Modern Methods in Complex Analysis: The Princeton Conference in Honor of Gunning and Kohn*, ed. T. Bloom, D. Catlin, J. D'Angelo and Y.-T. Siu; Annals of Mathematics Studies, Volume **138**, Princeton University Press (1995), 85-118.

[EysMok2004] Eyssidieux, P. et Mok, N. *On the Validity or Failure of Gap Rigidity for Certain pairs of Bounded Symmetric Domains*, Prépublication no. 283 du Laboratoire de Mathématiques Emile Picard, Mars 2004, Math.AG/0403270, à paraitre dans le volume de Asian J. Math. en l'honneur de A. Borel .

[EysKatPanRam2004] Eyssidieux, P., Katzarkov, L., Pantev, T. et Ramachandran, M. *en préparation.*

[Farb1996] Farber, M.S. *Homological algebra of Novikov-Shubin invariants and Morse inequalities*, GAFA, Vol. **6**, n^o **4** (1996), 628-665.

[GreLaz1987] Green M. et Lazarsfeld R. *Deformation theory, Generic vanishing theorems and some conjectures of Enriques, Catanese and Beauville*, Inv. Math. **90** (1987), 389-407.

[Gri1973] Griffiths, P. *Periods of integrals on algebraic varieties, III*, Publ. Math. IHES **43**, 1973, 125-180.

[GriSch1969] Griffiths, P. et Schmid, W. *Locally homogenous complex manifolds*, Acta Mathematica **123** (1969),253-301.

[Gro1991] Gromov, M. *Kähler hyperbolicity and L_2 Hodge theory*, Journ. Diff. Geom. **33**, 1991, 263-291.

[GroSch1992] Gromov, M. et Schoen, R. *Harmonic maps into singular spaces and p-adic superrigidity for lattices in groups of rank one*, Publ. Math. IHES **76** (1992), 165-246.

[GroShu1991] Gromov M. et Shubin M *Von Neumann spectra near zero*, GAFA **1** (1991), 375-404.

[GroShu1992] Gromov M. et Shubin M *Near-cohomology of Hilbert complexes and topology of non-simply connected manifolds*, Astérisque **210** (1992), 283-294.

[GurSha1985] Gurjar, R.V. et Shastri, A.R.*Covering spaces of elliptic surfaces*, Compositio Math. **54** (1985), 95-104.

[Iha1966] Ihara, S. *Holomorphic imbeddings of symmetric domains into a symmetric domain*, Proc. Japan Acad. Sci., **42** (1966), 193-197.

[JosZuo2000] Jost, J. et Zuo, K. *Harmonic maps into Bruhat-Tits Buildings and Factorizations of p-Adically Unbounded and Non Rigid Representations of π_1 of Algebraic Varieties, I* J. Alg. Geom **9** (2000) 1-42.

[Kat1997] Katzarkov, L. *Nilpotent Groups and universal coverings of smooth projective manifolds* Journ. Diff. Geom. **45** (1997), 336-348.

[Kat1998] Katzarkov, L. *On the Shafarevich maps*, Proc.Symp. Pure Math., **62**, Santa Cruz 1995, part 2, 173-216.

[KatRam1998] Katzarkov, L. et Ramachandran, M. *On the universal coverings of algebraic surfaces*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série, **31** (1998), 525-535.

[Kol1993] Kollár, J. *Shafarevich maps and plurigenera of algebraic varieties*, Invent. Math. **113** (1993), 177-215.

[Kol1995] Kollár, J. *Shafarevich maps and Automorphic Forms*, Princeton University Press (1995).

[Lam1999] Lamari, A. *Courants kählériens et surfaces compactes*, Ann. Inst. Fourier **49** (1999), 263-285.

[LasRam1996] Lasell, B. et Ramachandran, M. *Observations on harmonic maps and singular varieties*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **29** (1996), 135-148.

[Mok1987] Mok, N. *Uniqueness theorems of Hermitian metrics of seminegative curvatures on quotients of bounded symmetric domains*, Ann. Math. **276**(1987), 105-152.

[Mok1991] Mok, N. *Aspects of Kähler Geometry on Arithmetic Varieties* in Several complex variables and complex geometry, Part 2 (Santa Cruz, 1989) Proc. Symp. Pure Math **52** Part 2, AMS, (1991), 335-396.

[Mok1992] N. Mok *Factorization of semisimple discrete representations of Kähler groups*, Invent. Math. **110** (1992), 557-614.

[Mok2002] Mok, N. *Characterization of certain holomorphic geodesic cycles on quotients of bounded symmetric domains in terms of tangent subspaces*, Comp. Math. **132**(2002), 289-309.

[Nap1990] Napier, T. *Convexity properties of smooth projective varieties*, Math. Ann. **286** (1990), 433-480.

[NovShu1986] Novikov, S. et Shubin M., *Morse inequalities and Von Neumann II_1 factors*, Dokl. Akad. Nauk. **34** no. **1** (1986), 289-292.

[NovShu1987] Novikov, S. et Shubin, M. *Morse inequalities and Von Neumann invariants of non simply connected manifolds*, Sov. Math. Dok. **34** (1987), 79-82.

[Sam1986] Sampson, J. *Applications of harmonic maps to Kähler geometry* Contemp. Math. **49** (1986), 125-123.

[Sat1980] Satake, I. *Algebraic structures of symmetric domains*, Publications of the Mathematical Society of Japan **14**, Iwanami Shoten and Princeton University Press (1980).

[Sha1977] Shafarevich, I. *Basic Algebraic Geometry*, Springer (1977).

[Sie1969-1972] Siegel, C.L. *Topics in Complex Function Theory*, Vol. I (1969), Vol. II (1971), Vol. III (1972), Wiley.

[Sim1988] Simpson, C. *Constructing Variations of Hodge Structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization.* Journ. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 867-918.

[Sim1992] Simpson, C. *Higgs bundles and local systems* Publ. Math. IHES **75** (1992), 5-95.

[Sim1993a] Simpson, C. *Subspaces of moduli spaces of rank one local systems*, Ann. Sci. ENS **26** (1993), 361-401.

[Sim1993b] Simpson, C. *A Lefschetz theorem for π_0 of the integral leaves of a holomorphic one-form*, Comp. Math. **87** (1993), 99-113.

[Sim1994] Simpson, C. *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety* , I, Pub. Math. IHES **79** (1994), 47-129; II, Pub. Math. IHES **80** (1994), 5-79.

[Siu1980] Siu, Y.T. *The complex analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds* Ann. Math. **112** (1980), 73-111.

[Tak1999] Takayama, S. *Non Vanishing Theorems on an algebraic variety with large fundamental group* J. Algebraic Geom. **8**(1999), 181-195.

[Tak2001] Takayama, S. *On the fundamental groups associated to contractions of extremal rays* J. Algebraic Geom. **10**(2001), 713-724.

[Zuc1979] Zucker, S. *Hodge theory with degenerating coefficients. L_2 cohomology in the Poincar metric.* Ann. of Math. **109** (1979), no. 3, 415–476.

[Zuc1981] Zucker, S. *Locally homogenous variations of Hodge structures*, L'Enseignement Mathématique, $2^{ème}$ série, **27** (1981) 243-276.

[Zuo1999] Zuo, K. *Representations of fundamental groups of algebraic varieties*, LNM **1708** , Springer (1999).