

Der Hauptsatz der Algebra in effektiver Gestalt: ein reell-algebraischer Beweis mittels sturmscher Ketten

Michael Eisermann

Institut Fourier, Université Grenoble I
www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm

15. Januar 2009



Carl Friedrich Gauß (1777–1855)



Augustin Louis Cauchy (1789–1857)



Charles-François Sturm (1803–1855)

Mathematisches Kolloquium, Johannes-Gutenberg-Universität Mainz

- 1 Der Hauptsatz der Algebra
- 2 Sturm 1829/1835: reelle Nullstellen reeller Polynome
- 3 Sturm 1836: komplexe Nullstellen komplexer Polynome
- 4 Zusammenfassung und Ausblick

- 1** Der Hauptsatz der Algebra
 - Der Satz und seine Geschichte
 - Reelle Nullstellen reeller Polynome
 - Komplexe Nullstellen komplexer Polynome
- 2 Sturm 1829/1835: reelle Nullstellen reeller Polynome
- 3 Sturm 1836: komplexe Nullstellen komplexer Polynome
- 4 Zusammenfassung und Ausblick

Satz (Kurzfassung)

Jedes komplexe Polynom vom Grad n hat genau n komplexe Nullstellen.

Satz (Kurzfassung)

Jedes komplexe Polynom vom Grad n hat genau n komplexe Nullstellen.

Satz (Langfassung)

Sei \mathbb{R} der Körper der reellen Zahlen und sei $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ mit $i^2 = -1$.

Satz (Kurzfassung)

Jedes komplexe Polynom vom Grad n hat genau n komplexe Nullstellen.

Satz (Langfassung)

Sei \mathbb{R} der Körper der reellen Zahlen und sei $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ mit $i^2 = -1$.

Dann gilt: Für jedes Polynom

$$F = Z^n + c_1 Z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} Z + c_n$$

mit $c_1, \dots, c_{n-1}, c_n \in \mathbb{C}$

Satz (Kurzfassung)

Jedes komplexe Polynom vom Grad n hat genau n komplexe Nullstellen.

Satz (Langfassung)

Sei \mathbb{R} der Körper der reellen Zahlen und sei $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ mit $i^2 = -1$.

Dann gilt: Für jedes Polynom

$$F = Z^n + c_1 Z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} Z + c_n$$

mit $c_1, \dots, c_{n-1}, c_n \in \mathbb{C}$ existieren $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ so dass

$$F = (Z - z_1)(Z - z_2) \cdots (Z - z_n).$$

Satz (Kurzfassung)

Jedes komplexe Polynom vom Grad n hat genau n komplexe Nullstellen.

Satz (Langfassung)

Sei \mathbb{R} der Körper der reellen Zahlen und sei $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ mit $i^2 = -1$.

Dann gilt: Für jedes Polynom

$$F = Z^n + c_1 Z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} Z + c_n$$

mit $c_1, \dots, c_{n-1}, c_n \in \mathbb{C}$ existieren $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ so dass

$$F = (Z - z_1)(Z - z_2) \cdots (Z - z_n).$$

Nahe liegende Fragen:

Satz (Kurzfassung)

Jedes komplexe Polynom vom Grad n hat genau n komplexe Nullstellen.

Satz (Langfassung)

Sei \mathbb{R} der Körper der reellen Zahlen und sei $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ mit $i^2 = -1$.

Dann gilt: Für jedes Polynom

$$F = Z^n + c_1 Z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} Z + c_n$$

mit $c_1, \dots, c_{n-1}, c_n \in \mathbb{C}$ existieren $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ so dass

$$F = (Z - z_1)(Z - z_2) \cdots (Z - z_n).$$

Nahe liegende Fragen:

Gibt es einen elementaren, geometrisch ansprechenden Beweis?

Satz (Kurzfassung)

Jedes komplexe Polynom vom Grad n hat genau n komplexe Nullstellen.

Satz (Langfassung)

Sei \mathbb{R} der Körper der reellen Zahlen und sei $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ mit $i^2 = -1$.

Dann gilt: Für jedes Polynom

$$F = Z^n + c_1 Z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} Z + c_n$$

mit $c_1, \dots, c_{n-1}, c_n \in \mathbb{C}$ existieren $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ so dass

$$F = (Z - z_1)(Z - z_2) \cdots (Z - z_n).$$

Nahe liegende Fragen:

Gibt es einen elementaren, geometrisch ansprechenden Beweis?

Kann man die Voraussetzung abschwächen? Welche geordneten Körper?

Satz (Kurzfassung)

Jedes komplexe Polynom vom Grad n hat genau n komplexe Nullstellen.

Satz (Langfassung)

Sei \mathbb{R} der Körper der reellen Zahlen und sei $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ mit $i^2 = -1$.

Dann gilt: Für jedes Polynom

$$F = Z^n + c_1 Z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} Z + c_n$$

mit $c_1, \dots, c_{n-1}, c_n \in \mathbb{C}$ existieren $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ so dass

$$F = (Z - z_1)(Z - z_2) \cdots (Z - z_n).$$

Nahe liegende Fragen:

Gibt es einen elementaren, geometrisch ansprechenden Beweis?

Kann man die Voraussetzung abschwächen? Welche geordneten Körper?

Kann man die Schlussfolgerung verstärken? Zu einer effektiven Version?

Einige Daten zum Hauptsatz der Algebra

Scipione del Ferro (1456-1526)

Niccolò Fontana Tartaglia (1500-1557)

Gerolamo Cardano (1501-1576)

Lodovico Ferrari (1522-1565)

Einige Daten zum Hauptsatz der Algebra

Scipione del Ferro (1456-1526)

Niccolò Fontana Tartaglia (1500-1557)

Gerolamo Cardano (1501-1576)

Lodovico Ferrari (1522-1565)

...

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Évariste Galois (1811-1832)

Einige Daten zum Hauptsatz der Algebra

Scipione del Ferro (1456-1526)

Niccolò Fontana Tartaglia (1500-1557)

Gerolamo Cardano (1501-1576)

Lodovico Ferrari (1522-1565)

...

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Évariste Galois (1811-1832)

Albert Girard (1595-1632)

René Descartes (1596-1650)

Gottfried Leibniz (1646-1716)

Einige Daten zum Hauptsatz der Algebra

Scipione del Ferro (1456-1526)

Niccolò Fontana Tartaglia (1500-1557)

Gerolamo Cardano (1501-1576)

Lodovico Ferrari (1522-1565)

...

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Évariste Galois (1811-1832)

Albert Girard (1595-1632)

René Descartes (1596-1650)

Gottfried Leibniz (1646-1716)

...

Leonhard Euler (1707-1783)

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

Einige Daten zum Hauptsatz der Algebra

Scipione del Ferro (1456-1526)

Niccolò Fontana Tartaglia (1500-1557)

Gerolamo Cardano (1501-1576)

Lodovico Ferrari (1522-1565)

...

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Évariste Galois (1811-1832)

Albert Girard (1595-1632)

René Descartes (1596-1650)

Gottfried Leibniz (1646-1716)

...

Leonhard Euler (1707-1783)

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

...

Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Einige Daten zum Hauptsatz der Algebra

Scipione del Ferro (1456-1526)

Niccolò Fontana Tartaglia (1500-1557)

Gerolamo Cardano (1501-1576)

Lodovico Ferrari (1522-1565)

...

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Évariste Galois (1811-1832)

Albert Girard (1595-1632)

René Descartes (1596-1650)

Gottfried Leibniz (1646-1716)

...

Leonhard Euler (1707-1783)

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

...

Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Charles-François Sturm (1803-1855)

Einige Daten zum Hauptsatz der Algebra

Scipione del Ferro (1456-1526)
Niccolò Fontana Tartaglia (1500-1557)
Gerolamo Cardano (1501-1576)
Lodovico Ferrari (1522-1565)
...
Niels Henrik Abel (1802-1829)
Évariste Galois (1811-1832)

Albert Girard (1595-1632)
René Descartes (1596-1650)
Gottfried Leibniz (1646-1716)

...
Leonhard Euler (1707-1783)
Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)
Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)
Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

...
Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)
Charles-François Sturm (1803-1855)

Mathematischer Tourismus



Einige Daten zum Hauptsatz der Algebra

Scipione del Ferro (1456-1526)
Niccolò Fontana Tartaglia (1500-1557)
Gerolamo Cardano (1501-1576)
Lodovico Ferrari (1522-1565)
...
Niels Henrik Abel (1802-1829)
Évariste Galois (1811-1832)

Albert Girard (1595-1632)
René Descartes (1596-1650)
Gottfried Leibniz (1646-1716)
...
Leonhard Euler (1707-1783)
Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)
Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)
Pierre-Simon Laplace (1749-1827)
...
Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Augustin Louis Cauchy (1789–1857)
Charles-François Sturm (1803–1855)

Mathematischer Tourismus



Es gibt drei Beweisstrategien zum Hauptsatz der Algebra:

Es gibt drei Beweisstrategien zum Hauptsatz der Algebra:

- 1 Analysis, mittels Kompaktheit, Integration, Stokes, ...
(d'Alembert 1746, Argand 1814, Cauchy 1820);

Es gibt drei Beweisstrategien zum Hauptsatz der Algebra:

- 1 Analysis, mittels Kompaktheit, Integration, Stokes, ...
(d'Alembert 1746, Argand 1814, Cauchy 1820);
- 2 Algebra, mittels symmetrischer Funktionen oder Galois-Theorie
(Euler 1749, Lagrange 1772, Laplace 1795, Gauß 1816);

Es gibt drei Beweisstrategien zum Hauptsatz der Algebra:

- 1 Analysis, mittels Kompaktheit, Integration, Stokes, ...
(d'Alembert 1746, Argand 1814, Cauchy 1820);
- 2 Algebra, mittels symmetrischer Funktionen oder Galois-Theorie
(Euler 1749, Lagrange 1772, Laplace 1795, Gauß 1816);
- 3 Algebraische Topologie, mittels einer Form der Umlaufzahl
(Gauß 1799/1816, Cauchy 1831, Sturm–Liouville 1836)

Es gibt drei Beweisstrategien zum Hauptsatz der Algebra:

- 1 Analysis, mittels Kompaktheit, Integration, Stokes, ...
(d'Alembert 1746, Argand 1814, Cauchy 1820);
- 2 Algebra, mittels symmetrischer Funktionen oder Galois-Theorie
(Euler 1749, Lagrange 1772, Laplace 1795, Gauß 1816);
- 3 Algebraische Topologie, mittels einer Form der Umlaufzahl
(Gauß 1799/1816, Cauchy 1831, Sturm–Liouville 1836)

Der hier vorgestellte Beweis ist *reell-algebraisch*, zwischen 2 und 3.

Es gibt drei Beweisstrategien zum Hauptsatz der Algebra:

- 1 Analysis, mittels Kompaktheit, Integration, Stokes, ...
(d'Alembert 1746, Argand 1814, Cauchy 1820);
- 2 Algebra, mittels symmetrischer Funktionen oder Galois-Theorie
(Euler 1749, Lagrange 1772, Laplace 1795, Gauß 1816);
- 3 Algebraische Topologie, mittels einer Form der Umlaufzahl
(Gauß 1799/1816, Cauchy 1831, Sturm–Liouville 1836)

Der hier vorgestellte Beweis ist *reell-algebraisch*, zwischen 2 und 3.

Was ist an diesem reell-algebraischen Beweis interessant?

Es gibt drei Beweisstrategien zum Hauptsatz der Algebra:

- 1 Analysis, mittels Kompaktheit, Integration, Stokes, ...
(d'Alembert 1746, Argand 1814, Cauchy 1820);
- 2 Algebra, mittels symmetrischer Funktionen oder Galois-Theorie
(Euler 1749, Lagrange 1772, Laplace 1795, Gauß 1816);
- 3 Algebraische Topologie, mittels einer Form der Umlaufzahl
(Gauß 1799/1816, Cauchy 1831, Sturm–Liouville 1836)

Der hier vorgestellte Beweis ist *reell-algebraisch*, zwischen 2 und 3.

Was ist an diesem reell-algebraischen Beweis interessant?

- ✓ Er ist elementar: Arithmetik und Zwischenwertsatz reeller Polynome.

Es gibt drei Beweisstrategien zum Hauptsatz der Algebra:

- 1 Analysis, mittels Kompaktheit, Integration, Stokes, ...
(d'Alembert 1746, Argand 1814, Cauchy 1820);
- 2 Algebra, mittels symmetrischer Funktionen oder Galois-Theorie
(Euler 1749, Lagrange 1772, Laplace 1795, Gauß 1816);
- 3 Algebraische Topologie, mittels einer Form der Umlaufzahl
(Gauß 1799/1816, Cauchy 1831, Sturm–Liouville 1836)

Der hier vorgestellte Beweis ist *reell-algebraisch*, zwischen 2 und 3.

Was ist an diesem reell-algebraischen Beweis interessant?

- ✓ Er ist elementar: Arithmetik und Zwischenwertsatz reeller Polynome.
- ✓ Alle Argumente gelten über jedem reell abgeschlossenem Körper.

Es gibt drei Beweisstrategien zum Hauptsatz der Algebra:

- 1 Analysis, mittels Kompaktheit, Integration, Stokes, ...
(d'Alembert 1746, Argand 1814, Cauchy 1820);
- 2 Algebra, mittels symmetrischer Funktionen oder Galois-Theorie
(Euler 1749, Lagrange 1772, Laplace 1795, Gauß 1816);
- 3 Algebraische Topologie, mittels einer Form der Umlaufzahl
(Gauß 1799/1816, Cauchy 1831, Sturm–Liouville 1836)

Der hier vorgestellte Beweis ist *reell-algebraisch*, zwischen 2 und 3.

Was ist an diesem reell-algebraischen Beweis interessant?

- ✓ Er ist elementar: Arithmetik und Zwischenwertsatz reeller Polynome.
- ✓ Alle Argumente gelten über jedem reell abgeschlossenem Körper.
- ✓ Der Beweis ist konstruktiv und erlaubt das Auffinden der Nullstellen.

Es gibt drei Beweisstrategien zum Hauptsatz der Algebra:

- 1 Analysis, mittels Kompaktheit, Integration, Stokes, ...
(d'Alembert 1746, Argand 1814, Cauchy 1820);
- 2 Algebra, mittels symmetrischer Funktionen oder Galois-Theorie
(Euler 1749, Lagrange 1772, Laplace 1795, Gauß 1816);
- 3 Algebraische Topologie, mittels einer Form der Umlaufzahl
(Gauß 1799/1816, Cauchy 1831, Sturm–Liouville 1836)

Der hier vorgestellte Beweis ist *reell-algebraisch*, zwischen 2 und 3.

Was ist an diesem reell-algebraischen Beweis interessant?

- ✓ Er ist elementar: Arithmetik und Zwischenwertsatz reeller Polynome.
- ✓ Alle Argumente gelten über jedem reell abgeschlossenem Körper.
- ✓ Der Beweis ist konstruktiv und erlaubt das Auffinden der Nullstellen.
- ✓ Der Algorithmus ist einfach zu implementieren und ausreichend effizient.

Es gibt drei Beweisstrategien zum Hauptsatz der Algebra:

- 1 Analysis, mittels Kompaktheit, Integration, Stokes, ...
(d'Alembert 1746, Argand 1814, Cauchy 1820);
- 2 Algebra, mittels symmetrischer Funktionen oder Galois-Theorie
(Euler 1749, Lagrange 1772, Laplace 1795, Gauß 1816);
- 3 Algebraische Topologie, mittels einer Form der Umlaufzahl
(Gauß 1799/1816, Cauchy 1831, Sturm–Liouville 1836)

Der hier vorgestellte Beweis ist *reell-algebraisch*, zwischen 2 und 3.

Was ist an diesem reell-algebraischen Beweis interessant?

- ✓ Er ist elementar: Arithmetik und Zwischenwertsatz reeller Polynome.
- ✓ Alle Argumente gelten über jedem reell abgeschlossenem Körper.
- ✓ Der Beweis ist konstruktiv und erlaubt das Auffinden der Nullstellen.
- ✓ Der Algorithmus ist einfach zu implementieren und ausreichend effizient.
- ✓ Formaler, computer-verifizierbarer Beweis: Hauptsatz + Algorithmus.

Es gibt drei Beweisstrategien zum Hauptsatz der Algebra:

- 1 Analysis, mittels Kompaktheit, Integration, Stokes, ...
(d'Alembert 1746, Argand 1814, Cauchy 1820);
- 2 Algebra, mittels symmetrischer Funktionen oder Galois-Theorie
(Euler 1749, Lagrange 1772, Laplace 1795, Gauß 1816);
- 3 Algebraische Topologie, mittels einer Form der Umlaufzahl
(Gauß 1799/1816, Cauchy 1831, Sturm–Liouville 1836)

Der hier vorgestellte Beweis ist *reell-algebraisch*, zwischen 2 und 3.

Was ist an diesem reell-algebraischen Beweis interessant?

- ✓ Er ist elementar: Arithmetik und Zwischenwertsatz reeller Polynome.
- ✓ Alle Argumente gelten über jedem reell abgeschlossenem Körper.
- ✓ Der Beweis ist konstruktiv und erlaubt das Auffinden der Nullstellen.
- ✓ Der Algorithmus ist einfach zu implementieren und ausreichend effizient.
- ✓ Formaler, computer-verifizierbarer Beweis: Hauptsatz + Algorithmus.

Kurzum: minimale Voraussetzungen, maximale Information.

Satz (Charakterisierung der reellen Zahlen)

Für jeden geordneten Körper $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ sind äquivalent:

Satz (Charakterisierung der reellen Zahlen)

Für jeden geordneten Körper $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ sind äquivalent:

- 1 (\mathbf{R}, \leq) erfüllt die Supremums-Bedingung.

Satz (Charakterisierung der reellen Zahlen)

Für jeden geordneten Körper $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ sind äquivalent:

- 1 (\mathbf{R}, \leq) erfüllt die Supremums-Bedingung.
- 2 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist kompakt.

Satz (Charakterisierung der reellen Zahlen)

Für jeden geordneten Körper $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ sind äquivalent:

- 1 (\mathbf{R}, \leq) erfüllt die Supremums-Bedingung.
- 2 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist kompakt.
- 3 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist zusammenhängend.

Satz (Charakterisierung der reellen Zahlen)

Für jeden geordneten Körper $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ sind äquivalent:

- 1 (\mathbf{R}, \leq) erfüllt die Supremums-Bedingung.
- 2 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist kompakt.
- 3 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist zusammenhängend.
- 4 Jede stetige Funktion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ erfüllt den Zwischenwertsatz:

Satz (Charakterisierung der reellen Zahlen)

Für jeden geordneten Körper $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ sind äquivalent:

- 1 (\mathbf{R}, \leq) erfüllt die Supremums-Bedingung.
- 2 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist kompakt.
- 3 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist zusammenhängend.
- 4 Jede stetige Funktion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ erfüllt den Zwischenwertsatz:
 $f(a)f(b) < 0 \implies \exists x \in \mathbf{R} : (x - a)(x - b) < 0 \wedge f(x) = 0.$

Satz (Charakterisierung der reellen Zahlen)

Für jeden geordneten Körper $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ sind äquivalent:

- 1 (\mathbf{R}, \leq) erfüllt die Supremums-Bedingung.
- 2 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist kompakt.
- 3 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist zusammenhängend.
- 4 Jede stetige Funktion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ erfüllt den Zwischenwertsatz:
 $f(a)f(b) < 0 \implies \exists x \in \mathbf{R} : (x - a)(x - b) < 0 \wedge f(x) = 0.$

Zwischen je zwei solchen Körper besteht genau ein Isomorphismus.

Satz (Charakterisierung der reellen Zahlen)

Für jeden geordneten Körper $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ sind äquivalent:

- 1 (\mathbf{R}, \leq) erfüllt die Supremums-Bedingung.
- 2 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist kompakt.
- 3 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist zusammenhängend.
- 4 Jede stetige Funktion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ erfüllt den Zwischenwertsatz:
 $f(a)f(b) < 0 \implies \exists x \in \mathbf{R} : (x - a)(x - b) < 0 \wedge f(x) = 0.$

Zwischen je zwei solchen Körper besteht genau ein Isomorphismus.
Ein solcher Körper existiert: wir nennen ihn den Körper der reellen Zahlen.

Satz (Charakterisierung der reellen Zahlen)

Für jeden geordneten Körper $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ sind äquivalent:

- 1 (\mathbf{R}, \leq) erfüllt die Supremums-Bedingung.
- 2 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist kompakt.
- 3 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist zusammenhängend.
- 4 Jede stetige Funktion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ erfüllt den Zwischenwertsatz:
 $f(a)f(b) < 0 \implies \exists x \in \mathbf{R} : (x - a)(x - b) < 0 \wedge f(x) = 0.$

Zwischen je zwei solchen Körper besteht genau ein Isomorphismus.
Ein solcher Körper existiert: wir nennen ihn den Körper der reellen Zahlen.

Dies benötigt die Logik zweiter Stufe.

Satz (Charakterisierung der reellen Zahlen)

Für jeden geordneten Körper $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ sind äquivalent:

- 1 (\mathbf{R}, \leq) erfüllt die Supremums-Bedingung.
- 2 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist kompakt.
- 3 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist zusammenhängend.
- 4 Jede stetige Funktion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ erfüllt den Zwischenwertsatz:
 $f(a)f(b) < 0 \implies \exists x \in \mathbf{R} : (x - a)(x - b) < 0 \wedge f(x) = 0.$

Zwischen je zwei solchen Körper besteht genau ein Isomorphismus.
Ein solcher Körper existiert: wir nennen ihn den Körper der reellen Zahlen.

Dies benötigt die Logik zweiter Stufe. Es reicht aber viel weniger:

Satz (Charakterisierung der reellen Zahlen)

Für jeden geordneten Körper $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ sind äquivalent:

- 1 (\mathbf{R}, \leq) erfüllt die Supremums-Bedingung.
- 2 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist kompakt.
- 3 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist zusammenhängend.
- 4 Jede stetige Funktion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ erfüllt den Zwischenwertsatz:
 $f(a)f(b) < 0 \implies \exists x \in \mathbf{R} : (x - a)(x - b) < 0 \wedge f(x) = 0.$

Zwischen je zwei solchen Körper besteht genau ein Isomorphismus.
Ein solcher Körper existiert: wir nennen ihn den Körper der reellen Zahlen.

Dies benötigt die Logik zweiter Stufe. Es reicht aber viel weniger:

Definition (reell abgeschlossener Körper)

Ein geordneter Körper $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ heißt *reell abgeschlossen* wenn jedes Polynom $P \in \mathbf{R}[X]$ den Zwischenwertsatz über \mathbf{R} erfüllt.

Satz (Charakterisierung der reellen Zahlen)

Für jeden geordneten Körper $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ sind äquivalent:

- 1 (\mathbf{R}, \leq) erfüllt die Supremums-Bedingung.
- 2 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist kompakt.
- 3 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist zusammenhängend.
- 4 Jede stetige Funktion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ erfüllt den Zwischenwertsatz:
 $f(a)f(b) < 0 \implies \exists x \in \mathbf{R} : (x - a)(x - b) < 0 \wedge f(x) = 0.$

Zwischen je zwei solchen Körper besteht genau ein Isomorphismus.
Ein solcher Körper existiert: wir nennen ihn den Körper der reellen Zahlen.

Dies benötigt die Logik zweiter Stufe. Es reicht aber viel weniger:

Definition (reell abgeschlossener Körper)

Ein geordneter Körper $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ heißt *reell abgeschlossen* wenn jedes Polynom $P \in \mathbf{R}[X]$ den Zwischenwertsatz über \mathbf{R} erfüllt.

Beispiele: die reellen Zahlen \mathbb{R} , die reell-algebraischen Zahlen $\mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$, ...

Satz (Charakterisierung der reellen Zahlen)

Für jeden geordneten Körper $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ sind äquivalent:

- 1 (\mathbf{R}, \leq) erfüllt die Supremums-Bedingung.
- 2 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist kompakt.
- 3 Jedes Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ist zusammenhängend.
- 4 Jede stetige Funktion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ erfüllt den Zwischenwertsatz:
 $f(a)f(b) < 0 \implies \exists x \in \mathbf{R} : (x - a)(x - b) < 0 \wedge f(x) = 0.$

Zwischen je zwei solchen Körper besteht genau ein Isomorphismus.
Ein solcher Körper existiert: wir nennen ihn den Körper der reellen Zahlen.

Dies benötigt die Logik zweiter Stufe. Es reicht aber viel weniger:

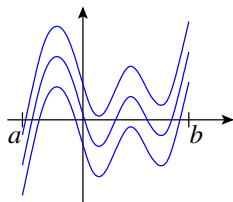
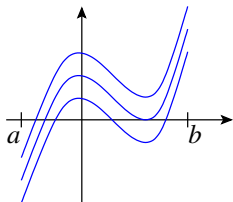
Definition (reell abgeschlossener Körper)

Ein geordneter Körper $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ heißt *reell abgeschlossen* wenn jedes Polynom $P \in \mathbf{R}[X]$ den Zwischenwertsatz über \mathbf{R} erfüllt.

Beispiele: die reellen Zahlen \mathbb{R} , die reell-algebraischen Zahlen $\mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}, \dots$
Jeder geordnete Körper erlaubt einen reellen Abschluss. Beispiel: $\mathbb{R}(X)^c$.

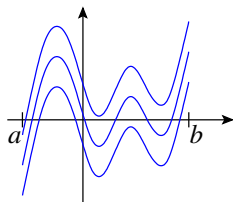
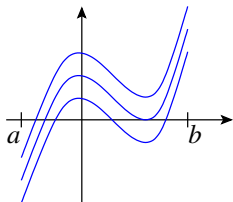
Reelle Nullstellen reeller Polynome

Wie bestimmt man die Anzahl der Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]$ in $[a, b]$?



Reelle Nullstellen reeller Polynome

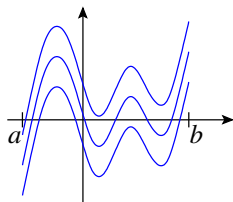
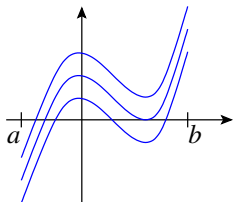
Wie bestimmt man die Anzahl der Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]$ in $[a, b]$?



Teilantworten von Descartes (1596-1650), Fourier (1768-1830), ...

Reelle Nullstellen reeller Polynome

Wie bestimmt man die Anzahl der Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]$ in $[a, b]$?



Teilantworten von Descartes (1596-1650), Fourier (1768-1830), ...

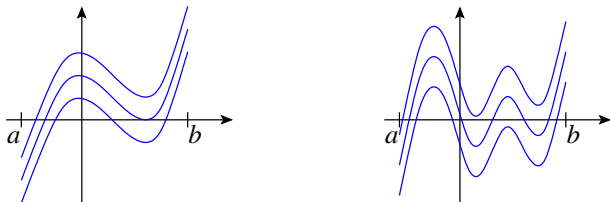
Sturmscher Satz (1829/35)

Wenn \mathbf{R} reell abgeschlossen ist, dann gilt

$$\#\{x \in [a, b] \mid P(x) = 0\} = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_n).$$

Reelle Nullstellen reeller Polynome

Wie bestimmt man die Anzahl der Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]$ in $[a, b]$?



Teilantworten von Descartes (1596-1650), Fourier (1768-1830), ...

Sturmscher Satz (1829/35)

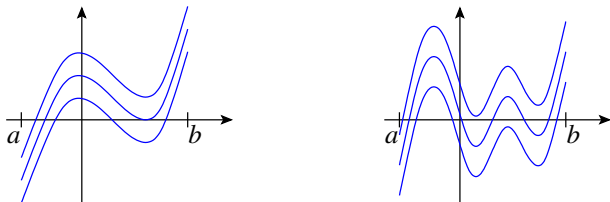
Wenn \mathbf{R} reell abgeschlossen ist, dann gilt

$$\#\{x \in [a, b] \mid P(x) = 0\} = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_n).$$

Hierbei entsteht die Kette S_0, S_1, \dots, S_n aus $S_0 = P$ und $S_1 = P'$ durch iterierte euklidische Division: $S_{k-1} = Q_k S_k - S_{k+1}$ bis schließlich $S_{n+1} = 0$.

Reelle Nullstellen reeller Polynome

Wie bestimmt man die Anzahl der Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]$ in $[a, b]$?



Teilantworten von Descartes (1596-1650), Fourier (1768-1830), ...

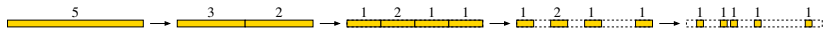
Sturmscher Satz (1829/35)

Wenn \mathbf{R} reell abgeschlossen ist, dann gilt

$$\#\{x \in [a, b] \mid P(x) = 0\} = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_n).$$

Hierbei entsteht die Kette S_0, S_1, \dots, S_n aus $S_0 = P$ und $S_1 = P'$ durch iterierte euklidische Division: $S_{k-1} = Q_k S_k - S_{k+1}$ bis schließlich $S_{n+1} = 0$.

Sturms Satz erlaubt das Zählen und Auffinden aller reellen Nullstellen:



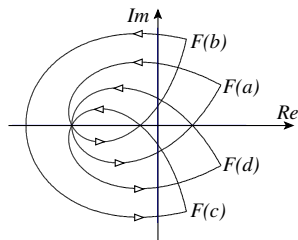
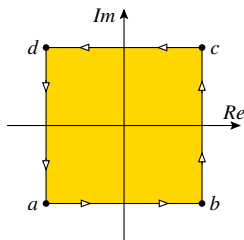
Umlaufzahl: geometrische Motivation

Sei $F \in \mathbb{C}[Z]$ ein Polynom und sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ein Rechteck.

Umlaufzahl: geometrische Motivation

Sei $F \in \mathbf{C}[Z]$ ein Polynom und sei $\Gamma \subset \mathbf{C}$ ein Rechteck.

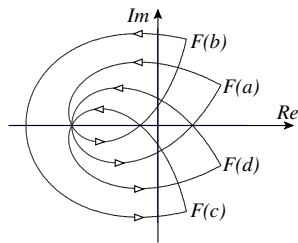
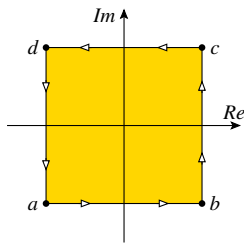
Beispiel: $F = Z^5 - 5Z^4 - 2Z^3 - 2Z^2 - 3Z - 12$ und $\Gamma = [-1, +1] \times [-1, +1]$.



Umlaufzahl: geometrische Motivation

Sei $F \in \mathbf{C}[Z]$ ein Polynom und sei $\Gamma \subset \mathbf{C}$ ein Rechteck.

Beispiel: $F = Z^5 - 5Z^4 - 2Z^3 - 2Z^2 - 3Z - 12$ und $\Gamma = [-1, +1] \times [-1, +1]$.

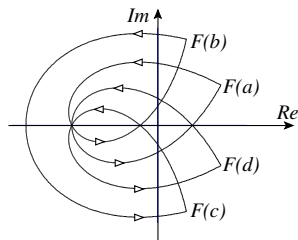
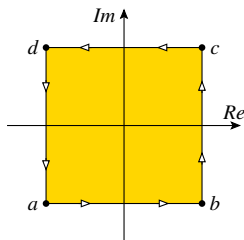


Geometrische Beweisidee (Gauß 1799):

Umlaufzahl: geometrische Motivation

Sei $F \in \mathbf{C}[Z]$ ein Polynom und sei $\Gamma \subset \mathbf{C}$ ein Rechteck.

Beispiel: $F = Z^5 - 5Z^4 - 2Z^3 - 2Z^2 - 3Z - 12$ und $\Gamma = [-1, +1] \times [-1, +1]$.



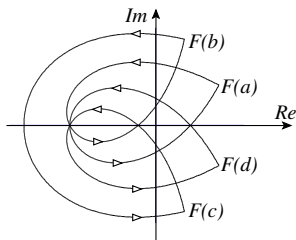
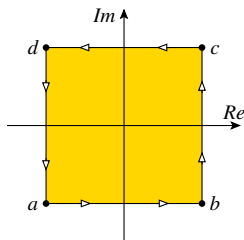
Geometrische Beweisidee (Gauß 1799):

Wir definieren $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F)$ als die Umlaufzahl von $F|_{\partial\Gamma}$ um 0.

Umlaufzahl: geometrische Motivation

Sei $F \in \mathbf{C}[Z]$ ein Polynom und sei $\Gamma \subset \mathbf{C}$ ein Rechteck.

Beispiel: $F = Z^5 - 5Z^4 - 2Z^3 - 2Z^2 - 3Z - 12$ und $\Gamma = [-1, +1] \times [-1, +1]$.



Geometrische Beweisidee (Gauß 1799):

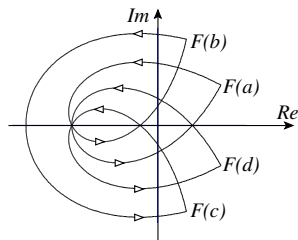
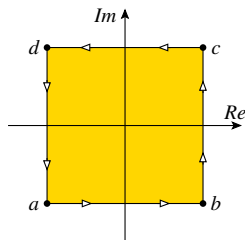
Wir definieren $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F)$ als die Umlaufzahl von $F|_{\partial\Gamma}$ um 0.

- Wenn Γ groß ist, dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(Z^n) = n$.

Umlaufzahl: geometrische Motivation

Sei $F \in \mathbf{C}[Z]$ ein Polynom und sei $\Gamma \subset \mathbf{C}$ ein Rechteck.

Beispiel: $F = Z^5 - 5Z^4 - 2Z^3 - 2Z^2 - 3Z - 12$ und $\Gamma = [-1, +1] \times [-1, +1]$.



Geometrische Beweisidee (Gauß 1799):

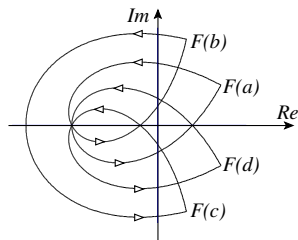
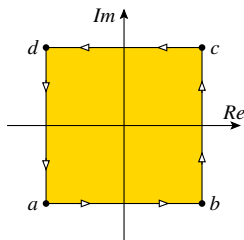
Wir definieren $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F)$ als die Umlaufzahl von $F|_{\partial\Gamma}$ um 0.

- Wenn Γ groß ist, dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(Z^n) = n$.
- Wenn Γ klein ist, dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(\text{const}) = 0$.

Umlaufzahl: geometrische Motivation

Sei $F \in \mathbf{C}[Z]$ ein Polynom und sei $\Gamma \subset \mathbf{C}$ ein Rechteck.

Beispiel: $F = Z^5 - 5Z^4 - 2Z^3 - 2Z^2 - 3Z - 12$ und $\Gamma = [-1, +1] \times [-1, +1]$.



Geometrische Beweisidee (Gauß 1799):

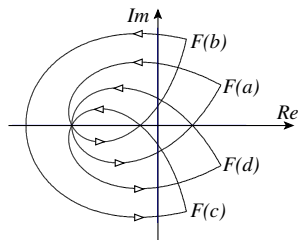
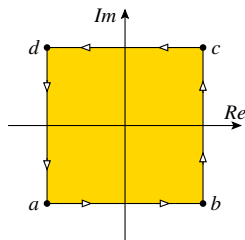
Wir definieren $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F)$ als die Umlaufzahl von $F|_{\partial\Gamma}$ um 0.

- Wenn Γ groß ist, dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(Z^n) = n$.
- Wenn Γ klein ist, dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(\text{const}) = 0$.
- Die Umlaufzahl ändert sich nur, wenn 0 durchlaufen wird.

Umlaufzahl: geometrische Motivation

Sei $F \in \mathbf{C}[Z]$ ein Polynom und sei $\Gamma \subset \mathbf{C}$ ein Rechteck.

Beispiel: $F = Z^5 - 5Z^4 - 2Z^3 - 2Z^2 - 3Z - 12$ und $\Gamma = [-1, +1] \times [-1, +1]$.



Geometrische Beweisidee (Gauß 1799):

Wir definieren $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F)$ als die Umlaufzahl von $F|_{\partial\Gamma}$ um 0.

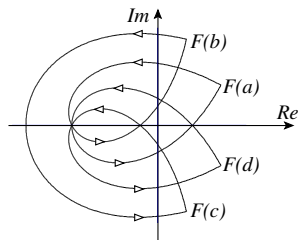
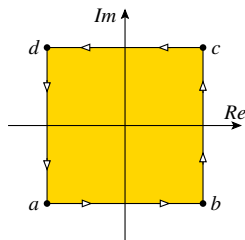
- Wenn Γ groß ist, dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(Z^n) = n$.
- Wenn Γ klein ist, dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(\text{const}) = 0$.
- Die Umlaufzahl ändert sich nur, wenn 0 durchlaufen wird.

Für Grad $n \geq 1$ muss also F eine Nullstelle haben.

Umlaufzahl: geometrische Motivation

Sei $F \in \mathbb{C}[Z]$ ein Polynom und sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ein Rechteck.

Beispiel: $F = Z^5 - 5Z^4 - 2Z^3 - 2Z^2 - 3Z - 12$ und $\Gamma = [-1, +1] \times [-1, +1]$.



Geometrische Beweisidee (Gauß 1799):

Wir definieren $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F)$ als die Umlaufzahl von $F|_{\partial\Gamma}$ um 0.

- Wenn Γ groß ist, dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(Z^n) = n$.
- Wenn Γ klein ist, dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(\text{const}) = 0$.
- Die Umlaufzahl ändert sich nur, wenn 0 durchlaufen wird.

Für Grad $n \geq 1$ muss also F eine Nullstelle haben.

Technisches Problem: Wie kann man die Umlaufzahl streng definieren?

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Sei Ω die Menge stückw. polynomialer Schleifen $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^*$, $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Sei Ω die Menge stückw. polynomialer Schleifen $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^*$, $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Satz

Es gibt eine Abbildung $\text{ind}: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ mit folgenden Eigenschaften:

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Sei Ω die Menge stückw. polynomialer Schleifen $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^*$, $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Satz

Es gibt eine Abbildung $\text{ind}: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ mit folgenden Eigenschaften:

- 0** *Berechnung: $\text{ind}(\gamma)$ berechnet sich mittels Sturms Algorithmus über \mathbf{R} .*

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Sei Ω die Menge stückw. polynomialer Schleifen $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^*$, $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Satz

Es gibt eine Abbildung $\text{ind}: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ mit folgenden Eigenschaften:

- 0 Berechnung: $\text{ind}(\gamma)$ berechnet sich mittels Sturms Algorithmus über \mathbf{R} .
- 1 Normalisierung: Für jedes Rechteck $\Gamma \subset \mathbf{C}$ gilt

$$\text{ind}(\partial\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in \text{Int } \Gamma, \\ 0 & \text{falls } 0 \in \mathbf{C} \setminus \Gamma. \end{cases}$$

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Sei Ω die Menge stückw. polynomialer Schleifen $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^*$, $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Satz

Es gibt eine Abbildung $\text{ind}: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ mit folgenden Eigenschaften:

0 *Berechnung:* $\text{ind}(\gamma)$ berechnet sich mittels Sturms Algorithmus über \mathbf{R} .

1 *Normalisierung:* Für jedes Rechteck $\Gamma \subset \mathbf{C}$ gilt

$$\text{ind}(\partial\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in \text{Int } \Gamma, \\ 0 & \text{falls } 0 \in \mathbf{C} \setminus \Gamma. \end{cases}$$

2 *Multiplikativität:* $\text{ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \text{ind}(\gamma_1) + \text{ind}(\gamma_2)$.

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Sei Ω die Menge stückw. polynomialer Schleifen $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^*$, $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Satz

Es gibt eine Abbildung $\text{ind}: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ mit folgenden Eigenschaften:

0 *Berechnung:* $\text{ind}(\gamma)$ berechnet sich mittels Sturms Algorithmus über \mathbf{R} .

1 *Normalisierung:* Für jedes Rechteck $\Gamma \subset \mathbf{C}$ gilt

$$\text{ind}(\partial\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in \text{Int } \Gamma, \\ 0 & \text{falls } 0 \in \mathbf{C} \setminus \Gamma. \end{cases}$$

2 *Multiplikativität:* $\text{ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \text{ind}(\gamma_1) + \text{ind}(\gamma_2)$.

3 *Homotopie-Invarianz:* $\text{ind}(\gamma_0) = \text{ind}(\gamma_1)$ falls $\gamma_0 \sim \gamma_1$ in \mathbf{C}^* .

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Sei Ω die Menge stückw. polynomialer Schleifen $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^*$, $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Satz

Es gibt eine Abbildung $\text{ind}: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ mit folgenden Eigenschaften:

0 *Berechnung:* $\text{ind}(\gamma)$ berechnet sich mittels Sturms Algorithmus über \mathbf{R} .

1 *Normalisierung:* Für jedes Rechteck $\Gamma \subset \mathbf{C}$ gilt

$$\text{ind}(\partial\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in \text{Int } \Gamma, \\ 0 & \text{falls } 0 \in \mathbf{C} \setminus \Gamma. \end{cases}$$

2 *Multiplikativität:* $\text{ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \text{ind}(\gamma_1) + \text{ind}(\gamma_2)$.

3 *Homotopie-Invarianz:* $\text{ind}(\gamma_0) = \text{ind}(\gamma_1)$ falls $\gamma_0 \sim \gamma_1$ in \mathbf{C}^* .

Die Schwierigkeit liegt in der *Konstruktion* einer solchen Abbildung!

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Sei Ω die Menge stückw. polynomialer Schleifen $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^*$, $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Satz

Es gibt eine Abbildung $\text{ind}: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ mit folgenden Eigenschaften:

0 *Berechnung:* $\text{ind}(\gamma)$ berechnet sich mittels Sturms Algorithmus über \mathbf{R} .

1 *Normalisierung:* Für jedes Rechteck $\Gamma \subset \mathbf{C}$ gilt

$$\text{ind}(\partial\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in \text{Int } \Gamma, \\ 0 & \text{falls } 0 \in \mathbf{C} \setminus \Gamma. \end{cases}$$

2 *Multiplikativität:* $\text{ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \text{ind}(\gamma_1) + \text{ind}(\gamma_2)$.

3 *Homotopie-Invarianz:* $\text{ind}(\gamma_0) = \text{ind}(\gamma_1)$ falls $\gamma_0 \sim \gamma_1$ in \mathbf{C}^* .

Die Schwierigkeit liegt in der *Konstruktion* einer solchen Abbildung!

- Überlagerungstheorie, angewendet auf $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ mit Gruppe \mathbb{Z} .

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Sei Ω die Menge stückw. polynomialer Schleifen $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^*$, $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Satz

Es gibt eine Abbildung $\text{ind}: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ mit folgenden Eigenschaften:

0 *Berechnung:* $\text{ind}(\gamma)$ berechnet sich mittels Sturms Algorithmus über \mathbf{R} .

1 *Normalisierung:* Für jedes Rechteck $\Gamma \subset \mathbf{C}$ gilt

$$\text{ind}(\partial\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in \text{Int } \Gamma, \\ 0 & \text{falls } 0 \in \mathbf{C} \setminus \Gamma. \end{cases}$$

2 *Multiplikativität:* $\text{ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \text{ind}(\gamma_1) + \text{ind}(\gamma_2)$.

3 *Homotopie-Invarianz:* $\text{ind}(\gamma_0) = \text{ind}(\gamma_1)$ falls $\gamma_0 \sim \gamma_1$ in \mathbf{C}^* .

Die Schwierigkeit liegt in der *Konstruktion* einer solchen Abbildung!

- Überlagerungstheorie, angewendet auf $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ mit Gruppe \mathbb{Z} .
- Fundamentalgruppe, $\text{ind}: \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ via Seifert–van Kampen.

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Sei Ω die Menge stückw. polynomialer Schleifen $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^*$, $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Satz

Es gibt eine Abbildung $\text{ind}: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ mit folgenden Eigenschaften:

0 *Berechnung:* $\text{ind}(\gamma)$ berechnet sich mittels Sturms Algorithmus über \mathbf{R} .

1 *Normalisierung:* Für jedes Rechteck $\Gamma \subset \mathbf{C}$ gilt

$$\text{ind}(\partial\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in \text{Int } \Gamma, \\ 0 & \text{falls } 0 \in \mathbf{C} \setminus \Gamma. \end{cases}$$

2 *Multiplikativität:* $\text{ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \text{ind}(\gamma_1) + \text{ind}(\gamma_2)$.

3 *Homotopie-Invarianz:* $\text{ind}(\gamma_0) = \text{ind}(\gamma_1)$ falls $\gamma_0 \sim \gamma_1$ in \mathbf{C}^* .

Die Schwierigkeit liegt in der *Konstruktion* einer solchen Abbildung!

- Überlagerungstheorie, angewendet auf $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ mit Gruppe \mathbb{Z} .
- Fundamentalgruppe, $\text{ind}: \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ via Seifert–van Kampen.
- Homologietheorie, $\text{ind}: H_1(\mathbb{C}^*) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ via Eilenberg–Steenrod.

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Sei Ω die Menge stückw. polynomialer Schleifen $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^*$, $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Satz

Es gibt eine Abbildung $\text{ind}: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ mit folgenden Eigenschaften:

0 *Berechnung:* $\text{ind}(\gamma)$ berechnet sich mittels Sturms Algorithmus über \mathbf{R} .

1 *Normalisierung:* Für jedes Rechteck $\Gamma \subset \mathbf{C}$ gilt

$$\text{ind}(\partial\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in \text{Int } \Gamma, \\ 0 & \text{falls } 0 \in \mathbf{C} \setminus \Gamma. \end{cases}$$

2 *Multiplikativität:* $\text{ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \text{ind}(\gamma_1) + \text{ind}(\gamma_2)$.

3 *Homotopie-Invarianz:* $\text{ind}(\gamma_0) = \text{ind}(\gamma_1)$ falls $\gamma_0 \sim \gamma_1$ in \mathbf{C}^* .

Die Schwierigkeit liegt in der *Konstruktion* einer solchen Abbildung!

- Überlagerungstheorie, angewendet auf $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ mit Gruppe \mathbb{Z} .
- Fundamentalgruppe, $\text{ind}: \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ via Seifert–van Kampen.
- Homologietheorie, $\text{ind}: H_1(\mathbb{C}^*) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ via Eilenberg–Steenrod.
- Differentialtopologie, Satz von Sard und Abbildungsgrad.

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Sei Ω die Menge stückw. polynomialer Schleifen $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^*$, $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Satz

Es gibt eine Abbildung $\text{ind}: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ mit folgenden Eigenschaften:

0 *Berechnung:* $\text{ind}(\gamma)$ berechnet sich mittels Sturms Algorithmus über \mathbf{R} .

1 *Normalisierung:* Für jedes Rechteck $\Gamma \subset \mathbf{C}$ gilt

$$\text{ind}(\partial\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in \text{Int } \Gamma, \\ 0 & \text{falls } 0 \in \mathbf{C} \setminus \Gamma. \end{cases}$$

2 *Multiplikativität:* $\text{ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \text{ind}(\gamma_1) + \text{ind}(\gamma_2)$.

3 *Homotopie-Invarianz:* $\text{ind}(\gamma_0) = \text{ind}(\gamma_1)$ falls $\gamma_0 \sim \gamma_1$ in \mathbf{C}^* .

Die Schwierigkeit liegt in der *Konstruktion* einer solchen Abbildung!

- Überlagerungstheorie, angewendet auf $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ mit Gruppe \mathbb{Z} .
- Fundamentalgruppe, $\text{ind}: \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ via Seifert–van Kampen.
- Homologietheorie, $\text{ind}: H_1(\mathbb{C}^*) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ via Eilenberg–Steenrod.
- Differentialtopologie, Satz von Sard und Abbildungsgrad.
- Komplexe Analysis, analytischer Index $\text{ind}(\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z}$.

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Sei Ω die Menge stückw. polynomialer Schleifen $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^*$, $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Satz

Es gibt eine Abbildung $\text{ind}: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ mit folgenden Eigenschaften:

0 *Berechnung:* $\text{ind}(\gamma)$ berechnet sich mittels Sturms Algorithmus über \mathbf{R} .

1 *Normalisierung:* Für jedes Rechteck $\Gamma \subset \mathbf{C}$ gilt

$$\text{ind}(\partial\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in \text{Int } \Gamma, \\ 0 & \text{falls } 0 \in \mathbf{C} \setminus \Gamma. \end{cases}$$

2 *Multiplikativität:* $\text{ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \text{ind}(\gamma_1) + \text{ind}(\gamma_2)$.

3 *Homotopie-Invarianz:* $\text{ind}(\gamma_0) = \text{ind}(\gamma_1)$ falls $\gamma_0 \sim \gamma_1$ in \mathbf{C}^* .

Die Schwierigkeit liegt in der *Konstruktion* einer solchen Abbildung!

- Überlagerungstheorie, angewendet auf $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ mit Gruppe \mathbb{Z} .
- Fundamentalgruppe, $\text{ind}: \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ via Seifert–van Kampen.
- Homologietheorie, $\text{ind}: H_1(\mathbb{C}^*) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ via Eilenberg–Steenrod.
- Differentialtopologie, Satz von Sard und Abbildungsgrad.
- Komplexe Analysis, analytischer Index $\text{ind}(\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z}$.
- Reelle Algebra, algebraischer Index $\text{ind}: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ via sturmsche Ketten.

Komplexe Nullstellen komplexer Polynome

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Komplexe Nullstellen komplexer Polynome

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Wir können einen Index mit den nötigen Eigenschaften konstruieren:

$$\text{ind}: \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Komplexe Nullstellen komplexer Polynome

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Wir können einen Index mit den nötigen Eigenschaften konstruieren:

$$\text{ind}: \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Dieser liefert einen effektiven Beweis des Hauptsatzes der Algebra:

Komplexe Nullstellen komplexer Polynome

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Wir können einen Index mit den nötigen Eigenschaften konstruieren:

$$\text{ind}: \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Dieser liefert einen effektiven Beweis des Hauptsatzes der Algebra:

- $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F)$ zählt die Nullstellen von F in Γ . (Sturmscher Satz / \mathbf{C})

Komplexe Nullstellen komplexer Polynome

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Wir können einen Index mit den nötigen Eigenschaften konstruieren:

$$\text{ind}: \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Dieser liefert einen effektiven Beweis des Hauptsatzes der Algebra:

- $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F)$ zählt die Nullstellen von F in Γ . (Sturmscher Satz / \mathbf{C})
- $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = \deg(F)$ für Γ ausreichend groß. (Cauchy-Schranke)

Komplexe Nullstellen komplexer Polynome

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Wir können einen Index mit den nötigen Eigenschaften konstruieren:

$$\text{ind}: \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Dieser liefert einen effektiven Beweis des Hauptsatzes der Algebra:

- $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F)$ zählt die Nullstellen von F in Γ . (Sturmscher Satz / \mathbf{C})
- $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = \deg(F)$ für Γ ausreichend groß. (Cauchy-Schranke)

Der Index erlaubt somit alle Wurzeln von F in \mathbf{C} zu lokalisieren:

Komplexe Nullstellen komplexer Polynome

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

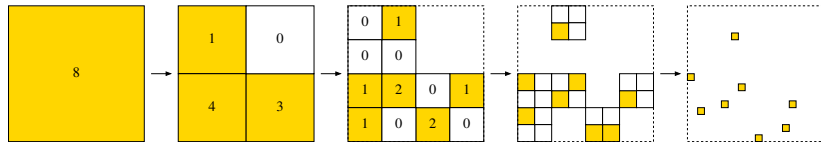
Wir können einen Index mit den nötigen Eigenschaften konstruieren:

$$\text{ind}: \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Dieser liefert einen effektiven Beweis des Hauptsatzes der Algebra:

- $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F)$ zählt die Nullstellen von F in Γ . (Sturmscher Satz / \mathbf{C})
- $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = \deg(F)$ für Γ ausreichend groß. (Cauchy-Schranke)

Der Index erlaubt somit alle Wurzeln von F in \mathbf{C} zu lokalisieren:



Komplexe Nullstellen komplexer Polynome

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

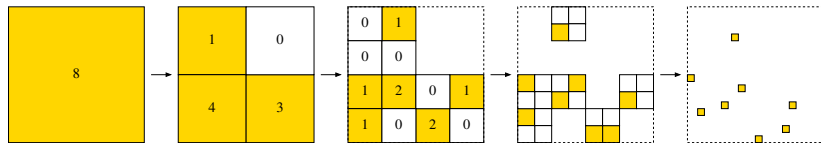
Wir können einen Index mit den nötigen Eigenschaften konstruieren:

$$\text{ind}: \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Dieser liefert einen effektiven Beweis des Hauptsatzes der Algebra:

- $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F)$ zählt die Nullstellen von F in Γ . (Sturmscher Satz / \mathbf{C})
- $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = \deg(F)$ für Γ ausreichend groß. (Cauchy-Schranke)

Der Index erlaubt somit alle Wurzeln von F in \mathbf{C} zu lokalisieren:



(Nach ausreichender Näherung geht man zum Newton-Verfahren über.)

Reell-algebraischer Index

Reell-algebraischer Index

- Sturm 1829/35: Mémoire sur la résolution des équations numériques

Reell-algebraischer Index

- Sturm 1829/35: Mémoire sur la résolution des équations numériques
- Cauchy 1831/37: Calcul des résidus et calcul des indices

Reell-algebraischer Index

- Sturm 1829/35: Mémoire sur la résolution des équations numériques
- Cauchy 1831/37: Calcul des résidus et calcul des indices
- Sturm–Liouville 1836: Démonstration d'un théorème de M. Cauchy

Reell-algebraischer Index

- Sturm 1829/35: Mémoire sur la résolution des équations numériques
- Cauchy 1831/37: Calcul des résidus et calcul des indices
- Sturm–Liouville 1836: Démonstration d'un théorème de M. Cauchy

Rezeption in Lehrbüchern

Reell-algebraischer Index

- Sturm 1829/35: Mémoire sur la résolution des équations numériques
- Cauchy 1831/37: Calcul des résidus et calcul des indices
- Sturm–Liouville 1836: Démonstration d'un théorème de M. Cauchy

Rezeption in Lehrbüchern

- Serret 1877: Cours d'algèbre supérieure (Sturm reell und komplex)

Reell-algebraischer Index

- Sturm 1829/35: Mémoire sur la résolution des équations numériques
- Cauchy 1831/37: Calcul des résidus et calcul des indices
- Sturm–Liouville 1836: Démonstration d'un théorème de M. Cauchy

Rezeption in Lehrbüchern

- Serret 1877: Cours d'algèbre supérieure (Sturm reell und komplex)
- Weber 1898: Lehrbuch der Algebra (Sturm reell, kaum komplex)

Reell-algebraischer Index

- Sturm 1829/35: Mémoire sur la résolution des équations numériques
- Cauchy 1831/37: Calcul des résidus et calcul des indices
- Sturm–Liouville 1836: Démonstration d'un théorème de M. Cauchy

Rezeption in Lehrbüchern

- Serret 1877: Cours d'algèbre supérieure (Sturm reell und komplex)
- Weber 1898: Lehrbuch der Algebra (Sturm reell, kaum komplex)
- Runge 1898: Encyclopädie (Sturm reell und komplex)

Reell-algebraischer Index

- Sturm 1829/35: Mémoire sur la résolution des équations numériques
- Cauchy 1831/37: Calcul des résidus et calcul des indices
- Sturm–Liouville 1836: Démonstration d'un théorème de M. Cauchy

Rezeption in Lehrbüchern

- Serret 1877: Cours d'algèbre supérieure (Sturm reell und komplex)
- Weber 1898: Lehrbuch der Algebra (Sturm reell, kaum komplex)
- Runge 1898: Encyclopädie (Sturm reell und komplex)

Index und Abbildungsgrad

Reell-algebraischer Index

- Sturm 1829/35: Mémoire sur la résolution des équations numériques
- Cauchy 1831/37: Calcul des résidus et calcul des indices
- Sturm–Liouville 1836: Démonstration d'un théorème de M. Cauchy

Rezeption in Lehrbüchern

- Serret 1877: Cours d'algèbre supérieure (Sturm reell und komplex)
- Weber 1898: Lehrbuch der Algebra (Sturm reell, kaum komplex)
- Runge 1898: Encyclopädie (Sturm reell und komplex)

Index und Abbildungsgrad

- Kronecker 1869: Systeme von Functionen mehrer Variabeln

Reell-algebraischer Index

- Sturm 1829/35: Mémoire sur la résolution des équations numériques
- Cauchy 1831/37: Calcul des résidus et calcul des indices
- Sturm–Liouville 1836: Démonstration d'un théorème de M. Cauchy

Rezeption in Lehrbüchern

- Serret 1877: Cours d'algèbre supérieure (Sturm reell und komplex)
- Weber 1898: Lehrbuch der Algebra (Sturm reell, kaum komplex)
- Runge 1898: Encyclopädie (Sturm reell und komplex)

Index und Abbildungsgrad

- Kronecker 1869: Systeme von Functionen mehrer Variabeln
- Brouwer 1912: Abbildungen von Mannigfaltigkeiten

Reell-algebraischer Index

- Sturm 1829/35: Mémoire sur la résolution des équations numériques
- Cauchy 1831/37: Calcul des résidus et calcul des indices
- Sturm–Liouville 1836: Démonstration d'un théorème de M. Cauchy

Rezeption in Lehrbüchern

- Serret 1877: Cours d'algèbre supérieure (Sturm reell und komplex)
- Weber 1898: Lehrbuch der Algebra (Sturm reell, kaum komplex)
- Runge 1898: Encyclopädie (Sturm reell und komplex)

Index und Abbildungsgrad

- Kronecker 1869: Systeme von Functionen mehrer Variabeln
- Brouwer 1912: Abbildungen von Mannigfaltigkeiten
- Weyl 1924: Fundamentalsatz der Algebra

Reell-algebraischer Index

- Sturm 1829/35: Mémoire sur la résolution des équations numériques
- Cauchy 1831/37: Calcul des résidus et calcul des indices
- Sturm–Liouville 1836: Démonstration d'un théorème de M. Cauchy

Rezeption in Lehrbüchern

- Serret 1877: Cours d'algèbre supérieure (Sturm reell und komplex)
- Weber 1898: Lehrbuch der Algebra (Sturm reell, kaum komplex)
- Runge 1898: Encyclopädie (Sturm reell und komplex)

Index und Abbildungsgrad

- Kronecker 1869: Systeme von Functionen mehrer Variabeln
- Brouwer 1912: Abbildungen von Mannigfaltigkeiten
- Weyl 1924: Fundamentalsatz der Algebra

Algorithmen und Implementationen

Reell-algebraischer Index

- Sturm 1829/35: Mémoire sur la résolution des équations numériques
- Cauchy 1831/37: Calcul des résidus et calcul des indices
- Sturm–Liouville 1836: Démonstration d'un théorème de M. Cauchy

Rezeption in Lehrbüchern

- Serret 1877: Cours d'algèbre supérieure (Sturm reell und komplex)
- Weber 1898: Lehrbuch der Algebra (Sturm reell, kaum komplex)
- Runge 1898: Encyclopädie (Sturm reell und komplex)

Index und Abbildungsgrad

- Kronecker 1869: Systeme von Functionen mehrer Variabeln
- Brouwer 1912: Abbildungen von Mannigfaltigkeiten
- Weyl 1924: Fundamentalsatz der Algebra

Algorithmen und Implementationen

- Lehmer 1969: Search procedures for polynomial equation solving

Reell-algebraischer Index

- Sturm 1829/35: Mémoire sur la résolution des équations numériques
- Cauchy 1831/37: Calcul des résidus et calcul des indices
- Sturm–Liouville 1836: Démonstration d'un théorème de M. Cauchy

Rezeption in Lehrbüchern

- Serret 1877: Cours d'algèbre supérieure (Sturm reell und komplex)
- Weber 1898: Lehrbuch der Algebra (Sturm reell, kaum komplex)
- Runge 1898: Encyclopädie (Sturm reell und komplex)

Index und Abbildungsgrad

- Kronecker 1869: Systeme von Functionen mehrer Variabeln
- Brouwer 1912: Abbildungen von Mannigfaltigkeiten
- Weyl 1924: Fundamentalsatz der Algebra

Algorithmen und Implementationen

- Lehmer 1969: Search procedures for polynomial equation solving
- Wilf 1978: Bisection algorithm for computing zeros of polynomials

Reell-algebraischer Index

- Sturm 1829/35: Mémoire sur la résolution des équations numériques
- Cauchy 1831/37: Calcul des résidus et calcul des indices
- Sturm–Liouville 1836: Démonstration d'un théorème de M. Cauchy

Rezeption in Lehrbüchern

- Serret 1877: Cours d'algèbre supérieure (Sturm reell und komplex)
- Weber 1898: Lehrbuch der Algebra (Sturm reell, kaum komplex)
- Runge 1898: Encyclopädie (Sturm reell und komplex)

Index und Abbildungsgrad

- Kronecker 1869: Systeme von Functionen mehrer Variabeln
- Brouwer 1912: Abbildungen von Mannigfaltigkeiten
- Weyl 1924: Fundamentalsatz der Algebra

Algorithmen und Implementationen

- Lehmer 1969: Search procedures for polynomial equation solving
- Wilf 1978: Bisection algorithm for computing zeros of polynomials
- Schönhage 1982: The fundamental theorem of algebra in terms of computational complexity

- 1 Der Hauptsatz der Algebra
- 2 Sturm 1829/1835: reelle Nullstellen reeller Polynome
 - Cauchy-Index für reelle Polynome
 - Cauchys Inversionsformel
 - Sturmsche Ketten
- 3 Sturm 1836: komplexe Nullstellen komplexer Polynome
- 4 Zusammenfassung und Ausblick

Vorzeichenwechsel

Im Folgenden sei $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper.

Vorzeichenwechsel

Im Folgenden sei $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper.

Wir zählen Vorzeichenwechsel $V(s_0, s_1)$ zwischen $s_0, s_1 \in \mathbf{R}$:

Vorzeichenwechsel

Im Folgenden sei $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper.

Wir zählen Vorzeichenwechsel $V(s_0, s_1)$ zwischen $s_0, s_1 \in \mathbf{R}$:

$$V(+, -) = V(-, +) = 1,$$

Vorzeichenwechsel

Im Folgenden sei $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper.

Wir zählen Vorzeichenwechsel $V(s_0, s_1)$ zwischen $s_0, s_1 \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}V(+, -) &= V(-, +) = 1, \\V(+, +) &= V(-, -) = V(0, 0) = 0,\end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel

Im Folgenden sei $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper.

Wir zählen Vorzeichenwechsel $V(s_0, s_1)$ zwischen $s_0, s_1 \in \mathbf{R}$:

$$V(+, -) = V(-, +) = 1,$$

$$V(+, +) = V(-, -) = V(0, 0) = 0,$$

$$V(+, 0) = V(0, +) = V(-, 0) = V(0, -) = \frac{1}{2}.$$

Vorzeichenwechsel

Im Folgenden sei $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper.

Wir zählen Vorzeichenwechsel $V(s_0, s_1)$ zwischen $s_0, s_1 \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}V(+, -) &= V(-, +) = 1, \\V(+, +) &= V(-, -) = V(0, 0) = 0, \\V(+, 0) &= V(0, +) = V(-, 0) = V(0, -) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Definition

Die Anzahl der Vorzeichenwechsel einer Folge (s_0, \dots, s_n) in \mathbf{R} ist

$$V(s_0, \dots, s_n) := \sum_{k=1}^n V(s_{k-1}, s_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} |\text{sign}(s_{k-1}) - \text{sign}(s_k)|.$$

Vorzeichenwechsel

Im Folgenden sei $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper.

Wir zählen Vorzeichenwechsel $V(s_0, s_1)$ zwischen $s_0, s_1 \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}V(+, -) &= V(-, +) = 1, \\V(+, +) &= V(-, -) = V(0, 0) = 0, \\V(+, 0) &= V(0, +) = V(-, 0) = V(0, -) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Definition

Die Anzahl der Vorzeichenwechsel einer Folge (s_0, \dots, s_n) in \mathbf{R} ist

$$V(s_0, \dots, s_n) := \sum_{k=1}^n V(s_{k-1}, s_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} |\text{sign}(s_{k-1}) - \text{sign}(s_k)|.$$

Für eine Folge von Polynomen (S_0, \dots, S_n) in $\mathbf{R}[X]$ setzen wir

$$V_a(S_0, \dots, S_n) := V(S_0(a), \dots, S_n(a)).$$

Vorzeichenwechsel

Im Folgenden sei $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper.

Wir zählen Vorzeichenwechsel $V(s_0, s_1)$ zwischen $s_0, s_1 \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}V(+, -) &= V(-, +) = 1, \\V(+, +) &= V(-, -) = V(0, 0) = 0, \\V(+, 0) &= V(0, +) = V(-, 0) = V(0, -) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Definition

Die Anzahl der Vorzeichenwechsel einer Folge (s_0, \dots, s_n) in \mathbf{R} ist

$$V(s_0, \dots, s_n) := \sum_{k=1}^n V(s_{k-1}, s_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} |\text{sign}(s_{k-1}) - \text{sign}(s_k)|.$$

Für eine Folge von Polynomen (S_0, \dots, S_n) in $\mathbf{R}[X]$ setzen wir

$$V_a(S_0, \dots, S_n) := V(S_0(a), \dots, S_n(a)).$$

Für die Differenz in $a, b \in \mathbf{R}$ schreiben wir $V_a^b := V_a - V_b$.

Vorzeichenwechsel

Im Folgenden sei $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper.

Wir zählen Vorzeichenwechsel $V(s_0, s_1)$ zwischen $s_0, s_1 \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}V(+, -) &= V(-, +) = 1, \\V(+, +) &= V(-, -) = V(0, 0) = 0, \\V(+, 0) &= V(0, +) = V(-, 0) = V(0, -) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Definition


Die Anzahl der Vorzeichenwechsel einer Folge (s_0, \dots, s_n) in \mathbf{R} ist

$$V(s_0, \dots, s_n) := \sum_{k=1}^n V(s_{k-1}, s_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} |\text{sign}(s_{k-1}) - \text{sign}(s_k)|.$$

Für eine Folge von Polynomen (S_0, \dots, S_n) in $\mathbf{R}[X]$ setzen wir

$$V_a(S_0, \dots, S_n) := V(S_0(a), \dots, S_n(a)).$$

Für die Differenz in $a, b \in \mathbf{R}$ schreiben wir $V_a^b := V_a - V_b$.

 Traditionelle Definition (Descartes, Fourier): man bildet die reduzierte Folge \hat{s} aus s durch Weglassen aller Nullen und definiert $\hat{V}(s) := V(\hat{s})$.

Die Regeln von Descartes und Fourier

Wie bestimmt man die Anzahl der Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]$ in $[a, b]$?

Die Regeln von Descartes und Fourier

Wie bestimmt man die Anzahl der Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]$ in $[a, b]$?

Viele Mathematiker haben diese Frage untersucht. Zwei berühmte Beispiele:

Die Regeln von Descartes und Fourier

Wie bestimmt man die Anzahl der Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]$ in $[a, b]$?

Viele Mathematiker haben diese Frage untersucht. Zwei berühmte Beispiele:

- ❶ Die Regel von Descartes beschränkt die Anzahl der positiven Nullstellen:

Die Regeln von Descartes und Fourier

Wie bestimmt man die Anzahl der Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]$ in $[a, b]$?

Viele Mathematiker haben diese Frage untersucht. Zwei berühmte Beispiele:

❶ Die Regel von Descartes beschränkt die Anzahl der positiven Nullstellen:

Satz (Regel von Descartes)

Für jedes Polynom $P = c_0 + c_1X + \dots + c_nX^n$ in $\mathbf{R}[X]$ gilt

$$\#_{\text{mult}} \{x \in \mathbf{R}_{>0} \mid P(x) = 0\} \leq \hat{V}(c_0, c_1, \dots, c_n).$$

Die Regeln von Descartes und Fourier

Wie bestimmt man die Anzahl der Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]$ in $[a, b]$?

Viele Mathematiker haben diese Frage untersucht. Zwei berühmte Beispiele:

❶ Die Regel von Descartes beschränkt die Anzahl der positiven Nullstellen:

Satz (Regel von Descartes)

Für jedes Polynom $P = c_0 + c_1X + \dots + c_nX^n$ in $\mathbf{R}[X]$ gilt

$$\#_{\text{mult}} \{x \in \mathbf{R}_{>0} \mid P(x) = 0\} \leq \hat{V}(c_0, c_1, \dots, c_n).$$

❷ Fourier hat diese Abschätzung auf beliebige Intervalle verallgemeinert:

Die Regeln von Descartes und Fourier

Wie bestimmt man die Anzahl der Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]$ in $[a, b]$?

Viele Mathematiker haben diese Frage untersucht. Zwei berühmte Beispiele:

❶ Die Regel von Descartes beschränkt die Anzahl der positiven Nullstellen:

Satz (Regel von Descartes)

Für jedes Polynom $P = c_0 + c_1X + \dots + c_nX^n$ in $\mathbf{R}[X]$ gilt

$$\#_{\text{mult}} \{x \in \mathbf{R}_{>0} \mid P(x) = 0\} \leq \hat{V}(c_0, c_1, \dots, c_n).$$

❷ Fourier hat diese Abschätzung auf beliebige Intervalle verallgemeinert:

Satz (Regel von Fourier)

Für jedes Polynom $P = c_0 + c_1X + \dots + c_nX^n$ in $\mathbf{R}[X]$ gilt

$$\#_{\text{mult}} \{x \in]a, b[\mid P(x) = 0\} \leq \hat{V}_a^b(P, P', \dots, P^{(n)}).$$

Die Regeln von Descartes und Fourier

Wie bestimmt man die Anzahl der Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]$ in $[a, b]$?

Viele Mathematiker haben diese Frage untersucht. Zwei berühmte Beispiele:

❶ Die Regel von Descartes beschränkt die Anzahl der positiven Nullstellen:

Satz (Regel von Descartes)

Für jedes Polynom $P = c_0 + c_1X + \dots + c_nX^n$ in $\mathbf{R}[X]$ gilt

$$\#_{\text{mult}} \{x \in \mathbf{R}_{>0} \mid P(x) = 0\} \leq \hat{V}(c_0, c_1, \dots, c_n).$$

❷ Fourier hat diese Abschätzung auf beliebige Intervalle verallgemeinert:

Satz (Regel von Fourier)

Für jedes Polynom $P = c_0 + c_1X + \dots + c_nX^n$ in $\mathbf{R}[X]$ gilt

$$\#_{\text{mult}} \{x \in]a, b[\mid P(x) = 0\} \leq \hat{V}_a^b(P, P', \dots, P^{(n)}).$$

Wenn P genau n Nullstellen in \mathbf{R} hat, dann gilt Gleichheit für alle $]a, b[\subset \mathbf{R}$.

Die Regeln von Descartes und Fourier

Wie bestimmt man die Anzahl der Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]$ in $[a, b]$?

Viele Mathematiker haben diese Frage untersucht. Zwei berühmte Beispiele:

❶ Die Regel von Descartes beschränkt die Anzahl der positiven Nullstellen:

Satz (Regel von Descartes)

Für jedes Polynom $P = c_0 + c_1X + \dots + c_nX^n$ in $\mathbf{R}[X]$ gilt

$$\#_{\text{mult}} \{x \in \mathbf{R}_{>0} \mid P(x) = 0\} \leq \hat{V}(c_0, c_1, \dots, c_n).$$

❷ Fourier hat diese Abschätzung auf beliebige Intervalle verallgemeinert:

Satz (Regel von Fourier)

Für jedes Polynom $P = c_0 + c_1X + \dots + c_nX^n$ in $\mathbf{R}[X]$ gilt

$$\#_{\text{mult}} \{x \in]a, b[\mid P(x) = 0\} \leq \hat{V}_a^b(P, P', \dots, P^{(n)}).$$

Wenn P genau n Nullstellen in \mathbf{R} hat, dann gilt Gleichheit für alle $]a, b[\subset \mathbf{R}$.

Vorteil: Die Abschätzung ist leicht zu berechnen.

Die Regeln von Descartes und Fourier

Wie bestimmt man die Anzahl der Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]$ in $[a, b]$?

Viele Mathematiker haben diese Frage untersucht. Zwei berühmte Beispiele:

❶ Die Regel von Descartes beschränkt die Anzahl der positiven Nullstellen:

Satz (Regel von Descartes)

Für jedes Polynom $P = c_0 + c_1X + \dots + c_nX^n$ in $\mathbf{R}[X]$ gilt

$$\#_{\text{mult}} \{x \in \mathbf{R}_{>0} \mid P(x) = 0\} \leq \hat{V}(c_0, c_1, \dots, c_n).$$

❷ Fourier hat diese Abschätzung auf beliebige Intervalle verallgemeinert:

Satz (Regel von Fourier)

Für jedes Polynom $P = c_0 + c_1X + \dots + c_nX^n$ in $\mathbf{R}[X]$ gilt

$$\#_{\text{mult}} \{x \in]a, b[\mid P(x) = 0\} \leq \hat{V}_a^b(P, P', \dots, P^{(n)}).$$

Wenn P genau n Nullstellen in \mathbf{R} hat, dann gilt Gleichheit für alle $]a, b[\subset \mathbf{R}$.

Vorteil: Die Abschätzung ist leicht zu berechnen.

Nachteil: Die so erhaltenen Schranken sind oft ungenau.

Die Regeln von Descartes und Fourier

Wie bestimmt man die Anzahl der Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]$ in $[a, b]$?

Viele Mathematiker haben diese Frage untersucht. Zwei berühmte Beispiele:

❶ Die Regel von Descartes beschränkt die Anzahl der positiven Nullstellen:

Satz (Regel von Descartes)

Für jedes Polynom $P = c_0 + c_1X + \dots + c_nX^n$ in $\mathbf{R}[X]$ gilt

$$\#_{\text{mult}} \{x \in \mathbf{R}_{>0} \mid P(x) = 0\} \leq \hat{V}(c_0, c_1, \dots, c_n).$$

❷ Fourier hat diese Abschätzung auf beliebige Intervalle verallgemeinert:

Satz (Regel von Fourier)

Für jedes Polynom $P = c_0 + c_1X + \dots + c_nX^n$ in $\mathbf{R}[X]$ gilt

$$\#_{\text{mult}} \{x \in]a, b[\mid P(x) = 0\} \leq \hat{V}_a^b(P, P', \dots, P^{(n)}).$$

Wenn P genau n Nullstellen in \mathbf{R} hat, dann gilt Gleichheit für alle $]a, b[\subset \mathbf{R}$.

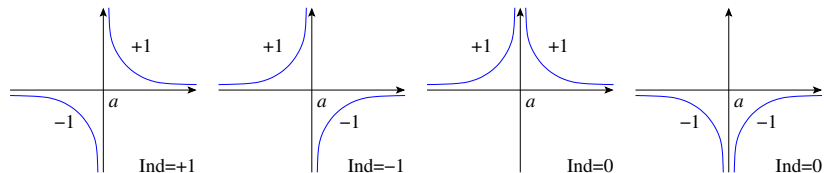
Vorteil: Die Abschätzung ist leicht zu berechnen.

Nachteil: Die so erhaltenen Schranken sind oft ungenau.

Dies war der Kenntnisstand vor Sturms bahnbrechender Arbeit 1829.

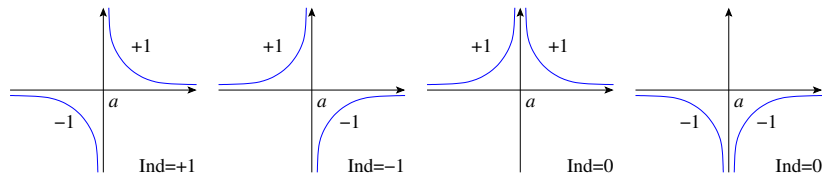
Cauchy-Index: Zählen reeller Polstellen

Es erweist sich als vorteilhaft, rationale Funktionen $f \in \mathbf{R}(X)^*$ zu betrachten.



Cauchy-Index: Zählen reeller Polstellen

Es erweist sich als vorteilhaft, rationale Funktionen $f \in \mathbf{R}(X)^*$ zu betrachten.



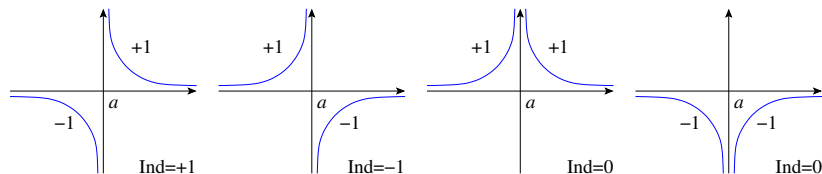
Definition (Cauchy-Index)

Wir definieren den Cauchy-Index von $f \in \mathbf{R}(X)^*$ in $a \in \mathbf{R}$ durch

$$\text{Ind}_a(f) := \frac{1}{2} [\text{Ind}_a^+(f) - \text{Ind}_a^-(f)] \quad \text{wobei} \quad \text{Ind}_a^\varepsilon(f) := \begin{cases} +1 & \text{falls } \lim_a^\varepsilon f = +\infty, \\ -1 & \text{falls } \lim_a^\varepsilon f = -\infty, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Cauchy-Index: Zählen reeller Polstellen

Es erweist sich als vorteilhaft, rationale Funktionen $f \in \mathbf{R}(X)^*$ zu betrachten.



Definition (Cauchy-Index)

Wir definieren den Cauchy-Index von $f \in \mathbf{R}(X)^*$ in $a \in \mathbf{R}$ durch

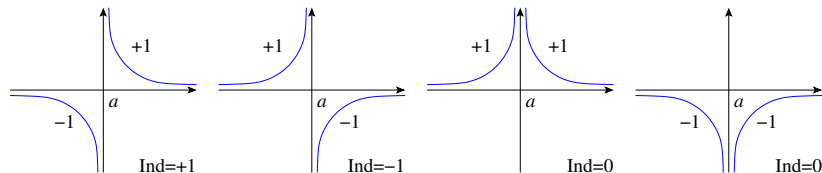
$$\text{Ind}_a(f) := \frac{1}{2} [\text{Ind}_a^+(f) - \text{Ind}_a^-(f)] \quad \text{wobei} \quad \text{Ind}_a^\varepsilon(f) := \begin{cases} +1 & \text{falls } \lim_a^\varepsilon f = +\infty, \\ -1 & \text{falls } \lim_a^\varepsilon f = -\infty, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auf einem Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ setzen wir

$$\text{Ind}_a^b(f) := \frac{1}{2} \text{Ind}_a^+(f) + \sum_{x \in]a, b[} \text{Ind}_x(f) - \frac{1}{2} \text{Ind}_b^-(f).$$

Cauchy-Index: Zählen reeller Polstellen

Es erweist sich als vorteilhaft, rationale Funktionen $f \in \mathbf{R}(X)^*$ zu betrachten.



Definition (Cauchy-Index)

Wir definieren den Cauchy-Index von $f \in \mathbf{R}(X)^*$ in $a \in \mathbf{R}$ durch

$$\text{Ind}_a(f) := \frac{1}{2} [\text{Ind}_a^+(f) - \text{Ind}_a^-(f)] \quad \text{wobei} \quad \text{Ind}_a^\varepsilon(f) := \begin{cases} +1 & \text{falls } \lim_{x \rightarrow a^\varepsilon} f = +\infty, \\ -1 & \text{falls } \lim_{x \rightarrow a^\varepsilon} f = -\infty, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auf einem Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ setzen wir

$$\text{Ind}_a^b(f) := \frac{1}{2} \text{Ind}_a^+(f) + \sum_{x \in]a, b[} \text{Ind}_x(f) - \frac{1}{2} \text{Ind}_b^-(f).$$

Eigenschaften: $\text{Ind}_a^b(f) + \text{Ind}_b^c(f) = \text{Ind}_a^c(f)$ und $\text{Ind}_a^b(f \circ \tau) = \text{Ind}_{\tau(a)}^{\tau(b)}(f)$.

Proposition (logarithmische Ableitung)

Für $f \in \mathbf{R}(X)^*$ gilt $\text{Ind}_a(f'/f) = \begin{cases} +1 & \text{falls } a \text{ eine Nullstelle von } f \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } a \text{ eine Polstelle von } f \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Proposition (logarithmische Ableitung)

$$\text{Für } f \in \mathbf{R}(X)^* \text{ gilt } \text{Ind}_a(f'/f) = \begin{cases} +1 & \text{falls } a \text{ eine Nullstelle von } f \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } a \text{ eine Polstelle von } f \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Wir faktorisieren $f = (X - a)^m g$ so dass $g(a) \in \mathbf{R}^*$.

Proposition (logarithmische Ableitung)

$$\text{Für } f \in \mathbf{R}(X)^* \text{ gilt } \text{Ind}_a(f'/f) = \begin{cases} +1 & \text{falls } a \text{ eine Nullstelle von } f \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } a \text{ eine Polstelle von } f \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Wir faktorisieren $f = (X - a)^m g$ so dass $g(a) \in \mathbf{R}^*$.

Die Leibniz-Regel ergibt $\frac{f'}{f} = \frac{m}{X-a} + \frac{g'}{g}$.

Proposition (logarithmische Ableitung)

Für $f \in \mathbf{R}(X)^*$ gilt $\text{Ind}_a(f'/f) = \begin{cases} +1 & \text{falls } a \text{ eine Nullstelle von } f \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } a \text{ eine Polstelle von } f \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beweis. Wir faktorisieren $f = (X - a)^m g$ so dass $g(a) \in \mathbf{R}^*$.

Die Leibniz-Regel ergibt $\frac{f'}{f} = \frac{m}{X-a} + \frac{g'}{g}$. Also $\text{Ind}_a\left(\frac{f'}{f}\right) = \text{sign}(m)$. □

Proposition (logarithmische Ableitung)

Für $f \in \mathbf{R}(X)^*$ gilt $\text{Ind}_a(f'/f) = \begin{cases} +1 & \text{falls } a \text{ eine Nullstelle von } f \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } a \text{ eine Polstelle von } f \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beweis. Wir faktorisieren $f = (X - a)^m g$ so dass $g(a) \in \mathbf{R}^*$.

Die Leibniz-Regel ergibt $\frac{f'}{f} = \frac{m}{X-a} + \frac{g'}{g}$. Also $\text{Ind}_a\left(\frac{f'}{f}\right) = \text{sign}(m)$. □

Korollar (reelle Nullstellen reeller Polynome)

Der Index $\text{Ind}_a^b(P'/P)$ zählt die Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]^*$ in $[a, b]$:

$$\#\{x \in [a, b] \mid P(x) = 0\} = \text{Ind}_a^b\left(\frac{P'}{P}\right).$$

Proposition (logarithmische Ableitung)

Für $f \in \mathbf{R}(X)^*$ gilt $\text{Ind}_a(f'/f) = \begin{cases} +1 & \text{falls } a \text{ eine Nullstelle von } f \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } a \text{ eine Polstelle von } f \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beweis. Wir faktorisieren $f = (X - a)^m g$ so dass $g(a) \in \mathbf{R}^*$.

Die Leibniz-Regel ergibt $\frac{f'}{f} = \frac{m}{X-a} + \frac{g'}{g}$. Also $\text{Ind}_a\left(\frac{f'}{f}\right) = \text{sign}(m)$. □

Korollar (reelle Nullstellen reeller Polynome)

Der Index $\text{Ind}_a^b(P'/P)$ zählt die Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]^*$ in $[a, b]$:

$$\#\{x \in [a, b] \mid P(x) = 0\} = \text{Ind}_a^b\left(\frac{P'}{P}\right).$$

Nullstellen auf dem Rand $\{a, b\}$ zählen nur zur Hälfte.

Proposition (logarithmische Ableitung)

Für $f \in \mathbf{R}(X)^*$ gilt $\text{Ind}_a(f'/f) = \begin{cases} +1 & \text{falls } a \text{ eine Nullstelle von } f \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } a \text{ eine Polstelle von } f \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beweis. Wir faktorisieren $f = (X - a)^m g$ so dass $g(a) \in \mathbf{R}^*$.

Die Leibniz-Regel ergibt $\frac{f'}{f} = \frac{m}{X-a} + \frac{g'}{g}$. Also $\text{Ind}_a\left(\frac{f'}{f}\right) = \text{sign}(m)$. □

Korollar (reelle Nullstellen reeller Polynome)

Der Index $\text{Ind}_a^b(P'/P)$ zählt die Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]^*$ in $[a, b]$:

$$\#\{x \in [a, b] \mid P(x) = 0\} = \text{Ind}_a^b\left(\frac{P'}{P}\right).$$

Nullstellen auf dem Rand $\{a, b\}$ zählen nur zur Hälfte.

Problem: Kann man den Index berechnen ohne die Polstellen zu kennen?

Proposition (logarithmische Ableitung)

Für $f \in \mathbf{R}(X)^*$ gilt $\text{Ind}_a(f'/f) = \begin{cases} +1 & \text{falls } a \text{ eine Nullstelle von } f \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } a \text{ eine Polstelle von } f \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beweis. Wir faktorisieren $f = (X - a)^m g$ so dass $g(a) \in \mathbf{R}^*$.

Die Leibniz-Regel ergibt $\frac{f'}{f} = \frac{m}{X-a} + \frac{g'}{g}$. Also $\text{Ind}_a\left(\frac{f'}{f}\right) = \text{sign}(m)$. \square

Korollar (reelle Nullstellen reeller Polynome)

Der Index $\text{Ind}_a^b(P'/P)$ zählt die Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]^*$ in $[a, b]$:

$$\#\{x \in [a, b] \mid P(x) = 0\} = \text{Ind}_a^b\left(\frac{P'}{P}\right).$$

Nullstellen auf dem Rand $\{a, b\}$ zählen nur zur Hälfte.

Problem: Kann man den Index berechnen ohne die Polstellen zu kennen?

Beispiel: Der Zwischenwertsatz lautet nun $\text{Ind}_a^b\left(\frac{1}{P}\right) = V_a^b(1, P)$.

Proposition (logarithmische Ableitung)

Für $f \in \mathbf{R}(X)^*$ gilt $\text{Ind}_a(f'/f) = \begin{cases} +1 & \text{falls } a \text{ eine Nullstelle von } f \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } a \text{ eine Polstelle von } f \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beweis. Wir faktorisieren $f = (X - a)^m g$ so dass $g(a) \in \mathbf{R}^*$.

Die Leibniz-Regel ergibt $\frac{f'}{f} = \frac{m}{X-a} + \frac{g'}{g}$. Also $\text{Ind}_a\left(\frac{f'}{f}\right) = \text{sign}(m)$. □

Korollar (reelle Nullstellen reeller Polynome)

Der Index $\text{Ind}_a^b(P'/P)$ zählt die Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]^*$ in $[a, b]$:

$$\#\{x \in [a, b] \mid P(x) = 0\} = \text{Ind}_a^b\left(\frac{P'}{P}\right).$$

Nullstellen auf dem Rand $\{a, b\}$ zählen nur zur Hälfte.

Problem: Kann man den Index berechnen ohne die Polstellen zu kennen?

Beispiel: Der Zwischenwertsatz lautet nun $\text{Ind}_a^b\left(\frac{1}{P}\right) = V_a^b(1, P)$.

Dies verlagert die Zählung vom Intervall $[a, b]$ auf den Rand $\{a, b\}$.

Proposition (logarithmische Ableitung)

Für $f \in \mathbf{R}(X)^*$ gilt $\text{Ind}_a(f'/f) = \begin{cases} +1 & \text{falls } a \text{ eine Nullstelle von } f \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } a \text{ eine Polstelle von } f \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beweis. Wir faktorisieren $f = (X - a)^m g$ so dass $g(a) \in \mathbf{R}^*$.

Die Leibniz-Regel ergibt $\frac{f'}{f} = \frac{m}{X-a} + \frac{g'}{g}$. Also $\text{Ind}_a\left(\frac{f'}{f}\right) = \text{sign}(m)$. \square

Korollar (reelle Nullstellen reeller Polynome)

Der Index $\text{Ind}_a^b(P'/P)$ zählt die Nullstellen von $P \in \mathbf{R}[X]^*$ in $[a, b]$:

$$\#\{x \in [a, b] \mid P(x) = 0\} = \text{Ind}_a^b\left(\frac{P'}{P}\right).$$

Nullstellen auf dem Rand $\{a, b\}$ zählen nur zur Hälfte.

Problem: Kann man den Index berechnen ohne die Polstellen zu kennen?

Beispiel: Der Zwischenwertsatz lautet nun $\text{Ind}_a^b\left(\frac{1}{P}\right) = V_a^b(1, P)$.

Dies verlagert die Zählung vom Intervall $[a, b]$ auf den Rand $\{a, b\}$.

Allgemeine Lösung: Sturmsche Kette zur Berechnung von $\text{Ind}_a^b\left(\frac{Q}{P}\right)$.

Inversionsformel (Cauchy 1837)

Wenn $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ keine gemeinsame Nullstelle in a oder b haben, dann

$$\operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{Q}{P}\right) + \operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right) = V_a^b(P, Q).$$

Inversionsformel (Cauchy 1837)

Wenn $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ keine gemeinsame Nullstelle in a oder b haben, dann

$$\operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{Q}{P}\right) + \operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right) = V_a^b(P, Q).$$

Beweis. Wir können $P \neq 0$ und $Q \neq 0$ und $\operatorname{ggT}(P, Q) = 1$ annehmen.

Inversionsformel (Cauchy 1837)

Wenn $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ keine gemeinsame Nullstelle in a oder b haben, dann

$$\operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{Q}{P}\right) + \operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right) = V_a^b(P, Q).$$

Beweis. Wir können $P \neq 0$ und $Q \neq 0$ und $\operatorname{ggT}(P, Q) = 1$ annehmen.

❶ Betrachten wir ein Intervall $[a, b]$ das keine Wurzeln von P und Q enthält:

Inversionsformel (Cauchy 1837)

Wenn $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ keine gemeinsame Nullstelle in a oder b haben, dann

$$\operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{Q}{P}\right) + \operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right) = V_a^b(P, Q).$$

Beweis. Wir können $P \neq 0$ und $Q \neq 0$ und $\operatorname{ggT}(P, Q) = 1$ annehmen.

- ➊ Betrachten wir ein Intervall $[a, b]$ das keine Wurzeln von P und Q enthält:
 - Ohne Pole verschwinden die Indices $\operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{Q}{P}\right)$ und $\operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right)$.

Inversionsformel (Cauchy 1837)

Wenn $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ keine gemeinsame Nullstelle in a oder b haben, dann

$$\operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{Q}{P}\right) + \operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right) = V_a^b(P, Q).$$

Beweis. Wir können $P \neq 0$ und $Q \neq 0$ und $\operatorname{ggT}(P, Q) = 1$ annehmen.

- ➊ Betrachten wir ein Intervall $[a, b]$ das keine Wurzeln von P und Q enthält:
 - Ohne Pole verschwinden die Indices $\operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{Q}{P}\right)$ und $\operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right)$.
 - Gemäß ZWS behalten P und Q ihr Vorzeichen also $V_a^b(P, Q) = 0$.

Inversionsformel (Cauchy 1837)

Wenn $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ keine gemeinsame Nullstelle in a oder b haben, dann

$$\operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{Q}{P}\right) + \operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right) = V_a^b(P, Q).$$

Beweis. Wir können $P \neq 0$ und $Q \neq 0$ und $\operatorname{ggT}(P, Q) = 1$ annehmen.

- ❶ Betrachten wir ein Intervall $[a, b]$ das keine Wurzeln von P und Q enthält:
 - Ohne Pole verschwinden die Indices $\operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{Q}{P}\right)$ und $\operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right)$.
 - Gemäß ZWS behalten P und Q ihr Vorzeichen also $V_a^b(P, Q) = 0$.
- ❷ Die Formel ist additiv bezüglich Unterteilung des Intervalls $[a, b]$.

Inversionsformel (Cauchy 1837)

Wenn $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ keine gemeinsame Nullstelle in a oder b haben, dann

$$\operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{Q}{P}\right) + \operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right) = V_a^b(P, Q).$$

Beweis. Wir können $P \neq 0$ und $Q \neq 0$ und $\operatorname{ggT}(P, Q) = 1$ annehmen.

❶ Betrachten wir ein Intervall $[a, b]$ das keine Wurzeln von P und Q enthält:

- Ohne Pole verschwinden die Indices $\operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{Q}{P}\right)$ und $\operatorname{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right)$.
- Gemäß ZWS behalten P und Q ihr Vorzeichen also $V_a^b(P, Q) = 0$.

❷ Die Formel ist additiv bezüglich Unterteilung des Intervalls $[a, b]$.

Es reicht daher, einen einzigen Pol zu betrachten: $P(a) = 0$ und $Q(a) \neq 0$.

Inversionsformel (Cauchy 1837)

Wenn $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ keine gemeinsame Nullstelle in a oder b haben, dann

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{Q}{P}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right) = V_a^b(P, Q).$$

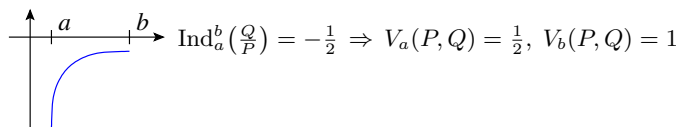
Beweis. Wir können $P \neq 0$ und $Q \neq 0$ und $\text{ggT}(P, Q) = 1$ annehmen.

❶ Betrachten wir ein Intervall $[a, b]$ das keine Wurzeln von P und Q enthält:

- Ohne Pole verschwinden die Indices $\text{Ind}_a^b\left(\frac{Q}{P}\right)$ und $\text{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right)$.
- Gemäß ZWS behalten P und Q ihr Vorzeichen also $V_a^b(P, Q) = 0$.

❷ Die Formel ist additiv bezüglich Unterteilung des Intervalls $[a, b]$.

Es reicht daher, einen einzigen Pol zu betrachten: $P(a) = 0$ und $Q(a) \neq 0$.



Inversionsformel (Cauchy 1837)

Wenn $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ keine gemeinsame Nullstelle in a oder b haben, dann

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{Q}{P}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right) = V_a^b(P, Q).$$

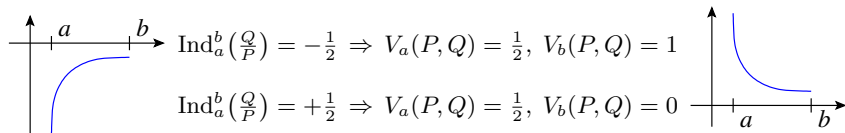
Beweis. Wir können $P \neq 0$ und $Q \neq 0$ und $\text{ggT}(P, Q) = 1$ annehmen.

❶ Betrachten wir ein Intervall $[a, b]$ das keine Wurzeln von P und Q enthält:

- Ohne Pole verschwinden die Indices $\text{Ind}_a^b\left(\frac{Q}{P}\right)$ und $\text{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right)$.
- Gemäß ZWS behalten P und Q ihr Vorzeichen also $V_a^b(P, Q) = 0$.

❷ Die Formel ist additiv bezüglich Unterteilung des Intervalls $[a, b]$.

Es reicht daher, einen einzigen Pol zu betrachten: $P(a) = 0$ und $Q(a) \neq 0$.



Definition (sturmsche Kette)

Eine Folge (S_0, \dots, S_n) in $\mathbf{R}[X]$ heißt *sturmsche Kette* auf $[a, b] \subset \mathbf{R}$ falls gilt:

Definition (sturmsche Kette)

Eine Folge (S_0, \dots, S_n) in $\mathbf{R}[X]$ heißt *sturmsche Kette* auf $[a, b] \subset \mathbf{R}$ falls gilt:
Wenn $S_k(x) = 0$ für $0 < k < n$ und $x \in [a, b]$, dann $S_{k-1}(x)S_{k+1}(x) < 0$.

Definition (sturmsche Kette)

Eine Folge (S_0, \dots, S_n) in $\mathbf{R}[X]$ heißt *sturmsche Kette* auf $[a, b] \subset \mathbf{R}$ falls gilt:
Wenn $S_k(x) = 0$ für $0 < k < n$ und $x \in [a, b]$, dann $S_{k-1}(x)S_{k+1}(x) < 0$.

Korollar (der Inversionsformel)

Für sturmsche Ketten gilt $\text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_{n-1}, S_n)$.

Definition (sturmsche Kette)

Eine Folge (S_0, \dots, S_n) in $\mathbf{R}[X]$ heißt *sturmsche Kette* auf $[a, b] \subset \mathbf{R}$ falls gilt:
Wenn $S_k(x) = 0$ für $0 < k < n$ und $x \in [a, b]$, dann $S_{k-1}(x)S_{k+1}(x) < 0$.

Korollar (der Inversionsformel)

Für sturmsche Ketten gilt $\text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_{n-1}, S_n)$.

Beweis. Die Inversionsformel bildet eine Teleskopsumme!

Definition (sturmsche Kette)

Eine Folge (S_0, \dots, S_n) in $\mathbf{R}[X]$ heißt *sturmsche Kette* auf $[a, b] \subset \mathbf{R}$ falls gilt:
Wenn $S_k(x) = 0$ für $0 < k < n$ und $x \in [a, b]$, dann $S_{k-1}(x)S_{k+1}(x) < 0$.

Korollar (der Inversionsformel)

Für sturmsche Ketten gilt $\text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_{n-1}, S_n)$.

Beweis. Die Inversionsformel bildet eine Teleskopsumme! Für $n = 2$:

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_0}{S_1}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_2}{S_1}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_2}\right) = V_a^b(S_0, S_1, S_2).$$

Definition (sturmsche Kette)

Eine Folge (S_0, \dots, S_n) in $\mathbf{R}[X]$ heißt *sturmsche Kette* auf $[a, b] \subset \mathbf{R}$ falls gilt:
Wenn $S_k(x) = 0$ für $0 < k < n$ und $x \in [a, b]$, dann $S_{k-1}(x)S_{k+1}(x) < 0$.

Korollar (der Inversionsformel)

Für sturmsche Ketten gilt $\text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_{n-1}, S_n)$.

Beweis. Die Inversionsformel bildet eine Teleskopsumme! Für $n = 2$:

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_0}{S_1}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_2}{S_1}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_2}\right) = V_a^b(S_0, S_1, S_2).$$

Proposition (euklidische Kettenbruchentwicklung)

Zu $\frac{R}{S}$ mit $\text{ggT}(R, S) = 1$ liefert der euklidische Algorithmus eine sturmsche Kette $S_0 = S, S_1 = R, \dots, S_n = 1, S_{n+1} = 0$ mit $S_{k-1} = Q_k S_k - S_{k+1}$. \square

Definition (sturmsche Kette)

Eine Folge (S_0, \dots, S_n) in $\mathbf{R}[X]$ heißt *sturmsche Kette* auf $[a, b] \subset \mathbf{R}$ falls gilt:
Wenn $S_k(x) = 0$ für $0 < k < n$ und $x \in [a, b]$, dann $S_{k-1}(x)S_{k+1}(x) < 0$.

Korollar (der Inversionsformel)

Für sturmsche Ketten gilt $\text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_{n-1}, S_n)$.

Beweis. Die Inversionsformel bildet eine Teleskopsumme! Für $n = 2$:

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_0}{S_1}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_2}{S_1}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{S_1}{S_2}\right) = V_a^b(S_0, S_1, S_2).$$

Proposition (euklidische Kettenbruchentwicklung)

Zu $\frac{R}{S}$ mit $\text{ggT}(R, S) = 1$ liefert der euklidische Algorithmus eine sturmsche Kette $S_0 = S, S_1 = R, \dots, S_n = 1, S_{n+1} = 0$ mit $S_{k-1} = Q_k S_k - S_{k+1}$. \square

Folgerung: der sturmsche Satz

Für jedes Polynom $P \in \mathbf{R}[X]$ über einem reell abgeschlossenen Körper gilt

$$\#\{x \in [a, b] \mid P(x) = 0\} = \text{Ind}_a^b\left(\frac{P'}{P}\right) = V_a^b(S_0, S_1, \dots, S_n).$$

- 1 Der Hauptsatz der Algebra
- 2 Sturm 1829/1835: reelle Nullstellen reeller Polynome
- 3 Sturm 1836: komplexe Nullstellen komplexer Polynome**
 - Cauchy-Index für komplexe Polynome
 - Die Produktformel
 - Homotopie-Invarianz
- 4 Zusammenfassung und Ausblick

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Wir wollen die algebraische Umlaufzahl konstruieren:

$$\text{ind}: \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Wir wollen die algebraische Umlaufzahl konstruieren:

$$\text{ind}: \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Diese soll folgende Eigenschaften haben:

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Wir wollen die algebraische Umlaufzahl konstruieren:

$$\text{ind}: \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Diese soll folgende Eigenschaften haben:

1 Normalisierung: Für jedes Rechteck $\Gamma \subset \mathbf{C}$ gilt

$$\text{ind}(\partial\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in \text{Int } \Gamma, \\ 0 & \text{falls } 0 \in \mathbf{C} \setminus \Gamma. \end{cases}$$

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Wir wollen die algebraische Umlaufzahl konstruieren:

$$\text{ind}: \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Diese soll folgende Eigenschaften haben:

1 Normalisierung: Für jedes Rechteck $\Gamma \subset \mathbf{C}$ gilt

$$\text{ind}(\partial\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in \text{Int } \Gamma, \\ 0 & \text{falls } 0 \in \mathbf{C} \setminus \Gamma. \end{cases}$$

2 Multiplikativität: $\text{ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \text{ind}(\gamma_1) + \text{ind}(\gamma_2)$.

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Wir wollen die algebraische Umlaufzahl konstruieren:

$$\text{ind}: \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Diese soll folgende Eigenschaften haben:

1 Normalisierung: Für jedes Rechteck $\Gamma \subset \mathbf{C}$ gilt

$$\text{ind}(\partial\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in \text{Int } \Gamma, \\ 0 & \text{falls } 0 \in \mathbf{C} \setminus \Gamma. \end{cases}$$

2 Multiplikativität: $\text{ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \text{ind}(\gamma_1) + \text{ind}(\gamma_2)$.

3 Homotopie-Invarianz: $\text{ind}(\gamma_0) = \text{ind}(\gamma_1)$ falls $\gamma_0 \sim \gamma_1$ in \mathbf{C}^* .

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i], i^2 = -1$.

Wir wollen die algebraische Umlaufzahl konstruieren:

$$\text{ind}: \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Diese soll folgende Eigenschaften haben:

- 1 Normalisierung: Für jedes Rechteck $\Gamma \subset \mathbf{C}$ gilt

$$\text{ind}(\partial\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in \text{Int } \Gamma, \\ 0 & \text{falls } 0 \in \mathbf{C} \setminus \Gamma. \end{cases}$$

- 2 Multiplikativität: $\text{ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \text{ind}(\gamma_1) + \text{ind}(\gamma_2)$.
- 3 Homotopie-Invarianz: $\text{ind}(\gamma_0) = \text{ind}(\gamma_1)$ falls $\gamma_0 \sim \gamma_1$ in \mathbf{C}^* .

Algorithmischer Bonus: Berechnung mittels sturmscher Ketten.

Umlaufzahl: algebraische Eigenschaften

Sei \mathbf{R} ein reell abgeschlossener Körper und sei $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$, $i^2 = -1$.

Wir wollen die algebraische Umlaufzahl konstruieren:

$$\text{ind}: \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Diese soll folgende Eigenschaften haben:

1 Normalisierung: Für jedes Rechteck $\Gamma \subset \mathbf{C}$ gilt

$$\text{ind}(\partial\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in \text{Int } \Gamma, \\ 0 & \text{falls } 0 \in \mathbf{C} \setminus \Gamma. \end{cases}$$

2 Multiplikativität: $\text{ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \text{ind}(\gamma_1) + \text{ind}(\gamma_2)$.

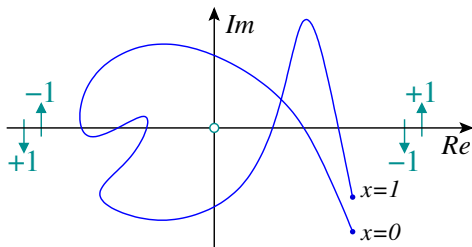
3 Homotopie-Invarianz: $\text{ind}(\gamma_0) = \text{ind}(\gamma_1)$ falls $\gamma_0 \sim \gamma_1$ in \mathbf{C}^* .

Algorithmischer Bonus: Berechnung mittels sturmscher Ketten.

Computer-Algebra statt Numerik: Alle Rechnungen sind exakt.

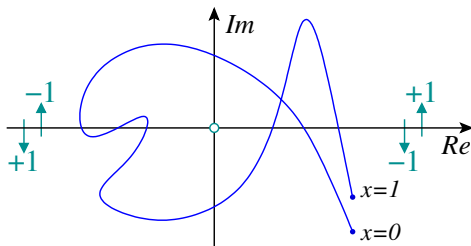
Umlaufzahl: geometrische Motivation und algebraische Definition

Für $F \in \mathbf{C}[X]$ beschreibt $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ mit $\gamma(x) = F(x)$ einen Pfad in \mathbf{C} :



Umlaufzahl: geometrische Motivation und algebraische Definition

Für $F \in \mathbf{C}[X]$ beschreibt $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ mit $\gamma(x) = F(x)$ einen Pfad in \mathbf{C} :

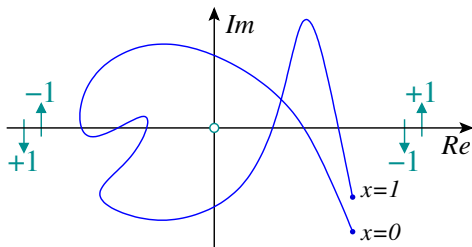


Beobachtung

Der Index $\text{ind}_0^1(F) := \frac{1}{2} \text{Ind}_0^1\left(\frac{\text{re } F}{\text{im } F}\right)$ zählt die Umläufe um 0.

Umlaufzahl: geometrische Motivation und algebraische Definition

Für $F \in \mathbf{C}[X]$ beschreibt $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ mit $\gamma(x) = F(x)$ einen Pfad in \mathbf{C} :



Beobachtung

Der Index $\text{ind}_0^1(F) := \frac{1}{2} \text{Ind}_0^1\left(\frac{\text{re } F}{\text{im } F}\right)$ zählt die Umläufe um 0.

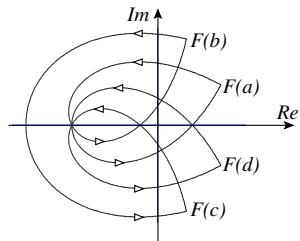
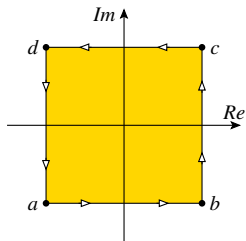
Allgemeiner: für $a, b \in \mathbf{C}$ betrachte den Pfad $\gamma(x) = F(a + (b - a)x)$.

Definition

Für $F \in \mathbf{C}[Z]$ und $a, b \in \mathbf{C}$ setzen wir $\text{ind}_a^b(F) = \text{ind}_0^1 F(a + (b - a)X)$.

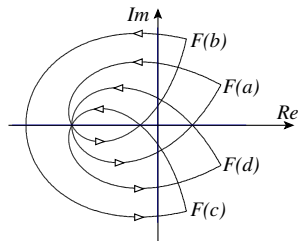
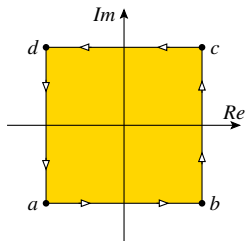
Umlaufzahl bezüglich eines Rechtecks

Beispiel: $F = Z^5 - 5Z^4 - 2Z^3 - 2Z^2 - 3Z - 12$ und $\Gamma = [-1, +1] \times [-1, +1]$.



Umlaufzahl bezüglich eines Rechtecks

Beispiel: $F = Z^5 - 5Z^4 - 2Z^3 - 2Z^2 - 3Z - 12$ und $\Gamma = [-1, +1] \times [-1, +1]$.



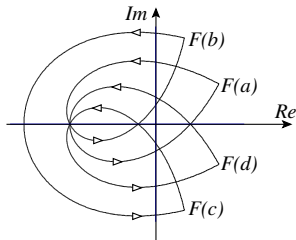
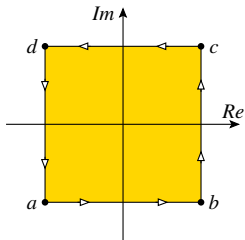
Definition

Für jedes Polynom $F \in \mathbf{C}[Z]$ und jedes Rechteck $\Gamma \subset \mathbf{C}$ setzen wir

$$\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) := \text{ind}_a^b(F) + \text{ind}_b^c(F) + \text{ind}_c^d(F) + \text{ind}_d^a(F).$$

Umlaufzahl bezüglich eines Rechtecks

Beispiel: $F = Z^5 - 5Z^4 - 2Z^3 - 2Z^2 - 3Z - 12$ und $\Gamma = [-1, +1] \times [-1, +1]$.



Definition

Für jedes Polynom $F \in \mathbf{C}[Z]$ und jedes Rechteck $\Gamma \subset \mathbf{C}$ setzen wir

$$\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) := \text{ind}_a^b(F) + \text{ind}_b^c(F) + \text{ind}_c^d(F) + \text{ind}_d^a(F).$$

Proposition (Normalisierung)

Es gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(Z - z_0) = \begin{cases} 1 & \text{falls } z_0 \text{ im Inneren von } \Gamma \text{ liegt,} \\ \frac{1}{2} & \text{falls } z_0 \text{ auf dem Rand von } \Gamma \text{ liegt,} \\ \frac{1}{4} & \text{falls } z_0 \text{ auf einer Ecke von } \Gamma \text{ liegt,} \\ 0 & \text{falls } z_0 \text{ im Äußeren von } \Gamma \text{ liegt.} \end{cases}$

Die Produktformel

Für $F = P + iQ$ und $G = R + iS$ gilt $FG = (PR - QS) + i(PS + QR)$.

Die Produktformel

Für $F = P + iQ$ und $G = R + iS$ gilt $FG = (PR - QS) + i(PS + QR)$.

Lemma (Produktformel)

Für je zwei rationale Funktionen $\frac{P}{Q}, \frac{R}{S} \in \mathbf{R}(X)^*$ gilt

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{PR - QS}{PS + QR}\right) = \text{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{R}{S}\right) - V_a^b\left(1, \frac{P}{Q} + \frac{R}{S}\right).$$

Die Produktformel

Für $F = P + iQ$ und $G = R + iS$ gilt $FG = (PR - QS) + i(PS + QR)$.

Lemma (Produktformel)

Für je zwei rationale Funktionen $\frac{P}{Q}, \frac{R}{S} \in \mathbf{R}(X)^*$ gilt

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{PR - QS}{PS + QR}\right) = \text{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{R}{S}\right) - V_a^b\left(1, \frac{P}{Q} + \frac{R}{S}\right).$$

Spezialfall: Für $P = S$ und $Q = R$ ist dies Cauchys Inversionsformel.

Die Produktformel

Für $F = P + iQ$ und $G = R + iS$ gilt $FG = (PR - QS) + i(PS + QR)$.

Lemma (Produktformel)

Für je zwei rationale Funktionen $\frac{P}{Q}, \frac{R}{S} \in \mathbf{R}(X)^*$ gilt

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{PR - QS}{PS + QR}\right) = \text{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{R}{S}\right) - V_a^b\left(1, \frac{P}{Q} + \frac{R}{S}\right).$$

Spezialfall: Für $P = S$ und $Q = R$ ist dies Cauchys Inversionsformel.
Den allgemeinen Fall beweist man genauso wie den Spezialfall.

Die Produktformel

Für $F = P + iQ$ und $G = R + iS$ gilt $FG = (PR - QS) + i(PS + QR)$.

Lemma (Produktformel)

Für je zwei rationale Funktionen $\frac{P}{Q}, \frac{R}{S} \in \mathbf{R}(X)^*$ gilt

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{PR - QS}{PS + QR}\right) = \text{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{R}{S}\right) - V_a^b\left(1, \frac{P}{Q} + \frac{R}{S}\right).$$

Spezialfall: Für $P = S$ und $Q = R$ ist dies Cauchys Inversionsformel.
Den allgemeinen Fall beweist man genauso wie den Spezialfall.

Satz (Multiplikativität)

Wenn $F, G \in \mathbf{C}[Z]$ keine Nullstellen in den Ecken von $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ haben, dann

$$\text{ind}_{\partial\Gamma}(F \cdot G) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(F) + \text{ind}_{\partial\Gamma}(G).$$

Die Produktformel

Für $F = P + iQ$ und $G = R + iS$ gilt $FG = (PR - QS) + i(PS + QR)$.

Lemma (Produktformel)

Für je zwei rationale Funktionen $\frac{P}{Q}, \frac{R}{S} \in \mathbf{R}(X)^*$ gilt

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{PR - QS}{PS + QR}\right) = \text{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{R}{S}\right) - V_a^b\left(1, \frac{P}{Q} + \frac{R}{S}\right).$$

Spezialfall: Für $P = S$ und $Q = R$ ist dies Cauchys Inversionsformel.
Den allgemeinen Fall beweist man genauso wie den Spezialfall.

Satz (Multiplikativität)

Wenn $F, G \in \mathbf{C}[Z]$ keine Nullstellen in den Ecken von $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ haben, dann

$$\text{ind}_{\partial\Gamma}(F \cdot G) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(F) + \text{ind}_{\partial\Gamma}(G).$$

Korollar (Zählen komplexer Nullstellen zerfallender Polynome)

Angenommen $F \in \mathbf{C}[Z]$ zerfällt über \mathbf{C} gemäß $F = c(Z - z_1) \cdots (Z - z_n)$,
ohne Wurzeln auf den Ecken von Γ .

Die Produktformel

Für $F = P + iQ$ und $G = R + iS$ gilt $FG = (PR - QS) + i(PS + QR)$.

Lemma (Produktformel)

Für je zwei rationale Funktionen $\frac{P}{Q}, \frac{R}{S} \in \mathbf{R}(X)^*$ gilt

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{PR - QS}{PS + QR}\right) = \text{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{R}{S}\right) - V_a^b\left(1, \frac{P}{Q} + \frac{R}{S}\right).$$

Spezialfall: Für $P = S$ und $Q = R$ ist dies Cauchys Inversionsformel.
Den allgemeinen Fall beweist man genauso wie den Spezialfall.

Satz (Multiplikativität)

Wenn $F, G \in \mathbf{C}[Z]$ keine Nullstellen in den Ecken von $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ haben, dann

$$\text{ind}_{\partial\Gamma}(F \cdot G) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(F) + \text{ind}_{\partial\Gamma}(G).$$

Korollar (Zählen komplexer Nullstellen zerfallender Polynome)

Angenommen $F \in \mathbf{C}[Z]$ zerfällt über \mathbf{C} gemäß $F = c(Z - z_1) \cdots (Z - z_n)$, ohne Wurzeln auf den Ecken von Γ . Dann zählt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F)$ die Wurzeln in Γ .

Die Produktformel

Für $F = P + iQ$ und $G = R + iS$ gilt $FG = (PR - QS) + i(PS + QR)$.

Lemma (Produktformel)

Für je zwei rationale Funktionen $\frac{P}{Q}, \frac{R}{S} \in \mathbf{R}(X)^*$ gilt

$$\text{Ind}_a^b\left(\frac{PR - QS}{PS + QR}\right) = \text{Ind}_a^b\left(\frac{P}{Q}\right) + \text{Ind}_a^b\left(\frac{R}{S}\right) - V_a^b\left(1, \frac{P}{Q} + \frac{R}{S}\right).$$

Spezialfall: Für $P = S$ und $Q = R$ ist dies Cauchys Inversionsformel. Den allgemeinen Fall beweist man genauso wie den Spezialfall.

Satz (Multiplikativität)

Wenn $F, G \in \mathbf{C}[Z]$ keine Nullstellen in den Ecken von $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ haben, dann

$$\text{ind}_{\partial\Gamma}(F \cdot G) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(F) + \text{ind}_{\partial\Gamma}(G).$$

Korollar (Zählen komplexer Nullstellen zerfallender Polynome)

Angenommen $F \in \mathbf{C}[Z]$ zerfällt über \mathbf{C} gemäß $F = c(Z - z_1) \cdots (Z - z_n)$, ohne Wurzeln auf den Ecken von Γ . Dann zählt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F)$ die Wurzeln in Γ .



Wir müssen noch zeigen, dass über \mathbf{C} jedes Polynom zerfällt.

Zählen komplexer Nullstellen

Wir wollen zeigen: Wenn $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) > 0$, dann $F(z) = 0$ für ein $z \in \Gamma$.

Zählen komplexer Nullstellen

Wir wollen zeigen: Wenn $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) > 0$, dann $F(z) = 0$ für ein $z \in \Gamma$.

Äquivalent hierzu: Wenn $F(z) \neq 0$ für alle $z \in \Gamma$, dann $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$.

Zählen komplexer Nullstellen

Wir wollen zeigen: Wenn $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) > 0$, dann $F(z) = 0$ für ein $z \in \Gamma$.

Äquivalent hierzu: Wenn $F(z) \neq 0$ für alle $z \in \Gamma$, dann $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$.

Wir betrachten die Einbettung $\mathbf{C}[Z] \subset \mathbf{C}[X, Y]$ gemäß $Z = X + iY$.

Lemma (lokale Version)

Wenn $F \in \mathbf{C}[X, Y]$ in $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ nicht verschwindet, dann gibt es $\delta > 0$ so dass $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$ für alle $\Gamma \subset [x - \delta, x + \delta] \times [y - \delta, y + \delta]$.

Zählen komplexer Nullstellen

Wir wollen zeigen: Wenn $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) > 0$, dann $F(z) = 0$ für ein $z \in \Gamma$.

Äquivalent hierzu: Wenn $F(z) \neq 0$ für alle $z \in \Gamma$, dann $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$.

Wir betrachten die Einbettung $\mathbf{C}[Z] \subset \mathbf{C}[X, Y]$ gemäß $Z = X + iY$.

Lemma (lokale Version)

Wenn $F \in \mathbf{C}[X, Y]$ in $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ nicht verschwindet, dann gibt es $\delta > 0$ so dass $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$ für alle $\Gamma \subset [x - \delta, x + \delta] \times [y - \delta, y + \delta]$.

Beweis. Stetigkeit (explizites δ , über beliebigem angeordneten Körper). \square

Zählen komplexer Nullstellen

Wir wollen zeigen: Wenn $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) > 0$, dann $F(z) = 0$ für ein $z \in \Gamma$.

Äquivalent hierzu: Wenn $F(z) \neq 0$ für alle $z \in \Gamma$, dann $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$.

Wir betrachten die Einbettung $\mathbf{C}[Z] \subset \mathbf{C}[X, Y]$ gemäß $Z = X + iY$.

Lemma (lokale Version)

Wenn $F \in \mathbf{C}[X, Y]$ in $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ nicht verschwindet, dann gibt es $\delta > 0$ so dass $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$ für alle $\Gamma \subset [x - \delta, x + \delta] \times [y - \delta, y + \delta]$.

Beweis. Stetigkeit (explizites δ , über beliebigem angeordneten Körper). \square

Satz (globale Version)

Wenn $F \in \mathbf{C}[X, Y]$ auf $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ nicht verschwindet, dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$.

Zählen komplexer Nullstellen

Wir wollen zeigen: Wenn $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) > 0$, dann $F(z) = 0$ für ein $z \in \Gamma$.

Äquivalent hierzu: Wenn $F(z) \neq 0$ für alle $z \in \Gamma$, dann $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$.

Wir betrachten die Einbettung $\mathbf{C}[Z] \subset \mathbf{C}[X, Y]$ gemäß $Z = X + iY$.

Lemma (lokale Version)

Wenn $F \in \mathbf{C}[X, Y]$ in $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ nicht verschwindet, dann gibt es $\delta > 0$ so dass $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$ für alle $\Gamma \subset [x - \delta, x + \delta] \times [y - \delta, y + \delta]$.

Beweis. Stetigkeit (explizites δ , über beliebigem angeordneten Körper). \square

Satz (globale Version)

Wenn $F \in \mathbf{C}[X, Y]$ auf $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ nicht verschwindet, dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$.

Beweis. Speziell über den reellen Zahlen \mathbf{R} : Kompaktheits-Argument.

Zählen komplexer Nullstellen

Wir wollen zeigen: Wenn $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) > 0$, dann $F(z) = 0$ für ein $z \in \Gamma$.

Äquivalent hierzu: Wenn $F(z) \neq 0$ für alle $z \in \Gamma$, dann $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$.

Wir betrachten die Einbettung $\mathbf{C}[Z] \subset \mathbf{C}[X, Y]$ gemäß $Z = X + iY$.

Lemma (lokale Version)

Wenn $F \in \mathbf{C}[X, Y]$ in $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ nicht verschwindet, dann gibt es $\delta > 0$ so dass $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$ für alle $\Gamma \subset [x - \delta, x + \delta] \times [y - \delta, y + \delta]$.

Beweis. Stetigkeit (explizites δ , über beliebigem angeordneten Körper). \square

Satz (globale Version)

Wenn $F \in \mathbf{C}[X, Y]$ auf $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ nicht verschwindet, dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$.

Beweis. Speziell über den reellen Zahlen \mathbf{R} : Kompaktheits-Argument.
Allgemein über reell abgeschlossenen Körpern: sturmscher Satz. \square

Zählen komplexer Nullstellen

Wir wollen zeigen: Wenn $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) > 0$, dann $F(z) = 0$ für ein $z \in \Gamma$.

Äquivalent hierzu: Wenn $F(z) \neq 0$ für alle $z \in \Gamma$, dann $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$.

Wir betrachten die Einbettung $\mathbf{C}[Z] \subset \mathbf{C}[X, Y]$ gemäß $Z = X + iY$.

Lemma (lokale Version)

Wenn $F \in \mathbf{C}[X, Y]$ in $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ nicht verschwindet, dann gibt es $\delta > 0$ so dass $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$ für alle $\Gamma \subset [x - \delta, x + \delta] \times [y - \delta, y + \delta]$.

Beweis. Stetigkeit (explizites δ , über beliebigem angeordneten Körper). \square

Satz (globale Version)

Wenn $F \in \mathbf{C}[X, Y]$ auf $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ nicht verschwindet, dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$.

Beweis. Speziell über den reellen Zahlen \mathbf{R} : Kompaktheits-Argument.
Allgemein über reell abgeschlossenen Körpern: sturmscher Satz. \square

Korollar (Zählen komplexer Nullstellen beliebiger Polynome)

Für jedes $F \in \mathbf{C}[Z]$ zählt der Index $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F)$ die Wurzeln von F in Γ .

Zählen komplexer Nullstellen

Wir wollen zeigen: Wenn $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) > 0$, dann $F(z) = 0$ für ein $z \in \Gamma$.

Äquivalent hierzu: Wenn $F(z) \neq 0$ für alle $z \in \Gamma$, dann $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$.

Wir betrachten die Einbettung $\mathbf{C}[Z] \subset \mathbf{C}[X, Y]$ gemäß $Z = X + iY$.

Lemma (lokale Version)

Wenn $F \in \mathbf{C}[X, Y]$ in $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ nicht verschwindet, dann gibt es $\delta > 0$ so dass $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$ für alle $\Gamma \subset [x - \delta, x + \delta] \times [y - \delta, y + \delta]$.

Beweis. Stetigkeit (explizites δ , über beliebigem angeordneten Körper). \square

Satz (globale Version)

Wenn $F \in \mathbf{C}[X, Y]$ auf $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ nicht verschwindet, dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$.

Beweis. Speziell über den reellen Zahlen \mathbf{R} : Kompaktheits-Argument.
Allgemein über reell abgeschlossenen Körpern: sturmscher Satz. \square

Korollar (Zählen komplexer Nullstellen beliebiger Polynome)

Für jedes $F \in \mathbf{C}[Z]$ zählt der Index $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F)$ die Wurzeln von F in Γ .

Beweis. Sei $F = (Z - z_1) \cdots (Z - z_m)G$ so dass G keine Nullstellen in \mathbf{C} hat.

Zählen komplexer Nullstellen

Wir wollen zeigen: Wenn $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) > 0$, dann $F(z) = 0$ für ein $z \in \Gamma$.

Äquivalent hierzu: Wenn $F(z) \neq 0$ für alle $z \in \Gamma$, dann $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$.

Wir betrachten die Einbettung $\mathbf{C}[Z] \subset \mathbf{C}[X, Y]$ gemäß $Z = X + iY$.

Lemma (lokale Version)

Wenn $F \in \mathbf{C}[X, Y]$ in $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ nicht verschwindet, dann gibt es $\delta > 0$ so dass $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$ für alle $\Gamma \subset [x - \delta, x + \delta] \times [y - \delta, y + \delta]$.

Beweis. Stetigkeit (explizites δ , über beliebigem angeordneten Körper). \square

Satz (globale Version)

Wenn $F \in \mathbf{C}[X, Y]$ auf $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ nicht verschwindet, dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = 0$.

Beweis. Speziell über den reellen Zahlen \mathbf{R} : Kompaktheits-Argument.
Allgemein über reell abgeschlossenen Körpern: sturmscher Satz. \square

Korollar (Zählen komplexer Nullstellen beliebiger Polynome)

Für jedes $F \in \mathbf{C}[Z]$ zählt der Index $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F)$ die Wurzeln von F in Γ .

Beweis. Sei $F = (Z - z_1) \cdots (Z - z_m)G$ so dass G keine Nullstellen in \mathbf{C} hat.
Wir benutzen die Multiplikativität des Index, und obigen Satz für G . \square

Definition (Cauchy-Schranke)

Sei $F = Z^n + c_{n-1}Z^{n-1} + \dots + c_1Z + c_0$ in $\mathbf{C}[Z]$.

Definition (Cauchy-Schranke)

Sei $F = Z^n + c_{n-1}Z^{n-1} + \dots + c_1Z + c_0$ in $\mathbf{C}[Z]$.

Wir setzen $M := \max\{|c_0|, \dots, |c_{n-1}|\}$ und $\rho_F := 1 + M$.

Definition (Cauchy-Schranke)

Sei $F = Z^n + c_{n-1}Z^{n-1} + \dots + c_1Z + c_0$ in $\mathbf{C}[Z]$.

Wir setzen $M := \max\{|c_0|, \dots, |c_{n-1}|\}$ und $\rho_F := 1 + M$.

Satz (grobe Lokalisierung der Nullstellen)

Für jedes $z \in \mathbf{C}$ mit $|z| \geq \rho_F$ gilt $|F(z)| \geq 1$.

Definition (Cauchy-Schranke)

Sei $F = Z^n + c_{n-1}Z^{n-1} + \dots + c_1Z + c_0$ in $\mathbf{C}[Z]$.

Wir setzen $M := \max\{|c_0|, \dots, |c_{n-1}|\}$ und $\rho_F := 1 + M$.

Satz (grobe Lokalisierung der Nullstellen)

Für jedes $z \in \mathbf{C}$ mit $|z| \geq \rho_F$ gilt $|F(z)| \geq 1$.

Also liegen alle komplexen Nullstellen von F in $B(\rho_F) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < \rho_F\}$.

Satz (Homotopie-Invarianz)

Sei $F \in \mathbf{C}[T, Z]$. Angenommen für jedes $t \in [0, 1]$ hat das Polynom $F_t \in \mathbf{C}[Z]$ keine Nullstellen auf $\partial\Gamma$.

Satz (Homotopie-Invarianz)

Sei $F \in \mathbf{C}[T, Z]$. Angenommen für jedes $t \in [0, 1]$ hat das Polynom $F_t \in \mathbf{C}[Z]$ keine Nullstellen auf $\partial\Gamma$. Dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F_0) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(F_1)$.

Satz (Homotopie-Invarianz)

Sei $F \in \mathbf{C}[T, Z]$. Angenommen für jedes $t \in [0, 1]$ hat das Polynom $F_t \in \mathbf{C}[Z]$ keine Nullstellen auf $\partial\Gamma$. Dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F_0) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(F_1)$.

Beweis. Die Abwesenheit von Nullstellen auf $[0, 1] \times [a, b]$ impliziert

$$\text{ind}_a^b(F | T = 0) - \text{ind}_a^b(F | T = 1) = \text{ind}_0^1(F | Z = a) - \text{ind}_0^1(F | Z = b).$$

Satz (Homotopie-Invarianz)

Sei $F \in \mathbf{C}[T, Z]$. Angenommen für jedes $t \in [0, 1]$ hat das Polynom $F_t \in \mathbf{C}[Z]$ keine Nullstellen auf $\partial\Gamma$. Dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F_0) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(F_1)$.

Beweis. Die Abwesenheit von Nullstellen auf $[0, 1] \times [a, b]$ impliziert

$$\text{ind}_a^b(F | T = 0) - \text{ind}_a^b(F | T = 1) = \text{ind}_0^1(F | Z = a) - \text{ind}_0^1(F | Z = b).$$

Die Summe über alle vier Kanten von Γ ergibt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F_0) - \text{ind}_{\partial\Gamma}(F_1) = 0$. \square

Satz (Homotopie-Invarianz)

Sei $F \in \mathbf{C}[T, Z]$. Angenommen für jedes $t \in [0, 1]$ hat das Polynom $F_t \in \mathbf{C}[Z]$ keine Nullstellen auf $\partial\Gamma$. Dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F_0) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(F_1)$.

Beweis. Die Abwesenheit von Nullstellen auf $[0, 1] \times [a, b]$ impliziert

$$\text{ind}_a^b(F | T = 0) - \text{ind}_a^b(F | T = 1) = \text{ind}_0^1(F | Z = a) - \text{ind}_0^1(F | Z = b).$$

Die Summe über alle vier Kanten von Γ ergibt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F_0) - \text{ind}_{\partial\Gamma}(F_1) = 0$. \square

Korollar

Für $F \in \mathbf{C}[Z]^*$ und $\Gamma \supset B(\rho_F)$ gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = \deg F$.

Satz (Homotopie-Invarianz)

Sei $F \in \mathbf{C}[T, Z]$. Angenommen für jedes $t \in [0, 1]$ hat das Polynom $F_t \in \mathbf{C}[Z]$ keine Nullstellen auf $\partial\Gamma$. Dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F_0) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(F_1)$.

Beweis. Die Abwesenheit von Nullstellen auf $[0, 1] \times [a, b]$ impliziert

$$\text{ind}_a^b(F | T = 0) - \text{ind}_a^b(F | T = 1) = \text{ind}_0^1(F | Z = a) - \text{ind}_0^1(F | Z = b).$$

Die Summe über alle vier Kanten von Γ ergibt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F_0) - \text{ind}_{\partial\Gamma}(F_1) = 0$. \square

Korollar

Für $F \in \mathbf{C}[Z]^*$ und $\Gamma \supset B(\rho_F)$ gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = \deg F$.

Beweis. Sei $F = Z^n + c_{n-1}Z^{n-1} + \dots + c_0$ ein Polynom vom Grad n .

Satz (Homotopie-Invarianz)

Sei $F \in \mathbf{C}[T, Z]$. Angenommen für jedes $t \in [0, 1]$ hat das Polynom $F_t \in \mathbf{C}[Z]$ keine Nullstellen auf $\partial\Gamma$. Dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F_0) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(F_1)$.

Beweis. Die Abwesenheit von Nullstellen auf $[0, 1] \times [a, b]$ impliziert

$$\text{ind}_a^b(F | T = 0) - \text{ind}_a^b(F | T = 1) = \text{ind}_0^1(F | Z = a) - \text{ind}_0^1(F | Z = b).$$

Die Summe über alle vier Kanten von Γ ergibt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F_0) - \text{ind}_{\partial\Gamma}(F_1) = 0$. \square

Korollar

Für $F \in \mathbf{C}[Z]^*$ und $\Gamma \supset B(\rho_F)$ gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = \deg F$.

Beweis. Sei $F = Z^n + c_{n-1}Z^{n-1} + \dots + c_0$ ein Polynom vom Grad n .
 $F_t = Z^n + t(c_{n-1}Z^{n-1} + \dots + c_0)$ deformiert $F_1 = F$ zu $F_0 = Z^n$.

Satz (Homotopie-Invarianz)

Sei $F \in \mathbf{C}[T, Z]$. Angenommen für jedes $t \in [0, 1]$ hat das Polynom $F_t \in \mathbf{C}[Z]$ keine Nullstellen auf $\partial\Gamma$. Dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F_0) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(F_1)$.

Beweis. Die Abwesenheit von Nullstellen auf $[0, 1] \times [a, b]$ impliziert

$$\text{ind}_a^b(F | T = 0) - \text{ind}_a^b(F | T = 1) = \text{ind}_0^1(F | Z = a) - \text{ind}_0^1(F | Z = b).$$

Die Summe über alle vier Kanten von Γ ergibt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F_0) - \text{ind}_{\partial\Gamma}(F_1) = 0$. \square

Korollar

Für $F \in \mathbf{C}[Z]^*$ und $\Gamma \supset B(\rho_F)$ gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = \deg F$.

Beweis. Sei $F = Z^n + c_{n-1}Z^{n-1} + \dots + c_0$ ein Polynom vom Grad n .
 $F_t = Z^n + t(c_{n-1}Z^{n-1} + \dots + c_0)$ deformiert $F_1 = F$ zu $F_0 = Z^n$.
Die Cauchy-Schranke $\rho_t = 1 + tM$ schrumpft von $\rho_1 = \rho_F$ zu $\rho_0 = 1$.

Satz (Homotopie-Invarianz)

Sei $F \in \mathbf{C}[T, Z]$. Angenommen für jedes $t \in [0, 1]$ hat das Polynom $F_t \in \mathbf{C}[Z]$ keine Nullstellen auf $\partial\Gamma$. Dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F_0) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(F_1)$.

Beweis. Die Abwesenheit von Nullstellen auf $[0, 1] \times [a, b]$ impliziert

$$\text{ind}_a^b(F | T = 0) - \text{ind}_a^b(F | T = 1) = \text{ind}_0^1(F | Z = a) - \text{ind}_0^1(F | Z = b).$$

Die Summe über alle vier Kanten von Γ ergibt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F_0) - \text{ind}_{\partial\Gamma}(F_1) = 0$. \square

Korollar

Für $F \in \mathbf{C}[Z]^*$ und $\Gamma \supset B(\rho_F)$ gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = \deg F$.

Beweis. Sei $F = Z^n + c_{n-1}Z^{n-1} + \dots + c_0$ ein Polynom vom Grad n .

$F_t = Z^n + t(c_{n-1}Z^{n-1} + \dots + c_0)$ deformiert $F_1 = F$ zu $F_0 = Z^n$.

Die Cauchy-Schranke $\rho_t = 1 + tM$ schrumpft von $\rho_1 = \rho_F$ zu $\rho_0 = 1$.

Somit hat F_t keine Nullstelle auf $\partial\Gamma$, und $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F_1) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(F_0) = n$. \square

Satz (Homotopie-Invarianz)

Sei $F \in \mathbf{C}[T, Z]$. Angenommen für jedes $t \in [0, 1]$ hat das Polynom $F_t \in \mathbf{C}[Z]$ keine Nullstellen auf $\partial\Gamma$. Dann gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F_0) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(F_1)$.

Beweis. Die Abwesenheit von Nullstellen auf $[0, 1] \times [a, b]$ impliziert

$$\text{ind}_a^b(F | T = 0) - \text{ind}_a^b(F | T = 1) = \text{ind}_0^1(F | Z = a) - \text{ind}_0^1(F | Z = b).$$

Die Summe über alle vier Kanten von Γ ergibt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F_0) - \text{ind}_{\partial\Gamma}(F_1) = 0$. \square

Korollar

Für $F \in \mathbf{C}[Z]^*$ und $\Gamma \supset B(\rho_F)$ gilt $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F) = \deg F$.

Beweis. Sei $F = Z^n + c_{n-1}Z^{n-1} + \dots + c_0$ ein Polynom vom Grad n .

$F_t = Z^n + t(c_{n-1}Z^{n-1} + \dots + c_0)$ deformiert $F_1 = F$ zu $F_0 = Z^n$.

Die Cauchy-Schranke $\rho_t = 1 + tM$ schrumpft von $\rho_1 = \rho_F$ zu $\rho_0 = 1$.

Somit hat F_t keine Nullstelle auf $\partial\Gamma$, und $\text{ind}_{\partial\Gamma}(F_1) = \text{ind}_{\partial\Gamma}(F_0) = n$. \square

Dies beweist den Hauptsatz: das Rechteck Γ enthält n Nullstellen von F .

- 1 Der Hauptsatz der Algebra
- 2 Sturm 1829/1835: reelle Nullstellen reeller Polynome
- 3 Sturm 1836: komplexe Nullstellen komplexer Polynome
- 4 Zusammenfassung und Ausblick**

Über reell abgeschlossenen Körpern können wir einen Index konstruieren:

$$\text{ind}: \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Zusammenfassung und Ausblick

Über reell abgeschlossenen Körpern können wir einen Index konstruieren:

$$\text{ind}: \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Dieser erlaubt einen elementaren und effektiven Beweis des Hauptsatzes.

Zusammenfassung und Ausblick

Über reell abgeschlossenen Körpern können wir einen Index konstruieren:

$$\text{ind}: \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Dieser erlaubt einen elementaren und effektiven Beweis des Hauptsatzes.

Algebraische Grad-Schranken

Gilt \mathbf{R} reell n -abgeschlossen $\iff \mathbf{R}[i]$ algebraisch n -abgeschlossen?

Zusammenfassung und Ausblick

Über reell abgeschlossenen Körpern können wir einen Index konstruieren:

$$\text{ind}: \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Dieser erlaubt einen elementaren und effektiven Beweis des Hauptsatzes.

Algebraische Grad-Schranken

Gilt \mathbf{R} reell n -abgeschlossen $\iff \mathbf{R}[i]$ algebraisch n -abgeschlossen?

Die Implikation " \Rightarrow " gilt in kleinen Graden. Die Umkehrung " \Leftarrow " ist klar.

Zusammenfassung und Ausblick

Über reell abgeschlossenen Körpern können wir einen Index konstruieren:

$$\text{ind}: \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Dieser erlaubt einen elementaren und effektiven Beweis des Hauptsatzes.

Algebraische Grad-Schranken

Gilt \mathbf{R} reell n -abgeschlossen $\iff \mathbf{R}[i]$ algebraisch n -abgeschlossen?

Die Implikation “ \Rightarrow ” gilt in kleinen Graden. Die Umkehrung “ \Leftarrow ” ist klar.

Algorithmische Optimierung: asymptotische Komplexität

Auffinden der Nullstellen eines Polynoms vom Grad n :
algebraisch: $\tilde{O}(n^4)$; numerisch: $\tilde{O}(n^3)$, Schönhage 1982.

Wie kann der algebraische Kalkül noch effizienter gemacht werden?

Zusammenfassung und Ausblick

Über reell abgeschlossenen Körpern können wir einen Index konstruieren:

$$\text{ind: } \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Dieser erlaubt einen elementaren und effektiven Beweis des Hauptsatzes.

Algebraische Grad-Schranken

Gilt \mathbf{R} reell n -abgeschlossen $\iff \mathbf{R}[i]$ algebraisch n -abgeschlossen?

Die Implikation “ \Rightarrow ” gilt in kleinen Graden. Die Umkehrung “ \Leftarrow ” ist klar.

Algorithmische Optimierung: asymptotische Komplexität

Auffinden der Nullstellen eines Polynoms vom Grad n :
algebraisch: $\tilde{O}(n^4)$; numerisch: $\tilde{O}(n^3)$, Schönhage 1982.

Wie kann der algebraische Kalkül noch effizienter gemacht werden?

Algebraischer Abbildungsgrad in höheren Dimensionen

Brouwerscher Fixpunktsatz über reell abgeschlossenen Körpern.

Zusammenfassung und Ausblick

Über reell abgeschlossenen Körpern können wir einen Index konstruieren:

$$\text{ind: } \left\{ \begin{array}{l} \text{stückweise polynomiale} \\ \text{Schleifen } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^* \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Dieser erlaubt einen elementaren und effektiven Beweis des Hauptsatzes.

Algebraische Grad-Schranken

Gilt \mathbf{R} reell n -abgeschlossen $\iff \mathbf{R}[i]$ algebraisch n -abgeschlossen?

Die Implikation “ \Rightarrow ” gilt in kleinen Graden. Die Umkehrung “ \Leftarrow ” ist klar.

Algorithmische Optimierung: asymptotische Komplexität

Auffinden der Nullstellen eines Polynoms vom Grad n :
algebraisch: $\tilde{O}(n^4)$; numerisch: $\tilde{O}(n^3)$, Schönhage 1982.

Wie kann der algebraische Kalkül noch effizienter gemacht werden?

Algebraischer Abbildungsgrad in höheren Dimensionen

Brouwerscher Fixpunktsatz über reell abgeschlossenen Körpern.

Algebraische Grad-Schranken?



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Michael.Eisermann@ujf-grenoble.fr
www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm

*The Fundamental Theorem of Algebra made effective:
an elementary real-algebraic proof via Sturm chains*

Für Kommentare und Anregungen bin ich dankbar!