DÉMONSTRATION

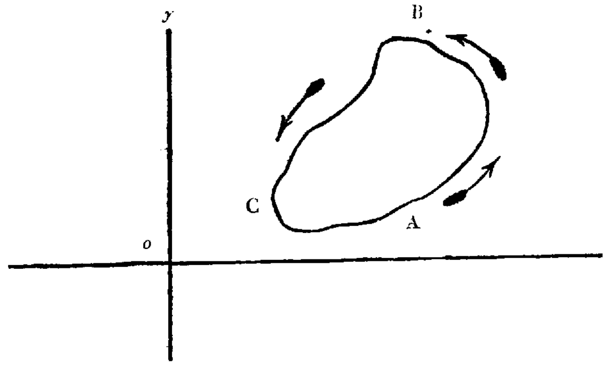
D'un Théorème de M. Cauchy, *relatif aux racines imaginaires des Équations;*

Par C. STURM et J. LIOUVILLE.

1. Soit $f(z) = z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-1} z + A_m$ une fonction entière de z dans laquelle les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, A_m$ sont des constantes quelconques réelles ou imaginaires. Si l'on remplace l'indéterminée z par $x + y\sqrt{-1}$, $f(z)$ prendra aussi la forme $P + Q\sqrt{-1}$, P et Q étant des fonctions réelles de x, y, et si l'on peut trouver des valeurs réelles de x et y qui annullent à la fois P et Q, en substituant ces valeurs dans la formule $x + y\sqrt{-1}$, on aura une racine de l'équation $f(z) = 0$. On dit que la racine $z = x + y\sqrt{-1}$ est *simple* quand on a $f(z) = 0$, sans avoir en même temps $f'(z) = 0$: on dit que cette racine est double quand on a à la fois $f(z) = 0$, $f'(z) = 0$, sans avoir en même temps $f''(z) = 0$; et en général elle est multiple de l'ordre n quand on a à la fois $f(z) = 0, f'(z) = 0, \ldots,$ $f^{(n-1)}(z) = 0$, sans avoir en en même temps $f^{(n)}(z) = 0$. Nous regarderons toujours une racine double comme équivalente à deux racines égales entre elles; et ainsi de suite. Cette convention que les géomètres font ordinairement simplifiera beaucoup les énoncés de nos théorèmes.

On peut regarder les deux quantités x et y qui entrent dans une expression quelconque de la forme $x + y\sqrt{-1}$, comme étant l'abscisse et l'ordonnée d'un certain point M rapporté à des axes rectangulaires Ox, Oy et situé dans le plan de ces axes: $x + y\sqrt{-1}$ devient réelle et le point M est placé sur l'axe des x, quand on a $y = 0$. A chaque valeur de $x+y\sqrt{-1}$ répondra ainsi un point M ayant x pour abscisse, y pour ordonnée, et réciproquement à chaque point M dont les coordonnées sont x et y répondra une expression de la forme $x+y\sqrt{-1}$. Parmi les points que l'on obtient en construisant ainsi la formule $x+y\sqrt{-1}$, on doit distinguer ceux pour lesquels on a à la fois $P=0$, $Q=0$: ces points représentent en quelque sorte géométriquement les racines de l'équation $f(z)=0$.

2. Cela posé; si l'on trace dans le plan des xy un contour fermé quelconque ABC,



on peut se demander si, dans l'intérieur de ce contour, il y a des points pour lesquels P et Q soient nuls en même temps, et combien il y en a; ou plus brièvement, on peut se demander combien, dans l'intérieur du contour ABC, il y a de racines de l'équation $f(z)=0$. Or, pour résoudre cette question, M. Cauchy a donné dans un de ses mémoires la règle que voici.

Considérons le rapport $\frac{P}{Q}$ qui est une fonction réelle et rationnelle des coordonnées x, y: ce rapport pour chaque point du contour ABC a une valeur déterminée, si toutefois on suppose qu'il n'y ait sur le contour même aucun point pour lequel P et Q soient nuls en même temps. Si l'on marche le long du contour ABC toujours dans le même sens ABC, en partant du point quelconque A jusqu'à ce qu'on revienne à ce point, la quantité $\frac{P}{Q}$ prendra successivement diverses valeurs, et pourra changer de signe, en passant par zéro si P s'annulle et par l'infini si Q s'annulle. Soit

i le nombre de fois où $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant et changeant de signe passe du positif au négatif, k le nombre de fois où $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant et changeant de signe passe du négatif au positif, et Δ l'excès de i sur k : cet excès Δ ou $i - k$ sera toujours double du nombre μ des racines égales ou inégales contenues dans le contour ABC.

Le théorème de M. Cauchy consiste, comme on voit, dans l'équation $\mu = \frac{1}{2}\Delta$, μ et Δ ayant la signification que nous venons de leur attribuer.

Il est bien essentiel d'observer que, dans cet énoncé, on ne tient nullement compte des changements de signe que $\frac{P}{Q}$ peut éprouver en passant par l'infini : on ne fait non plus aucune attention aux cas où $\frac{P}{Q}$ s'annulle sans changer de signe.

La démonstration que M. Cauchy a donnée de son théorème est fondée sur l'emploi des intégrales définies et du calcul des résidus. Celle que nous allons exposer ici repose uniquement sur les premiers principes de l'Algèbre. Nous ne supposerons pas même connue cette proposition fondamentale de l'analyse des équations, *que toute équation algébrique* $f(z) = 0$ *a au moins une racine de la forme......* $a + b\sqrt{-1}$, nous proposant au contraire de déduire ce dernier principe du théorème de M. Cauchy dont il est, comme on le verra et comme l'auteur lui-même l'a observé, un simple corollaire.

3. Ce théorème est évident pour un contour quelconque ABC, lorsque dans l'intérieur de ce contour et sur le contour même on n'a jamais $P = 0$: alors en effet les deux nombres μ et Δ sont tous les deux nuls et par suite l'équation $\mu = \frac{1}{2}\Delta$ est satisfaite.

Elle est satisfaite encore lorsque dans l'intérieur du contour ABC et sur ce contour même on n'a jamais $Q = 0$: le nombre μ est alors encore égal à zéro et je vais prouver que l'on a aussi $\Delta = 0$. En effet la fraction $\frac{P}{Q}$, quand on aura fait un tour entier pour revenir au point de départ A, devra se retrouver en ce point affectée du même signe que d'abord elle possédait, quand le mouvement a commencé : donc cette fraction doit changer de signe un nombre pair de fois, toujours en s'évanouissant, puisque son numérateur seul peut devenir nul, et en passant alternativement du positif au négatif et du négatif au positif : donc enfin l'excès Δ du nombre de fois où elle va du $+$ au $-$ sur le nombre de fois où elle va du $-$ au $+$ en s'évanouissant, est égal à zéro, ce qu'il fallait prouver.

4. Considérons maintenant un point M pour lequel on ait à la fois $P=0$, $Q=0$ et qui réponde par conséquent à une racine simple ou multiple de l'équation $f(z)=0$. Traçons autour du point M un contour convexe $A_1A_2A_3A_4$. Si pour un point quelconque N de la courbe ainsi tracée, le rayon vecteur MN ou r est suffisamment petit, le théorème de M. Cauchy aura lieu pour ce contour $A_1A_2A_3A_4$. C'est ce que nous allons prouver.

Soient a et b les coordonnées du point M. En nommant φ l'angle que le rayon vecteur MN ou r fait avec l'axe des x, les coordonnées du point N seront $x=a+r\cos\varphi$, $y=b+r\sin\varphi$; et par suite, en développant $f(x+y\sqrt{-1})$ et observant que $f(a+b\sqrt{-1})=0$, on aura

$$(1)\quad f(x+y\sqrt{-1})=\frac{f'(a+b\sqrt{-1})}{1}.r(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$$
$$+\frac{f''(a+b\sqrt{-1})}{1.2}.r^2(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^2+\ldots$$
$$+\frac{f^{(m)}(a+b\sqrt{-1})}{1.2\ldots m}.r^m(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^m.$$

Le terme général de ce développement est

$$\frac{f^{(n)}(a+b\sqrt{-1})}{1.2\ldots n}\,r^n(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^n;$$

représentons par H_n le module de $\frac{f^{(n)}(a+b\sqrt{-1})}{1.2\ldots n}$, et par α_n un angle convenable, en sorte que l'on ait

$$\frac{f^{(n)}(a+b\sqrt{-1})}{1.2\ldots n}=H_n\,(\cos\alpha_n+\sqrt{-1}\sin\alpha_n),$$

puis rappelons-nous la formule de Moivre $(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+\sqrt{-1}\sin n\varphi$; ce terme général deviendra

$$H_n r^n [\cos(n\varphi + \alpha_n) + \sqrt{-1}\sin(n\varphi + \alpha_n)].$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(x+y\sqrt{-1}) = {} & H_1 r[\cos(\varphi+\alpha_1) + \sqrt{-1}\sin(\varphi+\alpha_1)] \\ & + H_2 r^2[\cos(2\varphi+\alpha_2) + \sqrt{-1}\sin(2\varphi+\alpha_2)] + \ldots\ldots \\ & \ldots\ldots + H_m r^m \cos(m\varphi+\alpha_m) + \sqrt{-1}\sin(m\varphi+\alpha_m)]; \end{aligned}$$

d'où résulte

$$\begin{aligned} P &= H_1 r\cos(\varphi+\alpha_1) + H_2 r^2\cos(2\varphi+\alpha_2) + \ldots + H_m r^m\cos(m\varphi+\alpha_m), \\ Q &= H_1 r\sin(\varphi+\alpha_1) + H_2 r^2\sin(2\varphi+\alpha_2) + \ldots + H_m r^m\sin(m\varphi+\alpha_m). \end{aligned}$$

Si la racine $a + b\sqrt{-1}$ est une racine simple, le coefficient H_1 sera essentiellement différent de zéro; ce cas est celui qu'il convient d'examiner en premier lieu.

5. Pour mieux fixer alors le degré de petitesse du rayon vecteur r, désignons par K la somme des modules $H_2, H_3, \ldots H_m$, et posons à la fois $r < 1$, $r < \frac{H_1\sqrt{2}}{2K}$, c'est-à-dire rendons r plus petit que le plus petit des deux nombres 1 et $\frac{H_1\sqrt{2}}{2K}$. En adoptant pour r une valeur assujettie à la condition qui vient d'être énoncée, P aura le même signe que son premier terme $H_1 r\cos(\varphi+\alpha_1)$ toutes les fois que la valeur absolue de $\cos(\varphi+\alpha_1)$ sera supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui arrivera si l'angle $\varphi+\alpha_1$ est compris entre les limites $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, ou entre les limites $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$; de même le signe de Q sera celui de son premier terme $H_1 r\sin(\varphi+\alpha_1)$ toutes les fois que la valeur absolue de $\sin(\varphi+\alpha_1)$ sera supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui arrivera si l'angle $\varphi+\alpha_1$ est compris entre les limites $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, ou entre les limites $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$.

Ce que nous venons de dire sur la manière dont les signes de P et Q dépendent des signes de leurs premiers termes, est vrai non seulement le long du contour $A_1A_2A_3A_4$, mais encore dans son intérieur où l'on a *à fortiori* $r<1$, $r<\frac{H_1\sqrt{2}}{2K}$; or, quand la valeur absolue de $\sin(\varphi+\alpha_1)$ est plus petite que $\frac{\sqrt{2}}{2}$, celle de $\cos(\varphi+\alpha_1)$ est plus grande que $\frac{\sqrt{2}}{2}$, et *vice versâ;* donc, quel que soit φ et sauf le cas où $r=0$, une au moins des deux quantités P, Q est différente de zéro, et possède le même signe que son premier terme. Sur le contour $A_1A_2A_3A_4$, et dans son intérieur, il n'y a donc que le point M pour lequel on ait à la fois $P=0$, $Q=0$, et qui réponde à une racine de l'équation $f(z)=0$.

Cela posé, pour parcourir le contour $A_1A_2A_3A_4$, nous désignerons par A_1, A_2, A_3, A_4, les quatre points pour lesquels on a... $\varphi+\alpha_1=\frac{\pi}{4}$, $\varphi+\alpha_1=\frac{3\pi}{4}$, $\varphi+\alpha_1=\frac{5\pi}{4}$, $\varphi+\alpha_1=\frac{7\pi}{4}$; et prenant le point A_1 pour point de départ, nous irons successivement de A_1 en A_2, de A_2 en A_3, de A_3 en A_4, et de A_4 en A_1. D'après ce que l'on vient de dire, le polynome Q ne changera jamais de signe dans l'intervalle A_1A_2 ni dans l'intervalle A_3A_4, et la même chose aura lieu pour le polynome P dans les deux intervalles A_2A_3, A_4A_1.

Au point A_1 les deux polynomes P et Q ont les mêmes signes que leurs premiers termes, tous deux égaux à $H_1r.\frac{\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire le signe $+$; la fraction $\frac{P}{Q}$ est donc positive. Au point A_2 ces deux polynomes ont encore les mêmes signes que leurs premiers termes qui sont $-H_1r.\frac{\sqrt{2}}{2}$, $H_1r.\frac{\sqrt{2}}{2}$; et la fraction $\frac{P}{Q}$ est négative. Quand on va du point A_1 au point A_2, la fraction $\frac{P}{Q}$ change donc de signe une ou plusieurs fois; et comme dans cet intervalle on n'a jamais $Q=0$, il en résulte qu'elle s'évanouit toujours au moment où elle change de signe. En vertu de ces changements de signe, la fraction $\frac{P}{Q}$ d'abord positive devient négative, puis redevient positive, et ainsi de suite. Mais comme finalement le signe $+$ se trouve remplacé par le signe $-$, il faut que le nombre de fois où la fraction $\frac{P}{Q}$ passe du positif au négatif l'emporte d'une unité sur le nombre de fois où elle passe du négatif au positif.

Du point A_2 au point A_3 la fraction $\frac{P}{Q}$ change encore de signe ; mais sans s'évanouir, puisque dans cet intervalle on a constamment $P < o$.

Du point A_3 où la fraction $\frac{P}{Q}$ est positive jusqu'au point A_4 où elle est négative, les changements de signe n'ont lieu que lorsque P s'évanouit. On arrive donc pour l'intervalle A_3A_4 au résultat fourni par l'intervalle A_1A_2, savoir que $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant passe du positif au négatif une fois de plus que du négatif au positif.

Enfin, dans l'intervalle A_4A_1, P est toujours $> o$, et la fraction $\frac{P}{Q}$ ne peut jamais s'évanouir.

En résumé, nous trouvons donc pour le contour entier $A_1A_2A_3A_4$ l'excès Δ égal à 2; d'un autre côté ce contour ne renferme dans son intérieur qu'une seule racine. Le théorème de M. Cauchy est donc vrai pour le contour en question.

6. Supposons en second lieu que la racine $a + b\sqrt{-1}$ soit multiple de l'ordre n: on devra regarder alors le contour $A_1 A_2 A_3 A_4$, dont les dimensions sont très petites, comme renfermant n racines égales entre elles, et l'on aura par suite $\mu = n$: pour que le théorème de M. Cauchy soit exact, il faut donc que l'excès Δ soit alors égal à $2n$. Or, quand la racine $a + b\sqrt{-1}$ est multiple de l'ordre n, on a $H_1 = o$, $H_2 = o$, ... $H_{n-1} = o$; les valeurs de P et de Q sont par conséquent

$$P = H_n r^n \cos(n\varphi + \alpha_n) + H_{n+1} r^{n+1} \cos[(n+1)\varphi + \alpha_{n+1}] \\ + \ldots + H_m r^m \cos(m\varphi + \alpha_m)$$

$$Q = H_n r^n \sin(n\varphi + \alpha_n) + H_{n+1} r^{n+1} \sin[(n+1)\varphi + \alpha_{n+1}] + \ldots \\ + H_m r^m \sin(m\varphi + \alpha_m).$$

Pour fixer le degré de petitesse du rayon r, nous désignerons par K la somme $H_{n+1} + H_{n+2} + \ldots + H_m$ et nous prendrons r plus petit que le plus petit des deux nombres 1 et $\frac{H_n\sqrt{2}}{2K}$. En adoptant pour r une valeur assujettie à cette condition, le signe de P sera le même que celui de son premier terme $H_n r^n \cos(n\varphi + \alpha_n)$ toutes les fois que la valeur absolue de $\cos(n\varphi + \alpha_n)$ se trouvera supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, comme cela arrive quand l'arc $n\varphi + \alpha_n$ est compris entre les limites $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, ou entre les limites $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, ... et ainsi de suite jusqu'à $\frac{(8n-1)\pi}{4}$, $\frac{(8n+1)\pi}{4}$: de même le signe de Q sera celui de son premier terme $H_n r^n \sin(n\varphi + \alpha_n)$ toutes les fois que la valeur absolue de $\sin(n\varphi+\alpha_n)$ se trouvera supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui arrivera si l'arc $n\varphi+\alpha_n$ est compris entre les limites $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, ou entre les limites $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, ou enfin entre les limites $\frac{(8n-3)\pi}{4}$, $\frac{(8n-1)\pi}{4}$.

On conclut aisément de là que, sur le contour $A_1A_2A_3A_4$ et dans son intérieur il n'existe aucun point (le point M excepté), pour lequel on ait à la fois $P=0$, $Q=0$: c'est pourquoi l'on a $\mu = n$, comme nous l'avons dit tout à l'heure.

Cela posé, pour parcourir le contour $A_1A_2A_3A_4$, nous désignerons par A_1, A_2, A_3, ... A_{4n} les points pour lesquels on a

$$n\varphi + \alpha_n = \frac{\pi}{4},\ n\varphi + \alpha_n = \frac{3\pi}{4},\ n\varphi + \alpha_n = \frac{5\pi}{4}, \ldots n\varphi + \alpha_n \frac{(8n-3)\pi}{4};$$

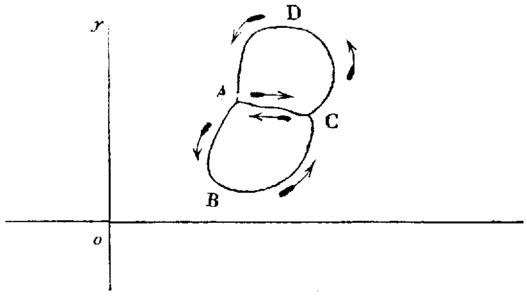
et, prenant le point A_1 pour point de départ nous irons successivement de A_1 en A_2, de A_2 en A_3, ... de A_{4n} en A_1. D'après ce que l'on vient de dire, le polynome Q ne changera jamais de signe, ni dans l'intervalle A_1A_2, ni dans l'intervalle A_3A_4, ... ni dans l'intervalle $A_{4n-1}A_{4n}$; et la même chose aura lieu pour le polynome P dans les intervalles A_2A_3, A_4A_5, ... $A_{4n}A_1$. Il est inutile de considérer ces derniers intervalles dans lesquels $\frac{P}{Q}$ ne peut pas s'évanouir : dans tous les autres au contraire, cette fraction s'évanouit et passe du positif au négatif. Ainsi, par exemple, au point A_1, P et Q ont les mêmes signes que leurs premiers termes, tous deux égaux à $H_n r^n . \frac{\sqrt{2}}{2}$: la fraction $\frac{P}{Q}$ est donc positive : on peut s'assurer au contraire qu'en A_2 elle est négative : donc dans l'intervalle A_1A_2, elle change de signe une fois ou un nombre impair de fois en s'évanouissant et allant de $+$ à $-$, puis de $-$ à $+$,... puis finalement de $+$ à $-$; le nombre des passages de $+$ à $-$ surpasse d'une unité le nombre des passages de $-$ à $+$. Ce que nous disons pour l'intervalle A_1A_2 a lieu pour les $2n-1$ autres intervalles A_3A_4, A_5A_6, ... $A_{4n-1}A_{4n}$. L'excès Δ est donc égal à $2n$, de sorte que le théorème de M. Cauchy est rigoureusement démontré pour le contour que nous considérons (*).

(*) On simplifiera beaucoup cette démonstration en admettant, comme on a au fond droit de le faire, que l'équation $f(z)=0$ n'a pas de racines égales. Si l'on adopte cette hypothèse, on pourra aussi se dispenser de recourir à la formule de Moivre, en présentant le raisonnement de la manière suivante. Après avoir développé $f(x+y\sqrt{-1})$ et obtenu la formule (1) du n° 4, on séparera dans cette formule le premier terme $f'(a+b\sqrt{-1})r(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$ de tous les autres dont on représentera l'ensemble par $P_1+Q_1\sqrt{-1}$, et après avoir mis $f'(a+b\sqrt{-1})r(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$ sous la forme ....
$H_1r[\cos(\varphi+\alpha_1)+\sqrt{-1}\sin(\varphi+\alpha_1)]$, on aura

$$f(x+y\sqrt{-1})=H_1r[\cos(\varphi+\alpha_1)+\sqrt{-1}\sin(\varphi+\alpha_1)]+P_1+Q_1\sqrt{-1},$$

qui donne $P=H_1r\cos(\varphi+\alpha_1)+P_1$, $Q=H_1r\sin(\varphi+\alpha_1)+Q_1$. Pour fixer le degré de petitesse du rayon r que nous prendrons d'abord <1, représentons par H_nr^n le module du terme général $\dfrac{f^{(n)}(a+b)\sqrt{-1}}{1.2\ldots.n}r^n(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^n$: le module de la somme $P_1+Q_1\sqrt{-1}$ sera moindre que la somme des modules $H_2r^2+H_3r^3+\ldots+H_mr^m$ et *à fortiori* moindre que $r^2(H_2+H_3+\ldots+H_m)$. en posant $H_1+H_2+\ldots+H_m=K$, on aura donc $\sqrt{P_1^2+Q_1^2}<Kr^2$, ce qui exige que la valeur absolue de chacune des quantités P_1, Q_1 soit aussi $<Kr^2$. Cela posé, si l'on prend $r<\dfrac{H_1\sqrt{2}}{2K}$, il est clair que le signe de P sera semblable au signe de son premier terme, et constamment négatif depuis le point A_2, où.. $\cos(\varphi+\alpha_1)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ jusqu'au point A_3 où l'on a encore $\cos(\varphi+\alpha_1)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Au contraire, le signe de P est constamment $+$ depuis le point A_4 où l'on a $\cos(\varphi+\alpha_1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ jusqu'au point A_1, où l'on a aussi $\cos(\varphi+\alpha_1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. De même la fonction Q est toujours positive dans l'intervalle A_1A_2, et toujours négative dans l'intervalle A_3A_4. On achèvera ensuite la démonstration comme au n° 5, où les points A_1, A_2, A_3, A_4 ont la même signification qu'ici.

7. Quand le théorème de M. Cauchy a lieu pour deux contours ABCA, ACDA qui ont une partie commune AC, il a lieu également pour le contour total ABCDA formé par leur réunion. En effet, l'excès Δ du nombre de fois où $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant passe du + au — sur le nombre de fois où cette fraction en s'évanouissant passe du — au + est le même, soit qu'on parcoure le contour total ABCDA, soit qu'on parcoure successivement les deux contours ABCA, ACDA, puisqu'à chaque passage du + au — ou du — au + qui a lieu quand on va sur le côté AC de C en A répond un passage inverse du — au + ou du + au — quand on va sur le même côté de A en C. Or en supposant que le nombre des racines soit égal à μ' dans le contour ABCA et à μ'' dans le contour ACDA, on a $\Delta = 2\mu'$ pour le premier de ces contours et $\Delta = 2\mu''$ pour le second, puisque le théorème de M. Cauchy est supposé applicable à l'un et à l'autre : d'après ce que l'on vient de voir, il résulte de là que, pour le contour total ABCDA, on a $\Delta = 2(\mu' + \mu'')$, équation qui ne diffère pas de l'équation $\Delta = 2\mu$ du n° 2 appliquée au contour ABCDA dans lequel il y a $\mu' + \mu''$ racines. Le théorème de M. Cauchy est donc vrai pour le contour ABCDA, ce qu'il fallait démontrer.



Si l'on considère un nombre quelconque de contours juxtaposés, pour chacun desquels ce théorème ait lieu, il aura lieu également pour le contour total formé par la réunion de ceux-là : c'est ce qu'on verra en réunissant ces contours successivement deux à deux, comme on peut le faire d'après ce qui vient d'être démontré.

8. Étant donné un contour quelconque ABC, on peut toujours le concevoir divisé 1°. en contours convexes tracés autour de chaque racine contenue dans l'intérieur de ABC et assujettis aux conditions énoncées n° 6 : 2°. en contours semblables à ceux dont on a parlé n° 3, c'est-à-dire pour lesquels on n'ait jamais à la fois $P = 0$, $Q = 0$. Le théorème de M. Cauchy ayant lieu pour les diverses parties dans les-

quelles on divise ainsi le contour ABC aura lieu pour ce contour même ABC, dont la forme est arbitraire.

Ce théorème est donc entièrement démontré.

Toutefois nous excluons formellement le cas particulier où, pour quelque point de la courbe ABC, on aurait à la fois $P=0$, $Q=0$: ce cas particulier ne jouit d'aucune propriété régulière et ne peut donner lieu à aucun théorème; car dès qu'on l'admet, l'excès Δ peut varier avec la forme du contour sans que le nombre μ varie : de sorte qu'il n'existe alors entre μ et Δ aucune relation constante.

9. De l'origine O des coordonnées comme centre et d'un rayon r très grand, traçons un cercle, et cherchons combien l'équation $f(z)=0$ a de racines comprises dans l'intérieur de ce cercle. Soit φ l'angle qu'un rayon quelconque ON fait avec l'axe des x : les coordonnées du point N seront $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, et l'on aura

$$\begin{aligned} f(x+y\sqrt{-1}) = {} & r^m(\cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi) \\ & + A_1 r^{m-1}\left[\cos(m-1)\varphi + \sqrt{-1}\sin(m-1)\varphi\right] \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + A_{m-1}\, r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) + A_m. \end{aligned}$$

Soit H_1 le module de A_1, ... H_{m-1} celui de A_{m-1}, H_m celui de A_m et supposons que l'on ait

$$A_1 = H_1(\cos\alpha_1 + \sqrt{-1}\sin\alpha_1),\quad A_2 = H_2(\cos\alpha_2 + \sqrt{-1}\sin\alpha_2),\ \text{etc.}$$

On aura

$$\begin{aligned} f(x+y\sqrt{-1}) = {} & r^m[\cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi] \\ & + H_1 r^{m-1}\cos[(m-1)\varphi + \alpha_1] + \sqrt{-1}\sin[(m-1)\varphi + \alpha_1)] \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + H_m(\cos\alpha_m + \sqrt{-1}\sin\alpha_m); \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} P &= r^m\cos m\varphi + H_1 r^{m-1}\cos[(m-1)\varphi + \alpha_1] + \dots + H_m\cos\alpha_m, \\ Q &= r\ \sin m\varphi + H_1 r^{m-1}\sin[(m-1)\varphi + \alpha_1] + \dots + H_m\sin\alpha_m. \end{aligned}$$

Prenons le rayon r à la fois > 1 et $> K\sqrt{2}$, K désignant la somme des modules $H_1, \ldots H_{m-1}$, H_m. Alors le signe de P sera semblable à celui de son premier terme toutes les fois que la valeur absolue de $\cos m\varphi$ sera supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$: de même le signe du polynome Q sera celui de son premier terme $r^m \sin m\varphi$ toutes les fois que la valeur absolue de $\sin m\varphi$ sera supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Nommons A_1, A_2, A_3, A_{4m} les points de la circonférence du cercle pour lesquels on a successivement

$$m\varphi = \frac{\pi}{4},\ m\varphi = \frac{3\pi}{4},\ m\varphi = \frac{5\pi}{4}, \ldots m\varphi = \frac{(8m-1)\pi}{4}.$$

Il est aisé de voir par une discussion toute semblable à celle du n° 6 que dans les intervalles A_2A_3, $A_4A_5, \ldots A_{4m}A_1$ la fraction $\frac{P}{Q}$ ne s'évanouira jamais, et que dans chacun des intervalles A_1A_2, $A_3A_4, \ldots A_{4m-1}$, où elle s'évanouira au contraire et ne deviendra jamais infinie, l'excès du nombre de fois où elle passera du $+$ au $-$ sur le nombre de fois où elle passera du $-$ au $+$ sera égal à l'unité. L'excès total Δ pour le contour entier ABC sera ainsi égal à $2m$: la moitié m de cet excès donne le nombre des racines de l'équation $f(z) = 0$ contenues dans le cercle $A_1A_2, \ldots A_{4m}$ dont le rayon est exprimé par un nombre quelconque plus grand que 1 et que $K\sqrt{2}$. On voit par là que *toute équation algébrique $f(z) = 0$ de degré m a m racines de la forme $x + y\sqrt{-1}$ et n'en a que m*. Le plus grand des deux nombres 1 et $K\sqrt{2}$ est une limite supérieure du module de toutes les racines : il serait facile de trouver une limite plus simple (*).

(*) Il nous resterait à expliquer les moyens de trouver l'excès Δ pour un contour donné. Mais afin d'éviter un double emploi, nous renverrons cette recherche à la fin de l'article suivant.

Autres démonstrations du même Théorème ;

PAR C. STURM.

Les nouvelles démonstrations que je vais donner du théorème de M. Cauchy, s'éloignent moins que la précédente de la méthode que cet illustre géomètre a suivie dans son mémoire ; elles sont fondées sur la décomposition en facteurs de la fonction qu'on égale à zéro. Je vais d'abord démontrer ce théorème pour une équation algébrique de degré quelconque en admettant comme déjà connu ce principe que toute équation algébrique a toujours une racine soit réelle soit imaginaire de la forme $a+b\sqrt{-1}$, d'où l'on conclut immédiatement qu'une équation du $m^{ième}$ degré a m racines.

Soit $F(z)=0$ l'équation proposée, $F(z)$ étant une fonction entière de z dont le degré est m, et dans laquelle les coefficients des puissances de z sont des quantités réelles ou imaginaires de la forme..... $\alpha+\beta\sqrt{-1}$. Soient $a+b\sqrt{-1}$, $a'+b'\sqrt{-1}$, $a''+b''\sqrt{-1}$,.... les m racines de cette équation parmi lesquelles il peut s'en trouver d'égales. On a d'abord

$$F(z)=(z-a-b\sqrt{-1})(z-a'-b'\sqrt{-1})(z-a''-b''\sqrt{-1}), \text{ etc...} \quad (1)$$

Si l'on remplace z par $x+y\sqrt{-1}$, x et y étant des quantités réelles indéterminées, $F(z)$ prendra la forme $P+Q\sqrt{-1}$, P et Q étant des fonctions entières et réelles de x et y, et l'équation précédente deviendra

$$\left.\begin{array}{l} P+Q\sqrt{-1}=[x-a+(y-b)\sqrt{-1}][x-a'+(y-b')\sqrt{-1}] \\ \qquad [x-a''+(y-b'')\sqrt{-1}] \text{ etc.} \end{array}\right\} \quad (2)$$

On peut regarder les indéterminées x et y comme les coordonnées d'un point quelconque M rapporté à un système d'axes rectangulaires tracés sur un plan, et alors la recherche des racines de l'équation

$F(z)=0$ qui est devenue $P+Q\sqrt{-1}=0$, revient à déterminer sur ce plan tous les points dont les coordonnées satisfont à la fois aux deux équations réelles $P=0$, $Q=0$.

Désignons ces points par K, K′, K″, etc. Leurs coordonnées sont a et b pour le point K, a' et b' pour le point K′, a'' et b'' pour K″, etc.

Posons

$$\begin{aligned}
x-a+(y-b)\sqrt{-1} &= r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t),\\
x-a'+(y-b')\sqrt{-1} &= r'(\cos t'+\sqrt{-1}\sin t'),\\
x-a''+(y-b'')\sqrt{-1} &= r''(\cos t''+\sqrt{-1}\sin t''),\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Le produit de tous ces facteurs sera, d'après la formule connue,

$$rr'r''\ldots[\cos(t+t'+t''+\ldots)+\sqrt{-1}\sin(t+t'+t''+\ldots)].$$

En vertu de l'équation (2), ce produit doit être égal à $P+Q\sqrt{-1}$, on a donc

$$\begin{aligned}
P &= rr'r''\ldots\cos(t+t'+t''+\ldots),\\
Q &= rr'r''\ldots\sin(t+t'+t''+\ldots),
\end{aligned}$$

et

$$\frac{P}{Q}=\cot(t+t'+t''+\ldots),$$

La cotangente signifie ici le quotient du cosinus divisé par le sinus.

Puisqu'on a fait $x-a+(y-b)\sqrt{-1}=r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)$, on a

$$x-a=r\cos t,\quad y-b=r\sin t.$$

On voit que $x-a$ et $y-b$ sont les projections sur les deux axes rectangulaires de la droite qui joint le point fixe K au point quelconque M dont les coordonnées sont x et y. Par conséquent, r représente la longueur de cette droite, et t l'angle ou plutôt l'arc de cercle compris entre sa direction et celle d'une parallèle KX menée par le point K à l'axe Ox dans le sens des x positives, cet arc étant mesuré sur un cercle qui a pour centre le point K. L'arc t est nul lorsque la droite KM coïncide avec la parallèle KX à l'axe des x, et il peut prendre des valeurs quelconques soit positives, soit négatives, même au-delà d'une circonférence, si l'on fait tourner autour du point K cette droite KM supposée indéfinie. De même t', t''... seront les angles ou arcs de cercle compris entre les droites K'M, K''M, et des parallèles à l'axe des x menées par les points K', K''.

Il s'agit maintenant de déterminer combien parmi ces points K, K', K'',... pour lesquels on a $P=0$, $Q=0$, il s'en trouve dans l'intérieur d'un contour fermé ABC tracé à volonté sur le plan xOy.

Concevons que le point M soit un point mobile qui parcoure le contour ABC en partant d'un point A de ce contour et allant toujours dans le même sens sans rétrograder, jusqu'à ce qu'il revienne au point de départ A. Lorsque le point M est en A, l'angle ou l'arc t a une valeur déterminée que nous désignerons par α; c'est la valeur de l'angle AKX. Supposons que le point fixe K soit dans l'intérieur du contour ABC. Lorsque le point M parcourra ce contour, l'arc t variera par degrés insensibles et pourra tantôt croître, tantôt décroître, même au-delà d'une circonférence, selon la forme du contour ABC. Mais quand le point M sera revenu en A, l'arc t se trouvera égal à sa valeur primitive α augmentée d'une circonférence. Ainsi l'on a $t=\alpha$ au moment où le point M part de A, et $t=\alpha+2\pi$ quand il revient en A après avoir parcouru le contour entier.

Mais si le point K est hors du contour ABC, l'arc t après avoir alternativement augmenté et diminué par degrés insensibles, finira par reprendre sa valeur primitive α, au moment où le point M reviendra en A.

On dira la même chose des autres arcs t', t'',... qui ont pour centres les points K', K''...

Supposons que parmi les points K, K', K'',... les uns soient situés hors du contour ABC, et les autres au dedans. Soit μ le nombre des points intérieurs. Désignons par β la somme des valeurs α, α', α'',... des arcs t, t', t'',.... au moment où le point M part du point A. Pendant que le point M parcourra le contour ABC, cette somme... $t+t'+t''+\ldots$ variera par degrés insensibles, et lorsque le point M reviendra en A, on aura $t+t'+t''+\ldots=\beta+2\mu\pi$, puisque chacun des arcs t, t', t'', qui a pour centre un point intérieur doit être augmenté de 2π, quand le point M revient en A, tandis que les arcs qui ont pour centres des points extérieurs reprennent leurs valeurs primitives. Pour une position quelconque du point mobile, on a

$$\frac{P}{Q}=\cot(t+t'+t''+\ldots).$$

Je dis maintenant que $\cot(t+t'+t''+\ldots)$ doit s'évanouir pour différents points du contour ABC en passant du positif au négatif 2μ fois de plus que du négatif au positif.

La cotangente d'un arc variable s'évanouit en même temps que son cosinus, quand cet arc devient égal à un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$. En s'évanouissant, la cotangente passe du positif au négatif ou du négatif au positif, selon que l'arc croît ou décroît en devenant égal à ce multiple; mais elle ne change pas de signe si l'arc atteint ce multiple sans l'outrepasser. L'arc $t+t'+t''+\ldots$ variant par degrés insensibles pendant le mouvement du point M, deviendra égal une ou plusieurs fois à chacun des 2μ multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$ compris entre 6 et... $6+2\mu\pi$. Si l'on considère l'un quelconque de ces multiples, l'arc $t+t'+t''+\ldots$ doit lui devenir égal en croissant une fois de plus qu'en décroissant, puisque $t+t'+t''+\ldots$ commence par avoir au point de départ A une valeur 6 plus petite que ce multiple, et finit par avoir une valeur plus grande $6+2\mu\pi$, quand on revient au point A : alors $\cot(t+t'+t''+\ldots)$ en s'évanouissant pour ce multiple-là, passe du positif au négatif une fois de plus que du négatif au positif. S'il arrive que la somme variable $t+t'+t''\ldots$ devienne égale à un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$ qui ne soit pas compris entre 6 et $6+2\mu\pi$, elle l'atteindra autant de fois en augmentant qu'en diminuant; et par conséquent $\cot(t+t'+t''+\ldots)$, en s'évanouissant pour ce multiple-là passera du positif au négatif autant de fois que du négatif au positif.

Puisque les multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$ compris entre 6 et $6+2\mu\pi$ sont au nombre de 2μ, que $\cot(t+t'+t''+\ldots)$ en s'évanouissant pour chacun de ces multiples, passe du positif au négatif une fois de plus que du négatif au positif, et qu'en s'évanouissant pour un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$ non compris entre 6 et $6+2\mu\pi$, elle passe autant de fois du positif au négatif que du négatif au positif; on en conclut que $\cot(t+t'+t''+\ldots)$ ou la quantité $\frac{P}{Q}$ qui lui est égale, en s'évanouissant pour différents points du contour ABC, passera du positif au négatif 2μ fois de plus que du négatif au positif. Ce qui est le théorème de M. Cauchy.

On peut en donner encore une démonstration analogue à la précédente, mais dans laquelle on ne suppose pas déjà connu le principe de l'existence des racines, qui deviendra au contraire une conséquence du théorème en question. On verra même par cette nouvelle démonstration qu'il s'étend à des équations non algébriques. Elle est fondée sur les propositions suivantes :

1^re^ *Proposition*. Soient p et q des fonctions réelles de deux variables réelles x et y. Considérons x et y comme les coordonnées d'un point quelconque M rapporté à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy; et supposons que chacune des fonctions p, q, ait une valeur finie unique et déterminée pour tout point situé sur un contour ABC tracé dans le plan xOy (elles peuvent devenir infinies pour des points situés au dehors ou au dedans de ce contour). Admettons aussi que p et q ne soient nulles en même temps pour aucun point situé sur ce contour même. Si l'on conçoit que le point M dont les coordonnées sont x, y, parcoure le contour ABC (dans le sens ABC), la quantité $\frac{p}{q}$ pourra s'évanouir en changeant de signe pour différents points de ce contour. Soit δ l'excès du nombre de fois où $\frac{p}{q}$ en s'évanouissant passe du positif au négatif sur le nombre de fois où $\frac{p}{q}$ en s'évanouissant passe du négatif au positif (cet excès δ peut être un nombre positif, ou négatif, ou zéro). Si l'on fait $p + q\sqrt{-1} = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$, je dis que lorsque le point M partant du point A aura parcouru le contour entier ABC et sera revenu en A, l'arc t après avoir varié par degrés insensibles sera égal à la valeur primitive α qu'il avait au point de départ A plus $\delta\pi$.

En effet, au moment où le point mobile M part du point A, p et q ont des valeurs déterminées, et quand le point M revient en A, p et q reprennent ces mêmes valeurs; donc $\cos t$ et $\sin t$ reprennent aussi leurs valeurs primitives; donc α étant la valeur de l'arc t, au moment où le point M part de la position A; quand il y reviendra t sera égal à cette valeur primitive α ou bien à cette même valeur α *plus* ou *moins* un multiple de la circonférence, de sorte qu'en revenant au point A, on aura $t=\alpha\pm 2k\pi$, k étant un nombre entier ou zéro.

Si l'on a $t=\alpha+2k\pi$, t en variant par degrés insensibles pendant le mouvement du point M sur le contour ABC, deviendra égal une ou plusieurs fois à chacun des $2k$ multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$ compris entre α et $\alpha+2k\pi$, et il atteindra chacun de ces multiples une fois de plus en croissant qu'en décroissant, puisque cet arc t a d'abord au point de départ A une valeur α plus petite que le multiple de $\frac{\pi}{2}$ que l'on considère et finit par avoir une valeur plus grande quand le point M revient en A. Donc cot t en s'évanouissant pour ce multiple-là passera du positif au négatif une fois de plus que du négatif au positif. Si l'arc t devient égal à un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$ non compris entre α et $\alpha+2k\pi$, il l'atteindra autant de fois en augmentant qu'en diminuant; et alors cot t, en s'évanouissant pour ce multiple passera du $+$ au $-$ autant de fois que du $-$ au $+$. On conclut de là que cot. t ou $\frac{p}{q}$ en s'évanouissant pour différents points du contour ABC passera du positif au négatif $2k$ fois de plus que du négatif au positif. Ainsi le nombre que nous avons appelé δ est égal à $2k$, et l'on a $t=\alpha+\delta\pi$, quand le point M revient en A.

Si après avoir parcouru le contour entier, on a $t=\alpha-2k\pi$, on prouvera de la même manière que cot. t ou $\frac{p}{q}$ devra s'évanouir en passant du positif au négatif $2k$ fois *de moins* que du négatif au positif, on aura donc $\delta=-2k$; et en revenant au point A, $t=\alpha+\delta\pi$, (puisqu'on a $t=\alpha-2k\pi$).

Si le point M revenant en A, t reprenait sa valeur primitive α, cot. t en s'évanouissant passerait du $+$ au $-$ autant de fois que du $-$ au $+$ de sorte qu'on aurait $\delta=0$, et en revenant au point A, la formule $t=\alpha+\delta\pi$ serait encore vérifiée.

2e *Proposition*. Soient p, q, p', q', p'', q'', etc. des fonctions des deux variables x et y ayant chacune une valeur finie et unique pour tout point situé sur le contour ABC. Le point M dont les coordonnées sont x et y parcourant le contour ABC (dans le sens ABC), soient δ, δ', δ'',... respectivement les nombres qui expriment combien de fois chacune des quantités $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$,... en s'évanouissant pour différents points de ce contour passe du positif au négatif de plus que du négatif au positif. On suppose qu'aucune de ces fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$.... ne devient $\frac{0}{0}$ sur le contour même. Si l'on pose

$$P + Q\sqrt{-1} = (p + q\sqrt{-1})(p' + q'\sqrt{-1})(p'' + q''\sqrt{-1})\ldots$$

et $$\Delta = \delta + \delta' + \delta'' + \text{etc.}$$

le nombre Δ exprimera combien de fois la quantité $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant passera du positif au négatif de plus que du négatif au positif. (Chacun des nombres δ, δ', δ'',... et Δ peut être positif, négatif, ou zéro.)

En effet posons $$p + q\sqrt{-1} = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$
$$p' + q'\sqrt{-1} = r'(\cos t' + \sqrt{-1}\sin t'),$$
etc.

Nous aurons $$\frac{P}{Q} = \cot.(t + t' + t'' + \ldots.).$$

Au moment où le point M part du point A, les arcs t, t', t''... ont des valeurs déterminées α, α', α'',... désignons par β la somme $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots$ Quand le point M aura parcouru le contour entier ABC et sera revenu en A, on aura d'après la première proposition $t = \alpha + \delta\pi$, $t' = \alpha' + \delta'\pi$, $t'' = \alpha'' + \delta''\pi$, etc. et conséquemment $t + t' + t'' + \ldots = (\alpha + \alpha' + \alpha''\ldots) + (\delta + \delta' + \delta'' + \ldots)\pi = \beta + \Delta\pi$. On en conclut par le raisonnement employé précédemment que $\cot(t + t' + t'' + \ldots)$, qui n'est autre chose que $\frac{P}{Q}$, en s'évanouissant pour différents points du contour ABC, passera du positif au négatif Δ fois de plus que du négatif au positif.

Corollaire. Si l'on pose $P + Q\sqrt{-1} = (p + q\sqrt{-1})(p' + q'\sqrt{-1})$ et si l'excès δ' qui se rapporte à $\frac{p'}{q'}$ est zéro, on aura $\Delta = \delta$, c'est-à-dire que l'excès du nombre des passages par zéro du $+$ au $-$ sur le nombre des passages par zéro du $-$ au $+$ sera le même pour $\frac{p}{q}$ et pour $\frac{P}{Q}$ qui est ici $\frac{pp' - qq'}{pq' + qp'}$.

Ce cas a lieu en particulier quand la quantité p' ne s'évanouit pas sur le contour ABC; car alors $\frac{p'}{q'}$ ou cot t' ne s'évanouit pas sur ce contour, de sorte qu'on a $\delta' = 0$.

On aura encore $\delta' = 0$, si l'on suppose $p' = 0$, car alors $\frac{p'}{q'}$ ou cot t' étant identiquement nulle, ne change pas de signe sur le contour ABC. Mais en faisant $p' = 0$, $\frac{P}{Q}$ ou $\frac{pp' - qq'}{pq' + qp'}$ se réduit à $-\frac{q}{p}$. Donc l'excès δ est le même pour les deux quantités $\frac{p}{q}$ et $-\frac{q}{p}$; ce qu'il est facile au surplus de reconnaître *à priori*. (*Voyez* page 306.)

3[e] *Proposition*. Soient K, K′, K″... des points dont le nombre est μ situés dans l'intérieur du contour ABC, et parmi lesquels il peut s'en trouver qui coïncident. Soient a et b les coordonnées du point K, a' et b' celles de K′, a'' et b'' celles de K″, etc. Si l'on pose $P + Q\sqrt{-1} = [x - a + (y - b)\sqrt{-1}]\,[x - a' + (y - b')\sqrt{-1}]$ etc. la quantité $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant pour différents points du contour ABC passera du positif au négatif 2μ fois de plus que du négatif au positif, de sorte que pour $\frac{P}{Q}$ on aura $\Delta = 2\mu$.

En effet si l'on pose

$$x - a + (y - b)\sqrt{-1} = p + q\sqrt{-1} = r\,(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$$
$$x - a' + (y - b')\sqrt{-1} = p' + q'\sqrt{-1} = r'\,(\cos t' + \sqrt{-1}\sin t')$$

$t, t', t'',$.. seront les angles ou arcs de cercles compris entre les rayons vecteurs KM, K′M, K″M .. et les parallèles à l'axe des x menées par les points K, K′, K″.. Quand le point M a parcouru le contour entier et revient en A, chacun de ces arcs se trouve augmenté d'une circonférence 2π. Donc en vertu de la première proposition, pendant le mouvement du point M, chacune des quantités cot t ou $\frac{p}{q}$, cot t' ou $\frac{p'}{q'}$,... passera en s'évanouissant du positif au négatif deux fois de plus que du négatif au positif, de sorte que les nombres $\delta, \delta', \delta''$.. sont tous égaux à $+2$. Donc pour $\frac{P}{Q}$ on aura d'après la deuxième proposition, $\Delta = \delta + \delta' + \delta'' + \ldots = 2\mu$.

4[e] *Proposition*. Soient P et Q des fonctions réelles des deux variables x et y ayant chacune une valeur finie et unique pour tout système de valeurs réelles de x et de y. Si le contour ABC ne renferme aucun point pour lequel on ait à la fois $P = 0$ et $Q = 0$, je dis qu'on aura $\Delta = 0$ pour $\frac{P}{Q}$, c'est-à-dire que si $\frac{P}{Q}$ s'évanouit pour différents points du contour ABC, $\frac{P}{Q}$ passera en s'évanouissant du positif au négatif autant de fois que du négatif au positif.

Cette proposition est évidente, si dans l'intérieur du contour ABC et sur ce contour même on n'a jamais $P = 0$.

Elle est encore vraie lorsque dans l'intérieur du contour ABC et sur ce contour même on n'a jamais $Q = 0$. Car, d'après le corollaire de la deuxième proposition l'excès Δ est le même pour les deux quantités $\frac{P}{Q}$ et $-\frac{Q}{P}$, or Δ est nul pour $-\frac{Q}{P}$, puisque par hypothèse Q ne s'annulle pas sur le contour ABC ni au dedans, donc Δ est nul aussi pour $\frac{P}{Q}$. En voici d'ailleurs une autre raison. Au moment où le point M part du point A, $\frac{P}{Q}$ a une valeur et un signe déterminés; et quand le point M revient en A, $\frac{P}{Q}$ reprend la même valeur et le même signe; donc le point M parcourant le contour ABC, $\frac{P}{Q}$ ne peut changer de signe qu'un nombre pair de fois, toujours en s'évanouissant, puisque P seule peut devenir nulle, et en passant alternativement du positif au négatif et du négatif au positif; ainsi l'on a $\Delta = 0$.

Considérons maintenant un contour quelconque ABC qui ne renferme pas de point intérieur pour lequel on ait à la fois $P = 0$, $Q = 0$. On pourra évidemment partager l'aire comprise dans ce contour en plusieurs segments tels que pour tous les points situés dans l'un quelconque de ces segments et sur le contour même qui le termine l'une au moins des fonctions P, Q, ait toujours des valeurs différentes de zéro et de même signe. Si les contours qui terminent deux de ces segments ont une partie commune, on peut admettre que dans l'un de ces deux segments contigus, c'est P qui n'est jamais nulle, et que dans l'autre c'est Q. Car, si c'était la même fonction

P ou Q qui ne fût jamais nulle dans ces deux segments, on pourrait les réunir en un seul dans lequel cette même fonction ne serait jamais nulle, en supprimant la partie commune aux deux contours qui les renferment. Après qu'on aura ainsi supprimé ces lignes de séparation inutiles, la fonction P ne sera nulle pour aucun point commun à deux contours contigus, puisque, comme nous venons de le dire, P ne pourra jamais être nulle sur l'un de ces deux contours et que Q ne pourra pas l'être sur l'autre.

Cela posé, en parcourant l'un quelconque de ces contours partiels la quantité $\frac{P}{Q}$ ne s'évanouira pas ou bien elle s'évanouira en passant autant de fois du positif au négatif que du négatif au positif, comme on l'a vu tout-à-l'heure. Donc, en parcourant le contour primitif unique ABC qui résulte de la suppression de toutes les parties communes, il est clair que $\frac{P}{Q}$ passera encore en s'évanouissant du positif au négatif autant de fois que du négatif au positif ou que Δ sera nul pour le contour ABC, puisque $\frac{P}{Q}$ ne s'annulle sur aucune partie commune.

Maintenant il est facile d'établir le théorème de M. Cauchy. Soit $F(z) = 0$ l'équation proposée qui devient $P + Q\sqrt{-1} = 0$ quand on fait $z = x + y\sqrt{-1}$. Soit μ le nombre de ses racines $a + b\sqrt{-1}$, $a' + b'\sqrt{-1}$, $a'' + b''\sqrt{-1}$, etc., correspondantes à des points K, K′, K″,.. situés dans l'intérieur d'un contour quelconque ABC, de sorte qu'on ait à la fois $P = 0$, $Q = 0$, pour chacun de ces points. Soit aussi Δ l'excès du nombre de fois où la quantité $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant pour différents points du contour ABC passe du positif au négatif sur le nombre de fois où $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant sur le même contour passe du négatif au positif. Il s'agit de prouver qu'on a toujours $\Delta = 2\mu$, quel que soit μ.

Ce théorème a lieu d'abord si le nombre μ est zéro, c'est-à-dire si au dedans du contour ABC il n'y a aucun point pour lequel on ait à la fois $P = 0$ et $Q = 0$; car alors on a aussi $\Delta = 0$, d'après notre proposition 4ᵉ. Supposons que le nombre μ des racines renfermées dans le contour ABC ne soit pas nul; $F(z)$ est alors divisible par le produit des μ facteurs $z-a-b\sqrt{-1}$, $z-a'-b'\sqrt{-1}$, etc., (parmi lesquels il peut s'en trouver d'égaux). En désignant le quotient par $\varphi(z)$, on a donc

$$F(z)=(z-a-b\sqrt{-1})(z-a'-b'\sqrt{-1})(z-a''-b''\sqrt{-1})\ldots\times\varphi(z).$$

En remplaçant z par $x+y\sqrt{-1}$, $F(z)$ devient $P+Q\sqrt{-1}$, le produit des μ facteurs $z-a-b\sqrt{-1}$, $z-a'-b'\sqrt{-1}$, etc., devient une quantité de la forme $p+q\sqrt{-1}$, $\varphi(z)$ devient aussi $p'+q'\sqrt{-1}$; et l'on a $P+Q\sqrt{-1}=(p+q\sqrt{-1})(p'+q'\sqrt{-1})$.

Supposons comme précédemment que le point mobile M dont les coordonnées sont x, y parcoure le contour ABC (dans le sens ABC).

La fonction $\varphi(z)$ ou $p'+q'\sqrt{-1}$ n'est nulle pour aucun point situé dans l'intérieur du contour ABC; donc d'après notre 4^e proposition, en parcourant le contour ABC, on aura $\delta'=0$ pour la quantité $\frac{p'}{q'}$. D'après la 3^e proposition, pour $\frac{p}{q}$ on aura $\delta=2\mu$. Donc pour $\frac{P}{Q}$ on aura d'après la 2^e proposition $\Delta=\delta+\delta'=2\mu$. Ainsi le théorème est complétement démontré.

Il importe d'observer que cette démonstration s'applique non-seulement à une fonction entière de z qu'on égale à zéro, mais encore à toute fonction $F(z)$ qui devenant nulle pour différentes valeurs de z de la forme $a+b\sqrt{-1}$, donne toujours, étant divisée par $z-a-b\sqrt{-1}$ ou par une certaine puissance entière de ce facteur, un quotient qui ne devient ni nul ni infini pour cette valeur de z. Nous pourrions aussi modifier la forme de cette dernière démonstration, en faisant voir à l'aide de nos lemmes, que le théorème énoncé doit être vrai pour une équation qui a μ racines renfermées dans le contour ABC, s'il est vrai pour une équation qui n'en a que $\mu-1$, après avoir prouvé comme nous l'avons fait dans la 4^e proposition, qu'il a lieu quand $\mu=0$.

On peut en déduire qu'une équation algébrique d'un degré quelconque a toujours autant de racines qu'il y a d'unités dans son degré.

Supposons que l'équation $F(z)=0$ soit algébrique du $m^{ième}$ degré, elle sera de la forme suivante :

$$z^m + A_1(\cos\alpha_1 + \sqrt{-1}\sin\alpha_1)z^{m-1} + \ldots\ldots + A_m(\cos\alpha_m + \sqrt{-1}\sin\alpha_m) = 0 \quad (5)$$

je dis qu'elle aura m racines de la forme $a + b\sqrt{-1}$.

Faisons $z = x + y\sqrt{-1} = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$; r est ici la distance du point M (x,y) à l'origine O et t l'angle que cette droite OM fait avec l'axe des x. En désignant par $P + Q\sqrt{-1}$ ce que devient $F(z)$, on trouve $P + Q\sqrt{-1}$ égal à

$$\cos mt + \sqrt{-1}\sin mt \text{ multiplié par}$$

$$r^m + A_1 r^{m-1}(\cos\overline{\alpha_1 - t} + \sqrt{-1}\sin\overline{\alpha_1 - t}) + A_2 r^{m-2}(\cos\overline{\alpha_2 - 2t} + \sqrt{-1}\sin\overline{\alpha_2 - 2t}) + \text{etc.}$$

Désignons par $p + q\sqrt{-1}$ le premier facteur $\cos mt + \sqrt{-1}\sin mt$ et par $p' + q'\sqrt{-1}$ le second facteur $r^m +$ etc.

On peut tracer autour de l'origine O un contour assez grand pour que la partie réelle p' de ce second facteur soit constamment positive pour tous les points situés sur ce contour ou au dehors. Car cette partie réelle p' est $r^m + A_1 r^{m-1}\cos\overline{\alpha_1 - t} + A_2 r^{m-2}\cos\overline{\alpha_2 - 2t} +$ etc. ; et l'on voit qu'elle sera positive, si la distance r de l'origine à un point quelconque M du contour ABC est égale ou supérieure au plus grand des modules $A_1, A_2 \ldots A_m$ augmenté de l'unité. En admettant que cette condition soit remplie, la fonction p' sera *à fortiori* positive pour tous les points situés hors de ce contour.

Le facteur $p' + q'\sqrt{-1}$ ne pourra donc être nul pour aucun point situé sur le contour ABC ou au dehors ; d'ailleurs le premier facteur $p + q\sqrt{-1}$ ou $\cos mt + \sqrt{-1}\sin mt$ n'est nul pour aucun point du plan xOy ; donc $P + Q\sqrt{-1}$ qui est le produit de ces deux facteurs, ne peut être nul pour aucun point situé sur le contour ABC ou au dehors. Ainsi toutes les racines de la forme $a + b\sqrt{-1}$ que peut avoir l'équation proposée $F(z) = 0$ ou $P + Q\sqrt{-1} = 0$ répondent à des points situés dans l'intérieur de ce contour, et d'après le théorème général le nombre total de ces racines est égal à la moitié du nombre Δ qui exprime combien de fois la quantité $\frac{P}{Q}$

en s'évanouissant sur ce contour ABC passe du positif au négatif de plus que du négatif au positif.

Comme on a $P+Q\sqrt{-1}=(p+q\sqrt{-1})\,(p'+q'\sqrt{-1})$ le nombre Δ est d'après notre 2^e proposition la somme des deux nombres analogues δ, δ' relatifs aux quantités $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$. Mais pour $\frac{p'}{q'}$ on a $\delta'=0$, puisque p' est positive pour tous les points du contour ABC. Je dis que pour $\frac{p}{q}$ on a $\delta=2m$. En effet, $\frac{p}{q}$ n'est autre chose que $\cot mt$. Or, l'arc t ayant une valeur déterminée α au moment où le point M qui se meut sur le contour ABC part du point A, devient égal à $\alpha+2\pi$ quand ce point revient en A, de sorte que mt devient égal à $m\alpha+2m\pi$; d'où l'on conclut que $\cot mt$ passe en s'évanouissant du positif au négatif $2m$ fois de plus que du négatif au positif, ainsi pour $\frac{p}{q}$ l'on a bien $\delta=2m$.

Puisque la valeur de Δ relative à $\frac{P}{Q}$ est égale à $\delta+\delta'$ et qu'on vient de trouver $\delta'=0$ et $\delta=2m$, on en conclut $\Delta=2m$. Donc le nombre total des racines de l'équation algébrique $F(z)=0$ est égal à son degré m, puisqu'il doit être égal à la moitié de Δ.

Le raisonnement que je viens d'employer pour déduire du théorème de M. Cauchy la proposition que toute équation algébrique du $m^{ième}$ degré a m racines, peut encore servir à prouver autrement que dans les n^{os} 5 et 6 de l'article précédent, que si l'on trace un contour suffisamment petit autour d'un point K correspondant à une racine simple d'une équation quelconque $F(z)=0$, ou à une racine multiple de l'ordre n, on trouvera, en parcourant ce petit contour, $\Delta=2$ ou $\Delta=2n$, c'est-à-dire que la quantité $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant sur ce contour passera du positif au négatif 2 fois ou $2n$ fois de plus que du négatif au positif. D'un autre côté il a été prouvé dans notre 4^e proposition et aussi dans l'article précédent qu'on a toujours $\Delta=0$ pour un contour qui ne renferme pas de racines. Cela posé, si l'on considère un contour quelconque qui renferme un certain nombre de racines, on peut le partager en plusieurs contours dont les uns très petits ne renferment qu'une seule racine (simple ou multiple) et les autres n'en contiennent pas, et l'on fera voir comme dans l'article précédent, n^{os} 7 et 8 que le théorème de M. Cauchy ayant lieu pour chacun de ces contours partiels de l'une et de l'autre espèce, a lieu aussi pour le contour donné formé de leur réunion. Je n'insisterai pas davantage sur cette nouvelle démonstration du théorème, qu'il suffit d'avoir indiquée.

La proposition suivante mérite encore d'être remarquée. Soit $F(z) = 0$ une équation (algébrique ou non algébrique) qui devient $P + Q\sqrt{-1} = 0$ quand on fait $z = x + y\sqrt{-1}$ et qui a un certain nombre μ de racines renfermées dans l'intérieur du contour ABC, n'en ayant aucune sur ce contour même. Soit $f(z) = 0$ une autre équation qui devient $p + q\sqrt{-1} = 0$ en faisant $z = x + y\sqrt{-1}$ et qui a ν racines au dedans du même contour. On suppose qu'aucune des quantités P, Q, p, q ne peut devenir infinie pour des valeurs finies de x et de y. Si l'on divise $P + Q\sqrt{-1}$ par $p + q\sqrt{-1}$, on aura un quotient de la forme $p' + q'\sqrt{-1}$, dans lequel les quantités p' et q' auront toujours des valeurs finies pour tous les points du contour ABC. Je dis qu'en parcourant le contour ABC, la quantité $\frac{p'}{q'}$ passera en s'évanouissant du positif au négatif $2(\mu - \nu)$ fois de plus que du négatif au positif, ou qu'on aura $\delta' = 2(\mu - \nu)$ pour $\frac{p'}{q'}$.

En effet on a d'après le théorème $\Delta = 2\mu$ pour $\frac{P}{Q}$, $\delta = 2\nu$ pour $\frac{p}{q}$ et d'après notre 2^e proposition on a aussi $\Delta = \delta + \delta'$. De là résulte $\delta' = 2(\mu - \nu)$.

Donc quand on connaîtra δ' et l'un des deux nombres de racines μ, ν, on connaîtra l'autre. En particulier on aura $\delta' = 0$, si les deux équations $F(z) = 0$ et $f(z) = 0$ ont le même nombre de racines dans l'intérieur du contour ABC; et réciproquement.

La recherche du nombre des racines d'une équation $F(z) = 0$ contenues dans un contour donné étant réduite à trouver l'excès Δ pour ce contour, nous allons maintenant donner les moyens de déterminer ce nombre Δ, lorsque l'équation $F(z) = 0$ est algébrique.

Supposons que le contour ABC soit composé de plusieurs portions de lignes AB, BC, etc. Il faudra déterminer en parcourant successivement chacune de ces portions de lignes AB, BC, ... l'excès (positif, négatif ou zéro) du nombre de fois où la quantité $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant passe du positif au négatif sur le nombre de fois où elle passe du négatif au positif. Le nombre Δ sera égal à la somme de tous ces excès partiels relatifs aux différentes portions du contour ABC. Il suffit donc de considérer l'une de ces portions AB. On peut trouver l'excès qui s'y rapporte, lorsque les coordonnées x et y d'un point quelconque de cette ligne AB peuvent être exprimées par des fonctions rationnelles d'une certaine variable s. On emploie à cet effet une méthode semblable à celle que j'ai donnée dans mon théorème pour la détermination du nombre des racines réelles d'une équation comprises entre deux limites quelconques.

P et Q devenant sur la ligne AB deux fonctions rationnelles de la variable s, leur quotient $\frac{P}{Q}$ prendra la forme d'une fraction $\frac{V}{V_1}$ dans laquelle V et V_1 seront deux fonctions entières de s. On fera sur ces deux polynomes V et V_1 l'opération nécessaire pour trouver leur plus grand commun diviseur, en ayant soin de changer les signes de tous les termes de chaque reste avant de le prendre pour diviseur du reste précédent. Ainsi en supposant que le degré de V par rapport à s soit supérieur ou égal à celui de V_1, on divisera V par V_1 jusqu'à ce qu'on arrive à un reste d'un degré inférieur à celui de V_1. On changera les signes de tous les termes de ce reste, et en le désignant après ce changement de signes par V_2, on divisera V_1 par V_2; on arrivera à un nouveau reste — V_3. On divisera de même V_2 par V_3, et en continuant ainsi on arrivera enfin à un dernier reste V_r indépendant de s ou qui contenant s divisera exactement le reste précédent V_{r-1}.

Si l'on parcourt la ligne AB (dans le sens ABC), s aura d'abord pour le point de départ A une certaine valeur α; s variera ensuite par degrés insensibles et finira par avoir pour le point B une valeur β plus grande ou plus petite que α. (s peut dans ses variations tantôt croître, tantôt décroître, et même ne pas rester comprise entre les valeurs α et β relatives aux deux points extrêmes A et B.)

Cela posé, l'excès ε du nombre de fois où la quantité $\frac{V}{V_r}$ ou $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant pour différents points de la ligne AB passera du positif au négatif sur le nombre de fois où elle passera en s'évanouissant du négatif au positif sera égal à l'excès du nombre des variations qui se trouveront dans la suite des signes des fonctions $V, V_1, V_2 \ldots V_r$ pour $s = \beta$ sur le nombre de leurs variations pour $s = \alpha$.

Cette proposition résulte des considérations suivantes: tandis que s varie depuis α jusqu'à β, la suite des signes des fonctions $V, V_1, \ldots V_r$ pour chaque valeur de s ne peut s'altérer qu'autant qu'une de ces fonctions change de signe et par conséquent devient nulle. Quand c'est une des fonctions intermédiaires entre V et V_r qui s'annulle, on prouve aisément (comme dans la démonstration du théorème relatif aux racines réelles) que le nombre des variations dans la suite des signes de toutes les fonctions demeure le même, et quand s en croissant ou décroissant, atteint et dépasse une valeur qui annulle V, la suite des signes gagne ou perd une variation ou conserve le même nombre de variations selon qu'alors $\frac{V}{V_1}$ passe du positif au négatif, ou du négatif au positif ou ne change pas de signe; cela est vrai, lors même que V et V_1 ont un plus grand diviseur commun V_r qui s'annulle pour la valeur de s que l'on considère, auquel cas toutes les fonctions $V, V_1, \ldots V_r$ s'annullent en même temps. On conclut de là la proposition énoncée qui a lieu soit que V et V_1 aient ou n'aient pas de diviseur commun (*).

Si l'on trouve un plus grand commun diviseur V_r entre V et V_1, il pourra se faire qu'on ait à la fois $P = 0$, $Q = 0$, pour une valeur de s qui annullera ce plus grand commun diviseur et qui

(*) Les recherches qui m'ont conduit à mon théorème sur la détermination des racines réelles des équations m'avaient aussi fait rencontrer cette dernière proposition parmi plusieurs autres. Mais comme je n'en voyais pas alors l'utilité, je ne l'ai pas énoncée dans l'analyse de mon mémoire insérée au *Bulletin des Sciences* de juin 1829. J'en ai fait mention depuis dans le n° 20 du mémoire imprimé dans le *Recueil des Savans étrangers;* elle admet d'ailleurs les simplifications exposées dans ce mémoire.

répondra à un point situé sur la ligne AB entre A et B. Dans ce cas, P et Q étant nulles à la fois pour ce point-là, en substituant ses coordonnées dans la formule $x+y\sqrt{-1}$, on aura une racine simple ou multiple de l'équation $F(z)=0$. Si le plus grand commun diviseur entre V et V_1 ne devient nul pour aucun point de la ligne AB situé entre A et B, ou si l'on ne trouve pas de plus grand commun diviseur, on sera certain, pourvu qu'on n'ait supprimé d'avance aucun facteur commun à P et à Q, qu'il n'existe sur la ligne AB aucun point correspondant à une racine de l'équation $F(z)=0$. C'est en admettant cette hypothèse que nous avons démontré le théorème de M. Cauchy; les modifications qu'il faudrait y apporter dans le cas où il y aurait des racines sur le contour même ABC, exigeraient une discussion longue et minutieuse que nous avons voulu éviter en faisant abstraction de ce cas particulier.

Nous avons supposé le degré de V par rapport à s supérieur ou égal à celui de V_1. Si le degré de V est inférieur à celui de V_1, on cherchera encore le plus grand commun diviseur entre V et V_1 en divisant d'abord V_1 par V, puis V par le reste de la première division après avoir changé les signes de tous ses termes, et en continuant ainsi on formera cette suite de fonctions $V_1, V, V_2, V_3, \ldots V_r$. La différence qu'on obtiendra en retranchant le nombre des variations formées par leurs signes pour $s=\alpha$ du nombre des variations pour $s=\beta$, exprimera l'excès E du nombre de fois où la quantité $\frac{V_1}{V}$ en s'évanouissant sur la ligne AB passera du positif au négatif sur le nombre de fois où elle passera du négatif au positif. Ce nombre E étant ainsi déterminé, l'excès cherché ε du nombre de fois où la quantité inverse $\frac{V}{V_1}$ en s'évanouissant sur la même ligne AB, passera du positif au négatif sur le nombre de fois où elle passera du négatif au positif, sera égal à $-E$ ou à $-E+1$ ou à $-E-1$ selon que cette quantité $\frac{V}{V_1}$ aura des valeurs de même signe pour $s=\alpha$ et $s=\beta$, ou qu'elle sera positive pour $s=\alpha$ et négative pour $s=\beta$, ou qu'elle sera négative pour $s=\alpha$ et positive pour $s=\beta$.

En effet, la quantité $\frac{V}{V_1}$ peut changer de signe sur la ligne AB en devenant tantôt nulle, tantôt infinie. L'excès i du nombre de fois où en devenant nulle ou infinie elle passe du positif au négatif sur le nombre de fois où elle passe du négatif au positif est égal à la somme des deux nombres ε et E. D'un autre côté cet excès i est évidemment égal à zéro ou à $+1$ ou à -1, selon que $\frac{V}{V_1}$ a des valeurs de même signe pour $s=\alpha$ et $s=\beta$, ou que $\frac{V}{V_1}$ est positive pour $s=\alpha$ et négative pour $s=\beta$, ou qu'elle est négative pour $s=\alpha$ et positive pour $s=\beta$. Donc ε est bien égal à $-$E dans le premier cas, à $-E+1$ dans le second et à $-E-1$ dans le troisième. Cette proposition a lieu, comme on voit, quand même V et V_1 ne seraient pas des fonctions entières de s.

On peut toujours rendre P et Q fonctions rationnelles d'une même variable s, lorsque la ligne AB est une droite, ou un cercle ou un arc de cercle.

Si la ligne AB est droite, il suffit de prendre pour s la distance d'un point quelconque de cette droite à un point fixe situé sur sa direction, ou bien encore on peut supposer que s n'est autre que x ou y. Si la droite AB est parallèle à l'axe des x, y est constante et il faut prendre $s=x$; si elle est parallèle à l'axe des y, x est constante et l'on prend $s=y$.

Si la ligne AB est un cercle ou un arc de cercle dont le rayon soit R et dont le centre ait pour coordonnées g et h, on fera $x=g+R\cos t$, $y=h+R\sin t$, et l'on prendra $s=\operatorname{tang}\frac{1}{2}t$; alors on aura $x=g+\frac{R(1-s^2)}{1+s^2}$, $y=h+\frac{2Rs}{1+s^2}$; et P, Q seront des fonctions rationnelles de cette nouvelle variable s, de sorte que $\frac{P}{Q}$ prendra la forme $\frac{V}{V_1}$, V et V_1 étant des fonctions entières de s.

Pour la pratique, ce qu'il y a de plus simple est de chercher par la méthode précédente les racines contenues dans des rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes. On ne fait alors varier qu'une seule des coordonnées x, y dans P et Q qui sont des fonctions entières de x et y. On abrégera le calcul en supposant d'abord les deux côtés du rectangle qui sont parallèles à l'un des axes situés à des distances infinies de cet axe. Car alors en parcourant ces côtés-là pour lesquels on aura y ou $x=-\infty$ et $=+\infty$, la quantité $\frac{P}{Q}$ ne s'évanouira pas ou s'évanouira une seule fois, et l'on verra aisément si en s'évanouissant elle passe du positif au négatif ou du négatif au positif.

On peut ainsi déterminer approximativement les parties réelles x et les parties y des racines représentées par $x+y\sqrt{-1}$; on obtiendra ensuite des valeurs plus exactes de ces racines par les méthodes d'approximation usitées.

On peut encore dans la pratique faire usage de la proposition suivante dont on peut donner une démonstration semblable à la première du présent article. Soit une équation algébrique $F(z)=0$ de la forme (5) qui devient $P+Q\sqrt{-1}=0$ en faisant $z=x+y\sqrt{-1}$.

Si l'on donne à y dans P et Q une valeur déterminée h positive ou négative, et si l'on fait croître x depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, l'excès du nombre de fois où $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant passera du positif au négatif sur le nombre de fois où $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant passera du négatif au positif sera égal à l'excès du nombre des racines $x+y\sqrt{-1}$ de l'équation $F(z)=0$, pour lesquelles y est plus grande que h sur le nombre des autres racines pour lesquelles y est plus petite que h.

Le degré m de l'équation $F(z)=0$ étant pair, si l'on donne à x dans P et Q une valeur déterminée g et si l'on fait croître y depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, l'excès du nombre de fois où $\frac{P}{Q}$ en s'évanouissant passera du positif au négatif sur le nombre de fois où $\frac{P}{Q}$ passera du négatif au positif sera égal à l'excès du nombre des racines de l'équation $F(z)=0$ pour lesquelles la partie réelle x est plus petite que g sur le nombre des autres racines pour lesquelles x est plus grande que g.

Le degré m étant impair, si l'on fait toujours $x=g$ dans P et Q et si l'on fait croître y depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, l'excès du nombre de fois où la quantité $-\frac{Q}{P}$ en s'évanouissant passera du positif au négatif sur le nombre de fois où elle passera du négatif au positif sera encore égal à l'excès du nombre des racines de $F(z)=0$ pour lesquelles x est plus petite que g sur le nombre des racines pour lesquelles x est plus grande que g.