et elle se décomposera dans les deux suivantes :

$$\Delta P = (-Q' + \alpha)\rho \sin\delta,$$
$$\Delta Q = (+P' + \beta)\rho \sin\delta.$$

Puisque le module de $\alpha + \beta i$ est inférieur à r tant que la valeur absolue de δ reste au-dessous d'une certaine limite α et β seront compris entre $-r$ et $+r$. D'ailleurs r est aussi petit que l'on veut ; donc si P' et Q' ne se réduisent pas à zéro, les quantités ΔP et ΔQ seront respectivement de même signe que $-Q' \sin\delta$ et $+P' \sin\delta$. De là résulte le théorème suivant :

Théorème II. — *Soit $f(z)$ une fonction entière de la variable imaginaire $z = \rho(\cos\omega + i \sin\omega)$; posons $f(z) = P + iQ$, P et Q étant des fonctions réelles et entières de ρ qui dépendent aussi de l'argument ω, et désignons par P', Q' les dérivées des polynômes P et Q prises par rapport au module ρ. Si l'on attribue à ce module ρ une valeur déterminée et que l'on fasse croître l'argument ω de 0 à 2π, la fonction Q croîtra tant que P' sera positive et elle décroîtra tant que P' sera négative. Au contraire, la fonction P décroîtra tant que Q' sera positive et elle croîtra tant que Q' sera négative.*

Théorème de Cauchy.

53. La variable imaginaire

$$(1)\qquad z = x + iy$$

peut être figurée géométriquement (n° 44) par un point mobile M ayant pour abscisse x, et pour ordonnée y, relativement à deux axes rectangulaires fixes Ox et Oy. Si ρ et ω désignent les coordonnées polaires du même point, on aura

$$x = \rho\cos\omega,\quad y = \rho\sin\omega,$$

et, par suite

$$(2)\qquad z = \rho(\cos\omega + i\sin\omega),$$

en sorte que ρ est le module et ω l'argument de la variable imaginaire z.

En outre, si $f(z)$ désigne une fonction entière de z d'un degré quelconque m dans laquelle les coefficients soient des quantités réelles ou imaginaires données, on aura, en remplaçant z par la valeur (1),

$$f(z) = P + iQ,$$

P et Q étant des fonctions réelles et entières des coordonnées x et y ; d'où il résulte, comme nous l'avons déjà dit, que la recherche des racines de l'équation

$$f(z) = 0$$

équivaut à celle des points pour lesquels on a simultanément

$$P = 0,\quad Q = 0,$$

et auxquels nous appliquons, pour abréger, la dénomination de *racines*.

Enfin, si le polynôme $f(z)$ est divisible par la $n^{\text{ième}}$ puissance de $z - z_0$, sans l'être par une puissance supérieure du même binôme, nous sommes convenu (n° 45) de dire que l'équation $f(z) = 0$ a n racines égales à z_0 ; on a, dans ce cas,

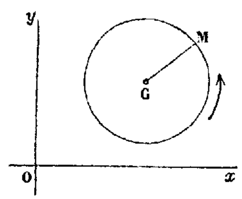
$$f(z_0) = 0,\quad f'(z_0) = 0,\quad \ldots,\quad f^{n-1}(z_0) = 0,$$

mais la dérivée du $n^{\text{ième}}$ ordre, $f^n(z)$, ne s'annule pas pour $z = z_0$.

54. Ces notions rappelées, nous nous proposons d'établir ici une proposition importante due à Cauchy et qui constitue l'un des plus beaux théorèmes de l'Algèbre.

La démonstration que nous allons présenter sera fondée sur le lemme suivant :

LEMME. — *Soient* $z = x + iy$ *une variable imaginaire et* $f(z) = P + iQ$ *une fonction entière de* z, *d'un degré quelconque* m P *et* Q *étant des quantités réelles. Supposons que l'équation* $f(z) = 0$ *ait* n *racines égales à* $x_0 + iy_0$, n *pouvant être égal à* 1, *et considérons le point* G *dont les coordonnées sont* x_0 *et* y_0, *relativement à deux axes rectangulaires* Ox, Oy. *Décrivons une circonférence du point* G *comme centre, avec un rayon* ρ *suffisamment petit, et désignons par* ω *l'angle formé, avec la direction* Ox, *par la direction du rayon* GM, *de manière que cet angle soit nul quand* GM *a la direction de* Ox *et qu'il croisse quand le rayon* GM *se meut toujours dans le même sens, en s'élevant de* Ox *vers* Oy. *Cela posé, si le point mobile* M, *partant d'une position quelconque, décrit la circonférence entière pour revenir à sa position première, c'est-à-dire si l'angle* ω *augmente de* 2π, *le rapport* $\frac{P}{Q}$, *qui, pour chaque position du point* M, *a une valeur déterminée, s'annulera précisément autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre* $2n$, *et, en s'annulant, ce rapport passera toujours d'une valeur positive à une valeur négative.*



On pourrait ajouter que le rapport $\frac{P}{Q}$ devient infini un nombre de fois égal à $2n$, et qu'à chaque fois il

passe d'une valeur négative à une valeur positive ; mais nous avons voulu réduire notre lemme à ce qu'il a d'essentiel pour l'objet auquel nous le destinons. Il donnera d'ailleurs le complément dont nous venons de parler, si on l'applique à la fonction $if(z)$. Faisons encore une remarque importante : pour que le rapport $\frac{P}{Q}$ ait en chaque point de la circonférence une valeur déterminée, il suffit que le rayon ρ ne soit pas égal à la distance du point z_0 à l'un des autres points racines de l'équation $f(z) = 0$; mais rien ne limite la petitesse de ρ, et ce rayon se trouvera assujetti, dans notre démonstration, à être moindre que la plus petite des distances dont nous venons de parler.

Posons

$$z = z_0 + h;$$

comme on a, par hypothèse,

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = 0, \quad \ldots, \quad f^{n-1}(z_0) = 0,$$

et que $f^n(z_0)$ n'est pas nulle, la valeur de $f(z)$ ordonnée suivant les puissances de h sera

$$f(z) = \frac{f^n(z_0)}{1.2\ldots n} h^n + \ldots + \frac{f^m(z_0)}{1.2\ldots m} h^m. \tag{1}$$

Si l'on désigne par ρ et ω le module et l'argument de la variable h, on aura

$$h = \rho(\cos\omega + i\sin\omega);$$

représentons en outre par C_μ et α_μ le module et l'argument de la quantité $\frac{f^\mu(z_0)}{1.2\ldots\mu}$, de manière que l'on ait, pour toutes les valeurs $n, n+1, \ldots, m$ de μ,

$$\frac{f^\mu(z_0)}{1.2\ldots\mu} = C_\mu(\cos\alpha_\mu + i\sin\alpha_\mu);$$

l'expression de $f(z)$ deviendra

$$(2)\quad \begin{cases} f(z) = C_n\rho^n[\cos(n\omega + \alpha_n) + i\sin(n\omega + \alpha_n)] + \ldots \\ \qquad + C_m\rho^m[\cos(m\omega + \alpha_m) + i\sin(m\omega + \alpha_m)], \end{cases}$$

et l'on aura, en conséquence

$$(3)\quad \begin{cases} P = C_n\rho^n\cos(n\omega + \alpha_n) + \ldots + C_m\rho^m\cos(m\omega + \alpha_m), \\ Q = C_n\rho^n\sin(n\omega + \alpha_n) + \ldots + C_m\rho^m\sin(m\omega + \alpha_m); \end{cases}$$

on aura aussi, en désignant par Q' la dérivée du polynôme Q par rapport à la variable ρ,

$$(4)\quad Q' = nC_n\rho^{n-1}\sin(n\omega + \alpha_n) + \ldots + mC_m\rho^{m-1}\sin(m\omega + \alpha_m).$$

Cela posé, quel que soit l'angle ω, on peut faire

$$(5)\qquad n\omega + \alpha_n = K\frac{\pi}{2} + n\varepsilon,$$

en désignant par K un entier positif ou négatif et par $n\varepsilon$ un angle compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$. Supposons d'abord que le nombre K soit impair, et posons

$$K = 2k + 1,$$

les formules (3) et (4) deviendront alors

$$(6)\quad \begin{cases} (-1)^k P = -C_n\rho^n\sin n\varepsilon + \ldots, \\ (-1)^k Q = +C_n\rho^n\cos n\varepsilon + \ldots, \\ (-1)^k Q' = +nC_n\rho^{n-1}\cos n\varepsilon + \ldots. \end{cases}$$

Soit maintenant θ un angle positif déterminé, inférieur à $\frac{\pi}{4n}$ et aussi petit d'ailleurs que l'on voudra; on pourra (n° 40) assigner une quantité positive r telle, que dans chacun des polynômes

$$\pm C_n\rho^n\sin n\theta + C_{n+1}\rho^{n+1} + \ldots + C_m\rho^m,$$
$$\pm C_n\rho^n\cos n\theta + C_{n+1}\rho^{n+1} + \ldots + C_m\rho^m,$$
$$\pm nC_n\rho^n\cos n\theta + (n+1)C_{n+1}\rho^{n+1} + \ldots + mC_m\rho^m,$$

le module du premier terme soit supérieur au module de la somme de tous les termes suivants pour toutes les valeurs de ρ comprises entre 0 et r. Nous donnerons à ρ une valeur déterminée au-dessous de la limite r, et cette valeur sera le rayon du cercle que nous avons à considérer.

D'après cela, ε étant compris entre $-\frac{\pi}{4n}$ et $+\frac{\pi}{4n}$, si cet angle tombe en dehors des limites $-\theta$ et $+\theta$, la valeur absolue de $\sin n\varepsilon$ sera supérieure à $\sin n\theta$, et, en conséquence, le module du premier terme du second membre, dans la première des formules (6), surpassera le module de la somme des termes suivants; donc P ne peut s'annuler que si ε est compris entre $-\theta$ et $+\theta$. Mais, pour les valeurs de ε comprises entre $-\theta$ et $+\theta$, le premier terme du second membre, dans chacune des deux dernières formules (6), est supérieur au module de la somme des termes qui suivent; par conséquent $(-1)^k Q$ et $(-1)^k Q'$ sont positifs. Alors le polynôme $(-1)^k P$ décroît constamment (n° 52) quand ε croît de $-\theta$ à $+\theta$; ce polynôme a d'ailleurs le signe + pour $\varepsilon = -\theta$, et il a le signe − pour $\varepsilon = +\theta$; donc il s'annule une fois, et seulement une fois, quand ε croît de $-\theta$ à $+\theta$. On voit aussi que $(-1)^k P$ passe en s'annulant d'une valeur positive à une valeur négative; et, comme $(-1)^k Q$ reste positif, on peut dire que le rapport $\frac{P}{Q}$ s'annule une fois en passant du positif au négatif, quand ε croît de $-\theta$ à $+\theta$.

Si le nombre K est pair et que l'on ait

$$K = 2k,$$

la première des formules (6) devra être remplacée par la suivante :

$$(-1)^k P = +C_n\rho^n\cos n\varepsilon + \ldots;$$

l'angle θ défini plus haut est inférieur à $\frac{\pi}{4n}$; il en est de même de la valeur absolue de ε; d'où il résulte que $\cos n\varepsilon$ est supérieur à $\sin n\theta$, et, en conséquence, la fonction P ne s'annule pas quand ε varie de $-\frac{\pi}{4n}$ à $+\frac{\pi}{4n}$.

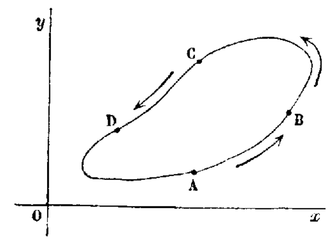
Maintenant, si, en partant d'une valeur quelconque de ω, on veut décrire la circonférence entière, de manière à revenir au point de départ, il sera nécessaire et suffisant de donner à l'entier K $4n$ valeurs entières consécutives quelconques $0, 1, 2, 3, \ldots, (4n-1)$ par exemple. A chacune des $2n$ valeurs impaires de K correspondra une valeur de ε comprise entre $-\theta$ et $+\theta$, pour laquelle le rapport $\frac{P}{Q}$ s'annulera en passant du positif au négatif, ce qui achève la démonstration de la proposition énoncée. Nous aurions pu abréger cette démonstration en prenant $\theta = \frac{\pi}{4n}$; mais le procédé que nous avons suivi a l'avantage de montrer que les valeurs de $n\omega + \alpha_n$, pour lesquelles $\frac{P}{Q}$ s'annule, ont pour limites les multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$, quand on fait décroître indéfiniment l'angle θ.

55. Au moyen du lemme que nous venons d'établir et en faisant usage de considérations ingénieuses que nous empruntons à une Note de MM. Sturm et Liouville (¹), on démontre très-facilement le théorème de Cauchy, qui consiste dans la proposition suivante :

Théorème. — *Soient z une variable imaginaire $x+iy$, $f(z) = P + iQ$ une fonction entière de cette*

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. I, p. 278.

variable, P et Q étant des fonctions réelles et entières des variables x et y. Traçons dans le plan des axes rectangulaires Ox, Oy un contour fermé quelconque qui ne passe par aucun des points racines de l'équation $f(z) = 0$, auquel cas le rapport $\frac{P}{Q}$ aura, en chaque point du contour, une valeur déterminée. Si l'on suit le contour ABCD en partant d'un point quelconque A et en marchant toujours dans le même sens ABCD jusqu'à ce qu'on soit revenu au point de départ, le rapport $\frac{P}{Q}$ prendra diverses valeurs, et il passera par zéro chaque fois que P sera nul, tandis qu'il deviendra infini lorsque Q s'annulera. Cela posé, soit k le nombre de fois que le rapport $\frac{P}{Q}$, en s'évanouissant et en changeant de signe, passe du positif au négatif, k' le nombre de fois que le même rapport, en s'évanouissant et en changeant de signe, passe du négatif au positif; le nombre k ne sera jamais inférieur à k' et l'excès $k - k' = \Delta$ sera toujours égal au double 2μ du nombre μ des racines égales ou inégales de l'équation $f(z) = 0$, comprises dans la portion du plan limitée par le contour ABCD.

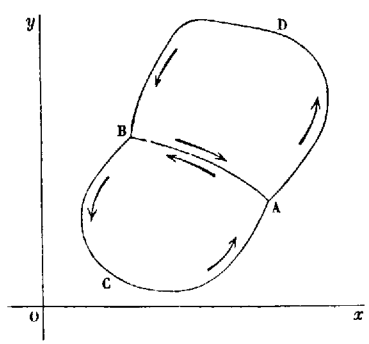


Le contour fermé ABCD est quelconque, convexe ou non convexe; pour bien fixer le sens dans lequel ce contour doit être parcouru, imaginons un cercle d'un rayon aussi petit que l'on voudra, qui touche le contour au point de départ A et qui soit entièrement situé dans l'espace limité par ce contour ; en même temps supposons que l'on ait transporté les axes Ox et Oy parallèlement à eux-mêmes au centre du cercle. Si l'on parcourt la circonférence du cercle en marchant de l'axe des x vers l'axe des y, lorsqu'on atteindra le point A, la direction du mouvement sur le cercle sera aussi celle du mouvement que nous considérons sur le contour ABCD.

Remarquons encore que, d'après l'énoncé du théorème, on n'a point à considérer les changements de signe que peut offrir le rapport $\frac{P}{Q}$ quand il devient infini ; en outre, il peut arriver que ce rapport s'annule sans changer de signe, mais il n'y a pas lieu de se préoccuper de cette circonstance. Ajoutons que, pour abréger le discours, l'excès Δ sera dit l'excès relatif au contour donné ABCD.

La démonstration que nous allons présenter se composera de quatre parties :

1° *Si le théorème énoncé a lieu pour deux contours* ABCA *et* ADBA *qui ont une partie commune* AB, *il a*



lieu aussi pour le contour total ADBCA *formé par leur réunion.*

En effet, soient μ le nombre des racines égales ou inégales comprises dans le contour total ADBCA, et Δ l'excès relatif à ce contour ; soient aussi μ' et Δ', μ'' et Δ'' les quantités analogues pour les contours respectifs ABCA et ADBA. On a, par hypothèse

$$\Delta' = 2\mu', \quad \Delta'' = 2\mu'' ;$$

mais la somme $\Delta' + \Delta''$ se compose évidemment de l'excès Δ augmenté de la somme des deux excès qui répondent l'un à la partie AB du contour partiel ABCA et l'autre à la partie BA du second contour ABDA ; il est évident que ces derniers excès sont égaux et de signes contraires ; donc on a

$$\Delta = \Delta' + \Delta'' ;$$

d'ailleurs

$$\mu = \mu' + \mu'',$$

donc

$$\Delta = 2\mu.$$

Il résulte de là que :

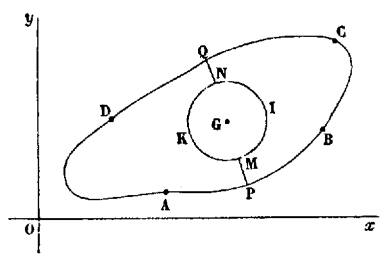
Si le théorème énoncé a lieu pour un nombre quelconque de contours juxtaposés, il a lieu aussi pour le contour formé par leur réunion.

2° *Le théorème énoncé a lieu lorsqu'il n'y a aucune racine de l'équation* $f(z) = 0$, *dans l'espace limité par le contour donné. En d'autres termes, si l'on a* $\mu = 0$, *on a aussi* $\Delta = 0$.

En effet, il peut y avoir dans l'intérieur du contour donné comme sur le contour même des points pour lesquels on a soit $P = 0$, soit $Q = 0$; mais, par hypothèse, il n'en existe aucun pour lequel on ait à la fois $P = 0$ $Q = 0$. Il résulte de là que l'on peut toujours décomposer l'espace limité par le contour donné en plusieurs parties telles, que chacune ne renferme dans son intérieur ou sur son contour aucun point pour lequel on ait $P = 0$, ou aucun point pour lequel on ait $Q = 0$. En outre, d'après ce qui précède, le théorème de Cauchy subsistera pour le contour donné, s'il a lieu pour les divers contours partiels dont nous venons de parler; il suffit donc de considérer ces derniers.

Si, dans l'intérieur d'un contour et sur ce contour, on n'a jamais $P = 0$, il est évident que l'on a $\Delta = 0$, puisque le rapport $\frac{P}{Q}$ ne s'annule pas. Si, au contraire, la fonction P s'annule, mais que l'on n'ait jamais $Q = 0$, la fonction Q conservera le même signe aux divers points du contour et le rapport $\frac{P}{Q}$ ne pourra changer de signe qu'en s'évanouissant. D'ailleurs, comme ce rapport reprend sa valeur primitive quand on a parcouru le contour entier, il est évident que, s'il s'est annulé k fois en passant du positif au négatif, il s'est annulé pareillement k fois en passant du négatif au positif. On a donc encore $\Delta = 0$.

3° *Le théorème énoncé a lieu lorsque l'équation $f(z) = 0$ n'a qu'une seule racine, d'un degré de multiplicité quelconque n, dans l'espace limité par le contour donné. On a, en conséquence, $\Delta = 2n$.*



Soient ABCD le contour donné et G le point racine

du degré n de multiplicité. Si du point G comme centre, avec un rayon suffisamment petit, on décrit la circonférence MINK, puis que l'on joigne respectivement les deux points M et N de cette circonférence à deux points P et Q du contour donné, le théorème de Cauchy aura lieu, d'après ce qui précède et d'après le lemme du n° 54, pour les trois contours juxtaposés KNQDAPMK, MINKM et IMPBCQNI; donc il a lieu pour le contour proposé ABCD qui résulte de la réunion des trois précédents. Les deux premiers des contours dont il vient d'être question ont la partie commune NKM, et leur réunion forme le contour NQDAPMIN; celui-ci a, avec le dernier des trois considérés, la partie commune PMINQ, et leur réunion forme le contour ABCD.

4° *Le théorème énoncé a lieu, quel que soit le nombre des points racines compris dans le contour donné.*

En effet, on peut décomposer l'espace limité par le contour en plusieurs parties qui ne contiennent chacune qu'un seul point racine; le théorème aura lieu pour chacun des contours partiels que l'on obtiendra ainsi, et en conséquence il aura également lieu pour le contour proposé qui résulte de leur réunion.

Le théorème de Cauchy est donc complétement démontré.

56. Il faut remarquer que la démonstration précédente ne suppose en aucune façon l'existence du principe d'après lequel toute équation a une racine, et j'ajoute que ce principe n'est qu'un corollaire du théorème de Cauchy, lequel peut être regardé dès lors comme le fondement de la théorie des équations. Voici, en effet, une démonstration nouvelle du principe du n° 44, qui est analogue à celle du lemme du n° 54.

Étant donnée l'équation $f(z)=0$, traçons deux axes rectangulaires et décrivons de leur origine comme centre un cercle dont le rayon ρ soit aussi grand que l'on voudra. Soit

$$(1) \qquad f(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z + A_m;$$

si l'on désigne par C_μ et α_μ le module et l'argument du coefficient A_μ, et que l'on pose

$$z = \rho\,(\cos\omega + i\sin\omega),$$

on aura

$$\begin{aligned} f(z) = C_0\rho^m[\cos(m\omega+\alpha_0) + i\sin(m\omega+\alpha_0)] + \ldots \\ + C_{m-1}\rho[\cos(\omega+\alpha_{m-1}) + i\sin(\omega+\alpha_{m-1})] \\ + C_m(\cos\alpha_m + i\sin\alpha_m); \end{aligned}$$

en faisant, comme précédemment,

$$f(z) = P + iQ,$$

il viendra

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= C_0\rho^m\cos(m\omega+\alpha_0) + \ldots + C_{m-1}\rho\cos(\omega+\alpha_{m-1}) + C_m\cos\alpha_m, \\ Q &= C_0\rho^m\sin(m\omega+\alpha_0) + \ldots + C_{m-1}\rho\sin(\omega+\alpha_{m-1}) + C_m\sin\alpha_m, \end{aligned} \right.$$

et, en désignant par Q' la dérivée de Q par rapport à ρ, on aura ainsi

$$(3) \quad Q' = mC_0\rho^{m-1}\sin(m\omega+\alpha_0) + \ldots + C_{m-1}\sin(\omega+\alpha_{m-1}).$$

Quelle que soit la valeur de ω, on peut faire

$$(4) \qquad m\omega + \alpha_0 = K\frac{\pi}{2} + m\varepsilon,$$

K étant un entier et $m\varepsilon$ étant un angle compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$. Si K est un nombre impair $2k+1$, les formules (2) et (3) deviendront

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} (-1)^k P &= -C_0\rho^m\sin m\varepsilon + \ldots, \\ (-1)^k Q &= +C_0\rho^m\cos m\varepsilon + \ldots, \\ (-1)^k Q' &= +mC_0\rho^{m-1}\cos m\varepsilon + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Soit θ un angle positif déterminé, inférieur à $\frac{\pi}{4m}$ et aussi petit d'ailleurs que l'on voudra; on pourra assigner une quantité positive r telle, que dans chacun des polynômes

$$\begin{aligned} &\pm C_0\rho^m\sin m\theta + C_1\rho^{m-1} + \ldots + C_{m-1}\rho + C_m, \\ &\pm C_0\rho^m\cos m\theta + C_1\rho^{m-1} + \ldots + C_{m-1}\rho + C_m, \\ &\pm mC_0\rho^{m-1}\cos m\theta + (m-1)C_1\rho^{m-2} + \ldots + C_{m-1} \end{aligned}$$

le module du premier terme soit supérieur à la somme des termes suivants, pour toutes les valeurs de ρ supérieures à r; nous supposerons que la valeur choisie pour ρ soit supérieure à cette limite.

Cela posé, ε étant compris entre $-\frac{\pi}{4m}$ et $+\frac{\pi}{4m}$, si cet angle tombe en dehors des limites $-\theta$ et $+\theta$, la valeur absolue de $\sin m\varepsilon$ sera supérieure à $\sin m\theta$, et, en conséquence, le module du premier terme du second membre, dans la première formule (5), surpassera le module de la somme des termes suivants; donc P ne peut s'annuler que si ε est compris entre $-\theta$ et $+\theta$. Mais, pour les valeurs de ε comprises entre $-\theta$ et $+\theta$, le premier terme du second membre, dans chacune des deux dernières formules (5), est supérieur au module de la somme des termes qui suivent; par conséquent $(-1)^k Q$ et $(-1)^k Q'$ sont positifs. Alors le polynôme $(-1)^k P$ décroît constamment (nº 52) quand ε croît de $-\theta$ à $+\theta$; ce polynôme a d'ailleurs le signe $+$ pour $\varepsilon = -\theta$, et il a le signe $-$ pour $\varepsilon = +\theta$; donc il s'annule une fois, et une fois seulement, quand ε croît de $-\theta$ à $+\theta$. On voit aussi que $(-1)^k P$ passe en s'annulant du positif au négatif, et, comme $(-1)^k Q$ reste positif, le rapport $\frac{P}{Q}$ s'annule une fois en passant du positif au négatif.

Si K est un nombre pair $2k$, la première des formules (5) devra être remplacée par

$$(-1)^k P = + C_0 \rho^m \cos m\varepsilon + \ldots;$$

on a évidemment $\cos m\varepsilon > \sin m\theta$, et, en conséquence, la fonction P ne s'annule pas quand ε varie de $-\frac{\pi}{4m}$ à $+\frac{\pi}{4m}$.

Maintenant, si l'on veut décrire la circonférence entière de rayon ρ, il sera nécessaire et suffisant de donner à l'entier K, dans la formule (4), $4m$ valeurs consécutives quelconques, par exemple $0, 1, 2, 3, \ldots, (4m-1)$. A chacune des $2m$ valeurs impaires de K répondra une valeur de ε comprise entre $-\theta$ et $+\theta$, pour laquelle le rapport $\frac{P}{Q}$ s'annulera en passant du positif au négatif. On a donc, pour le cercle considéré, $\Delta = 2m$, et, comme le rayon ρ peut être choisi aussi grand que l'on voudra, on voit que :

Une équation du degré m a précisément m racines.

Transformation des équations.

57. Le problème général dont il s'agit ici consiste à déduire d'une équation donnée,

$$(1) \qquad f(z) = 0,$$

une nouvelle équation dont les racines aient avec celles de la première une relation donnée. Le cas le plus simple est celui où chaque racine u de l'équation demandée est exprimable par une *fonction* rationnelle donnée d'une racine z de la proposée, c'est-à-dire par une fonction égale au quotient de deux fonctions entières $\varphi(z)$, $\psi(z)$.

On a alors

$$(2) \qquad u = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

Si l'équation proposée est du degré m, elle aura m racines $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$, et il en résultera, pour u, m valeurs correspondantes $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$, d'où l'on peut conclure que l'équation en u doit être, comme la proposée, du degré m. Nous reviendrons, dans la deuxième Section de cet ouvrage, sur l'importante question de la transformation des équations; ici nous nous bornerons à examiner le cas particulier où les polynômes $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont du premier degré; la formule (2) devient alors

$$(3) \qquad u = \frac{az+b}{a'z+b'},$$

a, b, a', b' étant des constantes données. On tire de la formule (3)

$$(4) \qquad z = \frac{b'u-b}{a-a'u},$$

et, en substituant cette valeur de z dans l'équation (1), on obtient l'équation demandée, savoir :

$$f\left(\frac{b'u-b}{a-a'u}\right) = 0;$$

il ne reste plus qu'à chasser les dénominateurs, pour mettre cette équation sous la forme

$$(5) \qquad F(u) = 0,$$

$F(u)$ désignant une fonction entière de u.

Il faut remarquer que la transformation exprimée par la formule (3) peut être réalisée en exécutant successivement plusieurs transformations plus simples qui se présentent très-fréquemment dans l'Algèbre. En effet, si a' n'est pas nul, la formule (3) peut être mise sous la forme

$$u = \frac{\frac{ba' - ab'}{a'^2}}{z + \frac{b'}{a'}} + \frac{a}{a'},$$

et l'on voit qu'elle résulte de l'élimination de z', z'', z''' entre les quatre équations

$$z' = z + \frac{b'}{a'},$$

$$z'' = \frac{1}{z'},$$

$$z''' = \frac{ba' - ab'}{a'^2} z'',$$

$$u = z''' + \frac{a}{a'}.$$

Lorsque a' est nul, la formule (3) résulte de l'élimination de z' entre les deux

$$z' = \frac{a}{b'} z,$$

$$u = z' + \frac{b}{b'}.$$

Il résulte de là que les trois formules

$$u = \alpha z, \quad u = \frac{1}{z}, \quad u = z + \alpha,$$

qui sont comprises dans la formule générale (3), expriment des transformations élémentaires dont la combinaison produit le même effet que la transformation *linéaire* la plus générale.

58. La transformation $u = \alpha z$ a pour objet de former une équation dont les racines soient égales à celles de la

proposée multipliées par un nombre donné α; l'équation proposée étant $f(z) = 0$, la transformée sera

$$f\left(\frac{u}{\alpha}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad f\left(\frac{z}{\alpha}\right) = 0,$$

en écrivant z au lieu de u.

On peut toujours supposer que le coefficient de la plus haute puissance de z dans $f(z)$ soit égal à 1; alors si, dans l'équation proposée,

$$f(z) = 0 \quad \text{ou} \quad z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_{m-1} z + A_m = 0,$$

les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sont des nombres commensurables ou des expressions algébriques de forme fractionnaire, la transformation précédente permettra de ramener ces coefficients à la forme entière, en disposant convenablement de l'indéterminée α. Effectivement, après avoir chassé les dénominateurs, la transformée devient

$$z^m + A_1 \alpha z^{m-1} + A_2 \alpha^2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-1} \alpha^{m-1} z + A_m \alpha^m = 0,$$

et il suffira, pour remplir l'objet demandé, de donner à α une valeur telle, que les produits $A_\mu \alpha^\mu$ ne renferment plus de dénominateur.

Il faut remarquer le cas de $\alpha = -1$; alors la transformation a pour objet de changer les signes des racines de l'équation proposée. Pour avoir la transformée en $-z$ de l'équation $f(z) = 0$, il suffit de changer les signes de tous les termes de degrés impairs ou, si l'on veut, les signes de tous les termes de degrés pairs. En faisant le premier changement, si l'équation est de degré pair, et le deuxième, si l'équation est de degré impair, le premier terme sera toujours le même dans la proposée et dans la transformée.

59. La deuxième des transformations élémentaires dont il a été parlé plus haut, savoir $u = \frac{1}{z}$, a pour objet

de former une équation dont les racines soient les inverses des racines de la proposée. Si celle-ci est

$$(1) \qquad A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots A_{m-1} z + A_m = 0,$$

la transformée s'obtiendra en remplaçant z par $\frac{1}{u}$, ou, si l'on veut, par $\frac{1}{z}$; faisons ce changement, multiplions ensuite par z^m, et ordonnons par rapport aux puissances descendantes de z, il viendra

$$(2) \qquad A_m z^m + A_{m-1} z^{m-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0.$$

C'est ici l'occasion de présenter une remarque importante relativement aux racines qui peuvent devenir infinies. Supposons que les coefficients

$$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$$

dépendent d'une quantité t susceptible de recevoir diverses valeurs, et que, pour la valeur $t = t_0$, les modules des n derniers coefficients deviennent nuls. Alors, parmi les m racines de l'équation (1), il y en a n qui se réduisent à zéro pour $t = t_0$, et par conséquent les modules de leurs inverses deviennent infinis; donc, quand t tend vers la limite t_0, les modules de n des m racines de l'équation (2) tendent vers l'infini; à la limite, cette équation (2) se réduit au degré $m - n$, et elle n'a plus que $m - n$ racines finies.

60. Il peut arriver que les équations (1) et (2) du numéro précédent coïncident. Dans ce cas, l'équation proposée est dite *réciproque;* l'inverse d'une racine quelconque est aussi une racine.

D'après ce qui précède, si $f(z) = 0$ est une équation

réciproque du degré m, on aura identiquement

$$f(z) = \lambda z^m f\left(\frac{1}{z}\right),$$

λ étant un facteur indépendant de z. Faisant $z = +1$, puis $z = -1$, il vient

$$f(1) = \lambda f(1), \quad f(-1) = (-1)^m \lambda f(-1).$$

Si $f(1)$ et $f(-1)$ ne sont pas nuls, c'est-à-dire si $f(z)$ n'est divisible par aucun des binômes $z+1$, $z-1$, on voit que $\lambda = 1$ et que le degré m de l'équation est un nombre pair 2μ. L'identité

$$(1) \qquad f(z) = z^{2\mu} f\left(\frac{1}{z}\right)$$

montre que l'on a alors

$$(2) \quad \begin{cases} f(z) = A_0 z^{2\mu} + A_1 z^{2\mu-1} + \ldots \\ \qquad + A_{\mu-1} z^{\mu+1} + A_\mu z^\mu + A_{\mu-1} z^{\mu-1} + \ldots + A_1 z + A_0, \end{cases}$$

en sorte que les coefficients de deux termes également éloignés des extrêmes sont égaux et de même signe.

Supposons maintenant que $F(z) = 0$ soit une équation réciproque pouvant admettre les racines $+1$ et -1, et soit

$$(3) \qquad F(z) = (z-1)^p (z+1)^q f(z),$$

$f(z)$ n'étant pas divisible par $z \pm 1$; il est évident que l'équation $f(z) = 0$ est réciproque, et en conséquence le premier membre $f(z)$ a la forme indiquée par la formule (2). Maintenant, à cause des formules (1) et (3), on a l'identité

$$F(z) = (-1)^p z^{2\mu+p+q} F\left(\frac{1}{z}\right);$$

il en résulte que, si p est pair, les coefficients des termes également distants des extrêmes dans $F(z)$ sont encore égaux et de même signe. Mais, lorsque p est impair, les coefficients des termes également distants des extrêmes sont égaux et de signes contraires; dans ce dernier cas, lorsque q est impair, l'équation proposée est de degré pair, et le terme du milieu doit avoir un coefficient nul.

61. Les équations réciproques sont susceptibles d'*abaissement,* c'est-à-dire que leur résolution peut se ramener à la résolution d'équations de degré moindre. Comme on peut toujours supposer qu'une équation réciproque ait été débarrassée des racines $+1$ et -1 qu'elle peut avoir, elle sera nécessairement d'un degré pair 2μ, et l'on pourra lui donner la forme

$$A_0\left(z^\mu+\frac{1}{z^\mu}\right)+A_1\left(z^{\mu-1}+\frac{1}{z^{\mu-1}}\right)+\ldots+A_{\mu-1}\left(z+\frac{1}{z}\right)+A_\mu=0.$$

Cela posé, si l'on fait

$$z+\frac{1}{z}=x,$$

et généralement

$$V_n=z^n+\frac{1}{z^n},$$

puis que l'on multiplie $V_{n-1}=z^{n-1}+\frac{1}{z^{n-1}}$ par $x=z+\frac{1}{z}$, on trouvera

$$xV_{n-1}=\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)+\left(z^{n-2}+\frac{1}{z^{n-2}}\right)$$

ou

$$V_n=xV_{n-1}-V_{n-2}.$$

On a

$$V_1=x,\quad V_0=2,$$

et, en faisant usage de la formule précédente, on pourra exprimer successivement V_2, V_3, V_4, ... par des fonctions de x; il est évident que V_n sera une fonction entière de x du degré n. On trouve

$$\begin{aligned}V_2&=x^2-2,\\ V_3&=x^3-3x,\\ V_4&=x^4-4x^2+2,\\ V_5&=x^5-5x^3+5x,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

D'après cela, l'équation proposée pourra être ramenée à une équation du degré μ en x, et les racines z de la proposée seront données par la formule générale

$$z^2-xz+1=0,\quad \text{d'où}\quad z=\frac{x}{2}\pm\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}.$$

Il faut remarquer aussi que le premier membre de l'équation proposée est égal au produit

$$(z^2-x_0z+1)(z^2-x_1z+1)\ldots(z^2-x_{\mu-1}z+1),$$

x_0, x_1, ..., $x_{\mu-1}$ désignant les μ racines de l'équation en x.

62. La transformation $u=z+\alpha$ a pour objet de former une équation dont les racines soient égales à celles de la proposée augmentées d'une quantité donnée α; l'équation proposée étant $f(z)=0$, la transformée sera $f(u-\alpha)=0$ ou $f(z-\alpha)=0$, en écrivant z au lieu de u. Si l'on ordonne par rapport aux puissances de z, cette transformée sera

$$f(-\alpha)+\frac{f'(-\alpha)}{1}z+\frac{f''(-\alpha)}{1.2}z^2+\ldots+\frac{f^m(-\alpha)}{1.2\ldots m}z^m=0.$$

On pourra disposer de l'indéterminée α de manière à faire évanouir l'un des termes de cette équation. Ainsi l'on fera disparaître le terme en z^{m-1} si l'on détermine α par l'équation

$$f^{m-1}(-\alpha)=0.$$

Supposons, par exemple, que l'équation proposée soit

$$z^3 + Pz^2 + Qz + R = 0;$$

on a

$$f(z) = z^3 + Pz^2 + Qz + R,$$
$$\frac{f'(z)}{1} = 3z^2 + 2Pz + Q,$$
$$\frac{f''(z)}{1.2} = 3z + P,$$
$$\frac{f'''(z)}{1.2.3} = 1.$$

L'équation $f''(z) = 0$ donne $z = -\frac{P}{3}$; si donc on veut faire disparaître le terme en z^2, il faudra prendre $\alpha = \frac{P}{3}$. Les formules précédentes donnent

$$f\left(-\frac{P}{3}\right) = \frac{2P^3}{27} - \frac{PQ}{3} + R = q,$$
$$f'\left(-\frac{P}{3}\right) = -\frac{P^2}{3} + Q = p,$$

et la transformée sera

$$z^3 + pz + q = 0.$$

63. La transformation linéaire générale exprimée par la formule

$$u = \frac{az + b}{a'z + b'} \quad \text{ou} \quad z = \frac{b'u - b}{a - a'u}$$

fournit le moyen, à cause des indéterminées $a, b, \ldots,$ de faire disparaître deux termes d'une équation. Considérons, par exemple, l'équation du troisième degré,

$$z^3 + Pz^2 + Qz + R = 0;$$

la transformée en u sera

$$A_0 u^3 + A_1 u^2 + A_2 u + A_3 = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$A_0 = b'^3 - Pa'b'^2 + Qa'^2b' - Ra'^3,$$
$$A_1 = b'[-3bb' + P(ab' + ba') - Qaa'] + a'[Pbb' - Q(ab' + ba') + 3Raa'],$$
$$A_2 = -b[-3bb' + P(ab' + ba') - Qaa'] - a[Pbb' - Q(ab' + ba') + 3Raa'],$$
$$A_3 = -b^3 + Pab^2 - Qa^2b + Ra^3.$$

Déterminons maintenant les arbitraires a et a' de manière que l'on ait

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0;$$

comme on ne peut admettre que $ab' - ba'$ soit nul, puisqu'alors u ne dépendrait pas de z, les deux équations précédentes se réduiront à

$$-3bb' + P(ab' + ba') - Qaa' = 0,$$
$$Pbb' - Q(ab' + ba') + 3Raa' = 0;$$

si on les résout par rapport à bb' et $ab' + ba'$, on trouvera

$$\frac{b}{a}\frac{b'}{a'} = -\frac{3PR - Q^2}{P^2 - 3Q}, \quad \frac{b}{a} + \frac{b'}{a'} = -\frac{PQ - 9R}{P^2 - 3Q};$$

en conséquence, $\frac{b}{a}$ et $\frac{b'}{a'}$ sont les racines de l'équation du deuxième degré

$$(P^2 - 3Q)t^2 - (PQ - 9R)t + (Q^2 - 3PR) = 0.$$

Désignons par t et t' les racines de cette équation et par $f(z)$ le premier membre de l'équation proposée; les quantités a et a' restant indéterminées, nous ferons $a' = a = -1$; la transformée en u se réduit alors à

$$u^3 = \frac{f(t)}{f(t')};$$

ses trois racines seront exprimées par la formule

$$u = \sqrt[3]{\frac{f(t)}{f(t')}},$$

et celles de la proposée seront données par la suivante :

$$z = \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{f(t)}{f(t')}}}{t - t'\sqrt[3]{\frac{f(t)}{f(t')}}}.$$

Cette formule peut être ramenée à une expression plus simple, mais nous n'insisterons pas sur ce sujet, qui sera plus tard l'objet d'une étude approfondie ; il nous suffit ici d'avoir montré comment la transformation linéaire peut conduire à la résolution générale des équations du troisième degré. Ajoutons que la même transformation fournit aussi la résolution générale des équations du quatrième degré, car elle permet de faire disparaître la première et la troisième puissance de l'inconnue, au moyen d'une équation du troisième degré. La proposée se trouve alors remplacée par une transformée que l'on sait résoudre, puisque celle-ci peut être abaissée au deuxième degré.

CHAPITRE IV.

DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES ET DE L'ÉLIMINATION.

De l'élimination.

64. Après avoir exposé les propriétés générales des fonctions entières d'une variable et des équations à une seule inconnue, nous devons parler des fonctions entières de plusieurs variables et des équations algébriques simultanées.

Une *fonction entière de plusieurs variables* est un polynôme entier et rationnel relativement à chacune des variables, et l'on nomme *équation algébrique* toute équation qui peut être ramenée à la forme $V = 0$, V désignant une fonction entière.

Un système de n équations algébriques admet, en général, comme on le verra, un nombre limité de solutions, quand le nombre des inconnues est égal à n. Mais, si ce dernier nombre est seulement $n - 1$, les équations proposées n'admettront point de solution, à moins qu'une certaine équation de condition ne soit satisfaite : les procédés par lesquels on parvient à former cette équation de condition constituent ce qu'on nomme l'*élimination*, et l'équation obtenue est dite *équation finale*.

Supposons que l'on ait n équations algébriques entre n inconnues

$$z,\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{n-1},$$

et que ces n équations soient satisfaites par les valeurs simultanées

$$z = a,\quad z_1 = a_1,\quad z_2 = a_2,\quad \ldots,\quad z_{n-1} = a_{n-1};$$

regardons z comme une quantité connue, les équations proposées ne renfermeront plus que $n-1$ inconnues; elles admettront d'ailleurs un système de solutions communes si l'on donne à z la valeur de a; donc l'équation finale en z obtenue par l'élimination de $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ entre les proposées devra admettre la racine a. D'après cela, on peut dire que *l'équation finale qui résulte de l'élimination de $n-1$ inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ entre n équations, contenant en outre l'inconnue z, a pour racines les diverses valeurs de z qui concourent, avec des valeurs convenables des autres inconnues, à former les systèmes de solutions des équations proposées.*

Il faut remarquer que l'élimination n'a pas d'autre objet que la formation de l'équation finale; la résolution d'un système d'équations simultanées constitue un problème distinct. A la vérité, pour traiter ce dernier problème, on peut et l'on doit même en général faire usage de l'élimination; mais on conçoit aussi que l'on puisse aborder la solution par d'autres voies.

Sur le nombre des termes que peut contenir une fonction entière d'un degré donné.

65. Considérons d'abord une fonction homogène et entière des $n+1$ variables

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_n,\ z_{n+1}$$

et du degré m. Si cette fonction est la plus générale de son degré, elle renfermera tous les termes qui, abstraction faite d'un coefficient constant, seront de la forme

$$z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \ldots z_n^{\alpha_n} z_{n+1}^{\alpha_{n+1}},$$

la somme des exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ étant égale à m. Le nombre total des termes dont il s'agit est précisément celui des *combinaisons complètes* m à m des $n+1$ lettres $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$, combinaisons dans lesquelles une même lettre peut figurer plusieurs fois. On sait que le nombre de ces combinaisons complètes est égal au nombre des *combinaisons simples* de $n+m$ lettres m à m, et voici d'ailleurs comment on peut établir l'égalité de ces deux nombres. Supposons que l'on ait écrit toutes les combinaisons complètes des $n+1$ lettres $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$, m à m, de manière que dans chacune d'elles l'indice d'une lettre ne soit jamais supérieur à l'indice de la lettre suivante; désignons par A l'ensemble de toutes ces combinaisons Supposons que l'on ait formé en même temps toutes les combinaisons simples des $n+m$ lettres $z_1, z_2, \ldots, z_{n+m}$, m à m, de manière que dans chaque combinaison les indices des lettres forment une suite croissante, et désignons par B l'ensemble de ces combinaisons. Il est évident que si, dans chaque combinaison B, on retranche respectivement les nombres $0, 1, 2, 3, \ldots, (m-1)$ des indices des lettres successives, on obtiendra une combinaison A; réciproquement, chaque combinaison A se changera en une combinaison B, si l'on augmente respectivement les indices des lettres successives des nombres $0, 1, 2, \ldots, (m-1)$. D'ailleurs, par l'opération dont il vient d'être question, deux combinaisons différentes de l'un des systèmes A et B se changent en deux combinaisons nécessairement distinctes; donc les deux systèmes renferment le même nombre de combinaisons.

Il résulte de là qu'une fonction entière et homogène du degré m dépendant de $n+1$ variables a, dans le cas le plus général,

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{1.2.3\ldots m}$$

termes. Si, dans cette fonction homogène, on pose $z_{n+1}=1$, on obtiendra la fonction entière la plus générale de n variables et du degré m; le nombre total des termes d'une telle fonction est donc aussi représenté par l'expression précédente.

66. Nous désignerons généralement par le symbole $N(n, m)$ le nombre des termes contenus dans la fonction entière la plus générale de n variables et du degré m; on aura alors

$$(1)\qquad N(n, m)=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{1.2.3\ldots m};$$

le second membre de cette formule ne change pas quand on échange entre elles les lettres n et m, car on peut lui donner la forme

$$\frac{1.2.3\ldots(n+m)}{1.2.3\ldots n\times 1.2.3\ldots m};$$

on a donc aussi

$$(2)\qquad N(n, m)=\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{1.2.3\ldots n}.$$

L'expression (1) se réduit à 1 pour $n=0$, et la même chose a lieu à l'égard de l'expression (2), quand on y fait $m=0$; on a donc

$$(3)\qquad N(0, m)=1,\quad N(n, 0)=1,$$

ce qui est conforme à notre définition du symbole $N(n, m)$; on doit admettre que les formules (3) subsistent quand on fait $m=0$ dans la première, et $n=0$ dans la seconde, et nous aurons

$$N(0, 0)=1,$$

ce qui exprime simplement une convention. Enfin, dans

ce qui va suivre, l'entier m pourra recevoir des valeurs négatives, et nous conviendrons que, pour de telles valeurs, on a

$$N(n, m)=0,$$

lors même que n aurait la valeur zéro.

Si l'on remplace m par $m-1$ dans la formule (2), on aura

$$N(n, m-1)=\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots n}$$

et par suite, en supposant $n>1$,

$$N(n, m)-N(n, m-1)=\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

ou

$$N(n, m)-N(n, m-1)=N(n-1, m).$$

Cette formule a été établie dans l'hypothèse de m positif et de $n>1$; mais, d'après notre définition du symbole N, on reconnaît qu'elle subsiste quand m est nul ou négatif, et quand n est égal à 1. Si l'on y remplace m successivement par $m, m-1, m-2, \ldots, (m-m_1+1)$, et qu'on ajoute les m_1 équations résultantes, il viendra

$$N(n, m)-N(n, m-m_1)=N(n-1, m)+N(n-1, m-1)+\ldots$$
$$+N(n-1, m-m_1+1),$$

formule qui subsiste évidemment, quel que soit le nombre entier m_1 supposé positif.

Si l'on pose

$$(4)\qquad \Delta_{m_1} N(n, m)=N(n, m)-N(n, m-m_1),$$

la formule précédente pourra s'écrire comme il suit :

$$(5)\qquad \Delta_{m_1} N(n, m)=\sum_{\mu_1=0}^{\mu_1=m_1-1} N(n-1, m-\mu_1),$$

le signe $\sum$ du second membre indiquant qu'il faut donner successivement à μ_1 les valeurs $0, 1, 2, \ldots, (m_1 - 1)$ dans l'expression $N(n-1, m-\mu_1)$, et faire ensuite la somme des résultats.

Soient $m_2, m_3, \ldots, m_k$ des nombres positifs quelconques, et posons encore

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta_{m_2}\Delta_{m_1}N(n, m) = \Delta_{m_1}N(n, m) - \Delta_{m_1}N(n, m-m_2), \\ \Delta_{m_3}\Delta_{m_2}\Delta_{m_1}N(n, m) = \Delta_{m_2}\Delta_{m_1}N(n, m) - \Delta_{m_2}\Delta_{m_1}N(n, m-m_3), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta_{m_k}\Delta_{m_{k-1}}\ldots\Delta_{m_1}N(n,m) = \Delta_{m_{k-1}}\ldots\Delta_{m_1}N(n,m) - \Delta_{m_{k-1}}\ldots\Delta_{m_1}N(n,m-m_k). \end{array}\right.$$

Si l'on suppose que k ne soit pas supérieur à n, on aura, en appliquant successivement k fois le théorème exprimé par la formule (5),

$$(7)\quad \Delta_{m_k}\Delta_{m_{k-1}}\ldots\Delta_{m_2}\Delta_{m_1}N(n,m) = \sum N(n-k, m-\mu_1-\mu_2-\ldots-\mu_k),$$

le signe $\sum$ exprimant qu'il faut faire la somme de toutes les valeurs que prend $N(n-k, m-\mu_1-\mu_2-\ldots-\mu_k)$, quand on emploie successivement tous les systèmes de valeurs nulles ou positives des indéterminées $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, tels que l'on ait

$$\mu_1 < m_1, \quad \mu_2 < m_2, \quad \ldots, \quad \mu_k < m_k.$$

Le nombre des termes contenus dans le second membre de la formule (7) est ainsi égal au produit $m_1 m_2 \ldots m_k$. Si le nombre k est égal à n, chacun des termes dont nous venons de parler se réduira à 1 ou à 0. Supposons qu'ils se réduisent tous à 1, la formule (7) donnera

$$(8)\quad \Delta_{m_n}\Delta_{m_{n-1}}\ldots\Delta_{m_1}N(n, m) = m_1 m_2 \ldots m_n.$$

Mais, pour que cette formule (8) subsiste, il faut que la quantité $m-\mu_1-\mu_2-\ldots-\mu_n$, qui figure sous le

signe $\sum$ dans la formule (7), ne soit jamais négative, et la condition pour qu'il en soit ainsi est

$$(9)\quad m = \text{ou} > (m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \ldots + (m_n - 1).$$

Si cette condition n'est pas satisfaite, comme les indéterminées $\mu_1, \mu_2, \ldots$ varient de 0 à $m_1 - 1$, de 0 à $m_2 - 1, \ldots$, respectivement, la somme $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$ prendra au moins une fois chacune des $m+1$ valeurs $0, 1, 2, \ldots, m$; donc, dans le second membre de la formule (7), où l'on suppose $k = n$, il y a plus de m termes égaux à 1, et l'on a alors

$$(10)\quad \Delta_{m_n}\Delta_{m_{n-1}}\ldots\Delta_{m_1}N(n, m) > m.$$

67. J'établirai encore ici une inégalité qui nous sera utile dans ce qui va suivre, et que l'on conclut très-facilement des formules (4) et (6). Le nombre que représente le symbole N n'étant jamais négatif, il en est de même des expressions dont la valeur est fournie par la formule (7); alors les formules (4) et (6) nous donnent

$$N(n, m) > \Delta_{m_1}N(n, m) > \Delta_{m_2}\Delta_{m_1}N(n, m) > \ldots.$$

Ainsi on aura généralement

$$N(n, m) > \Delta_{m_{k-1}}\Delta_{m_{k-2}}\ldots\Delta_{m_1}N(n, m);$$

en changeant m en $m - m_k$, et en écrivant dans le second membre

$$N(n, m) - \Delta_{m_k}N(n, m),$$

au lieu de $N(n, m-m_k)$, on aura

$$N(n, m-m_k) > \Delta_{m_{k-1}}\ldots\Delta_{m_1}N(n, m) - \Delta_{m_k}\ldots\Delta_{m_1}N(n, m).$$

Cela posé, on a l'identité

$$N(n, m-m_1) = N(n, m) - \Delta_{m_1}N(n, m),$$

et en donnant à k les valeurs $2, 3, \ldots, k$, dans l'inégalité que nous venons d'obtenir, il vient

$$N(n,m-m_2) > \Delta_{m_1} N(n,m) - \Delta_{m_2}\Delta_{m_1} N(n,m),$$
$$N(n,m-m_3) > \Delta_{m_2}\Delta_{m_1} N(n,m) - \Delta_{m_3}\Delta_{m_2}\Delta_{m_1} N(n,m),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$N(n,m-m_k) > \Delta_{m_{k-1}}\dots\Delta_{m_1} N(n,m) - \Delta_{m_k}\dots\Delta_{m_1} N(n,m).$$

Si l'on ajoute ces inégalités avec l'égalité qui les précède, on aura

$$N(n,m-m_1) + N(n,m-m_2) + \dots + N(n,m-m_k) > N(n,m) - \Delta_{m_k}\dots\Delta_{m_2}\Delta_{m_1} N(n,m),$$

ce qui est le résultat que nous avions en vue. Il faut remarquer que le signe $>$ n'exclut pas ici l'égalité.

Du nombre des termes d'une fonction entière, qui ne sont pas divisibles par des puissances données des variables.

68. Soit V une fonction entière et complète du degré m des n variables

$$z_1, \quad z_2, \quad \dots, \quad z_n,$$

et cherchons combien il y a, dans le polynôme V, de termes qui ne sont divisibles par aucun des monômes

$$z_1^{m_1}, \quad z_2^{m_2}, \quad \dots, \quad z_k^{m_k},$$

$m_1, m_2, \dots, m_k$ étant des exposants entiers quelconques dont le nombre k est égal ou inférieur à n.

Si m_1 est inférieur à m, la partie de V qui est divisible par $z_1^{m_1}$ est égale au produit de ce monôme par une fonction entière du degré $m-m_1$, laquelle doit être un polynôme complet, car autrement la fonction V ne serait pas complète; donc le nombre des termes de V qui sont

divisibles par $z_1^{m_1}$ est

$$N(n, m-m_1),$$

et ce résultat subsiste quand m_1 est supérieur à m, puisqu'alors l'expression précédente est nulle. Il résulte de là que le nombre des termes de V qui ne sont pas divisibles par $z_1^{m_1}$ est

$$N(n,m) - N(n, m-m_1)$$

ou, d'après notre notation,

$$\Delta_{m_1} N(n,m).$$

Représentons, pour un moment, par $\mathfrak{N}(n,m)$ le nombre des termes de V qui ne sont divisibles par aucun des monômes

$$z_1^{m_1}, \quad z_2^{m_2}, \quad \dots, \quad z_{k-1}^{m_{k-1}};$$

la partie de V qui est divisible par $z_k^{m_k}$ est le produit de z_k^{m} par une fonction entière du degré $m-m_k$, et dans cette fonction il y a $\mathfrak{N}(n, m-m_k)$ termes qui ne sont divisibles par aucun des monômes $z_1^{m_1}, \dots, z_{k-1}^{m_{k-1}}$; ce nombre exprime aussi combien il y a, dans V, de termes qui ne sont pas divisibles par les mêmes monômes, mais qui le sont par $z_k^{m_k}$. Il résulte de là que le nombre des termes de V qui ne sont divisibles par aucun des monômes

$$z_1^{m_1}, \quad z_2^{m_2}, \quad \dots, \quad z_{k-1}^{m_{k-1}}, \quad z_k^{m_k}$$

est égal à

$$\mathfrak{N}(n,m) - \mathfrak{N}(n, m-m_k)$$

ou, si l'on veut, à

$$\Delta_{m_k}\mathfrak{N}(n,m).$$

Mais nous avons vu qu'il y a, dans la fonction V, $\Delta_{m_1} N(n\ m)$ termes non divisibles par $z_1^{m_1}$; donc il y en a

$\Delta_{m_2}\Delta_{m_1}N(n, m)$ qui ne sont divisibles ni par $z_1^{m_1}$ ni par $z_2^{m_2}$; pareillement $\Delta_{m_3}\Delta_{m_2}\Delta_{m_1}N(n, m)$ est le nombre des termes non divisibles par l'un des trois monômes $z_1^{m_1}$, $z_2^{m_2}$, $z_3^{m_3}$, et ainsi de suite, en sorte que l'expression

$$\Delta_{m_k}\ldots\Delta_{m_2}\Delta_{m_1}N(n, m)$$

représente le nombre des termes de la fonction V qui n'admettent pour diviseur aucun des monômes

$$z_1^{m_1}, \quad z_2^{m_2}, \ldots, \quad z_k^{m_k}.$$

Réduction d'une fonction entière de plusieurs quantités assujetties à satisfaire à un pareil nombre d'équations données.

69. Soient

$$(1) \qquad V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \quad \ldots, \quad V_k = 0$$

k équations algébriques des degrés respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_k$ entre les variables

$$z_1, \; z_2, \; \ldots, \; z_n,$$

dont le nombre n est au moins égal à k.

Nous supposerons non-seulement que ces équations soient complètes, mais encore que les coefficients de chacune d'elles demeurent indéterminés, en sorte qu'il ne puisse exister entre eux aucune relation. Cela posé, nous établirons la proposition suivante : *Soit* S *une fonction entière quelconque des variables* $z_1, z_2, \ldots$, *il sera toujours possible de tirer des équations* (1) *les valeurs des puissances*

$$(2) \qquad z_1^{m_1}, \quad z_2^{m_2}, \quad \ldots, \quad z_k^{m_k},$$

qui seront ainsi exprimées par des fonctions entières ne

contenant $z_1, z_2, \ldots, z_k$ *qu'avec des exposants inférieurs à* $m_1, m_2, \ldots, m_k$ *respectivement. En outre, par la substitution de ces valeurs, on pourra faire disparaître de la fonction* S *tous les termes divisibles par l'un des monômes* (2).

Cette proposition est évidente quand le nombre k est égal à l'unité; dans ce cas le système (1) se réduit à une seule équation de laquelle on pourra tirer la valeur de $z_1^{m_1}$; la substitution de cette valeur abaissera le degré de S; si ce degré reste supérieur à m_1, de nouvelles substitutions pourront évidemment le réduire au-dessous de m_1. Au surplus, la réduction peut être opérée immédiatement en divisant S par V_1; si l'on désigne par $-T_1$ le quotient de cette division et par S' le reste qui est de degré inférieur à m_1, on aura

$$S + T_1 V_1 = S';$$

en sorte que, pour atteindre le but proposé, il suffira d'ajouter à S le produit $T_1 V_1$.

Lorsque le nombre k est supérieur à 1, si les degrés $m_1, m_2, \ldots, m_k$ des équations (1) sont égaux entre eux, on voit tout de suite que l'on pourra résoudre ces équations par rapport à $z_1^{m_1}, z_2^{m_2}, \ldots, z_k^{m_k}$, puisque nous leur supposons la plus grande généralité possible; mais on aperçoit moins facilement, même dans ce cas particulier, la marche qu'il faut suivre pour faire disparaître de la fonction S les termes divisibles par l'un des monômes (2). Le procédé est pourtant le même que dans le cas de $k = 1$; mais il faut l'appliquer d'une manière convenable, afin qu'aucune des substitutions qu'on exécute ne fasse reparaître des termes déjà disparus par des substitutions précédentes.

Quels que soient le nombre k et les degrés $m_1, m_2, \ldots, m_k$, je dis qu'on peut trouver des polynômes $T_1, T_2, \ldots, T_k$

tels que la somme

$$(3) \qquad S + T_1 V_1 + T_2 V_2 + \ldots + T_k V_k = S'$$

ne renferme plus aucun terme divisible par l'un des monômes (2); j'ajoute qu'en général ces polynômes ne seront pas complétement déterminés et qu'ils pourront en conséquence être choisis de plusieurs manières différentes. En effet, désignons par m le degré de la fonction S et prenons pour $T_1, T_2, \ldots, T_k$ les fonctions entières les plus générales des degrés respectifs

$$m - m_1, \quad m - m_2, \quad \ldots, \quad m - m_k,$$

chacune de ces fonctions devant toutefois être réduite à zéro, lorsque le nombre qui doit exprimer son degré est négatif.

Le nombre des coefficients arbitraires contenus dans le premier membre de la formule (3) sera évidemment

$$(4) \quad N(n, m - m_1) + N(n, m - m_2) + \ldots + N(n, m - m_k);$$

d'ailleurs ce premier membre est un polynôme complet du degré m qui renferme $N(n, m)$ termes, et parmi ceux-ci il y en a (n° 68)

$$\Delta_{m_k} \Delta_{m_{k-1}} \ldots \Delta_{m_1} N(n, m)$$

qui ne sont divisibles par aucun des monômes (2). Le nombre des termes de l'expression (3) qui sont divisibles par l'un des monômes (2), termes que nous voulons faire disparaître, est donc

$$(5) \qquad N(n, m) - \Delta_{m_k} \Delta_{m_{k-1}} \ldots \Delta_{m_1} N(n, m).$$

Or on a vu au n° 67 que le nombre (4) n'est jamais inférieur au nombre (5); donc les arbitraires contenues dans la formule (3) seront toujours en nombre suffisant pour l'évanouissement de tous les termes divisibles par l'un des monômes (2).

La fonction S est quelconque; si on la réduit successivement aux monômes (2), on voit, par ce qui précède, que chacun de ces monômes sera exprimable par une fonction entière qui ne contiendra les variables $z_1, z_2, \ldots, z_k$ qu'avec des exposants inférieurs à $m_1, m_2, \ldots, m_k$ respectivement.

Élimination de $n - 1$ inconnues entre n équations algébriques. — Théorème de Bezout relatif au degré de l'équation finale.

70. C'est en partant des considérations qui précèdent que Bezout est parvenu à établir, comme nous allons l'expliquer, le principe fondamental de la théorie de l'élimination.

Soient

$$(1) \qquad V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \quad \ldots, \quad V_n = 0$$

n équations algébriques des degrés $m_1, m_2, \ldots, m_n$ respectivement et contenant n inconnues

$$z_1, \; z_2, \; \ldots, \; z_n;$$

nous supposerons, comme au n° 69, que chacune des équations proposées est la plus générale possible, et qu'il n'existe aucune relation entre les coefficients.

Considérons les $n - 1$ premières équations (1); d'après ce qui a été dit au n° 69, on pourra tirer de ces équations les valeurs de

$$z_1^{m_1}, \quad z_2^{m_2}, \quad \ldots, \quad z_{n-1}^{m_{n-1}},$$

et ces valeurs seront exprimées par des fonctions entières qui ne renfermeront les inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ qu'avec des exposants inférieurs à $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ respectivement.

Cela posé, soit T_n un polynôme complet d'un degré indéterminé que je représenterai par $m - m_n$. Si l'on multiplie par T_n la dernière des équations (1) qui est du degré m_n, elle deviendra

$$(2) \qquad T_n V_n = 0,$$

et je dis qu'on peut réaliser l'élimination des $n-1$ inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, par le moyen des arbitraires contenues dans T_n et avec le secours des $n-1$ premières équations (1). Les arbitraires ayant été ainsi déterminées, l'équation (2) deviendra l'équation finale et le nombre m exprimera son degré.

Le premier membre de l'équation (2) est un polynôme complet du degré m, et il renferme, en conséquence, $N(n, m)$ termes; mais quand, au moyen des $n-1$ premières équations (1), on aura fait disparaître (n° 69) tous les termes divisibles par l'un des monômes

$$(3) \qquad z_1^{m_1}, \quad z_2^{m_2}, \quad \ldots, \quad z_{n-1}^{m_{n-1}},$$

il n'en restera plus que

$$\Delta_{m_{n-1}} \ldots \Delta_{m_2} \Delta_{m_1} N(n, m);$$

par conséquent, pour que l'élimination puisse s'exécuter, il faut que, par le moyen des arbitraires contenues dans T_n, tous ces derniers termes disparaissent, à l'exception des $m+1$ qui ne renferment que la seule inconnue z_n. Ainsi le nombre des termes qu'il faut faire évanouir est

$$(4) \qquad \Delta_{m_{n-1}} \ldots \Delta_{m_2} \Delta_{m_1} N(n, m) - (m+1).$$

Le polynôme T_n étant complet et du degré $m - m_n$, il renferme $N(n, m - m_n)$ termes; mais le nombre des coefficients dont on peut disposer pour l'élimination est beaucoup moindre. En effet, il est évident qu'avant d'effectuer le produit $T_n \times V_n$, qui doit former le premier

membre de l'équation (2), rien n'empêche de faire disparaître de T_n tous les termes divisibles par l'un des monômes (3); il n'y aura d'arbitraires dans T_n que les coefficients des termes restants dont le nombre est

$$\Delta_{m_{n-1}} \ldots \Delta_{m_2} \Delta_{m_1} N(n, m - m_n),$$

en sorte que, pour plus de simplicité, on doit supposer tous les autres nuls, puisqu'il est possible de les faire disparaître. Enfin on peut choisir arbitrairement l'un des coefficients du polynôme T_n ainsi réduit, car cela revient à multiplier l'équation (2) par une constante; donc le nombre des arbitraires utiles pour l'élimination est seulement

$$(5) \qquad \Delta_{m_{n-1}} \ldots \Delta_{m_2} \Delta_{m_1} N(n, m - m_n) - 1.$$

On voit d'après cela qu'on pourra faire disparaître les inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ de l'équation (2), en résolvant simplement un système d'équations du premier degré entre un pareil nombre d'inconnues, si les expressions (4) et (5) sont égales entre elles. En écrivant que ces expressions sont égales, il vient

$$m = \Delta_{m_{n-1}} \ldots \Delta_{m_2} \Delta_{m_1} N(n, m) - \Delta_{m_{n-1}} \ldots \Delta_{m_2} \Delta_{m_1} N(n, m - m_n)$$

ou

$$m = \Delta_{m_n} \Delta_{m_{n-1}} \ldots \Delta_{m_2} \Delta_{m_1} N(n, m);$$

or, le second membre de cette formule n'étant pas supérieur à m, il est nécessairement égal au produit $m_1 m_2 \ldots m_n$, d'après la formule (8) du n° 66; car la condition (9) que suppose cette formule sera évidemment remplie. On a donc

$$m = m_1 m_2 \ldots m_n,$$

et l'on peut dès lors énoncer le théorème suivant :

Le degré de l'équation finale qui résulte de l'élimi-

nation de $n-1$ inconnues entre n équations à n inconnues est égal au produit des degrés de ces équations, lorsque celles-ci sont complètes et que leurs coefficients demeurent indéterminés.

71. La démonstration que nous venons de présenter repose sur ce fait, que les coefficients arbitraires du polynôme T_n sont complétement déterminés par les équations du premier degré auxquelles ils doivent satisfaire. Or, bien que le nombre de ces équations soit égal à celui des arbitraires, et que les équations proposées aient la plus grande généralité possible, on pourrait craindre de se trouver ici dans l'un des cas d'incompatibilité dont l'existence est bien connue; il est facile de montrer qu'il n'en peut être ainsi.

En effet, supposons que les équations proposées se réduisent à

$$z_1^{m_1}-a=0,\quad z_2^{m_2}-z_1=0,\quad z_3^{m_3}-z_2=0,\quad \ldots,\quad z_n^{m_n}-z_{n-1}=0,$$

a étant une constante donnée. Dans ce cas, on a

$$V_n=z_n^{m_n}-z_{n-1},$$

et la fonction qui réalise l'élimination peut être déterminée *a priori*. Si, en effet, on pose

$$m=m_1 m_2\ldots m_n,\quad m'=\frac{m}{m_n},$$

le polynôme T_n aura pour valeur

$$T_n=z_n^{(m'-1)m_n}+z_{n-1}z_n^{(m'-2)m_n}+\ldots+z_{n-1}^{m'-1};$$

car, en employant cette valeur de T_n, on a

$$T_n V_n=z_n^m-z_{n-1}^{m'},$$

ou, à cause des $n-1$ premières équations proposées,

$$T_n V_n=z_n^m-a.$$

Il est évident que, si l'on applique à ce cas particulier la méthode générale du n° **70**, on obtiendra cette même valeur de T_n que nous venons de former; il en résulte que les équations qui déterminent T_n ne peuvent offrir d'impossibilité en général, puisqu'elles n'en présentent pas quand on donne certaines valeurs particulières aux coefficients des équations proposées.

Nous ajouterons encore une remarque fort importante. Le raisonnement du n° **70** a conduit, par l'élimination de $n-1$ inconnues entre n équations, à une équation finale dont le degré est égal au produit des degrés des équations proposées; mais on peut se demander si ce degré ne serait pas susceptible de s'abaisser par l'évanouissement de quelques termes, ou s'il ne serait pas possible, en suivant une voie différente, de déduire des équations proposées une équation finale de degré moindre. Il est aisé de voir qu'il n'en est rien, tant qu'il s'agit d'équations générales; effectivement, dans l'exemple que nous venons de considérer, on reconnaît *a priori* que l'équation finale est

$$z_n^m-a=0,$$

et son degré est égal au produit des degrés des proposées. Or ces dernières sont comprises dans les équations générales du n° **70**; donc l'équation finale qui en résulte est nécessairement comprise dans l'équation finale qui se rapporte au cas général.

On arrive à la même conclusion en considérant n équations des degrés $m_1, m_2, \ldots, m_n$ respectivement, dont chacune soit décomposable en facteurs linéaires de la forme

$$a_1 z_1+a_2 z_2+\ldots+a_n z_n+a,$$

$a_1, a_2, \ldots$ étant des coefficients indéterminés. Le système de ces équations peut évidemment être remplacé par $m=m_1 m_2\ldots m_n$ systèmes formés de n équations du premier degré ; chacun de ceux-ci fournit une équation finale du premier degré, et le produit des m équations finales ainsi obtenues est l'équation finale relative au système proposé.

Dans les deux cas que nous venons de citer, il est évidemment impossible de tirer des équations proposées une équation en z_n,

$$\varphi(z_n) = 0,$$

dont le degré soit inférieur à m; donc la même chose est également impossible dans le cas des équations générales.

72. L'analyse que nous venons de développer montre qu'on n'obtiendrait pas la véritable équation finale, dans le cas où le nombre des équations est supérieur à 2, si au lieu d'éliminer les inconnues à la fois, comme nous l'avons fait, on voulait procéder par éliminations successives; car supposons le cas des trois équations générales des degrés respectifs m_1, m_2, m_3 entre les inconnues z_1, z_2, z_3. Si l'on élimine z_1 entre la première équation et chacune des deux autres, on obtiendra deux équations finales des degrés $m_1 m_2$ et $m_1 m_3$, puis l'élimination de z_2 entre ces deux dernières fournirait une équation dont le degré pourrait s'élever jusqu'à $m_1^2 m_2 m_3$, tandis que la vraie équation finale est seulement du degré $m_1 m_2 m_3$. Le cas des équations du premier degré est le seul où l'on puisse procéder par éliminations successives.

Sur la résolution des équations algébriques simultanées.

73. Lorsqu'on sait former l'équation finale qui résulte de l'élimination de $n-1$ inconnues entre n équations données, on peut aussi, d'après une remarque due à M. Liouville, déterminer les valeurs des inconnues éliminées qui répondent à chaque racine de l'équation finale. C'est ce que nous allons développer.

Reprenons les n équations

$$(1) \qquad V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \quad \ldots, \quad V_n = 0,$$

des degrés respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_n$ entre les inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_n$, et supposons, comme nous l'avons fait jusqu'ici, que ces équations aient la plus grande généralité possible.

Posons

$$(2) \qquad z = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_{n-1} z_{n-1} + z_n,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ étant des coefficients indéterminés, et prenons z pour inconnue à la place de z_n ; il faudra, dans les équations (1), remplacer z_n par la valeur

$$z_n = z - (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_{n-1} z_{n-1});$$

cette substitution ne changera pas le degré des équations, et celles-ci deviendront

$$(3) \qquad U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad \ldots, \quad U_n = 0.$$

Si l'on élimine $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ entre les équations (3), on obtiendra une équation finale en z dont le degré m sera

$$m = m_1 m_2 \ldots m_n,$$

et qui contiendra dans ses différents termes les $n-1$ indéterminées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$. On peut chasser les dénominateurs qui seraient fonctions de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ et, en ordonnant le premier membre par rapport à ces indéterminées, l'équation finale en z sera

$$(4) \; f(z) + [\alpha_1 F_1(z) + \alpha_2 F_2(z) + \ldots + \alpha_{n-1} F_{n-1}(z)] + \ldots = 0.$$

On retrouvera l'équation finale relative aux équations proposées en attribuant la valeur zéro aux indéterminées

α; on a effectivement alors $z = z_n$, et l'équation (4) se réduit à

$$(5) \qquad f(z_n) = 0;$$

mais l'indétermination des quantités α va nous fournir des résultats plus étendus. Si, dans l'équation (4), on remplace z par sa valeur tirée de la formule (2) et que l'on fasse usage des formules connues

$$f(z) = f(z_n) + \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_{n-1} z_{n-1}}{1} f'(z_n) + \ldots,$$
$$F_1(z) = F_1(z_n) + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

il viendra, en ordonnant par rapport aux α,

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} f(z_n) + \{ \alpha_1 [z_1 f'(z_n) + F_1(z_n)] + \ldots \\ \qquad + \alpha_{n-1} [z_{n-1} f'(z_n) + F_{n-1}(z_n)] \} + \ldots = 0. \end{array} \right.$$

Cette équation (6) résulte de la combinaison des équations (1) entre elles, et elle est nécessairement satisfaite, quelles que soient les indéterminées α, par tous les systèmes de valeurs des inconnues susceptibles de vérifier les équations proposées. Si l'on suppose que ces indéterminées soient nulles à l'exception d'une seule α_μ, le premier membre de la formule (6) se réduira à un polynôme ordonné suivant les puissances de α_μ, et il ne pourra être identiquement nul, à moins que les coefficients des diverses puissances de α_μ ne soient nuls. Ainsi, en particulier, on aura, outre l'équation (5),

$$z_\mu f'(z_n) + F_\mu(z_n) = 0,$$

pour toutes les valeurs 1, 2, ..., $(n-1)$ de l'indice μ, ce qui donnera

$$(7) \quad z_1 = -\frac{F_1(z_n)}{f'(z_n)}, \quad z_2 = -\frac{F_2(z_n)}{f'(z_n)}, \quad \ldots, \quad z_{n-1} = -\frac{F_{n-1}(z_n)}{f'(z_n)}.$$

Dans le cas particulier où le premier membre de chacune des équations (1) est un produit de facteurs du premier degré à coefficients indéterminés, l'équation (5) n'a point de racines égales, et par suite elle n'en peut avoir dans le cas général. Donc, si l'on remplace z_n par l'une des racines de l'équation finale (5), la dérivée $f'(z_n)$ ne sera pas nulle, et les formules (7) ne deviendront point illusoires, à moins que l'on n'attribue des valeurs déterminées aux coefficients des équations proposées.

74. La méthode précédente conduit à d'autres formules qu'il convient de remarquer et qu'on obtient en égalant à zéro les termes que nous n'avons pas considérés dans la formule (6) et qui contiennent en facteur soit une puissance supérieure à la première de l'une des indéterminées α, soit un produit de puissances de plusieurs de ces indéterminées. Par exemple, si l'on représente par $F_{\mu,\nu}(z)$ le coefficient de $\alpha_\mu \alpha_\nu$ dans le premier membre de l'équation (4), les indices μ et ν pouvant être égaux, et qu'on égale à zéro les coefficients de α_μ^2 et de $\alpha_\mu \alpha_\nu$ dans l'équation (6), il viendra

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{f''(z_n)}{1.2} z_\mu^2 + \dfrac{F'_\mu(z_n)}{1} z_\mu + F_{\mu,\mu}(z_n) = 0, \\ f''(z_n) z_\mu z_\nu + [F'_\mu(z_n) z_\nu + F'_\nu(z_n) z_\mu] + F_{\mu,\nu}(z_n) = 0. \end{array} \right.$$

La seconde de ces formules (8) donne cette valeur de z_ν,

$$(9) \qquad z_\nu = -\frac{z_\mu F'_\nu(z_n) + F_{\mu,\nu}(z_n)}{z_\mu f''(z_n) + F'_\mu(z_n)}.$$

Les formules (8) et (9) sont plus compliquées que les formules (7); mais, quand on passe du cas des équations générales à celui des équations particulières, les formules (7) peuvent devenir illusoires, et dans ce cas les formules (8) et (9) les suppléeront. Celles-ci peuvent à leur tour devenir illusoires et exiger l'emploi d'autres formules qu'on pourrait pareillement tirer de l'équation (6); mais il n'est pas utile d'insister davantage sur ce sujet.

75. Les équations (5) et (7) sont, d'après notre analyse, une conséquence nécessaire des équations proposées; soit $V_\mu = 0$ l'une quelconque de celles-ci, et désignons par V'_μ le résultat que l'on obtient quand on remplace dans V_μ, $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ par les valeurs (7). La fonction V'_μ sera de la forme

$$V'_\mu = \frac{\Phi_\mu(z_n)}{[f'(z_n)]^{m_\mu}},$$

$\Phi_\mu(z_n)$ étant une fonction entière. Effectuons la division de $\Phi_\mu(z_n)$ par $f(z_n)$, de manière à obtenir un reste $\varphi_\mu(z_n)$ de degré inférieur à m, et désignons par $\Psi_\mu(z_n)$ le quotient de cette division, on aura

$$V'_\mu = \frac{f(z_n)\Psi_\mu(z_n) + \varphi_\mu(z_n)}{[f'(z_n)]^{m_\mu}}.$$

Cela posé, puisque les équations (7) résultent des proposées, il en sera de même de l'équation $V'_\mu = 0$, laquelle se réduit à

$$\varphi_\mu(z_n) = 0.$$

Or celle-ci ne peut avoir lieu que si $\varphi_\mu(z_n)$ est identiquement nul, car ce polynôme est au plus du degré $m-1$, et nous savons qu'on ne peut tirer des équations proposées une équation finale en z_n d'un degré inférieur à m. La précédente valeur de V'_μ se réduit donc à

$$V'_\mu = \frac{\Psi_\mu(z_n)}{[f'(z_n)]^{m_\mu}} f(z_n);$$

d'où il résulte que les équations proposées sont satisfaites

par tous les systèmes de valeurs des inconnues tirées des équations (5) et (7); ce qui est la réciproque de la proposition établie au n° 74. Ainsi se trouve démontré cet important théorème :

Le nombre des systèmes de solutions communes à plusieurs équations renfermant un pareil nombre d'inconnues est égal au produit des degrés de ces équations, lorsque celles-ci sont complètes et que leurs coefficients demeurent indéterminés.

En particulier, *deux lignes des degrés m_1 et m_2 se coupent en $m_1 m_2$ points; trois surfaces des degrés m_1, m_2, m_3 se coupent en m_1, m_2, m_3 points.*

On dit qu'une courbe algébrique plane ou gauche est de l'ordre m, lorsqu'elle est rencontrée en m points par un plan quelconque. L'intersection de deux surfaces des degrés m_1 et m_2 est donc en général une courbe de l'ordre $m_1 m_2$, car le nombre des solutions communes à trois équations des degrés m_1, m_2 et 1 est $m_1 \times m_2 \times 1$. Ainsi l'intersection de deux surfaces du deuxième degré est en général une courbe du quatrième ordre; mais il peut arriver, dans les cas particuliers, que cette courbe se réduise, soit à une courbe du troisième ordre et à une droite, soit à deux courbes du deuxième ordre, c'est-à-dire à deux coniques.

Remarque sur la méthode d'élimination de Bezout. — Méthode d'Euler.

76. La méthode d'élimination de Bezout, exposée au n° 70, consiste à multiplier l'une des équations proposées,

$$(1) \qquad V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \quad \ldots, \quad V_n = 0,$$

par un certain polynôme, et à employer les autres équations pour faire disparaître quelques-uns des termes contenus dans le produit; l'élimination s'achève ensuite en disposant convenablement des arbitraires que renferme le polynôme multiplicateur. Mais, d'après ce qu'on a vu au nº 69, cette manière d'opérer revient à ajouter entre elles toutes les équations, après les avoir multipliées par certains facteurs; donc, si l'on représente par

$$f(z_n) = 0 \tag{2}$$

l'équation finale qui résulte de l'élimination de $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ entre les équations (1), on aura identiquement

$$f(z_n) = T_1 V_1 + T_2 V_2 + \ldots + T_n V_n,$$

$T_1, T_2, \ldots, T_n$ étant des fonctions entières des inconnues convenablement choisies.

77. Dans l'*Introduction à l'Analyse infinitésimale*, Euler a indiqué, pour le cas de deux équations, une méthode qui revient au fond à celle de Bezout. Représentons les deux inconnues par x et y et supposons que les équations soient l'une du degré m, l'autre du degré n; ces équations ayant été ordonnées par rapport à y, représentons par

$$\begin{aligned} V_1 &= P\,y^m + Q\,y^{m-1} + R\,y^{m-2} + S\,y^{m-3} + \ldots, \\ V_2 &= P'y^n + Q'y^{n-1} + R'y^{n-2} + S'y^{n-3} + \ldots \end{aligned}$$

leurs premiers membres. La méthode d'Euler consiste à multiplier respectivement les polynômes V_1 et V_2 par les facteurs indéterminés

$$\begin{aligned} M_1 &= P'y^{n-1} + A'y^{n-2} + B'y^{n-3} + C'y^{n-4} + \ldots, \\ M_2 &= P\,y^{m-1} + A\,y^{m-2} + B\,y^{m-3} + C\,y^{m-4} + \ldots, \end{aligned}$$

à exprimer ensuite que les coefficients des mêmes puissances de y sont égaux dans les produits $M_1 V_1, M_2 V_2$, et

à éliminer enfin les $m+n-2$ indéterminées A, B,..., A', B',..., entre les $m+n-1$ équations du premier degré

$$\begin{aligned} PA' + QP' &= P'A + PQ', \\ PB' + QA' + RP' &= P'B + Q'A + R'P, \\ PC' + QB' + RA' + SP' &= P'C + Q'B + R'A + S'P, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

ainsi obtenues.

Les $m+n-2$ premières des équations précédentes donnent pour les indéterminées A, B,..., A', B',..., des valeurs fractionnaires auxquelles on peut supposer le même dénominateur Δ; les facteurs M_1 et M_2 auront donc la forme

$$M_1 = \frac{T_1}{\Delta}, \quad M_2 = \frac{-T_2}{\Delta},$$

T_1 et T_2 étant des fonctions entières de x et y, et il est évident que notre équation finale sera

$$T_1 V_1 + T_2 V_2 = 0.$$

78. S'il s'agit, par exemple, d'éliminer y entre les deux équations du deuxième degré

$$\begin{aligned} P\,y^2 + Q\,y + R &= 0, \\ P'y^2 + Q'y + R' &= 0, \end{aligned}$$

on sera ramené par le procédé d'Euler à éliminer A et A' entre les trois équations

$$\begin{aligned} PA' - P'A &= (PQ' - QP'), \\ QA' - Q'A &= -(RP' - PR'), \\ RA' - R'A &= 0, \end{aligned}$$

ce que l'on peut faire en ajoutant ces équations après les avoir multipliées respectivement par les facteurs

$$QR' - RQ', \quad RP' - PR', \quad PQ' - QP';$$

il vient ainsi

$$(PQ' - QP')(QR' - RQ') - (RP' - PR')^2 = 0.$$

Si l'on tire des équations qui précèdent les valeurs des indéterminées A et A', on en conclura, comme il a été indiqué plus haut, les polynômes par lesquels il faut multiplier les équations proposées, pour obtenir l'équation finale d'après la méthode de Bezout. Ces polynômes sont respectivement

$$-(PQ' - QP')(P'y + Q') - P'(RP' - PR')$$

et

$$+(PQ' - QP')(Py + Q) + P(RP' - PR').$$

Remarquons encore que l'équation finale peut ici s'obtenir immédiatement en résolvant les équations proposées par rapport à y et à y^2, ce qui donne

$$y = \frac{RP' - PR'}{PQ' - QP'}, \quad y^2 = \frac{QR' - RQ'}{PQ' - QP'},$$

et en égalant ensuite la seconde expression au carré de la première.

Cas de trois équations du deuxième degré à trois inconnues.

79. Pour donner un exemple des simplifications que comportent les applications de la méthode de Bezout, nous considérerons le cas de trois équations générales du deuxième degré entre les trois inconnues x, y, z. Soient

$$(1)\quad \begin{cases} a\,y^2 + 2\,byz + c\,z^2 + 2dy + 2ez + f = 0, \\ a'y^2 + 2b'yz + c'z^2 + 2d'y + 2e'z + f' = 0, \\ a''y^2 + 2b''yz + c''z^2 + 2d''y + 2e''z + f'' = 0 \end{cases}$$

les équations proposées ordonnées par rapport à y et à z;

dans chacune d'elles les trois premiers coefficients sont des constantes, les deux coefficients suivants sont des fonctions linéaires de x; enfin le dernier terme est une fonction entière de x du deuxième degré.

Nous poserons

$$(2)\quad H = a(b'c'' - b''c') + a'(b''c - bc'') + a''(bc' - b'c)$$

et

$$(3)\quad \begin{cases} D = d(b'c'' - b''c') + d'(b''c - bc'') + d''(bc' - b'c), \\ E = e(b'c'' - b''c') + e'(b''c - bc'') + e''(bc' - b'c), \\ F = f(b'c'' - b''c') + f'(b''c - bc'') + f''(bc' - b'c), \\ D' = d(c'a'' - c''a') + d'(c''a - ca'') + d''(ca' - c'a), \\ E' = e(c'a'' - c''a') + e'(c''a - ca'') + f''(ca' - c'a), \\ F' = f(c'a'' - c''a') + f'(c''a - ca'') + f''(ca' - c'a), \\ D'' = d(a'b'' - a''b') + d'(a''b - ab'') + d''(ab' - a'b), \\ E'' = e(a'b'' - a''b') + e'(a''b - ab'') + e''(ab' - a'b), \\ F'' = f(a'b'' - a''b') + f'(a''b - ab''') + f''\,ab' - a'b). \end{cases}$$

Alors, en éliminant successivement deux des quantités y^2, yz, z^2 entre les équations (1), on obtiendra les suivantes :

$$(4)\quad \begin{cases} Hy^2 + 2D\,y + 2E\,z + F = 0, \\ 2Hyz + 2D'y + 2E'z + F' = 0, \\ Hz^2 + 2D''y + 2E''z + F'' = 0, \end{cases}$$

qui pourront suppléer les proposées; mais nous leur donnerons une autre forme qui permettra de faciliter les calculs ultérieurs. Si l'on pose, pour abréger l'écriture,

$$(5)\begin{cases} R = HF + 2(D'E - DE') + (E'^2 - 4EE''), \\ R' = HF' + 4(D''E - DE'') - 2(D'E' - 2D''E - 2DE''), \\ R'' = HF'' + 2(D''E' - D'E'') + (D'^2 - 4DD''), \end{cases}$$

et que l'on multiplie les équations (4) par H, on pourra