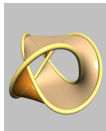


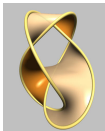
## Invariants de type fini de surfaces bordant des entrelacs dans $\mathbb{R}^3$



Michael Eisermann

Institut Fourier, UJF Grenoble  
www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm

19 janvier 2009



Séminaire d'Algèbre, Dynamique et Topologie  
Université de Provence, Aix-Marseille I

1/34

## Motivation

Trois découvertes majeures en théorie des nœuds :

- Jones 1984, ... : invariants polynomiaux puis quantiques
- Vassiliev 1990, Goussarov 1991, ... : théorie de type fini
- Khovanov 1999, ... : catégorification, homologie d'entrelacs

Point de départ : la théorie de type fini des entrelacs

- forme un cadre commun pour tous les invariants quantiques
- riche structure algébrique (algèbre de Hopf)
- définition combinatoire : bien calculable mais peu topologique

Objectifs : théorie de type fini des surfaces

- Enrichir la théorie : injecter plus de topologie
- Bénéfice : extraire plus d'information topologique
- Surfaces / cobordismes : lien naturel vers l'homologie d'entrelacs

2/34

## Plan de l'exposé

- 1 Invariants de type fini d'entrelacs et de surfaces
- 2 Le polynôme de Jones des entrelacs rubans
- 3 Vers un invariant universel de type fini
- 4 Questions ouvertes

Références :

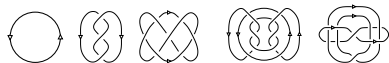
*The Jones polynomial of ribbon links,*  
Geometry & Topology 13 (2009), 623–660

*Finite type invariants surfaces bounding links in 3-space,*  
en préparation

3/34 11.1

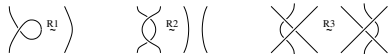
## Nœuds et entrelacs

Un *nœud* est un plongement lisse  $f: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 (\subset S^3)$ .



Un *entrelacs* est un plongement lisse  $f: n \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  à  $n$  composantes.

Nous les regardons à isotopie près :



4/34

## Exemple : le nombre d'enlacement

Dans un diagramme  $D$ , le signe d'un croisement  $x$  est défini par

$$\varepsilon(\searrow \swarrow) := +1 \quad \text{et} \quad \varepsilon(\swarrow \searrow) := -1.$$

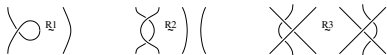
La somme  $w(D) = \sum_x \varepsilon(x)$  n'est pas invariant :  $w(\bigcirc) = w(\bigcap) + 1$

### Proposition

Pour tout diagramme d'entrelacs  $D$  le nombre d'enlacement

$$\text{lk}(D) := \frac{1}{2} \sum_{x \text{ maxie}} \varepsilon(x)$$

est un invariant d'entrelacs.

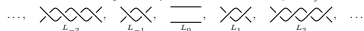


§1.1

§1.1

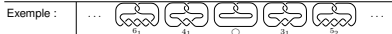
## Invariants d'entrelacs qui ne sont pas de type fini

On considère une suite géométrique d'entrelacs  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{L}, j \mapsto L_j$  :



### Proposition

Si  $v: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{A}$  est un invariant de degré  $\leq m$ , alors la fonction  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{A}$  donnée par  $f(j) = v(L_j)$  est polynomiale de degré  $\leq m$ .



Certains invariants classiques ne sont pas de type fini.

Invariants minimisant une propriété géométrique :

nombre de croisements	$2 - 2j$	6	4	0	3	5	$1 + 2j$
nombre de dénouement	1	1	1	0	1	1	1
genre de Seifert	1	1	1	0	1	1	1

Invariants issus de la topologie algébrique :

déterminant	$1 - 4j$	9	5	1	-3	-7	$1 - 4j$
signature	0	0	0	0	2	2	2

§1.1

§1.1

## Invariants d'entrelacs de type fini

*Idee* : La différence  $v(\searrow \swarrow) - v(\swarrow \searrow)$  est une « dérivée combinatoire ».

Pour les dérivées d'ordre  $m$  on effectue  $m$  changements indépendants.

On dénote par  $D \leftrightarrow D_X$  le changement d'une famille  $X$  de croisements.

### Définition (Vassiliev 1990, Goussarov 1991, Birman-Lin 1993)

$v: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{A}$  est de degré  $\leq m$  si  $\sum_{Y \subset X} (-1)^{|Y|} v(D_Y) = 0$  pour  $|X| > m$ .

degré  $\leq 0$  :  $v(\searrow \swarrow) - v(\swarrow \searrow) = 0$

Exemple : Le nombre de composantes,  $L \mapsto c(L)$ .

degré  $\leq 1$  :  $v(\searrow \swarrow \searrow) - v(\searrow \swarrow \swarrow) - v(\swarrow \searrow \searrow) + v(\swarrow \searrow \swarrow) = 0$

Exemple : Le nombre d'enlacement,  $L \mapsto \text{lk}(L_i, L_j)$ .

degré  $\leq m$  : les dérivées d'ordre  $> m$  s'annulent ;  $v$  est « polynomial ».

Exemple : invariants quantiques (développement en série convenable)

### Proposition

Les invariants de type fini dans un anneau  $\mathbb{A}$  forment une algèbre filtrée.

§3.4

## Approximation par des invariants de type fini

Les coefficients d'Alexander-Conway  $\nabla(K) = \sum a_k z^{2k}$  sont de type fini.

$\det(K) = \nabla(K)|_{z=-2i} = \sum a_k (-4)^k$  est une « série d'invariants de type fini ».

Ici pas de problème de convergence : la somme est localement finie.

### Question

Est-ce que tout invariant admet une telle « approximation » de type fini ?

Ceci revient à la question de Vassiliev :

Les invariants de type finis distinguent-ils tous les entrelacs ?

En toute généralité c'est une question très dure...

au moins aussi dure que reprouver la conjecture de Poincaré

(qui a été démontrée par Perelman utilisant le flot de Hamilton) :

### Théorème

[Topology 2004]

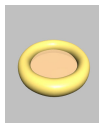
Si les invariants de type fini distinguent tous les nœuds dans n'importe quelle 3-variété (sphère d'homotopie) alors ceci implique la conjecture de Poincaré.

§3.4

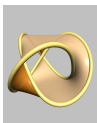
## Surfaces de Seifert

**Théorème (Seifert 1934, Pontryagin 1930)**

Pour tout entrelacs  $L \subset \mathbb{R}^3$  il existe une surface compacte connexe orientée  $S \subset \mathbb{R}^3$  telle que  $\partial S = L$ .  $\square$



(a) nœud trivial  $\bigcirc$



(b) nœud de trèfle  $3_1$



(c) nœud de huit  $4_1$

**Définition**

Le genre de Seifert de  $K$  est  $g_3(K) := \min\{g(S) \mid \partial S = K\}$ .

*Remarque :* On a  $g_3(K) = 0$  si et seulement si  $K$  est trivial.

§1.2

§3.4 §1.2

## Invariants de type fini

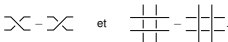
**Proposition**

Si  $\mathcal{S} \xrightarrow{v} A$ ,  $L \mapsto v(L)$ , est un invariant d'entrelacs de degré  $\leq m$ , alors  $\mathcal{S} \xrightarrow{\partial} \mathcal{S} \xrightarrow{v} A$ ,  $S \mapsto v(\partial S)$ , est un invariant de surfaces de degré  $\leq m$ .

**Démonstration.** Changements de croisements entre rubans :



En oubliant la surface on obtient :



C'est une somme télescopique de changements de croisements.  $\square$

**Slogan**

Les invariants de type fini des surfaces englobent tous les invariants de type fini des entrelacs — plus beaucoup d'invariants de la topologie algébrique !

§1.2

§3.4 §1.2

## Invariants de surfaces de type fini

Soit  $\Sigma$  une surface compacte orientée et soit  $\mathcal{S} = \{F: \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^3\}$  isotopie.

On considère des changements de croisement entre rubans :



Soit  $F \leftrightarrow F_X$  le changement d'une famille  $X$  de croisements entre rubans.

**Définition**

$v: \mathcal{S} \rightarrow A$  est de degré  $\leq m$  si  $\sum_{Y \subset X} (-1)^{|Y|} v(F_Y) = 0$  pour  $|X| > m$ .

$v$  est de degré  $< 0 \iff v = 0$ ,  
 $v$  est de degré  $\leq 0 \iff v$  est « constant »,  
 $v$  est de degré  $\leq 1 \iff v$  est « au plus linéaire »,  
 $v$  est de degré  $\leq 2 \iff v$  est « au plus quadratique », etc.

**Exemple**

La caractéristique d'Euler  $\chi: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $S \mapsto \chi(\Sigma)$ , est un invariant de degré 0.

§3.4

## Forme de Seifert et déterminant

Soit  $\Sigma$  une surface compacte connexe orientée.

On a  $\chi(\Sigma) = 1 - \text{rk } H_1(\Sigma)$  car  $H_0(\Sigma) = 1$  et  $H_2(\Sigma) = 0$ .

Le module  $H_1(\Sigma) \cong \mathbb{Z}^m$  est libre de rang  $m = 1 - \chi(\Sigma)$ .

À tout plongement  $F: \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  on associe sa forme de Seifert

$$\theta_F: H_1(\Sigma) \times H_1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \theta_F(a, b) = \text{lk}(F^{\uparrow}(a), F^{\uparrow}(b)).$$

**Conclusion**

Les coefficients de  $\theta_F$  sont de degré  $\leq 1$ .

Le déterminant de  $F$  est défini par  $\det(F) := \det[-i(\theta_F + \theta_F^*)]$ .

C'est un polynôme homogène de degré  $m$  dans les coefficients de  $\theta_F$ .

**Observation**

L'invariant  $F \mapsto \det(F)$  est de degré  $\leq m = 1 - \chi(\Sigma)$ .

**⚠** L'invariant  $\det(F)$  ne dépend que de l'entrelacs  $L = F(\partial\Sigma)$ .

L'invariant  $F \mapsto \det(F)$  est de degré  $m = 1 - \chi(\Sigma)$ , ce qui dépend de  $\Sigma$ .

L'invariant  $L \mapsto \det(L)$  n'est pas de type fini au sens de Vassiliev–Goussarov.

§3.4

## Singularités de surfaces dans $\mathbb{R}^4$ (Fox–Milnor 1958)

### Exemple

Soit  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$  donnée par  $f(z) = (z^2, z^3)$ .  
La surface  $S = \text{Image}(f)$  n'est pas localement plate en  $0 \in \mathbb{R}^4$ .

$K_\varepsilon := S \cap \partial B_\varepsilon^4$  est un nœud, indépendant de  $\varepsilon$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  
Dans notre exemple on trouve le nœud de trèfle, noté  $3_1$ .

### Définition (nœud bordant / slice knot)

Un nœud  $K \subset \mathbb{S}^3$  est *bordant* [slice] s'il borde un disque lisse dans  $\mathbb{D}^4$ .

Si  $K_x$  est bordant, la singularité de  $S$  en  $x$  peut être effacée localement.

### Théorème (Fox–Milnor 1966)

Si  $K$  est bordant alors  $\Delta(K) = P(q) \cdot P(q^{-1})$  pour un  $P \in \mathbb{Z}[q]$ .  $\square$

Dans notre exemple :  $\Delta(3_1) = q^2 - 1 + q^{-2}$  ne se factorise pas.

### Théorème (Murasugi 1965)

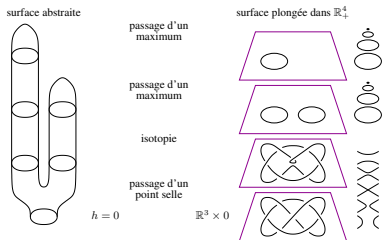
Si  $K$  est bordant alors  $\text{sign}(K) = 0$ .  $\square$

Dans notre exemple :  $\text{sign}(3_1) = 2$  ne s'annule pas.

§2.1

13/34 §2.1

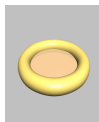
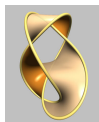
## Exemple : le nœud $6_1$ est bordant



14/34

## Surfaces plongées et immergées dans $\mathbb{R}^3$

Surfaces plongées à bord :

(a) nœud trivial  $\bigcirc$ (b) nœud de trèfle  $3_1$ (c) nœud de huit  $4_1$ 

Surfaces immergées à bord :



(d) singularité ruban



(e) singularité clasp



(f) singularité circulaire

§2.1

15/34 §2.1

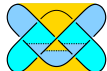
## Surfaces rubans (Fox 1962)

### Définition

Une *surface ruban*  $S \subset \mathbb{R}^3$  est une surface immergée, image de  $\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ , n'ayant que des singularités rubans.



(a) singularité ruban

(b)  $3_1 \# 3_1^*$ (c)  $6_1$ 

Ici  $\Sigma$  est une surface compacte orientée sans composantes fermées.

Par conséquent, pour  $\partial S = L$  on a toujours  $\chi(S) \leq c(L)$ .

Le maximum  $\chi(S) = c(L)$  est atteint ssi  $S$  est formée de disques.

### Définition

Un entrelacs  $L$  est *ruban* s'il borde une surface ruban formée de disques.

Exemple : Pour tout nœud  $K$  la somme  $K \# K^*$  est un nœud ruban.

16/34

## Le problème « slice $\Rightarrow$ ribbon » (Fox 1962)

### Observation (Fox 1962)

surface lisse  $S_+ \subset \mathbb{R}_+^4$  quelconque  
 $\uparrow \quad \downarrow ?$   
 surface ruban  $S \subset \mathbb{R}^3 \iff$  surface lisse  $S_+ \subset \mathbb{R}_+^4$  sans minima

Genre de Seifert  $g_3(K) := \min\{g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ surface de Seifert, } \partial S = K\}$   
 $g_3(K) = 0 \iff K \text{ est trivial}$

Genre ruban  $g_r(K) := \min\{g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ surface ruban, } \partial S = K\}$   
 $g_r(K) = 0 \iff K \text{ est ruban}$

Genre lisse  $g_4(K) := \min\{g(S) \mid S \subset \mathbb{R}_+^4 \text{ surface lisse, } \partial S = K\}$   
 $g_4(K) = 0 \iff K \text{ est bordant}$

### Question (problème de Fox)

Est-ce que tout nœud bordant est ruban ?  
 Est-ce que tout entrelacs bordant est ruban ?

§2.1

17/34 §2.2

## Polynôme de Jones : définition

### Théorème

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$  il existe un unique invariant  $V_N : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$  satisfaisant

$$q^{-N} \cdot V_N \left( \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) - q^{+N} \cdot V_N \left( \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V_N \left( \begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array} \right).$$

ainsi que la normalisation  $V_N(\bigcirc) = 1$

$N = 0$  : Alexander 1928, Conway 1969 ;  $V_0(L) = (-1)^{n+1} \Delta(L)$

$N = 1$  : trivial invariant,  $V_1 = 1$

$N = 2$  : Jones 1984 ;  $V_2 = V$

$N > 2$  : HOMFLY-PT 1985-1987

### Remarque

$V_N(\bigcirc \sqcup L) = U \cdot V(L)$  où  $U = \frac{q^{-N} - q^N}{q^{-1} - q} = q^{1-N} + q^{3-N} + \dots + q^{N-3} + q^{N-1}$ .  
 Pour  $N$  premier c'est le polynôme cyclotomique (en  $t = q^2$ , symétrisé).

On a  $V(\bigcirc^n) = (q^{-1} + q^{+1})^{n-1}$  et  $q^{-1} + q^{+1}$  est le polynôme minimal de  $i$ .

En  $q = i$  on retrouve  $V(L)_{q=i} = \Delta(L)_{q=i} = \det(L)$ .

On développera le polynôme de Jones en  $q = i$ .

18/34

## Une propriété d'intégralité du polynôme de Jones

### Théorème

[G&amp;T 2009]

Si  $L \subset \mathbb{R}^3$  borde une surface ruban  $S \subset \mathbb{R}^3$  de caractéristique d'Euler  $n > 0$ , alors  $V(L)$  est divisible par  $V(\bigcirc^n) = (q^{-1} + q^{+1})^{n-1}$ .



$$\chi(S) = 1 + 1 + 0 = 2$$



$$\chi(S') = 1 + 1 - 1 = 1$$

On trouve  $V(L) = (q^{-1} + q^{+1}) \cdot (q^5 - q^4 + 2q^2 + 2q^{-2} - q^{-4} + q^{-6})$ .  
 Donc  $L$  borde une surface ruban avec  $\chi \leq 2$  mais pas avec  $\chi \geq 3$ .

On trouve  $V(L') = (q^{+1} + q^{+5})^2 \cdot (q^{-1} + q^{-5})^2$ .  
 Donc  $L'$  borde une surface ruban avec  $\chi \leq 1$  mais pas avec  $\chi \geq 2$ .

§2.3

19/34 §2.3

## La nullité du polynôme de Jones

### Définition

La nullité de Jones  $\text{null } V(L)$  est l'ordre d'annulation en  $q = i$ .

On a donc  $V(L) = (q^{-1} + q^{+1})^{\text{null}} \cdot \tilde{V}$  de sorte que  $\tilde{V}_{(q=i)} \neq 0$ .

### Lemme

Tout entrelacs  $L$  à  $n$  composantes satisfait  $0 \leq \text{null } V(L) \leq n - 1$ .

Ceci correspond à la nullité de Seifert  $\text{null}(L) = \text{null}(\theta + \theta^*)$ .

### Question

Est-ce que  $\text{null } V(L) = \text{null}(L)$  pour tout entrelacs  $L$  ?

Réponse affirmative partielle :

### Théorème

[G&amp;T 2009]

Pour tout entrelacs ruban à  $n$  composantes on a  $\text{null } V(L) = n - 1$ .

Ce résultat se généralise-t-il au polynôme HOMFLYPT ? pour  $N$  premier ?

20/34

**Théorème** [G&T 2009]

Soit  $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$  un entrelacs ruban à  $n$  composantes.  
Alors  $V(L)$  est divisible par  $V(\mathbb{O}^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$ . La valeur

$$\det V(L) := [V(L)/V(\mathbb{O}^n)]_{(q^{\pm 1})}$$

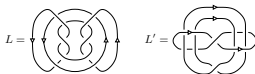
satisfait à la congruence

$$\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n) \pmod{32}.$$

En particulier nous obtenons  $\det V(L) \equiv 1 \pmod{8}$ .

⇒ Analogie avec l'invariant d'Arf :  $\det(K) \equiv 1 \pmod{8}$ .

⇒ Obstruction pour des entrelacs rubans ? voire bordants ?



**Exemple**

Lentrelacs  $L = 10n36$  est ruban et on trouve

$$V(L) = (q^+ + q^-)(-q^{+8} + 2q^{+6} - 3q^{+4} + 4q^{+2} - 3 + 4q^{-2} - 3q^{-4} + 2q^{-6} - q^{-8}).$$

Ici  $\det V(L) = -23$  alors que  $\det(K_1) = 1$  et  $\det(K_2) = 9$ .

**Exemple**

Lentrelacs  $L' = 10n57$  n'est pas ruban et on trouve

$$V(L') = (q^+ + q^-)(q^{+6} - 2q^{+4} + 2q^{+2} - 2 + 3q^{-2} - 2q^{-4} + 2q^{-6} - q^{-8})$$

Ici  $\det V(L') = -15$  alors que  $\det(K'_1) = \det(K'_2) = 1$ .

Développement du polynôme de Jones en une série de type fini

On considère traditionnellement le développement en  $q = 1$  :

**Théorème (Birman-Lin 1993)**

On développe  $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(L) \cdot h^k$  en  $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$

Alors  $L \mapsto v_k(L)$  est de degré  $\leq k$  par rapport à



L'information topologique, par contre, semble concentrée en  $q = i$  :

**Théorème** [G&T 2009]

On développe  $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(L) \cdot h^k$  en  $q = i \exp(h/2) = i + ih/2 + \dots$

Alors  $S \mapsto d_k(\partial S)$  est de degré  $\leq k + 1 - \chi(S)$  par rapport à



⚠  $d_k(L)$  n'est pas de type fini au sens de Vassiliev-Goussarov.

En particulier  $d_0(L) = V(L)_{q^{\pm 1}} = \det(L) = \det[-i(\theta + \theta^*)]$  ne l'est pas.

Développement de la signature en une série de type fini

Soit  $\Sigma$  une surface compacte orientée et soit  $\mathcal{S} = \{F: \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^3\}$ /isotopie.

**Théorème**

Si l'invariant  $v: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$  est borné, alors il est constant ou non de type fini.  
Par exemple, la signature  $F \mapsto \text{sign}(\theta_F + \theta_F^*)$  n'est pas de type fini.

⚠ La signature  $\text{sign}(F)$  ne dépend que de l'entrelacs  $L = F(\partial\Sigma)$ .

**Formule de Mullins (1993)**

$$\text{sign}(K) = 4\lambda(M_K^2) - \frac{2}{3} \frac{d_1(K)}{d_0(K)}.$$

Ici  $\lambda(M_K^2)$  est l'invariant de Casson-Walker du revêtement double ramifié et  $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(L) \cdot h^k$  est le polynôme de Jones en  $q = i \exp(h/2)$ .

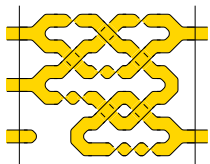
**Corollaire (de la formule de Mullins)**

La signature admet un développement en une série d'invariants de type fini :

$$\text{sign}(K) = 4\lambda(M_K^2) - \frac{2}{3} d_1(K) \sum_{k=0}^{\infty} (-4d)^k$$

Ici  $d_0 = 1 + 4d$ ,  $d \in \mathbb{Z}$ , ce qui assure la convergence dans  $\varprojlim \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ .

## La catégorie des surfaces plongées



Générateurs standards :

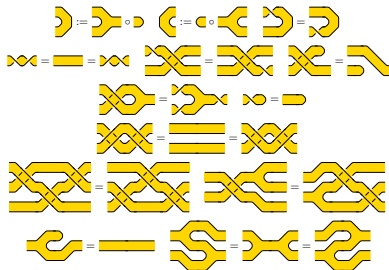


(Pour des surfaces rubans la construction est analogue mais plus longue.)

§3.2

25/34 §3.2

## Relations imposées par l'isotopie



26/34

## La catégorie des surfaces abstraites

Générateurs standards :



Même relations qu'avant mais abstraites (plus plongées).

Foncteur oubliant :



Noyau :

$$I = \left( \begin{array}{c} \text{X} - \text{X} \\ \text{Y} - \text{Y} \end{array} \right)$$

§3.2

27/34 §3.2

## Diagrammes en arcs

Filtration  $I$ -adique engendrée par des changements de croisements rubans :

$$I = \left( \begin{array}{c} \text{X} - \text{X} \\ \text{Y} - \text{Y} \end{array} \right)$$

Ceci peut-être codé par des arcs sur des surfaces abstraites :



Foncteur résolvant les arcs :



Ceci envoie les surfaces abstraites décorées avec  $m$  arcs sur  $I^m / I^{m+1}$ .

On quotiente les diagrammes en arcs par les relations évidentes.

⇒ Le quotient est-il de dimension finie en tout degré ?

⇒ Le quotient est-il bien isomorphe à  $I^m / I^{m+1}$  ?

28/34

## Vers un invariant universel

On souhaite construire un invariant universel  $Z$  comme suit :

$$\begin{aligned}
 Z(\text{cap}) &= \text{Exp}(+) \circ \text{cap} & Z(\text{cup}) &= \text{cup} \\
 Z(\text{cap}) &= \text{Exp}(-) \circ \text{cap} & Z(\text{cup}) &= \text{cup} \\
 Z(\text{cross}) &= \text{Exp}(+) \circ \text{cross} & Z(\text{Y}) &= \text{Y} + \text{h.o.t.} \\
 Z(\text{cross}) &= \text{Exp}(-) \circ \text{cross} & Z(\text{Y}) &= \text{Y} + \text{h.o.t.}
 \end{aligned}$$

La construction naïve ne marche pas : même problème que pour les nœuds.

On passe à la catégorie non associative et introduit un associateur  $\Phi$  :

$$Z(\text{assoc}) = \Phi(\text{assoc}) \quad Z(\text{assoc}) = \Phi(\text{assoc})$$

### Question

Peut-on ainsi satisfaire toutes les relations d'isotopie ?

§3.3

29/34 §4.0

## Questions ouvertes

Polynôme de Jones :

- La nullité de Jones est-elle égale à la nullité de Seifert ?
- Généralisations de Jones à HOMFLYPT ? à Kauffman ?
- Est-ce un phénomène en dimension 3 ? ou plutôt 4 ?
- Interprétation en homologie de Khovanov ? suite spectrale ?

Invariants de type fini des surfaces :

- Diagrammes en arcs modulo relations : dimension finie ?
- Étudier d'autres exemples : HOMFLYPT, Kauffman, ...
- Comprendre les invariants en petit degré.
- Construire un invariant universel.

Je vous remercie de votre attention.

[www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserem](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserem)

30/34

## Surfaces rubans et diagrammes rubans

Soit  $\Sigma$  une surface compacte orientée sans composantes fermées.

### Définition

Une *immersion ruban*  $F: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  n'a que des singularités rubans.

Une *surface ruban*  $S = F(\Sigma)$  est l'image d'une telle immersion.

Un *diagramme ruban* est un diagramme planaire formé de pièces suivantes :



### Proposition

Toute surface ruban peut être représentée par un diagramme ruban.

§5.1

31/34 §5.2

## Le crochet de Kauffman

### Définition (crochet de Kauffman)

Il existe une unique application  $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm}]$ , notée  $D \mapsto \langle D \rangle$ , telle que

$$\begin{aligned}
 \langle \bigcirc \rangle &= 1, \\
 \langle D \sqcup \bigcirc \rangle &= \langle D \rangle \cdot (-A^{+2} - A^{-2}), \\
 \langle \langle \times \rangle \rangle &= A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle.
 \end{aligned}$$

$$\langle \langle \otimes \rangle \rangle = \langle \rangle \langle \rangle \quad \text{et} \quad \langle \langle \otimes \rangle \rangle = \langle \langle \otimes \rangle \rangle \quad \text{mais} \quad \langle \langle \otimes \rangle \rangle = -A^2 \langle \langle \otimes \rangle \rangle$$

### Théorème (Kauffman 1987)

On a  $V(L)|_{(q \rightarrow -A^{-2})} = \langle D \rangle \cdot (-A^{-3})^{w(D)}$ .

Construction analogue pour  $V_N$  par Murakami–Ohtsuki–Yamada 1998.

32/34

## La nullité de Jones : borne inférieure

### Théorème

[G&T 2009]

Si  $L \subset \mathbb{R}^3$  borde une surface ruban  $S \subset \mathbb{R}^3$  de caractéristique d'Euler  $n > 0$ , alors  $V(L)$  est divisible par  $V(\bigcirc^n) = (q^{-1} + q^1)^{n-1}$ .

Observation clé pour la récurrence : une annulation miraculeuse !

$$\langle \begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \end{array} \rangle - \langle \begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \end{array} \rangle = (A^{+2} - A^{-2}) \left[ \langle \begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \end{array} \rangle - \langle \begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \end{array} \rangle \right] \\ + (A^{+4} - 1) \left[ \langle \begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \end{array} \rangle - \langle \begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \end{array} \rangle \right] + (A^{-4} - 1) \left[ \langle \begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \end{array} \rangle - \langle \begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \end{array} \rangle \right].$$

**Démonstration.** Par hypothèse toute composante  $S_i$  a du bord.

Donc  $\chi(S_i) > 0 \Leftrightarrow S_i = \bigcirc \Leftrightarrow \chi(S_i) = 1$ .

Récurrence sur le nombre  $r(S)$  de singularités rubans :

Si  $r(S) = 0$ , alors  $S$  est plongée et  $L = L_0 \sqcup \bigcirc^n$ .

Si  $r(S) \geq 1$ , on utilise l'équation ci-dessus.

On conclut par  $\chi(\begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \end{array}) = \chi(\begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \end{array}) + 1$ . □

## Invariants de type fini de surfaces

On développe  $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(L) \cdot h^k$  en  $q = i \exp(h/2) = i + ih/2 + \dots$

### Proposition

[G&T 2009]

L'invariant  $S \mapsto d_k(\partial S)$  est de degré  $\leq m := k + 1 - \chi(S)$ .

Le déterminant  $d_0 = \det$  a déjà été déduit de la forme de Seifert.

Observation clé pour la récurrence :

$$\langle \begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \end{array} \rangle - \langle \begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \end{array} \rangle = (A^{+4} - A^{-4}) \left[ \langle \begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \end{array} \rangle - \langle \begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \end{array} \rangle \right] \\ + (A^{+2} - A^{-2}) \left[ \langle \begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \end{array} \rangle - \langle \begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \end{array} \rangle + \langle \begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \end{array} \rangle - \langle \begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \\ \text{+} \end{array} \rangle \right].$$

**Démonstration.** On sait que  $V(\partial S)$  est divisible par  $(q^{-1} + q^1)^{\chi(S)-1}$ .

Ainsi  $d_k(\partial S) = 0$  pour  $k < \chi(S) - 1$  : dans ce cas  $m < 0$ .

Alors  $\sum_{Y \subset X} (-1)^{|Y|} V(\partial D_Y)$  est divisible par  $(q^{-1} + q^1)^{|\chi| + \chi(S) - 1}$  :

On utilise l'équation ci-dessus, puis on conclut par récurrence sur  $|X|$ . □