

Quanteninvarianten und niedrigdimensionale Topologie

Michael Eisermann

Institut Fourier, Grenoble
www-fourier.ujf-grenoble.fr/eiserm

9. März 2009

Vortrag am Mathematischen Institut der Universität Münster



1/32

Überblick

- 1 Von klassischen Invarianten zu Quanteninvarianten
 - Fundamentalgruppe und Alexander-Polynom
 - Jones-Polynom und Quanteninvarianten
 - Invarianten von endlichem Typ
- 2 Diskrete Yang-Baxter-Operatoren und Deformationen
 - Zopfgruppen operieren auf Gruppen und Quandeln
 - Diskrete Yang-Baxter-Operatoren und Färbungsinvarianten
 - Klassifikation der Yang-Baxter-Deformationen
- 3 Das Jones-Polynom von Bandverschlingungen
 - Scheiben- und Bandknoten, Fox'sche Vermutung
 - Das Jones-Polynom von Bandverschlingungen
 - Entwicklung in Invarianten von endlichem Typ
- 4 Zusammenfassung und Ausblick

2/32

Geschichtlicher Überblick zur Knotentheorie

Vorläufer (vor 1900)

Elektromagnetismus (Gauss)
Vorstudien zur Topologie (Listing)
Atomtheorie – Knoten im Äther (Kelvin)
empirische Klassifikation (Kirkman, Little, Tait)

Klassische Topologie (ab 1900)

Fundamentalgruppe (Poincaré, Wirtinger, Dehn, ...)
Homologie (Alexander, Seifert, ...)
Diagramme (Reidemeister), Zopfgruppen (Artin)
2/3/4-Mannigfaltigkeiten (Fox–Milnor, Papakyriakopoulos, Waldhausen, ...)

Quantentopologie (ab 1984)

Zopf-Darstellungen und Deformationen (Jones, HOMFLYPT, Kauffman, ...)
Invarianten von endlichem Typ (Vassiliev, Goussarov, ..., Kontsevich, ...)
Kategorifizierung (Khovanov, Osvath-Szabo, ...)

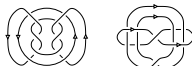
3/32

Knoten und Verschlingungen

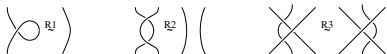
Ein *Knoten* ist eine glatte Einbettung $f: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (oder S^3).



Eine *Verschlingung* ist eine glatte Einbettung $f: n \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.



Wir betrachten diese modulo Isotopie des \mathbb{R}^3 .



4/32

Fundamentalgruppe

Satz (Dehn 1914)

Die beiden Kleeblattschlingen sind verschieden.

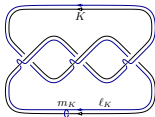
$$\pi_K := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$$

Meridian m_K

Longitude ℓ_K

Das Tripel (π_K, m_K, ℓ_K) ist eine Invariante des Knotens K .

Jedes Diagramm des Knotens K liefert eine Präsentation der Gruppe π_K .



Satz (Papakyriakopoulos 1957)

Der Knoten K ist genau dann trivial wenn $\ell_K = 1$ in π_K .

Satz (Waldhausen 1968)

Die Invariante $K \mapsto (\pi_K, m_K, \ell_K)$ klassifiziert Knoten bis auf Isotopie.

Vollständige Invariante, aber schwer zu handhaben.

§1.1

§1.1

Seifert-Flächen und Alexander-Polynom

Satz (Seifert 1935, Pontryagin 1930)

Jede Verschlingung $L \subset \mathbb{R}^3$ berandet eine kompakte, zusammenhängende, orientierte Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$.



(a) trivialer Knoten \bigcirc (b) Kleeblattschlinge 3_1 (c) Achterknoten 4_1

Sei $\theta: H_1(S) \times H_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}$ die Seifert-Form $\theta(a, b) = \text{lk}(a^\dagger, b^\dagger)$.

Satz (Alexander 1928, Seifert 1935)

$\Delta(L) = \det(q^{-\theta^*} - q^{+\theta}) \in \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ ist eine Invariante von L .

Vorteil: leicht zu berechnen und gute topologische Interpretation.

§1.2

Ergänzung: kombinatorische Darstellung

Satz (Alexander 1928, Conway 1969)

Es gibt eine einzige Invariante $\Delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ mit $\Delta(\bigcirc) = 1$ so dass

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1}) \cdot \Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array}\right) \cdot \Delta\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array}\right).$$

Beispiel:

$$\Delta(\bigcirc) - \Delta(\infty) = (q^{+1} - q^{-1})\Delta(\bigcirc) \Rightarrow \Delta(\bigcirc) = 0$$

$$\Delta(\bigcirc) - \Delta(\bigcirc) = (q^{+1} - q^{-1})\Delta(\bigcirc) \Rightarrow \Delta(\bigcirc) = q^{+1} - q^{-1}$$

$$\Delta(\bigcirc) - \Delta(\bigcirc) = (q^{+1} - q^{-1})\Delta(\bigcirc) \Rightarrow \Delta(\bigcirc) = q^{+2} - 1 + q^{-2}$$

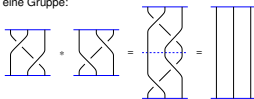
Daraus ersieht man: Das Alexander-Conway-Polynom unterscheidet nicht zwischen einem Knoten K und seinem Spiegelbild K^* .

§1.1

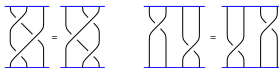
§1.2

Artin's Zopfgruppe

Zöpfe bilden eine Gruppe:



Offensichtliche Relationen:



Satz (Artin 1925, 1947)

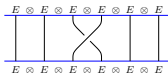
Die Zopfgruppe B_n auf n Strängen erlaubt die Präsentation

$$B_n = \left\langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \begin{array}{l} s_i s_j s_i = s_j s_i s_j \text{ falls } |i - j| = 1 \\ s_i s_j = s_i s_j \text{ falls } |i - j| \geq 2 \end{array} \right\rangle.$$

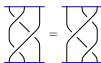
§1.2

Yang-Baxter-Darstellungen

Jeder Automorphismus $c \in \text{Aut}(E \otimes E)$ operiert auf $E^{\otimes n}$:



Wir fordern die Zopfrelation (Yang-Baxter-Gleichung):



$$(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c)$$

Korollar (zum Satz von Artin)

Jeder Yang-Baxter-Operator c induziert eine Darstellung der Zopfgruppe $\rho_n^c: B_n \rightarrow \text{Aut}(E^{\otimes n})$ mit $s_i \mapsto \underbrace{\text{id} \otimes \dots \otimes \text{id}}_{E^{\otimes(i-1)}} \otimes c \otimes \underbrace{\text{id} \otimes \dots \otimes \text{id}}_{E^{\otimes(n-i-1)}}$.

§1.2

§1.2

Das Jones-Polynom

Sei $E = Au \oplus Av$ und somit $E \otimes E = Auu \oplus Auv \oplus Avu \oplus Avv$.

Satz (Jones 1984)

Zu jedem Element $q \in \mathbb{A}^\times$ erhalten wir einen Yang-Baxter-Operator

$$c(q) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & q^2 & q - q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}.$$

Für $\mathbb{A} = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ erhalten wir so das Jones-Polynom V :



B_n

Abschluss

\mathcal{L}

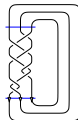
$\rho_n^c \downarrow$

$\text{Aut}(E^{\otimes n})$

$\xrightarrow{\text{tr}_q}$

$\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$

$\downarrow V$



Verallgemeinerung: Quanteninvarianten

Ergänzung: kombinatorische Darstellung

Aus dem Minimalpolynom $q^{-2} \cdot c - q^2 \cdot c^{-1} = (q^{-1} - q) \cdot \text{id}$ folgt:

Satz (Jones 1984)

Es gibt eine einzige Invariante $V: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ mit $V(\bigcirc) = 1$ so dass

$$q^{-2} \cdot V(\text{crossing}) - q^{+2} \cdot V(\text{crossing}) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V(\bigcirc).$$

Beispiel:

$$q^{-2} \cdot V(\infty) - q^{+2} \cdot V(\infty) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V(\bigcirc \bigcirc) \implies V(\bigcirc \bigcirc) = q^{-1} + q^{+1}$$

$$q^{-2} \cdot V(\text{link}) - q^{+2} \cdot V(\text{link}) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V(\text{link}) \implies V(\text{link}) = q^{+1} + q^{+5}$$

$$q^{-2} \cdot V(\text{link}) - q^{+2} \cdot V(\text{link}) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V(\text{link}) \implies V(\text{link}) = q^{+2} + q^{+6} - q^{+8}$$

Daraus ersieht man: Das Jones-Polynom unterscheidet die Kleeblattschlinge K von ihrem Spiegelbild K^* .

§1.2

§1.2

Das Jones-Polynom

Bemerkung

Der Operator $c(q)$ deformiert die Transposition $\tau = c(1): a \otimes b \mapsto b \otimes a$.

$$c(q) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & q^2 & q - q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \xrightarrow{q \mapsto 1} c(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$ gilt demnach

$$c \equiv \tau \pmod{(h)} \text{ also } c^{-1} \equiv \tau \pmod{(h)} \text{ und somit } c - c^{-1} \in (h).$$

Das bedeutet $V(\text{crossing}) - V(\text{crossing}) \in (h)$.

Die Wechselsumme über n Kreuzungen liegt dann in (h^n) .

§1.2

§1.2

Invarianten von endlichem Typ

Wir bezeichnen mit $D \leftrightarrow D_X$ das Wechseln der Kreuzungen in X :



Definition (Vassiliev 1990, Goussarov 1991)

$v: \mathcal{L} \rightarrow A$ ist vom Grad $\leq m$ falls $\sum_{Y \subset X} (-1)^{|Y|} v(D_Y) = 0$ für $|X| > m$.

Grad < 0 : $v = 0$.

Grad ≤ 0 : $v(\text{crossing}) - v(\text{crossing}) = 0$

Grad ≤ 1 : $v(\text{crossing}) - v(\text{crossing}) - v(\text{crossing}) + v(\text{crossing}) = 0$

Grad $\leq m$: v verhält sich wie ein Polynom vom Grad m .

Satz (Birman–Lin 1993)

Entwickle $V(L) = \sum v_k(L) \cdot h^k$ in $q = \exp(h/2)$.

Dann ist $L \mapsto v_k(L)$ eine Invariante vom Grad $\leq k$.

Arbeiten von Vassiliev, Goussarov, Birman, Lin, Bar-Natan, Kontsevich, ...

11.3

13/32

Vassiliev-Invarianten und 3-Mannigfaltigkeiten

Frage (Vassiliev 1990)

Unterscheiden Vassiliev-Invarianten alle Knoten?

Für Knoten in S^3 bleibt diese Frage weiterhin offen...

Satz (Spin und Torsion in $S^1 \times S^2$)

2001

In $S^1 \times S^2$ gibt es Knoten, die nicht von rationalen Vassiliev-Invarianten unterschieden werden wohl aber von Vassiliev-Invarianten mit Werten in $\mathbb{Z}/2$.

Satz (Whitehead-Mannigfaltigkeiten)

2004

Sei $W \subset \mathbb{R}^3$ offen und zusammenziehbar, $W \not\cong \mathbb{R}^3$. Dann gibt es Knoten $K \neq K'$ in W , die nicht durch Vassiliev-Invarianten unterschieden werden.

Satz (Homotopie-Sphären)

2004

Wenn Vassiliev-Invarianten alle Knoten in Homotopie-Sphären unterscheiden, dann impliziert dies die Poincaré-Vermutung.

14/32

Zopfgruppen operieren auf Gruppen

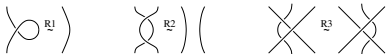
Konjugation $a * b := b^{-1}ab$ und $a \bar{*} b := bab^{-1}$ in einer Gruppe:

(Q1) $a * a = a$ (Idempotenz)

(Q2) $(a * b) \bar{*} b = (a \bar{*} b) * b = a$ (Invertierbarkeit)

(Q3) $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$ (Selbst-Distributivität)

Dies entspricht den Reidemeister-Zügen (R1), (R2), (R3).



15/32

16/32

Zopfgruppen operieren auf Gruppen

Konjugation $a * b := b^{-1}ab$ und $a \bar{*} b := bab^{-1}$ in einer Gruppe:

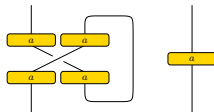
(Q1) $a * a = a$ (Idempotenz)

(Q2) $(a * b) \bar{*} b = (a \bar{*} b) * b = a$ (Invertierbarkeit)

(Q3) $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$ (Selbst-Distributivität)

Dies entspricht den Reidemeister-Zügen (R1), (R2), (R3).

(Q1) entspricht dem ersten Reidemeister-Zug:



16/32

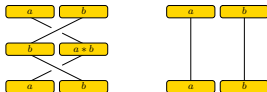
Zopfgruppen operieren auf Gruppen

Konjugation $a * b := b^{-1}ab$ und $a \bar{*} b := bab^{-1}$ in einer Gruppe:

- (Q1) $a * a = a$ (Idempotenz)
 (Q2) $(a * b) \bar{*} b = (a \bar{*} b) * b = a$ (Invertierbarkeit)
 (Q3) $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$ (Selbst-Distributivität)

Dies entspricht den Reidemeister-Zügen (R1), (R2), (R3).

(Q2) entspricht der Zopfrelation auf 2 Strängen:



§2.1

17/32

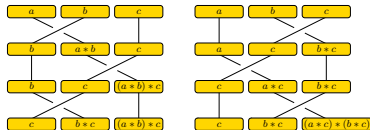
Zopfgruppen operieren auf Gruppen

Konjugation $a * b := b^{-1}ab$ und $a \bar{*} b := bab^{-1}$ in einer Gruppe:

- (Q1) $a * a = a$ (Idempotenz)
 (Q2) $(a * b) \bar{*} b = (a \bar{*} b) * b = a$ (Invertierbarkeit)
 (Q3) $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$ (Selbst-Distributivität)

Dies entspricht den Reidemeister-Zügen (R1), (R2), (R3).

(Q3) entspricht der Zopfrelation auf 3 Strängen:



18/32

Zopfgruppen operieren auf Quandeln

Konjugation $a * b := b^{-1}ab$ und $a \bar{*} b := bab^{-1}$ in einer Gruppe:

- (Q1) $a * a = a$ (Idempotenz)
 (Q2) $(a * b) \bar{*} b = (a \bar{*} b) * b = a$ (Invertierbarkeit)
 (Q3) $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$ (Selbst-Distributivität)

Dies entspricht den Reidemeister-Zügen (R1), (R2), (R3).

Definition (Joyce 1982)

Ein *Quandel* $(Q, *, \bar{*})$ ist eine Menge Q mit zwei Operationen $*, \bar{*}: Q \times Q \rightarrow Q$ mit obigen Eigenschaften (Q1-Q3).

- ⇒ Aktion der Zopfgruppe B_n auf Q^n (Brieskorn 1986)
- ⇒ Diskreter Yang-Baxter-Operator (Freyd-Yetter 1989, Drinfel'd 1990)

§2.1

19/32

Diskrete Yang-Baxter-Operatoren und Färbungsinvarianten

Sei G eine Gruppe und $Q = x^G$ eine Konjugationsklasse.
 Sei $E = \mathbb{Z}Q$ und $c_Q: E \otimes E \rightarrow E \otimes E$, $a \otimes b \mapsto b \otimes (a * b)$.
 Dann ist Q ein Quandel und c_Q ist ein Yang-Baxter-Operator.

Satz (Freyd-Yetter 1989)

Die so erhaltene Invariante $P_G^x: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist die Färbungszahl

$$P_G^x(K) = \# \text{Hom}(\pi_K, m_K; G, x).$$

Natürliche Frage: Lässt sich c_Q deformieren?

Das Färbungspolynom $P_G^x: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{Z}[G]$ ist die Summe

$$P_G^x(K) := \sum_{\rho} \rho(\ell_K) \quad \text{über } \rho: \pi_K \rightarrow G \text{ mit } \rho(m_K) = x.$$

Es gilt $F_G^x = \varepsilon P_G^x$ mittels $\varepsilon: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$, $g \mapsto 1$.

Satz

Das Färbungspolynom $P_G^x(K)$ ist eine Yang-Baxter-Invariante.

2007

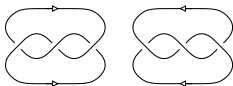
§2.1

19/32

20/32

Erstes Beispiel zu Färbungspolynomen

Die beiden Kleeblattschlingen:



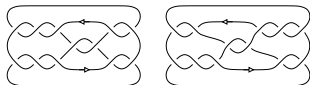
Wir wählen $G = A_5$ und $x = (12345)$

und finden $P_G^x(3_1) = 1 + 5x$ und $P_G^x(3_1^*) = 1 + 5x^{-1}$.

12.2

21.92

Zweites Beispiel zu Färbungspolynomen



Sei M_{11} die Mathieu-Gruppe der Ordnung $7920 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$,

$$M_{11} = \langle x = (abcdefghijk), y = (abcjikdghf) \rangle \subset A_{11}.$$

Für den Kinoshita-Terasaka-Knoten K und den Conway-Knoten C finden wir

$$\begin{aligned} P(K) &= 1 + 11x^3 + 11x^7 & P(C) &= 1 + 11x^3 + 11x^7 \\ P(K^*) &= 1 + 11x^4 + 11x^8 & P(C^*) &= 1 + 11x^4 + 11x^8 \\ P(K^\times) &= 1 + 11x^4 + 22x^8 & P(C^\times) &= 1 + 11x^4 + 11x^6 + 11x^8 \\ P(K^1) &= 1 + 22x^3 + 11x^7 & P(C^1) &= 1 + 11x^3 + 11x^5 + 11x^7 \end{aligned}$$

Yang-Baxter-Invarianten können also nicht-invertierbare Knoten erkennen!
Für die Unterklasse der Quanten-Invarianten bleibt diese Frage bislang offen.

22.72

Klassifikation der Yang-Baxter-Deformationen

Satz 2007

Sei $Q \rightarrow \text{Inn}(Q)$ injektiv. Dann ist jede Yang-Baxter-Deformation von $c_Q: \mathbb{A}Q^2 \rightarrow \mathbb{A}Q^2$ über $\mathbb{A} = \mathbb{K}[h]/(h^2)$ diagonal (modulo Äquivalenz).

Hilfsmittel: Yang-Baxter-Kohomologie, Homotopie-Retraktion

Satz 2007

Sei $Q \rightarrow \text{Inn}(Q)$ injektiv. Alle durch Deformation aus c_Q gewonnenen Invarianten sind Spezialisierungen von Färbungspolynomen.

Hilfsmittel: Überlagerungen und Galois-Korrespondenz für Quandel.

Satz (Fenn-Rourke, Carter et al, Eisermann)

Es gibt eine Korrespondenz zwischen

- diagonalen Deformationen von c_Q über $\mathbb{A} = \mathbb{K}[h]/(h^2)$,
- der Quandel-Homologie $H^2(Q, \mathbb{K})$ mit Koeffizienten in \mathbb{K} ,
- den zentralen Erweiterungen $\mathcal{E}(Q, \mathbb{K})$ von Q durch die Gruppe $(\mathbb{K}, +)$.

12.3

23.92

Singularitäten von Flächen in \mathbb{R}^4 (Fox-Milnor 1958)

Beispiel

Sei $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ gegeben durch $f(z) = (z^2, z^3)$.
In $0 \in \mathbb{R}^4$ ist die Fläche $\Sigma = \text{Im}(f)$ nicht lokal flach.

$K_\varepsilon := \Sigma \cap \partial B_\varepsilon^4$ ist ein Knoten. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ ist dieser unabhängig von ε .
In unserem Beispiel finden wir die Kleeblattschlinge, $K_x = 3_1$.

Definition (Scheibenknoten / slice knot)

$K \subset S^3$ heißt *Scheibenknoten* wenn er eine glatte Scheibe in \mathbb{B}^4 berandet.

Ist K_x ein Scheibenknoten, so kann die Singularität in x behoben werden.
Man kann Σ lokal, d.h. in B_ε^4 , durch eine Scheibe ersetzen.

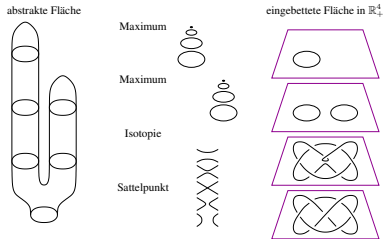
Satz (Fox-Milnor 1966)

Für jeden Scheibenknoten K gilt $\Delta(K) = P(q) \cdot P(q^{-1})$ mit $P \in \mathbb{Z}[q]$. \square

In unserem Beispiel gilt $\Delta(3_1) = q^2 - 1 + q^{-2}$. Dies zerfällt nicht.

24.72

Beispiel eines nicht-trivialen Scheibenknotens



§3.1

25/32 §3.1

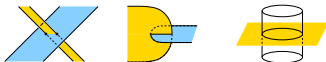
Bandflächen in \mathbb{R}^3 (nach Fox 1962)

Eingebettete Flächen mit Rand:



(a) trivialer Knoten \bigcirc (b) Kleeblattschlinge 3_1 (c) Achterknoten 4_1

Immersierte Flächen mit Rand:



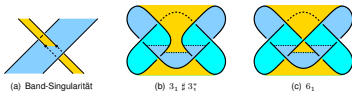
(d) Band-Singularität (e) Clasp-Singularität (f) Kreis-Singularität

26/32

Bandflächen im \mathbb{R}^3 (nach Fox 1962)

Definition

Eine *Bandfläche* ist eine immensierte Fläche nur mit Band-Singularitäten.



(a) Band-Singularität (b) 3_1 (c) 6_1

Abbildung: Immensierte Flächen mit Bandsingularitäten

Definition

Ein Knoten $K \subset \mathbb{R}^3$ heißt *Bandknoten* wenn er eine immensierte Kreisfläche $S \subset \mathbb{R}^3$ berandet, die nur Band-Singularitäten hat.

Beispiel

Für jeden Knoten K ist die symmetrische Summe $K \# K^*$ ein Bandknoten.

§3.1

27/32 §3.1

Die Band-Vermutung (Fox 1962)

Beobachtung (Fox 1962)

glatte Fläche $S_+ \subset \mathbb{R}_+^4$ evtl. mit Minima
 $\uparrow \quad \downarrow ?$
 Bandfläche $S \subset \mathbb{R}^3 \iff$ glatte Fläche $S_+ \subset \mathbb{R}_+^4$ ohne Minima

3-dimensionales Geschlecht:

$$g_3(K) := \min\{g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ Seifert-Fläche, } \partial S = K\}$$

$$g_3(K) = 0 \iff K \text{ ist trivial}$$

Bandgeschlecht:

$$g_r(K) := \min\{g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ Bandfläche, } \partial S = K\}$$

$$g_r(K) = 0 \iff K \text{ ist Bandknoten}$$

4-dimensionales Geschlecht:

$$g_4(K) := \min\{g(S) \mid S \subset \mathbb{R}_+^4 \text{ eingebettete Fläche, } \partial S = K\}$$

$$g_4(K) = 0 \iff K \text{ ist Scheibenknoten}$$

Frage (Band-Vermutung, Fox 1962)

Ist jeder Scheibenknoten ein Bandknoten?

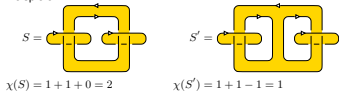
28/32

Integralitäts-Eigenschaft des Jones-Polynoms

Satz 2007

Wenn eine Verschlingung $L \subset \mathbb{R}^3$ eine Bandfläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit $\chi(S) = n$ berandet, dann ist $V(L)$ teilbar durch $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Zwei Beispiele:



Hier gilt $V(L) = (q^{-1} + q^{+1}) \cdot (q^6 - q^4 + 2q^2 + 2q^{-2} - q^{-4} + q^{-6})$.
Also berandet L Bandflächen mit $\chi \leq 2$ aber nicht mit $\chi \geq 3$.

Weiter gilt $V(L') = (q^{+1} + q^{+5})^2 \cdot (q^{-1} + q^{-5})^2$.

Also berandet L' Bandflächen mit $\chi \leq 1$ aber nicht mit $\chi \geq 2$.

§3.1

29/32 §3.2

Das Jones-Polynom von Bandverschlingungen

Satz (Kongruenz modulo 32) 2007

Sei $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ eine Bandverschlingung mit n Komponenten.

Dann ist $V(L)$ teilbar durch $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$. Die ganze Zahl

$$\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q \rightarrow -1)}$$

erfüllt die Kongruenz

$$\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n) \pmod{32}.$$

Insbesondere gilt $\det V(L) \equiv 1 \pmod{8}$.

⇒ Analogie zur Seifert-Nullität: $\text{null } V(L) = \text{null}(L)$. Gilt das allgemein?

⇒ Analogie zur Arf-Invariante: $\det(K) = 1$ modulo 8. Gilt das allgemein?

⇒ Hindernisse für Band-/Scheiben-Verschlingungen?

30/32

Entwicklung in Invarianten von endlichem Typ

Satz (Birman-Lin 1993)

Entwickle $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(L) \cdot h^k$ in $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$.
Dann ist $L \mapsto v_k(L)$ vom Grad $\leq k$ bezüglich Kreuzungswechsel



Satz 2007

Entwickle $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(L) \cdot h^k$ in $q = i \exp(h/2) = i + ih/2 + \dots$.
Dann ist $S \mapsto d_k(\partial S)$ vom Grad $\leq k + 1 - \chi(S)$ bezüglich



Man beachte: $d_k(L)$ ist keine Vassiliev-Invariante, insbesondere nicht die Determinante $d_0(L) = V(L)_{q \rightarrow -1} = \Delta(L)_{q \rightarrow -1} = \det(L) = \det[-i(\theta + \theta^*)]$.

Projekt

Ausarbeitung der Theorie: universelle Flächeninvariante von endlichem Typ, topologische Interpretation, Anwendung auf Knoten und Flächen, ...

§3.3

31/32 §4.0

Zusammenfassung und Ausblick

Quanteninvarianten und Invarianten von endlichem Typ
Wechselwirkungen mit der Topologie von 3-Mannigfaltigkeiten

Deformationstheorie angewendet auf Gruppen und Quandel
Klassifikation mittels Yang-Baxter-Kohomologie

Anwendungen des Jones-Polynoms auf Flächen im \mathbb{R}^3 und im \mathbb{R}^4
Flächeninvarianten von endlichem Typ, Kategorifizierung

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.

32/32