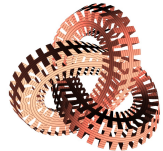


Quanteninvarianten und niedrigdimensionale Topologie

Michael Eisermann

Institut Fourier, Grenoble
www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm

9. März 2009



Vortrag am Mathematischen Institut der Universität Münster

- 1 Von klassischen Invarianten zu Quanteninvarianten
- 2 Diskrete Yang-Baxter-Operatoren und Deformationen
- 3 Das Jones-Polynom von Bandverschlingungen
- 4 Zusammenfassung und Ausblick

Vorläufer (vor 1900)

Elektromagnetismus (Gauss)

Vorstudien zur Topologie (Listing)

Atomtheorie – Knoten im Äther (Kelvin)

empirische Klassifikation (Kirkman, Little, Tait)

Vorläufer (vor 1900)

Elektromagnetismus (Gauss)

Vorstudien zur Topologie (Listing)

Atomtheorie – Knoten im Äther (Kelvin)

empirische Klassifikation (Kirkman, Little, Tait)

Klassische Topologie (ab 1900)

Fundamentalgruppe (Poincaré, Wirtinger, Dehn, ...)

Homologie (Alexander, Seifert, ...)

Diagramme (Reidemeister), Zopfgruppen (Artin)

$2/3/4$ -Mannigfaltigkeiten (Fox–Milnor, Papakyriakopoulos, Waldhausen, ...)

Vorläufer (vor 1900)

Elektromagnetismus (Gauss)
Vorstudien zur Topologie (Listing)
Atomtheorie – Knoten im Äther (Kelvin)
empirische Klassifikation (Kirkman, Little, Tait)

Klassische Topologie (ab 1900)

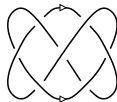
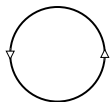
Fundamentalgruppe (Poincaré, Wirtinger, Dehn, ...)
Homologie (Alexander, Seifert, ...)
Diagramme (Reidemeister), Zopfgruppen (Artin)
2/3/4-Mannigfaltigkeiten (Fox–Milnor, Papakyriakopoulos, Waldhausen, ...)

Quantentopologie (ab 1984)

Zopf-Darstellungen und Deformationen (Jones, HOMFLYPT, Kauffman, ...)
Invarianten von endlichem Typ (Vassiliev, Goussarov, ..., Kontsevich, ...)
Kategorifizierung (Khovanov, Osvath-Szabo, ...)

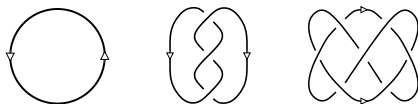
Knoten und Verschlingungen

Ein *Knoten* ist eine glatte Einbettung $f: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (oder \mathbb{S}^3).

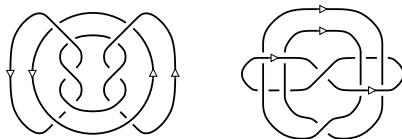


Knoten und Verschlingungen

Ein *Knoten* ist eine glatte Einbettung $f: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (oder \mathbb{S}^3).

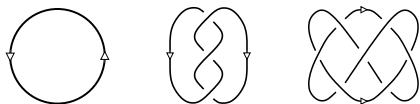


Eine *Verschlingung* ist eine glatte Einbettung $f: n \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

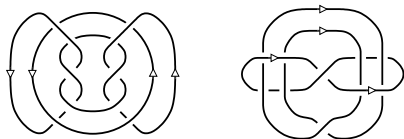


Knoten und Verschlingungen

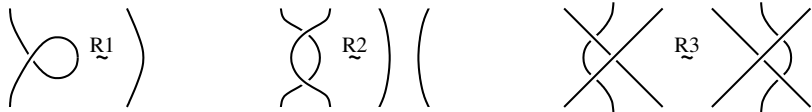
Ein *Knoten* ist eine glatte Einbettung $f: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (oder S^3).



Eine *Verschlingung* ist eine glatte Einbettung $f: n \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.



Wir betrachten diese modulo Isotopie des \mathbb{R}^3 .



- 1 Von klassischen Invarianten zu Quanteninvarianten
 - Fundamentalgruppe und Alexander-Polynom
 - Jones-Polynom und Quanteninvarianten
 - Invarianten von endlichem Typ
- 2 Diskrete Yang-Baxter-Operatoren und Deformationen
- 3 Das Jones-Polynom von Bandverschlingungen
- 4 Zusammenfassung und Ausblick

Satz (Dehn 1914)

Die beiden Kleeblattschlingen sind verschieden.

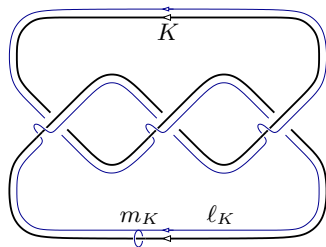
Satz (Dehn 1914)

Die beiden Kleeblattschlingen sind verschieden.

$$\pi_K := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$$

Meridian m_K

Longitude ℓ_K



Satz (Dehn 1914)

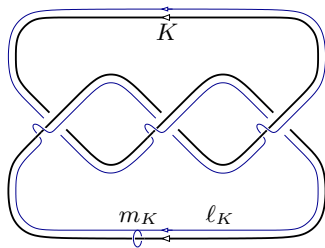
Die beiden Kleeblattschlingen sind verschieden.

$$\pi_K := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$$

Meridian m_k

Longitude ℓ_k

Das Tripel (π_K, m_K, ℓ_K) ist
eine Invariante des Knotens K .



Satz (Dehn 1914)

Die beiden Kleeblattschlingen sind verschieden.

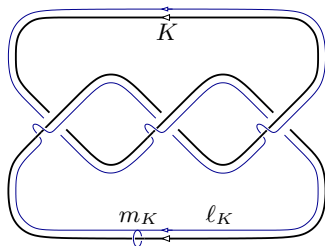
$$\pi_K := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$$

Meridian m_k

Longitude ℓ_k

Das Tripel (π_K, m_K, ℓ_K) ist
eine Invariante des Knotens K .

Jedes Diagramm des Knotens K liefert
eine Präsentation der Gruppe π_K .



Satz (Dehn 1914)

Die beiden Kleeblattschlingen sind verschieden.

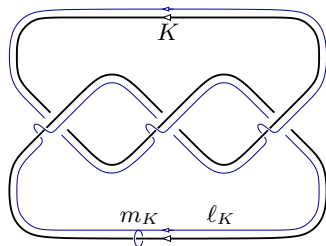
$$\pi_K := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$$

Meridian m_K

Longitude ℓ_K

Das Tripel (π_K, m_K, ℓ_K) ist
eine Invariante des Knotens K .

Jedes Diagramm des Knotens K liefert
eine Präsentation der Gruppe π_K .



Satz (Papakyriakopoulos 1957)

Der Knoten K ist genau dann trivial wenn $\ell_K = 1$ in π_K .

Satz (Dehn 1914)

Die beiden Kleeblattschlingen sind verschieden.

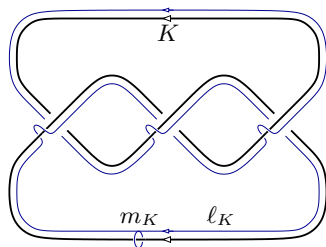
$$\pi_K := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$$

Meridian m_K

Longitude ℓ_K

Das Tripel (π_K, m_K, ℓ_K) ist eine Invariante des Knotens K .

Jedes Diagramm des Knotens K liefert eine Präsentation der Gruppe π_K .



Satz (Papakyriakopoulos 1957)

Der Knoten K ist genau dann trivial wenn $\ell_K = 1$ in π_K .

Satz (Waldhausen 1968)

Die Invariante $K \mapsto (\pi_K, m_K, \ell_K)$ klassifiziert Knoten bis auf Isotopie.

Satz (Dehn 1914)

Die beiden Kleeblattschlingen sind verschieden.

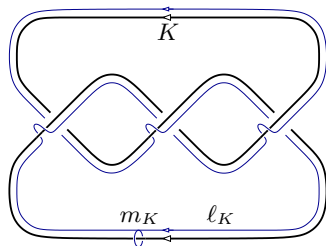
$$\pi_K := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$$

Meridian m_K

Longitude ℓ_K

Das Tripel (π_K, m_K, ℓ_K) ist eine Invariante des Knotens K .

Jedes Diagramm des Knotens K liefert eine Präsentation der Gruppe π_K .



Satz (Papakyriakopoulos 1957)

Der Knoten K ist genau dann trivial wenn $\ell_K = 1$ in π_K .

Satz (Waldhausen 1968)

Die Invariante $K \mapsto (\pi_K, m_K, \ell_K)$ klassifiziert Knoten bis auf Isotopie.

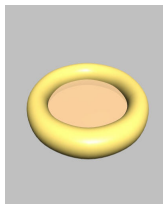
Vollständige Invariante, aber schwer zu handhaben.

Satz (Seifert 1935, Pontryagin 1930)

Jede Verschlingung $L \subset \mathbb{R}^3$ berandet eine kompakte, zusammenhängende, orientierte Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$.

Satz (Seifert 1935, Pontryagin 1930)

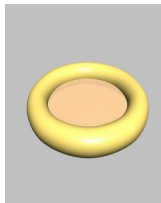
Jede Verschlingung $L \subset \mathbb{R}^3$ berandet eine kompakte, zusammenhängende, orientierte Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$.



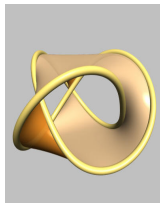
(a) trivialer Knoten \bigcirc

Satz (Seifert 1935, Pontryagin 1930)

Jede Verschlingung $L \subset \mathbb{R}^3$ berandet eine kompakte, zusammenhängende, orientierte Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$.



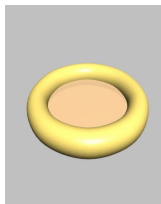
(a) trivialer Knoten \bigcirc



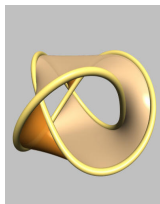
(b) Kleeblattschlinge 3_1

Satz (Seifert 1935, Pontryagin 1930)

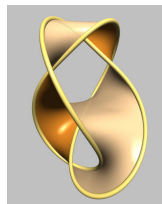
Jede Verschlingung $L \subset \mathbb{R}^3$ berandet eine kompakte, zusammenhängende, orientierte Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$.



(a) trivialer Knoten \bigcirc



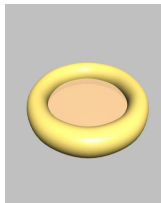
(b) Kleeblattschlinge 3_1



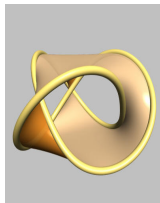
(c) Achterknoten 4_1

Satz (Seifert 1935, Pontryagin 1930)

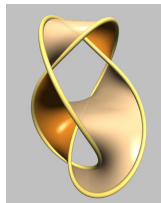
Jede Verschlingung $L \subset \mathbb{R}^3$ berandet eine kompakte, zusammenhängende, orientierte Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$.



(a) trivialer Knoten \bigcirc



(b) Kleeblattschlinge 3_1

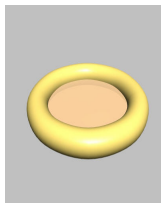


(c) Achterknoten 4_1

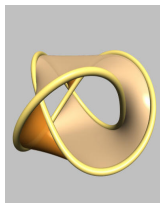
Sei $\theta: H_1(S) \times H_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}$ die Seifert-Form $\theta(a, b) = \text{lk}(a^\perp, b^\uparrow)$.

Satz (Seifert 1935, Pontryagin 1930)

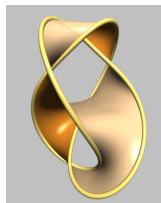
Jede Verschlingung $L \subset \mathbb{R}^3$ berandet eine kompakte, zusammenhängende, orientierte Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$.



(a) trivialer Knoten \bigcirc



(b) Kleeblattschlinge 3_1



(c) Achterknoten 4_1

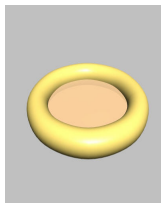
Sei $\theta: H_1(S) \times H_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}$ die Seifert-Form $\theta(a, b) = \text{lk}(a^\perp, b^\uparrow)$.

Satz (Alexander 1928, Seifert 1935)

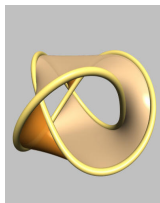
$\Delta(L) = \det(q^- \theta^* - q^+ \theta) \in \mathbb{Z}[q^\pm]$ ist eine Invariante von L .

Satz (Seifert 1935, Pontryagin 1930)

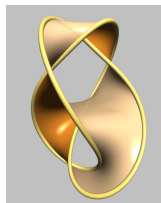
Jede Verschlingung $L \subset \mathbb{R}^3$ berandet eine kompakte, zusammenhängende, orientierte Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$.



(a) trivialer Knoten \bigcirc



(b) Kleeblattschlinge 3_1



(c) Achterknoten 4_1

Sei $\theta: H_1(S) \times H_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}$ die Seifert-Form $\theta(a, b) = \text{lk}(a^\perp, b^\uparrow)$.

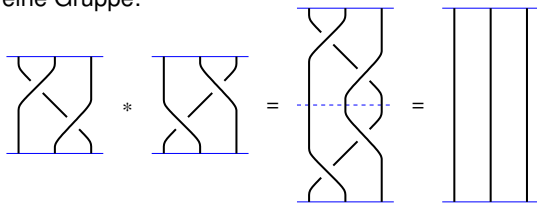
Satz (Alexander 1928, Seifert 1935)

$\Delta(L) = \det(q^- \theta^* - q^+ \theta) \in \mathbb{Z}[q^\pm]$ ist eine Invariante von L .

Vorteil: leicht zu berechnen und gute topologische Interpretation.

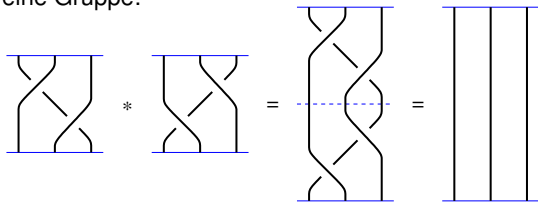
Artin's Zopfgruppe

Zöpfe bilden eine Gruppe:

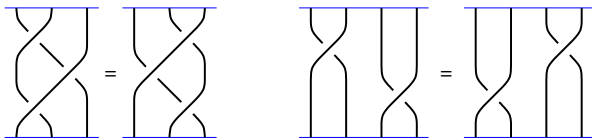


Artin's Zopfgruppe

Zöpfe bilden eine Gruppe:

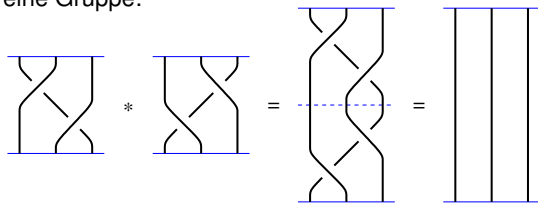


Offensichtliche Relationen:

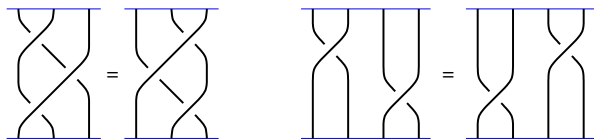


Artin's Zopfgruppe

Zöpfe bilden eine Gruppe:



Offensichtliche Relationen:



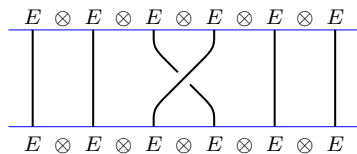
Satz (Artin 1925, 1947)

Die Zopfgruppe B_n auf n Strängen erlaubt die Präsentation

$$B_n = \left\langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \begin{array}{ll} s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & \text{falls } |i - j| = 1 \\ s_i s_j = s_i s_j & \text{falls } |i - j| \geq 2 \end{array} \right\rangle.$$

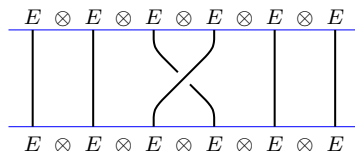
Yang-Baxter-Darstellungen

Jeder Automorphismus $c \in \text{Aut}(E \otimes E)$ operiert auf $E^{\otimes n}$:

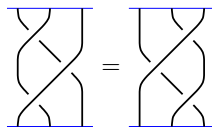


Yang-Baxter-Darstellungen

Jeder Automorphismus $c \in \text{Aut}(E \otimes E)$ operiert auf $E^{\otimes n}$:



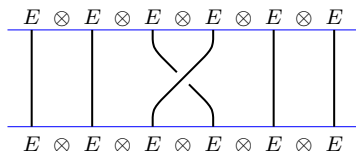
Wir fordern die Zopfrelation (Yang-Baxter-Gleichung):



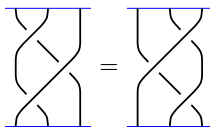
$$(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c)$$

Yang-Baxter-Darstellungen

Jeder Automorphismus $c \in \text{Aut}(E \otimes E)$ operiert auf $E^{\otimes n}$:



Wir fordern die Zopfrelation (Yang-Baxter-Gleichung):



$$(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c)$$

Korollar (zum Satz von Artin)

Jeder Yang-Baxter-Operator c induziert eine Darstellung der Zopfgruppe

$$\rho_n^c: B_n \rightarrow \text{Aut}(E^{\otimes n}) \text{ mit } s_i \mapsto \underbrace{\text{id} \otimes \dots \otimes \text{id}}_{E^{\otimes(i-1)}} \otimes \underbrace{c}_{E^{\otimes 2}} \otimes \underbrace{\text{id} \otimes \dots \otimes \text{id}}_{E^{\otimes(n-i-1)}}$$

Das Jones-Polynom

Sei $E = \mathbb{A}u \oplus \mathbb{A}v$ und somit $E \otimes E = \mathbb{A}uu \oplus \mathbb{A}uv \oplus \mathbb{A}vu \oplus \mathbb{A}vv$.

Das Jones-Polynom

Sei $E = \mathbb{A}u \oplus \mathbb{A}v$ und somit $E \otimes E = \mathbb{A}uu \oplus \mathbb{A}uv \oplus \mathbb{A}vu \oplus \mathbb{A}vv$.

Satz (Jones 1984)

Zu jedem Element $q \in \mathbb{A}^\times$ erhalten wir einen Yang-Baxter-Operator

$$c(q) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & q^2 & q - q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}.$$

Das Jones-Polynom

Sei $E = \mathbb{A}u \oplus \mathbb{A}v$ und somit $E \otimes E = \mathbb{A}uu \oplus \mathbb{A}uv \oplus \mathbb{A}vu \oplus \mathbb{A}vv$.

Satz (Jones 1984)

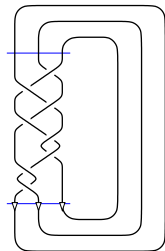
Zu jedem Element $q \in \mathbb{A}^\times$ erhalten wir einen Yang-Baxter-Operator

$$c(q) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & q^2 & q - q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}.$$

Für $\mathbb{A} = \mathbb{Z}[q^\pm]$ erhalten wir so das Jones-Polynom V :



$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{\text{Abschluss}} & \mathcal{L} \\ \rho_n^c \downarrow & & \downarrow V \\ \text{Aut}(E^{\otimes n}) & \xrightarrow{\text{tr}_q} & \mathbb{Z}[q^\pm] \end{array}$$



Verallgemeinerung: Quanteninvarianten

Bemerkung

Der Operator $c(q)$ deformiert die Transposition $\tau = c(1): a \otimes b \mapsto b \otimes a$.

$$c(q) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & q^2 & q - q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \xrightarrow{q \mapsto 1} c(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung

Der Operator $c(q)$ deformiert die Transposition $\tau = c(1): a \otimes b \mapsto b \otimes a$.

$$c(q) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & q^2 & q - q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \xrightarrow{q \mapsto 1} c(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$ gilt demnach

$$c \equiv \tau \pmod{(h)}$$

Bemerkung

Der Operator $c(q)$ deformiert die Transposition $\tau = c(1): a \otimes b \mapsto b \otimes a$.

$$c(q) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & q^2 & q - q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \xrightarrow{q \mapsto 1} c(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$ gilt demnach

$$c \equiv \tau \pmod{h} \quad \text{also} \quad c^{-1} \equiv \tau \pmod{h}$$

Bemerkung

Der Operator $c(q)$ deformiert die Transposition $\tau = c(1): a \otimes b \mapsto b \otimes a$.

$$c(q) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & q^2 & q - q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \xrightarrow{q \mapsto 1} c(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$ gilt demnach

$$c \equiv \tau \pmod{(h)} \quad \text{also} \quad c^{-1} \equiv \tau \pmod{(h)} \quad \text{und somit} \quad c - c^{-1} \in (h).$$

Bemerkung

Der Operator $c(q)$ deformiert die Transposition $\tau = c(1): a \otimes b \mapsto b \otimes a$.

$$c(q) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & q^2 & q - q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \xrightarrow{q \mapsto 1} c(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$ gilt demnach

$$c \equiv \tau \pmod{(h)} \quad \text{also} \quad c^{-1} \equiv \tau \pmod{(h)} \quad \text{und somit} \quad c - c^{-1} \in (h).$$

Das bedeutet $V(\text{diagram with crossing}) - V(\text{diagram with crossing}) \in (h)$.

Bemerkung

Der Operator $c(q)$ deformiert die Transposition $\tau = c(1): a \otimes b \mapsto b \otimes a$.

$$c(q) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & q^2 & q - q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \xrightarrow{q \mapsto 1} c(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$ gilt demnach

$$c \equiv \tau \pmod{(h)} \quad \text{also} \quad c^{-1} \equiv \tau \pmod{(h)} \quad \text{und somit} \quad c - c^{-1} \in (h).$$

Das bedeutet $V(\text{↘↙}) - V(\text{↙↘}) \in (h)$.

Die Wechselsumme über n Kreuzungen liegt dann in (h^n) .

Invarianten von endlichem Typ

Wir bezeichnen mit $D \leftrightarrow D_X$ das Wechseln der Kreuzungen in X :



Invarianten von endlichem Typ

Wir bezeichnen mit $D \leftrightarrow D_X$ das Wechseln der Kreuzungen in X :



Definition (Vassiliev 1990, Goussarov 1991)

$v: \mathcal{L} \rightarrow A$ ist vom Grad $\leq m$ falls $\sum_{Y \subset X} (-1)^{|Y|} v(D_Y) = 0$ für $|X| > m$.

Invarianten von endlichem Typ

Wir bezeichnen mit $D \leftrightarrow D_X$ das Wechseln der Kreuzungen in X :



Definition (Vassiliev 1990, Goussarov 1991)

$v: \mathcal{L} \rightarrow A$ ist vom Grad $\leq m$ falls $\sum_{Y \subset X} (-1)^{|Y|} v(D_Y) = 0$ für $|X| > m$.

Grad < 0 : $v = 0$.

Invarianten von endlichem Typ

Wir bezeichnen mit $D \leftrightarrow D_X$ das Wechseln der Kreuzungen in X :



Definition (Vassiliev 1990, Goussarov 1991)

$v: \mathcal{L} \rightarrow A$ ist vom Grad $\leq m$ falls $\sum_{Y \subset X} (-1)^{|Y|} v(D_Y) = 0$ für $|X| > m$.

Grad < 0 : $v = 0$.

Grad ≤ 0 : $v(\text{crossing}) - v(\text{resolution}) = 0$

Invarianten von endlichem Typ

Wir bezeichnen mit $D \leftrightarrow D_X$ das Wechseln der Kreuzungen in X :



Definition (Vassiliev 1990, Goussarov 1991)

$v: \mathcal{L} \rightarrow A$ ist vom Grad $\leq m$ falls $\sum_{Y \subset X} (-1)^{|Y|} v(D_Y) = 0$ für $|X| > m$.

Grad < 0 : $v = 0$.

Grad ≤ 0 : $v(\text{crossing}) - v(\text{crossing}) = 0$

Grad ≤ 1 : $v(\text{crossing}) - v(\text{crossing}) - v(\text{crossing}) + v(\text{crossing}) = 0$

Invarianten von endlichem Typ

Wir bezeichnen mit $D \leftrightarrow D_X$ das Wechseln der Kreuzungen in X :



Definition (Vassiliev 1990, Goussarov 1991)

$v: \mathcal{L} \rightarrow A$ ist vom Grad $\leq m$ falls $\sum_{Y \subset X} (-1)^{|Y|} v(D_Y) = 0$ für $|X| > m$.

Grad < 0 : $v = 0$.

Grad ≤ 0 : $v(\text{crossing}) - v(\text{resolution}) = 0$

Grad ≤ 1 : $v(\text{crossing of two crossings}) - v(\text{resolution of two crossings}) - v(\text{crossing of two crossings}) + v(\text{resolution of two crossings}) = 0$

Grad $\leq m$: v verhält sich wie ein Polynom vom Grad m .

Invarianten von endlichem Typ

Wir bezeichnen mit $D \leftrightarrow D_X$ das Wechseln der Kreuzungen in X :



Definition (Vassiliev 1990, Goussarov 1991)

$v: \mathcal{L} \rightarrow A$ ist vom Grad $\leq m$ falls $\sum_{Y \subset X} (-1)^{|Y|} v(D_Y) = 0$ für $|X| > m$.

Grad < 0 : $v = 0$.

Grad ≤ 0 : $v(\text{crossing}) - v(\text{resolution}) = 0$

Grad ≤ 1 : $v(\text{crossing of two crossings}) - v(\text{resolution of two crossings}) - v(\text{crossing of two crossings}) + v(\text{resolution of two crossings}) = 0$

Grad $\leq m$: v verhält sich wie ein Polynom vom Grad m .

Satz (Birman–Lin 1993)

Entwickle $V(L) = \sum v_k(L) \cdot h^k$ in $q = \exp(h/2)$.

Dann ist $L \mapsto v_k(L)$ eine Invariante vom Grad $\leq k$.

Invarianten von endlichem Typ

Wir bezeichnen mit $D \leftrightarrow D_X$ das Wechseln der Kreuzungen in X :



Definition (Vassiliev 1990, Goussarov 1991)

$v: \mathcal{L} \rightarrow A$ ist vom Grad $\leq m$ falls $\sum_{Y \subset X} (-1)^{|Y|} v(D_Y) = 0$ für $|X| > m$.

Grad < 0 : $v = 0$.

Grad ≤ 0 : $v(\text{crossing}) - v(\text{crossing}) = 0$

Grad ≤ 1 : $v(\text{crossing}) - v(\text{crossing}) - v(\text{crossing}) + v(\text{crossing}) = 0$

Grad $\leq m$: v verhält sich wie ein Polynom vom Grad m .

Satz (Birman–Lin 1993)

Entwickle $V(L) = \sum v_k(L) \cdot h^k$ in $q = \exp(h/2)$.

Dann ist $L \mapsto v_k(L)$ eine Invariante vom Grad $\leq k$.

Arbeiten von Vassiliev, Goussarov, Birman, Lin, Bar-Natan, Kontsevich, ...

Frage (Vassiliev 1990)

Unterscheiden Vassiliev-Invarianten alle Knoten?

Frage (Vassiliev 1990)

Unterscheiden Vassiliev-Invarianten alle Knoten?

Satz (Spin und Torsion in $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$)

2001

In $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ gibt es Knoten, die nicht von rationalen Vassiliev-Invarianten unterschieden werden wohl aber von Vassiliev-Invarianten mit Werten in $\mathbb{Z}/2$.

Frage (Vassiliev 1990)

Unterscheiden Vassiliev-Invarianten alle Knoten?

Satz (Spin und Torsion in $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$)

2001

In $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ gibt es Knoten, die nicht von rationalen Vassiliev-Invarianten unterschieden werden wohl aber von Vassiliev-Invarianten mit Werten in $\mathbb{Z}/2$.

Satz (Whitehead-Mannigfaltigkeiten)

2004

Sei $W \subset \mathbb{R}^3$ offen und zusammenziehbar, $W \not\cong \mathbb{R}^3$.

Frage (Vassiliev 1990)

Unterscheiden Vassiliev-Invarianten alle Knoten?

Satz (Spin und Torsion in $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$)

2001

In $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ gibt es Knoten, die nicht von rationalen Vassiliev-Invarianten unterschieden werden wohl aber von Vassiliev-Invarianten mit Werten in $\mathbb{Z}/2$.

Satz (Whitehead-Mannigfaltigkeiten)

2004

Sei $W \subset \mathbb{R}^3$ offen und zusammenziehbar, $W \not\cong \mathbb{R}^3$. Dann gibt es Knoten $K \neq K'$ in W , die nicht durch Vassiliev-Invarianten unterschieden werden.

Frage (Vassiliev 1990)

Unterscheiden Vassiliev-Invarianten alle Knoten?

Satz (Spin und Torsion in $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$)

2001

In $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ gibt es Knoten, die nicht von rationalen Vassiliev-Invarianten unterschieden werden wohl aber von Vassiliev-Invarianten mit Werten in $\mathbb{Z}/2$.

Satz (Whitehead-Mannigfaltigkeiten)

2004

Sei $W \subset \mathbb{R}^3$ offen und zusammenziehbar, $W \not\cong \mathbb{R}^3$. Dann gibt es Knoten $K \neq K'$ in W , die nicht durch Vassiliev-Invarianten unterschieden werden.

Satz (Homotopie-Sphären)

2004

Wenn Vassiliev-Invarianten alle Knoten in Homotopie-Sphären unterscheiden, dann impliziert dies die Poincaré-Vermutung.

- 1 Von klassischen Invarianten zu Quanteninvarianten
- 2 Diskrete Yang-Baxter-Operatoren und Deformationen
 - Zopfgruppen operieren auf Gruppen und Quandeln
 - Diskrete Yang-Baxter-Operatoren und Färbungsinvarianten
 - Klassifikation der Yang-Baxter-Deformationen
- 3 Das Jones-Polynom von Bandverschlingungen
- 4 Zusammenfassung und Ausblick

Zopfgruppen operieren auf Gruppen

Konjugation $a * b := b^{-1}ab$ und $a \bar{*} b := bab^{-1}$ in einer Gruppe:

$$(Q1) \quad a * a = a \quad \text{(Idempotenz)}$$

$$(Q2) \quad (a * b) \bar{*} b = (a \bar{*} b) * b = a \quad \text{(Invertierbarkeit)}$$

$$(Q3) \quad (a * b) * c = (a * c) * (b * c) \quad \text{(Selbst-Distributivität)}$$

Zopfgruppen operieren auf Gruppen

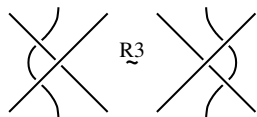
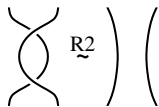
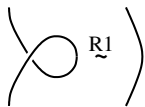
Konjugation $a * b := b^{-1}ab$ und $a \bar{*} b := bab^{-1}$ in einer Gruppe:

$$(Q1) \quad a * a = a \quad \text{(Idempotenz)}$$

$$(Q2) \quad (a * b) \bar{*} b = (a \bar{*} b) * b = a \quad \text{(Invertierbarkeit)}$$

$$(Q3) \quad (a * b) * c = (a * c) * (b * c) \quad \text{(Selbst-Distributivität)}$$

Dies entspricht den Reidemeister-Zügen (R1), (R2), (R3).



Zopfgruppen operieren auf Gruppen

Konjugation $a * b := b^{-1}ab$ und $a \bar{*} b := bab^{-1}$ in einer Gruppe:

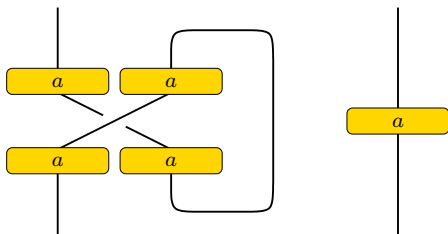
(Q1) $a * a = a$ (Idempotenz)

(Q2) $(a * b) \bar{*} b = (a \bar{*} b) * b = a$ (Invertierbarkeit)

(Q3) $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$ (Selbst-Distributivität)

Dies entspricht den Reidemeister-Zügen (R1), (R2), (R3).

(Q1) entspricht dem ersten Reidemeister-Zug:



Zopfgruppen operieren auf Gruppen

Konjugation $a * b := b^{-1}ab$ und $a \bar{*} b := bab^{-1}$ in einer Gruppe:

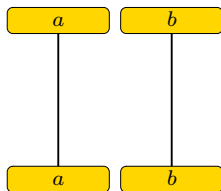
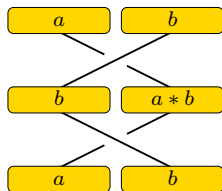
(Q1) $a * a = a$ (Idempotenz)

(Q2) $(a * b) \bar{*} b = (a \bar{*} b) * b = a$ (Invertierbarkeit)

(Q3) $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$ (Selbst-Distributivität)

Dies entspricht den Reidemeister-Zügen (R1), (R2), (R3).

(Q2) entspricht der Zopfrelation auf 2 Strängen:



Zopfgruppen operieren auf Gruppen

Konjugation $a * b := b^{-1}ab$ und $a \bar{*} b := bab^{-1}$ in einer Gruppe:

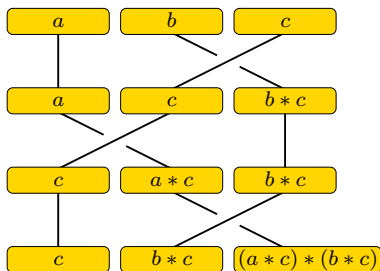
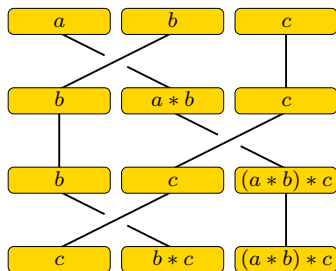
$$(Q1) \quad a * a = a \quad \text{(Idempotenz)}$$

$$(Q2) \quad (a * b) \bar{*} b = (a \bar{*} b) * b = a \quad \text{(Invertierbarkeit)}$$

$$(Q3) \quad (a * b) * c = (a * c) * (b * c) \quad \text{(Selbst-Distributivität)}$$

Dies entspricht den Reidemeister-Zügen (R1), (R2), (R3).

(Q3) entspricht der Zopfrelation auf 3 Strängen:



Zopfgruppen operieren auf Quandeln

Konjugation $a * b := b^{-1}ab$ und $a \bar{*} b := bab^{-1}$ in einer Gruppe:

$$(Q1) \quad a * a = a \quad \text{(Idempotenz)}$$

$$(Q2) \quad (a * b) \bar{*} b = (a \bar{*} b) * b = a \quad \text{(Invertierbarkeit)}$$

$$(Q3) \quad (a * b) * c = (a * c) * (b * c) \quad \text{(Selbst-Distributivität)}$$

Dies entspricht den Reidemeister-Zügen (R1), (R2), (R3).

Definition (Joyce 1982)

Ein *Quandel* $(Q, *, \bar{*})$ ist eine Menge Q mit zwei Operationen $*, \bar{*}: Q \times Q \rightarrow Q$ mit obigen Eigenschaften (Q1-Q3).

Zopfgruppen operieren auf Quandeln

Konjugation $a * b := b^{-1}ab$ und $a \bar{*} b := bab^{-1}$ in einer Gruppe:

$$(Q1) \quad a * a = a \quad \text{(Idempotenz)}$$

$$(Q2) \quad (a * b) \bar{*} b = (a \bar{*} b) * b = a \quad \text{(Invertierbarkeit)}$$

$$(Q3) \quad (a * b) * c = (a * c) * (b * c) \quad \text{(Selbst-Distributivität)}$$

Dies entspricht den Reidemeister-Zügen (R1), (R2), (R3).

Definition (Joyce 1982)

Ein *Quandel* $(Q, *, \bar{*})$ ist eine Menge Q mit zwei Operationen $*, \bar{*}: Q \times Q \rightarrow Q$ mit obigen Eigenschaften (Q1-Q3).

\Rightarrow Aktion der Zopfgruppe B_n auf Q^n (Brieskorn 1986)

Zopfgruppen operieren auf Quandeln

Konjugation $a * b := b^{-1}ab$ und $a \bar{*} b := bab^{-1}$ in einer Gruppe:

$$(Q1) \quad a * a = a \quad \text{(Idempotenz)}$$

$$(Q2) \quad (a * b) \bar{*} b = (a \bar{*} b) * b = a \quad \text{(Invertierbarkeit)}$$

$$(Q3) \quad (a * b) * c = (a * c) * (b * c) \quad \text{(Selbst-Distributivität)}$$

Dies entspricht den Reidemeister-Zügen (R1), (R2), (R3).

Definition (Joyce 1982)

Ein *Quandel* $(Q, *, \bar{*})$ ist eine Menge Q mit zwei Operationen $*, \bar{*}: Q \times Q \rightarrow Q$ mit obigen Eigenschaften (Q1-Q3).

\Rightarrow Aktion der Zopfgruppe B_n auf Q^n (Brieskorn 1986)

\Rightarrow Diskreter Yang-Baxter-Operator (Freyd-Yetter 1989, Drinfel'd 1990)

Sei G eine Gruppe und $Q = x^G$ eine Konjugationsklasse.

Sei $E = \mathbb{Z}Q$ und $c_Q: E \otimes E \rightarrow E \otimes E, a \otimes b \mapsto b \otimes (a * b)$.

Sei G eine Gruppe und $Q = x^G$ eine Konjugationsklasse.
Sei $E = \mathbb{Z}Q$ und $c_Q: E \otimes E \rightarrow E \otimes E$, $a \otimes b \mapsto b \otimes (a * b)$.

Satz (Freyd-Yetter 1989)

Die so erhaltene Invariante $F_G^x: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist die Färbungszahl

$$F_G^x(K) = \# \text{Hom}(\pi_K, m_K; G, x).$$

Sei G eine Gruppe und $Q = x^G$ eine Konjugationsklasse.
Sei $E = \mathbb{Z}Q$ und $c_Q: E \otimes E \rightarrow E \otimes E, a \otimes b \mapsto b \otimes (a * b)$.

Satz (Freyd-Yetter 1989)

Die so erhaltene Invariante $F_G^x: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist die Färbungszahl

$$F_G^x(K) = \# \text{Hom}(\pi_K, m_K; G, x).$$

Natürliche Frage: Lässt sich c_Q deformieren?

Sei G eine Gruppe und $Q = x^G$ eine Konjugationsklasse.
Sei $E = \mathbb{Z}Q$ und $c_Q: E \otimes E \rightarrow E \otimes E, a \otimes b \mapsto b \otimes (a * b)$.

Satz (Freyd-Yetter 1989)

Die so erhaltene Invariante $F_G^x: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist die Färbungszahl

$$F_G^x(K) = \# \text{Hom}(\pi_K, m_K; G, x).$$

Natürliche Frage: Lässt sich c_Q deformieren?

Das Färbungspolynom $P_G^x: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Z}[G]$ ist die Summe

$$P_G^x(K) := \sum_{\rho} \rho(\ell_K) \quad \text{über } \rho: \pi_K \rightarrow G \text{ mit } \rho(m_k) = x.$$

Es gilt $F_G^x = \varepsilon P_G^x$ mittels $\varepsilon: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}, g \mapsto 1$.

Sei G eine Gruppe und $Q = x^G$ eine Konjugationsklasse.
Sei $E = \mathbb{Z}Q$ und $c_Q: E \otimes E \rightarrow E \otimes E, a \otimes b \mapsto b \otimes (a * b)$.

Satz (Freyd-Yetter 1989)

Die so erhaltene Invariante $F_G^x: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist die Färbungszahl

$$F_G^x(K) = \# \text{Hom}(\pi_K, m_K; G, x).$$

Natürliche Frage: Lässt sich c_Q deformieren?

Das Färbungspolynom $P_G^x: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Z}[G]$ ist die Summe

$$P_G^x(K) := \sum_{\rho} \rho(\ell_K) \quad \text{über } \rho: \pi_K \rightarrow G \text{ mit } \rho(m_k) = x.$$

Es gilt $F_G^x = \varepsilon P_G^x$ mittels $\varepsilon: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}, g \mapsto 1$.

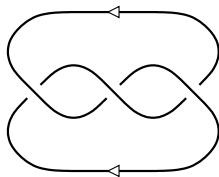
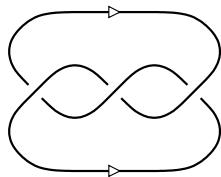
Satz

2007

Das Färbungspolynom $P_G^x(K)$ ist eine Yang-Baxter-Invariante.

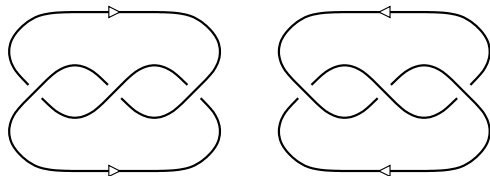
Erstes Beispiel zu Färbungspolynomen

Die beiden Kleeblattschlingen:



Erstes Beispiel zu Färbungspolynomen

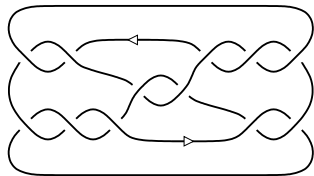
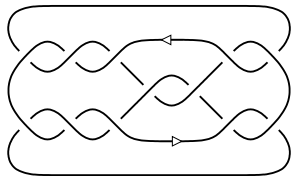
Die beiden Kleeblattschlingen:



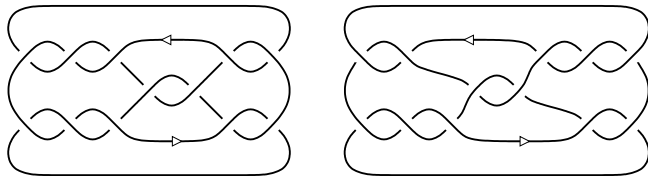
Wir wählen $G = A_5$ und $x = (12345)$

und finden $P_G^x(3_1) = 1 + 5x$ und $P_G^x(3_1^*) = 1 + 5x^{-1}$.

Zweites Beispiel zu Färbungspolynomen



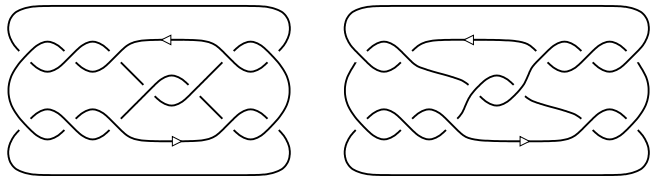
Zweites Beispiel zu Färbungspolynomen



Sei M_{11} die Mathieu-Gruppe der Ordnung $7920 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$,

$$M_{11} = \langle x = (abcdefghijk), y = (abcejikdghf) \rangle \subset A_{11}.$$

Zweites Beispiel zu Färbungspolynomen



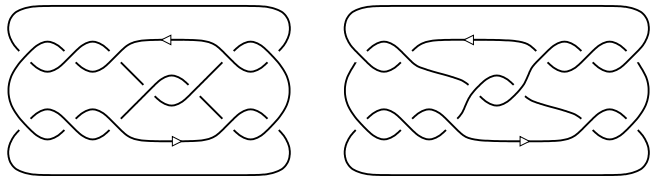
Sei M_{11} die Mathieu-Gruppe der Ordnung $7920 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$,

$$M_{11} = \langle x = (abcdefghijk), y = (abcejikdghf) \rangle \subset A_{11}.$$

Für den Kinoshita-Terasaka-Knoten K und den Conway-Knoten C finden wir

$P(K) = 1 + 11x^3 + 11x^7$	$P(C) = 1 + 11x^3 + 11x^7$
$P(K^*) = 1 + 11x^4 + 11x^8$	$P(C^*) = 1 + 11x^4 + 11x^8$
$P(K^\times) = 1 + 11x^4 + 22x^8$	$P(C^\times) = 1 + 11x^4 + 11x^6 + 11x^8$
$P(K^!) = 1 + 22x^3 + 11x^7$	$P(C^!) = 1 + 11x^3 + 11x^5 + 11x^7$

Zweites Beispiel zu Färbungspolynomen



Sei M_{11} die Mathieu-Gruppe der Ordnung $7920 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$,

$$M_{11} = \langle x = (abcdefghijk), y = (abcejikdghf) \rangle \subset A_{11}.$$

Für den Kinoshita-Terasaka-Knoten K und den Conway-Knoten C finden wir

$$\begin{array}{ll} P(K) = 1 + 11x^3 + 11x^7 & P(C) = 1 + 11x^3 + 11x^7 \\ P(K^*) = 1 + 11x^4 + 11x^8 & P(C^*) = 1 + 11x^4 + 11x^8 \\ P(K^\times) = 1 + 11x^4 + 22x^8 & P(C^\times) = 1 + 11x^4 + 11x^6 + 11x^8 \\ P(K^!) = 1 + 22x^3 + 11x^7 & P(C^!) = 1 + 11x^3 + 11x^5 + 11x^7 \end{array}$$

Yang-Baxter-Invarianten können also nicht-invertierbare Knoten erkennen!
Für die Unterklasse der Quanten-Invarianten bleibt diese Frage bislang offen.

Satz

2007

Sei $Q \rightarrow \text{Inn}(Q)$ injektiv. Dann ist jede Yang-Baxter-Deformation von $c_Q: \mathbb{A}Q^2 \rightarrow \mathbb{A}Q^2$ über $\mathbb{A} = \mathbb{K}[h]/(h^2)$ diagonal (modulo Äquivalenz).

Satz

2007

Sei $Q \rightarrow \text{Inn}(Q)$ injektiv. Dann ist jede Yang-Baxter-Deformation von $c_Q: \mathbb{A}Q^2 \rightarrow \mathbb{A}Q^2$ über $\mathbb{A} = \mathbb{K}[h]/(h^2)$ diagonal (modulo Äquivalenz).

Hilfsmittel: Yang-Baxter-Kohomologie, Homotopie-Retraktion

Satz

2007

Sei $Q \rightarrow \text{Inn}(Q)$ injektiv. Dann ist jede Yang-Baxter-Deformation von $c_Q: \mathbb{A}Q^2 \rightarrow \mathbb{A}Q^2$ über $\mathbb{A} = \mathbb{K}[h]/(h^2)$ diagonal (modulo Äquivalenz).

Hilfsmittel: Yang-Baxter-Kohomologie, Homotopie-Retraktion

Satz

2007

Sei $Q \rightarrow \text{Inn}(Q)$ injektiv. Alle durch Deformation aus c_Q gewonnenen Invarianten sind Spezialisierungen von Färbungspolynomen.

Satz

2007

Sei $Q \rightarrow \text{Inn}(Q)$ injektiv. Dann ist jede Yang-Baxter-Deformation von $c_Q: \mathbb{A}Q^2 \rightarrow \mathbb{A}Q^2$ über $\mathbb{A} = \mathbb{K}[h]/(h^2)$ diagonal (modulo Äquivalenz).

Hilfsmittel: Yang-Baxter-Kohomologie, Homotopie-Retraktion

Satz

2007

Sei $Q \rightarrow \text{Inn}(Q)$ injektiv. Alle durch Deformation aus c_Q gewonnenen Invarianten sind Spezialisierungen von Färbungspolynomen.

Hilfsmittel: Überlagerungen und Galois-Korrespondenz für Quandel.

Satz

2007

Sei $Q \rightarrow \text{Inn}(Q)$ injektiv. Dann ist jede Yang-Baxter-Deformation von $c_Q: \mathbb{A}Q^2 \rightarrow \mathbb{A}Q^2$ über $\mathbb{A} = \mathbb{K}[h]/(h^2)$ diagonal (modulo Äquivalenz).

Hilfsmittel: Yang-Baxter-Kohomologie, Homotopie-Retraktion

Satz

2007

Sei $Q \rightarrow \text{Inn}(Q)$ injektiv. Alle durch Deformation aus c_Q gewonnenen Invarianten sind Spezialisierungen von Färbungspolynomen.

Hilfsmittel: Überlagerungen und Galois-Korrespondenz für Quandel.

Satz (Fenn-Rourke, Carter *et al*, Eisermann)

Es gibt eine Korrespondenz zwischen

- *diagonalen Deformationen von c_Q über $\mathbb{A} = \mathbb{K}[h]/(h^2)$,*
- *der Quandel-Homologie $H^2(Q, \mathbb{K})$ mit Koeffizienten in \mathbb{K} ,*
- *den zentralen Erweiterungen $\mathcal{E}(Q, \mathbb{K})$ von Q durch die Gruppe $(\mathbb{K}, +)$.*

- 1 Von klassischen Invarianten zu Quanteninvarianten
- 2 Diskrete Yang-Baxter-Operatoren und Deformationen
- 3 Das Jones-Polynom von Bandverschlingungen**
 - Scheiben- und Bandknoten, Fox'sche Vermutung
 - Das Jones-Polynom von Bandverschlingungen
 - Entwicklung in Invarianten von endlichem Typ
- 4 Zusammenfassung und Ausblick

Beispiel

Sei $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ gegeben durch $f(z) = (z^2, z^3)$.

Beispiel

Sei $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ gegeben durch $f(z) = (z^2, z^3)$.

In $0 \in \mathbb{R}^4$ ist die Fläche $\Sigma = \text{Im}(f)$ nicht lokal flach.

Beispiel

Sei $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ gegeben durch $f(z) = (z^2, z^3)$.
In $0 \in \mathbb{R}^4$ ist die Fläche $\Sigma = \text{Im}(f)$ nicht lokal flach.

$K_x^\varepsilon := \Sigma \cap \partial B_x^\varepsilon$ ist ein Knoten.

Beispiel

Sei $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ gegeben durch $f(z) = (z^2, z^3)$.

In $0 \in \mathbb{R}^4$ ist die Fläche $\Sigma = \text{Im}(f)$ nicht lokal flach.

$K_x^\varepsilon := \Sigma \cap \partial B_x^\varepsilon$ ist ein Knoten. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ ist dieser unabhängig von ε .

Beispiel

Sei $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ gegeben durch $f(z) = (z^2, z^3)$.
In $0 \in \mathbb{R}^4$ ist die Fläche $\Sigma = \text{Im}(f)$ nicht lokal flach.

$K_x^\varepsilon := \Sigma \cap \partial B_x^\varepsilon$ ist ein Knoten. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ ist dieser unabhängig von ε .
In unserem Beispiel finden wir die Kleeblattschlinge, $K_x = 3_1$.

Beispiel

Sei $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ gegeben durch $f(z) = (z^2, z^3)$.
In $0 \in \mathbb{R}^4$ ist die Fläche $\Sigma = \text{Im}(f)$ nicht lokal flach.

$K_x^\varepsilon := \Sigma \cap \partial B_x^\varepsilon$ ist ein Knoten. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ ist dieser unabhängig von ε .
In unserem Beispiel finden wir die Kleeblattschlinge, $K_x = 3_1$.

Definition (Scheibenknoten / slice knot)

$K \subset \mathbb{S}^3$ heißt *Scheibenknoten* wenn er eine glatte Scheibe in $\bar{\mathbb{B}}^4$ berandet.

Beispiel

Sei $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ gegeben durch $f(z) = (z^2, z^3)$.
In $0 \in \mathbb{R}^4$ ist die Fläche $\Sigma = \text{Im}(f)$ nicht lokal flach.

$K_x^\varepsilon := \Sigma \cap \partial B_x^\varepsilon$ ist ein Knoten. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ ist dieser unabhängig von ε .
In unserem Beispiel finden wir die Kleeblattschlinge, $K_x = 3_1$.

Definition (Scheibenknoten / slice knot)

$K \subset \mathbb{S}^3$ heißt *Scheibenknoten* wenn er eine glatte Scheibe in $\bar{\mathbb{B}}^4$ berandet.

Ist K_x ein Scheibenknoten, so kann die Singularität in x behoben werden.

Beispiel

Sei $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ gegeben durch $f(z) = (z^2, z^3)$.
In $0 \in \mathbb{R}^4$ ist die Fläche $\Sigma = \text{Im}(f)$ nicht lokal flach.

$K_x^\varepsilon := \Sigma \cap \partial B_x^\varepsilon$ ist ein Knoten. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ ist dieser unabhängig von ε .
In unserem Beispiel finden wir die Kleeblattschlinge, $K_x = 3_1$.

Definition (Scheibenknoten / slice knot)

$K \subset \mathbb{S}^3$ heißt *Scheibenknoten* wenn er eine glatte Scheibe in $\bar{\mathbb{B}}^4$ berandet.

Ist K_x ein Scheibenknoten, so kann die Singularität in x behoben werden.

Satz (Fox-Milnor 1966)

Für jeden Scheibenknoten K gilt $\Delta(K) = P(q) \cdot P(q^{-1})$ mit $P \in \mathbb{Z}[q]$. \square

Singularitäten von Flächen in \mathbb{R}^4 (Fox–Milnor 1958)

Beispiel

Sei $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ gegeben durch $f(z) = (z^2, z^3)$.
In $0 \in \mathbb{R}^4$ ist die Fläche $\Sigma = \text{Im}(f)$ nicht lokal flach.

$K_x^\varepsilon := \Sigma \cap \partial B_x^\varepsilon$ ist ein Knoten. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ ist dieser unabhängig von ε .
In unserem Beispiel finden wir die Kleeblattschlinge, $K_x = 3_1$.

Definition (Scheibenknoten / slice knot)

$K \subset \mathbb{S}^3$ heißt *Scheibenknoten* wenn er eine glatte Scheibe in $\bar{\mathbb{B}}^4$ berandet.

Ist K_x ein Scheibenknoten, so kann die Singularität in x behoben werden.

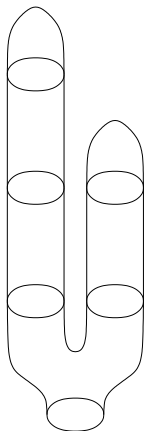
Satz (Fox-Milnor 1966)

Für jeden Scheibenknoten K gilt $\Delta(K) = P(q) \cdot P(q^{-1})$ mit $P \in \mathbb{Z}[q]$. \square

In unserem Beispiel gilt $\Delta(3_1) = q^2 - 1 + q^{-2}$. Dies zerfällt nicht.

Beispiel eines nicht-trivialen Scheibenknotens

abstrakte Fläche



Maximum



Maximum

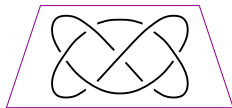
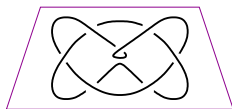


Isotopie

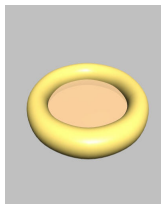


Sattelpunkt

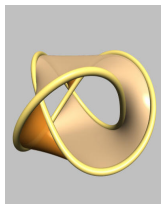
eingebettete Fläche in \mathbb{R}_+^4



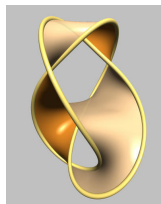
Eingebettete Flächen mit Rand:



(a) trivialer Knoten \bigcirc



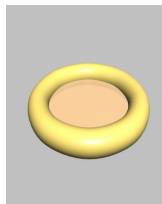
(b) Kleeblattschlinge 3_1



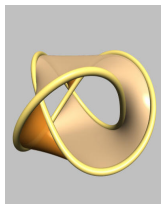
(c) Achterknoten 4_1

Bandflächen in \mathbb{R}^3 (nach Fox 1962)

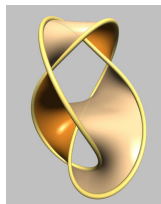
Eingebettete Flächen mit Rand:



(a) trivialer Knoten \bigcirc

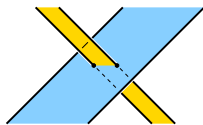


(b) Kleeblattschlinge 3_1

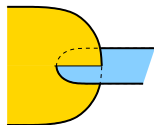


(c) Achterknoten 4_1

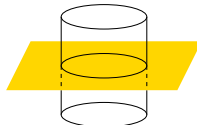
Immersierte Flächen mit Rand:



(d) Band-Singularität



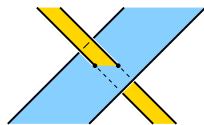
(e) Clasp-Singularität



(f) Kreis-Singularität

Definition

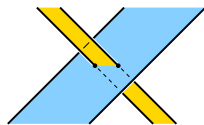
Eine *Bandfläche* ist eine immersierte Fläche nur mit Band-Singularitäten.



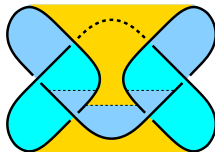
(a) Band-Singularität

Definition

Eine *Bandfläche* ist eine immersierte Fläche nur mit Band-Singularitäten.



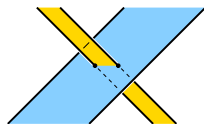
(a) Band-Singularität



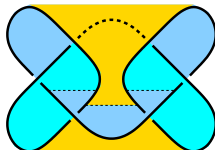
(b) $3_1 \# 3_1^*$

Definition

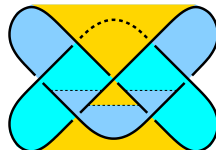
Eine *Bandfläche* ist eine immensierte Fläche nur mit Band-Singularitäten.



(a) Band-Singularität



(b) $3_1 \# 3_1^*$

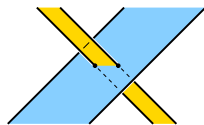


(c) 6_1

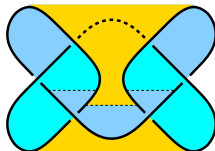
Abbildung: Immensierte Flächen mit Bandsingularitäten

Definition

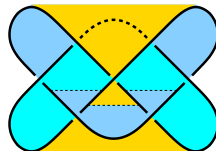
Eine *Bandfläche* ist eine immensierte Fläche nur mit Band-Singularitäten.



(a) Band-Singularität



(b) $3_1 \# 3_1^*$



(c) 6_1

Abbildung: Immensierte Flächen mit Bandsingularitäten

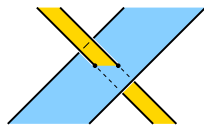
Definition

Ein Knoten $K \subset \mathbb{R}^3$ heißt *Bandknoten* wenn er eine immensierte Kreisfläche $S \subset \mathbb{R}^3$ berandet, die nur Band-Singularitäten hat.

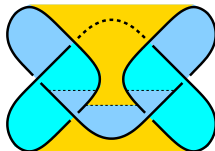
Bandflächen im \mathbb{R}^3 (nach Fox 1962)

Definition

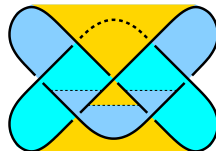
Eine *Bandfläche* ist eine immensierte Fläche nur mit Band-Singularitäten.



(a) Band-Singularität



(b) $3_1 \# 3_1^*$



(c) 6_1

Abbildung: Immensierte Flächen mit Bandsingularitäten

Definition

Ein Knoten $K \subset \mathbb{R}^3$ heißt *Bandknoten* wenn er eine immensierte Kreisfläche $S \subset \mathbb{R}^3$ berandet, die nur Band-Singularitäten hat.

Beispiel

Für jeden Knoten K ist die symmetrische Summe $K \# K^*$ ein Bandknoten.

Die Band-Vermutung (Fox 1962)

Beobachtung (Fox 1962)

Bandfläche $S \subset \mathbb{R}^3$ \iff glatte Fläche $S_+ \subset \mathbb{R}_+^4$ evtl. mit Minima
 \uparrow $\downarrow?$
glatte Fläche $S_+ \subset \mathbb{R}_+^4$ ohne Minima

Die Band-Vermutung (Fox 1962)

Beobachtung (Fox 1962)

		glatte Fläche	$S_+ \subset \mathbb{R}_+^4$	evtl. mit Minima
			\uparrow	$\downarrow?$
Bandfläche	$S \subset \mathbb{R}^3$	\iff	glatte Fläche	$S_+ \subset \mathbb{R}_+^4$ ohne Minima

3-dimensionales Geschlecht:

$$g_3(K) := \min \{ g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ Seifert-Fläche, } \partial S = K \}$$

$$g_3(K) = 0 \iff K \text{ ist trivial}$$

Die Band-Vermutung (Fox 1962)

Beobachtung (Fox 1962)

$$\begin{array}{ccc} & \text{glatte Fläche } S_+ \subset \mathbb{R}_+^4 \text{ evtl. mit Minima} & \\ & \uparrow \quad \downarrow? & \\ \text{Bandfläche } S \subset \mathbb{R}^3 & \iff & \text{glatte Fläche } S_+ \subset \mathbb{R}_+^4 \text{ ohne Minima} \end{array}$$

3-dimensionales Geschlecht:

$$g_3(K) := \min\{ g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ Seifert-Fläche, } \partial S = K \}$$

$$g_3(K) = 0 \iff K \text{ ist trivial}$$

Bandgeschlecht:

$$g_r(K) := \min\{ g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ Bandfläche, } \partial S = K \}$$

$$g_r(K) = 0 \iff K \text{ ist Bandknoten}$$

Die Band-Vermutung (Fox 1962)

Beobachtung (Fox 1962)

$$\begin{array}{ccc} & \text{glatte Fläche } S_+ \subset \mathbb{R}_+^4 \text{ evtl. mit Minima} & \\ & \uparrow \quad \downarrow? & \\ \text{Bandfläche } S \subset \mathbb{R}^3 & \iff & \text{glatte Fläche } S_+ \subset \mathbb{R}_+^4 \text{ ohne Minima} \end{array}$$

3-dimensionales Geschlecht:

$$g_3(K) := \min\{ g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ Seifert-Fläche, } \partial S = K \}$$
$$g_3(K) = 0 \iff K \text{ ist trivial}$$

Bandgeschlecht:

$$g_r(K) := \min\{ g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ Bandfläche, } \partial S = K \}$$
$$g_r(K) = 0 \iff K \text{ ist Bandknoten}$$

4-dimensionales Geschlecht:

$$g_4(K) := \min\{ g(S) \mid S \subset \mathbb{R}_+^4 \text{ eingebettete Fläche, } \partial S = K \}$$
$$g_4(K) = 0 \iff K \text{ ist Scheibenknoten}$$

Die Band-Vermutung (Fox 1962)

Beobachtung (Fox 1962)

Bandfläche $S \subset \mathbb{R}^3$ \iff glatte Fläche $S_+ \subset \mathbb{R}_+^4$ evtl. mit Minima
 \uparrow $\downarrow?$
glatte Fläche $S_+ \subset \mathbb{R}_+^4$ ohne Minima

3-dimensionales Geschlecht:

$$g_3(K) := \min\{ g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ Seifert-Fläche, } \partial S = K \}$$
$$g_3(K) = 0 \iff K \text{ ist trivial}$$

Bandgeschlecht:

$$g_r(K) := \min\{ g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ Bandfläche, } \partial S = K \}$$
$$g_r(K) = 0 \iff K \text{ ist Bandknoten}$$

4-dimensionales Geschlecht:

$$g_4(K) := \min\{ g(S) \mid S \subset \mathbb{R}_+^4 \text{ eingebettete Fläche, } \partial S = K \}$$
$$g_4(K) = 0 \iff K \text{ ist Scheibenknoten}$$

Frage (Band-Vermutung, Fox 1962)

Ist jeder Scheibenknoten ein Bandknoten?

Satz

2007

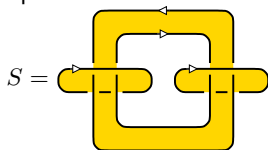
Wenn eine Verschlingung $L \subset \mathbb{R}^3$ eine Bandfläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit $\chi(S) = n$ berandet, dann ist $V(L)$ teilbar durch $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Satz

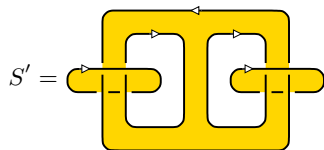
2007

Wenn eine Verschlingung $L \subset \mathbb{R}^3$ eine Bandfläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit $\chi(S) = n$ berandet, dann ist $V(L)$ teilbar durch $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Zwei Beispiele:



$$\chi(S) = 1 + 1 + 0 = 2$$



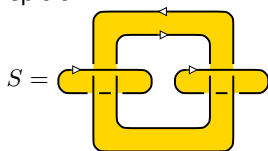
$$\chi(S') = 1 + 1 - 1 = 1$$

Satz

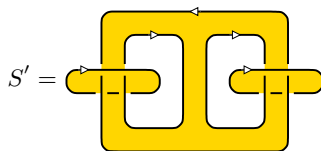
2007

Wenn eine Verschlingung $L \subset \mathbb{R}^3$ eine Bandfläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit $\chi(S) = n$ berandet, dann ist $V(L)$ teilbar durch $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Zwei Beispiele:



$$\chi(S) = 1 + 1 + 0 = 2$$



$$\chi(S') = 1 + 1 - 1 = 1$$

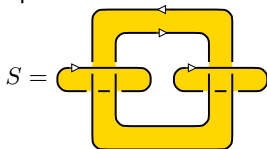
Hier gilt $V(L) = (q^{-1} + q^{+1}) \cdot (q^6 - q^4 + 2q^2 + 2q^{-2} - q^{-4} + q^{-6})$.

Satz

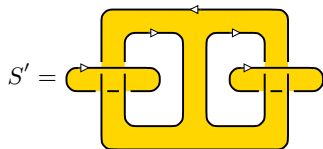
2007

Wenn eine Verschlingung $L \subset \mathbb{R}^3$ eine Bandfläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit $\chi(S) = n$ berandet, dann ist $V(L)$ teilbar durch $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Zwei Beispiele:



$$\chi(S) = 1 + 1 + 0 = 2$$



$$\chi(S') = 1 + 1 - 1 = 1$$

Hier gilt $V(L) = (q^{-1} + q^{+1}) \cdot (q^6 - q^4 + 2q^2 + 2q^{-2} - q^{-4} + q^{-6})$.

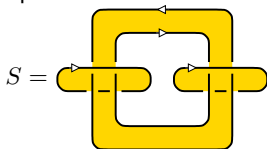
Also berandet L Bandflächen mit $\chi \leq 2$ aber nicht mit $\chi \geq 3$.

Satz

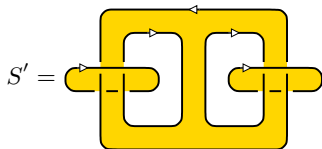
2007

Wenn eine Verschlingung $L \subset \mathbb{R}^3$ eine Bandfläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit $\chi(S) = n$ berandet, dann ist $V(L)$ teilbar durch $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Zwei Beispiele:



$$\chi(S) = 1 + 1 + 0 = 2$$



$$\chi(S') = 1 + 1 - 1 = 1$$

Hier gilt $V(L) = (q^{-1} + q^{+1}) \cdot (q^6 - q^4 + 2q^2 + 2q^{-2} - q^{-4} + q^{-6})$.

Also berandet L Bandflächen mit $\chi \leq 2$ aber nicht mit $\chi \geq 3$.

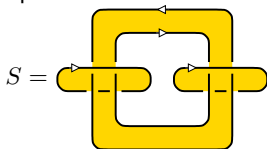
Weiter gilt $V(L') = (q^{+1} + q^{+5})^2 \cdot (q^{-1} + q^{-5})^2$.

Satz

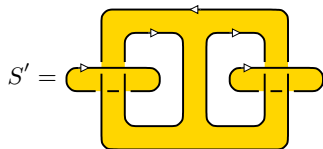
2007

Wenn eine Verschlingung $L \subset \mathbb{R}^3$ eine Bandfläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit $\chi(S) = n$ berandet, dann ist $V(L)$ teilbar durch $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Zwei Beispiele:



$$\chi(S) = 1 + 1 + 0 = 2$$



$$\chi(S') = 1 + 1 - 1 = 1$$

Hier gilt $V(L) = (q^{-1} + q^{+1}) \cdot (q^6 - q^4 + 2q^2 + 2q^{-2} - q^{-4} + q^{-6})$.

Also berandet L Bandflächen mit $\chi \leq 2$ aber nicht mit $\chi \geq 3$.

Weiter gilt $V(L') = (q^{+1} + q^{+5})^2 \cdot (q^{-1} + q^{-5})^2$.

Also berandet L' Bandflächen mit $\chi \leq 1$ aber nicht mit $\chi \geq 2$.

Satz (Kongruenz modulo 32)

2007

Sei $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ eine Bandverschlingung mit n Komponenten.

Satz (Kongruenz modulo 32)

2007

Sei $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ eine Bandverschlingung mit n Komponenten.

Dann ist $V(L)$ teilbar durch $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Satz (Kongruenz modulo 32)

2007

Sei $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ eine Bandverschlingung mit n Komponenten.

Dann ist $V(L)$ teilbar durch $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$. Die ganze Zahl

$$\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q \mapsto i)}$$

Satz (Kongruenz modulo 32)

2007

Sei $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ eine Bandverschlingung mit n Komponenten.

Dann ist $V(L)$ teilbar durch $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$. Die ganze Zahl

$$\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q \mapsto i)}$$

erfüllt die Kongruenz

$$\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n) \pmod{32}.$$

Satz (Kongruenz modulo 32)

2007

Sei $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ eine Bandverschlingung mit n Komponenten.
Dann ist $V(L)$ teilbar durch $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$. Die ganze Zahl

$$\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q \mapsto i)}$$

erfüllt die Kongruenz

$$\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n) \pmod{32}.$$

Insbesondere gilt $\det V(L) \equiv 1 \pmod{8}$.

Satz (Kongruenz modulo 32)

2007

Sei $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ eine Bandverschlingung mit n Komponenten.
Dann ist $V(L)$ teilbar durch $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$. Die ganze Zahl

$$\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q \mapsto i)}$$

erfüllt die Kongruenz

$$\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n) \pmod{32}.$$

Insbesondere gilt $\det V(L) \equiv 1 \pmod{8}$.

⇒ Analogie zur Seifert-Nullität: $\text{null } V(L) = \text{null}(L)$. Gilt das allgemein?

Satz (Kongruenz modulo 32)

2007

Sei $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ eine Bandverschlingung mit n Komponenten.
Dann ist $V(L)$ teilbar durch $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$. Die ganze Zahl

$$\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q \mapsto i)}$$

erfüllt die Kongruenz

$$\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n) \pmod{32}.$$

Insbesondere gilt $\det V(L) \equiv 1 \pmod{8}$.

⇒ Analogie zur Seifert-Nullität: $\text{null } V(L) = \text{null}(L)$. Gilt das allgemein?

⇒ Analogie zur Arf-Invariante: $\det(K) = 1 \pmod{8}$. Gilt das allgemein?

Satz (Kongruenz modulo 32)

2007

Sei $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ eine Bandverschlingung mit n Komponenten.
Dann ist $V(L)$ teilbar durch $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$. Die ganze Zahl

$$\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q \mapsto i)}$$

erfüllt die Kongruenz

$$\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n) \pmod{32}.$$

Insbesondere gilt $\det V(L) \equiv 1 \pmod{8}$.

⇒ Analogie zur Seifert-Nullität: $\text{null } V(L) = \text{null}(L)$. Gilt das allgemein?

⇒ Analogie zur Arf-Invariante: $\det(K) = 1 \pmod{8}$. Gilt das allgemein?

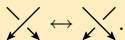
⇒ Hindernisse für Band-/Scheiben-Verschlingungen?

Satz (Birman-Lin 1993)

Entwickle $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(L) \cdot h^k$ in $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$

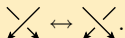
Satz (Birman-Lin 1993)

Entwickle $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(L) \cdot h^k$ in $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$
Dann ist $L \mapsto v_k(L)$ vom Grad $\leq k$ bezüglich Kreuzungswechsel



Satz (Birman-Lin 1993)

Entwickle $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(L) \cdot h^k$ in $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$
Dann ist $L \mapsto v_k(L)$ vom Grad $\leq k$ bezüglich Kreuzungswechsel



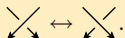
Satz

2007

Entwickle $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(L) \cdot h^k$ in $q = i \exp(h/2) = i + ih/2 + \dots$

Satz (Birman-Lin 1993)

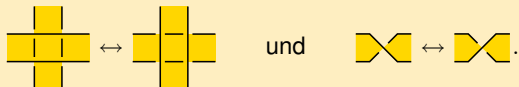
Entwickle $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(L) \cdot h^k$ in $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$
Dann ist $L \mapsto v_k(L)$ vom Grad $\leq k$ bezüglich Kreuzungswechsel



Satz

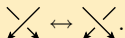
2007

Entwickle $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(L) \cdot h^k$ in $q = i \exp(h/2) = i + ih/2 + \dots$
Dann ist $S \mapsto d_k(\partial S)$ vom Grad $\leq k + 1 - \chi(S)$ bezüglich



Satz (Birman-Lin 1993)

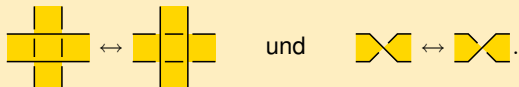
Entwickle $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(L) \cdot h^k$ in $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$
Dann ist $L \mapsto v_k(L)$ vom Grad $\leq k$ bezüglich Kreuzungswechsel



Satz

2007

Entwickle $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(L) \cdot h^k$ in $q = i \exp(h/2) = i + ih/2 + \dots$
Dann ist $S \mapsto d_k(\partial S)$ vom Grad $\leq k + 1 - \chi(S)$ bezüglich



Projekt

Ausarbeitung der Theorie: universelle Flächeninvariante von endlichem Typ, topologische Interpretation, Anwendung auf Knoten und Flächen, ...

- 1 Von klassischen Invarianten zu Quanteninvarianten
- 2 Diskrete Yang-Baxter-Operatoren und Deformationen
- 3 Das Jones-Polynom von Bandverschlingungen
- 4 Zusammenfassung und Ausblick**

Quanteninvarianten und Invarianten von endlichem Typ
Wechselwirkungen mit der Topologie von 3-Mannigfaltigkeiten

Quanteninvarianten und Invarianten von endlichem Typ
Wechselwirkungen mit der Topologie von 3-Mannigfaltigkeiten

Deformationstheorie angewendet auf Gruppen und Quandel
Klassifikation mittels Yang-Baxter-Kohomologie

Quanteninvarianten und Invarianten von endlichem Typ
Wechselwirkungen mit der Topologie von 3-Mannigfaltigkeiten

Deformationstheorie angewendet auf Gruppen und Quandel
Klassifikation mittels Yang-Baxter-Kohomologie

Anwendungen des Jones-Polynoms auf Flächen im \mathbb{R}^3 und im \mathbb{R}_+^4
Flächeninvarianten von endlichem Typ, Kategorifizierung

Quanteninvarianten und Invarianten von endlichem Typ
Wechselwirkungen mit der Topologie von 3-Mannigfaltigkeiten

Deformationstheorie angewendet auf Gruppen und Quandel
Klassifikation mittels Yang-Baxter-Kohomologie

Anwendungen des Jones-Polynoms auf Flächen im \mathbb{R}^3 und im \mathbb{R}_+^4
Flächeninvarianten von endlichem Typ, Kategorifizierung

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.