

## Quanteninvarianten und niedrigdimensionale Topologie



Michael Eisermann

Institut Fourier, Grenoble

17. Juni 2009



Vortrag am Mathematischen Institut der Universität zu Köln

1/32

## Überblick

- 1 Von klassischen Invarianten zu Quanteninvarianten
  - Fundamentalgruppe und Alexander-Polynom
  - Jones-Polynom und Quanteninvarianten
  - Invarianten von endlichem Typ
- 2 Diskrete Yang-Baxter-Operatoren und Deformationen
  - Zopfgruppen operieren auf Gruppen und Quandeln
  - Diskrete Yang-Baxter-Operatoren und Färbungsinvarianten
  - Klassifikation der Yang-Baxter-Deformationen
- 3 Das Jones-Polynom von Bandverschlingungen
  - Scheiben- und Bandknoten, Fox'sche Vermutung
  - Das Jones-Polynom von Bandverschlingungen
  - Entwicklung in Invarianten von endlichem Typ
- 4 Zusammenfassung und Ausblick

2/32

## Geschichtlicher Überblick zur Knotentheorie

### Vorläufer (vor 1900)

Gauss: Elektromagnetismus  
Listing: Vorstudien zur Topologie  
Kelvin: Atome als Knoten im Äther  
Kirkman, Little, Tait: empirische Klassifikation

### Klassische Topologie (ab 1900)

Fundamentalgruppe (Poincaré, Wirtinger, Dehn, ...)  
Homologie (Alexander, Seifert, ...)  
Diagramme (Reidemeister), Zopfgruppen (Artin)  
2/3/4-Mannigfaltigkeiten (Fox–Milnor, Papakyriakopoulos, Waldhausen, ...)

### Quantentopologie (ab 1984)

Zopf-Darstellungen und Deformationen (Jones, HOMFLYPT, Kauffman, ...)  
Invarianten von endlichem Typ (Vassiliev, Goussarov, ..., Kontsevich, ...)  
Kategorifizierung (Khovanov, Osvath-Szabo, ...)

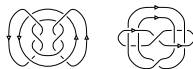
3/32

## Knoten und Verschlingungen

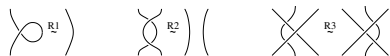
Ein *Knoten* ist eine glatte Einbettung  $f: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  (oder  $S^3$ ).



Eine *Verschlingung* ist eine glatte Einbettung  $f: n \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ .



Wir betrachten diese modulo Isotopie des  $\mathbb{R}^3$  = Diagramme modulo



4/32

## Fundamentalgruppe

### Satz (Dehn 1914)

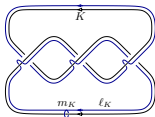
Die beiden Kleeblattschlingen sind verschieden.

Algebraische Invariante:

Fundamentalgruppe  $\pi_K := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$

Meridian  $m_K$

Longitude  $\ell_K$



### Satz (Papakyriakopoulos 1957)

Ein Knoten  $K$  ist genau dann trivial wenn  $\ell_K = 1$ .

### Satz (Waldhausen 1968)

Die Invariante  $K \mapsto (\pi_K, m_K, \ell_K)$  klassifiziert Knoten bis auf Isotopie.

⇒ Vollständige Invariante, aber schwer zu handhaben.

§1.1

§1.1

## Seifert-Flächen und Alexander-Polynom

### Satz (Seifert 1935, Pontryagin 1930)

Jede Verschlingung  $L \subset \mathbb{R}^3$  berandet eine kompakte, zusammenhängende, orientierte Fläche  $S \subset \mathbb{R}^3$ .



(a) trivialer Knoten  $\circ$  (b) Kleeblattschlinge  $3_1$  (c) Achterknoten  $4_1$

Sei  $\theta: H_1(S) \times H_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}$  die Seifert-Form  $\theta(a, b) = \text{lk}(a^{\perp}, b^{\perp})$ .

### Satz (Alexander 1928, Seifert 1935)

$\Delta(L) = \det(q^{-\theta^*} - q^{\theta}) \in \mathbb{Z}[q^{\pm}]$  ist eine Invariante von  $L$ .

⇒ Leicht zu berechnen, gute topologische Interpretation.

## Ergänzung: kombinatorische Darstellung

### Satz (Alexander 1928, Conway 1969)

Es gibt eine einzige Invariante  $\Delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$  mit  $\Delta(\circ) = 1$  so dass

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1}) \cdot \Delta\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array}\right) \downarrow \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array}\right).$$

Beispiel:

$$\Delta(\infty) - \Delta(\infty) = (q^{+1} - q^{-1})\Delta(\circ\circ) \quad \Rightarrow \quad \Delta(\circ\circ) = 0$$

$$\Delta(\text{link}) - \Delta(\text{link}) = (q^{+1} - q^{-1})\Delta(\text{link}) \quad \Rightarrow \quad \Delta(\text{link}) = q^{+1} - q^{-1}$$

$$\Delta(\text{link}) - \Delta(\text{link}) = (q^{+1} - q^{-1})\Delta(\text{link}) \quad \Rightarrow \quad \Delta(\text{link}) = q^{+2} - 1 + q^{-2}$$

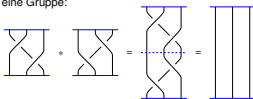
Daraus ersieht man: Das Alexander-Conway-Polynom unterscheidet nicht zwischen einem Knoten  $K$  und seinem Spiegelbild  $K^*$ .

§1.1

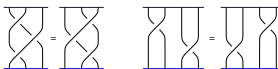
§1.2

## Artin's Zopfgruppe

Zöpfe bilden eine Gruppe:



Offensichtliche Relationen:



### Satz (Artin 1925, 1947)

Die Zopfgruppe  $B_n$  auf  $n$  Strängen erlaubt die Präsentation

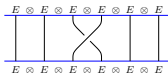
$$B_n = \left\langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \begin{array}{l} s_i s_j s_i = s_j s_i s_j \quad \text{falls } |i - j| = 1 \\ s_i s_j = s_i s_j \quad \text{falls } |i - j| \geq 2 \end{array} \right\rangle.$$

§1.2

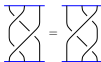
§1.2

## Yang-Baxter-Darstellungen

Jeder Automorphismus  $c \in \text{Aut}(E \otimes E)$  operiert auf  $E^{\otimes n}$ :



Wir fordern die Zopfrelation (Yang-Baxter-Gleichung):



$$(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c)$$

### Korollar (zum Satz von Artin)

Jeder Yang-Baxter-Operator  $c$  induziert eine Darstellung der Zopfgruppe  $\rho_n^c: B_n \rightarrow \text{Aut}(E^{\otimes n})$  mit  $s_i \mapsto \underbrace{\text{id} \otimes \dots \otimes \text{id}}_{E^{\otimes(i-1)}} \otimes c \otimes \underbrace{\text{id} \otimes \dots \otimes \text{id}}_{E^{\otimes(n-i-1)}}$ .

§1.2

§1.2

## Das Jones-Polynom

### Satz (Jones 1984)

Sei  $E = Au \oplus Av$  und somit  $E \otimes E = Auu \oplus Auv \oplus Avu \oplus Avv$ .  
Zu jedem Element  $q \in \mathbb{A}^\times$  erhalten wir einen Yang-Baxter-Operator

$$c(q) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & q^2 & q - q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}.$$

Für  $\mathbb{A} = \mathbb{Z}[q^\pm]$  erhalten wir so das Jones-Polynom  $V$ :



$B_n$

Abschluss

$\mathcal{L}$

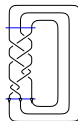
$\rho_n^c \downarrow$

$\text{Aut}(E^{\otimes n})$

$\xrightarrow{\text{tr}_q}$

$\downarrow V$

$\mathbb{Z}[q^\pm]$



Verallgemeinerung: Quanteninvarianten

§1.2

## Ergänzung: kombinatorische Darstellung

Aus dem Minimalpolynom  $q^{-2} \cdot c - q^2 \cdot c^{-1} = (q^{-1} - q) \cdot \text{id}$  folgt:

### Satz (Jones 1984)

Es gibt eine einzige Invariante  $V: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^\pm]$  mit  $V(\bigcirc) = 1$  so dass

$$q^{-2} \cdot V(\text{crossing}) - q^{+2} \cdot V(\text{crossing}^{-1}) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V(\bigcirc).$$

Beispiel:

$$q^{-2} \cdot V(\infty) - q^{+2} \cdot V(\infty) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V(\bigcirc \bigcirc) \implies V(\bigcirc \bigcirc) = q^{-1} + q^{+1}$$

$$q^{-2} \cdot V(\text{link}) - q^{+2} \cdot V(\text{link}^{-1}) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V(\text{link}) \implies V(\text{link}) = q^{+1} + q^{+5}$$

$$q^{-2} \cdot V(\text{link}) - q^{+2} \cdot V(\text{link}^{-1}) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V(\text{link}) \implies V(\text{link}) = q^{+2} + q^{+6} - q^{+8}$$

Daraus ersieht man: Das Jones-Polynom unterscheidet die Kleeblattschlinge  $K$  von ihrem Spiegelbild  $K^*$ .

§1.2

§1.2

## Das Jones-Polynom

### Bemerkung

Der Operator  $c(q)$  deformiert die Transposition  $\tau = c(1): a \otimes b \mapsto b \otimes a$ .

$$c(q) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & q^2 & q - q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \xrightarrow{q \mapsto 1} c(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für  $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$  gilt demnach

$$c \equiv \tau \pmod{(h)} \text{ also } c^{-1} \equiv \tau \pmod{(h)} \text{ und somit } c - c^{-1} \in (h).$$

Das bedeutet  $V(\text{crossing}) - V(\text{crossing}^{-1}) \in (h)$ .

Die Wechselsumme über  $n$  Kreuzungen liegt dann im Ideal  $(h^n)$ .

§1.2

## Invarianten von endlichem Typ

Wir bezeichnen mit  $D \leftrightarrow D_X$  das Wechseln der Kreuzungen in  $X$ :



**Definition (Vassiliev 1990, Goussarov 1991)**

$v: \mathcal{L} \rightarrow A$  ist vom Grad  $\leq m$  falls  $\sum_{Y \subset X} (-1)^{|Y|} v(D_Y) = 0$  für  $|X| > m$ .

$$\text{Grad} \leq 0: v(\text{crossing}) - v(\text{crossing}) = 0$$

$$\text{Grad} \leq 1: v(\text{crossing}) - v(\text{crossing}) - v(\text{crossing}) + v(\text{crossing}) = 0$$

Grad  $\leq m$ :  $v$  verhält sich wie ein Polynom vom Grad  $m$ .

**Satz (Birman-Lin 1993)**

Entwickle  $V(L) = \sum v_k(L) \cdot h^k$  in  $q = \exp(h/2)$ .

Dann ist  $L \mapsto v_k(L)$  eine Invariante vom Grad  $\leq k$ .

Arbeiten von Vassiliev, Goussarov, Birman, Lin, Bar-Natan, Kontsevich, ...

Kontsevich-Integral: universelle Invariante von endlichem Typ.

§1.3

13/32 §1.3

## Vassiliev-Invarianten und 3-Mannigfaltigkeiten

**Frage (Vassiliev 1990)**

Unterscheiden Vassiliev-Invarianten alle Knoten?

Für Knoten in  $S^3$  bleibt diese Frage weiterhin offen...

**Satz (Spin und Torsion in  $S^1 \times S^2$ )**

2001

In  $S^1 \times S^2$  gibt es Knoten, die nicht von rationalen Vassiliev-Invarianten unterschieden werden wohl aber von Vassiliev-Invarianten mit Werten in  $\mathbb{Z}/2$ .

**Satz (Whitehead-Mannigfaltigkeiten)**

2004

Sei  $W \subset \mathbb{R}^3$  offen und zusammenziehbar, aber  $W \not\cong \mathbb{R}^3$ . Dann gibt es Knoten  $K \neq K'$  in  $W$ , die nicht durch Vassiliev-Invarianten unterschieden werden.

**Satz (Homotopie-Sphären)**

2004

Wenn Vassiliev-Invarianten alle Knoten in Homotopie-Sphären unterscheiden, dann impliziert dies die Poincaré-Vermutung.

14/32

## Zopfgruppen operieren auf Gruppen

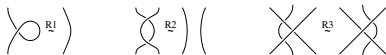
Konjugation  $a * b := b^{-1}ab$  und  $a \bar{*} b := bab^{-1}$  in einer Gruppe:

$$(Q1) \quad a * a = a \quad (\text{Idempotenz})$$

$$(Q2) \quad (a * b) \bar{*} b = (a \bar{*} b) * b = a \quad (\text{Invertierbarkeit})$$

$$(Q3) \quad (a * b) * c = (a * c) * (b * c) \quad (\text{Selbst-Distributivität})$$

Dies entspricht den Reidemeister-Zügen (R1), (R2), (R3).



§2.1

15/32 §2.1

## Zopfgruppen operieren auf Gruppen

Konjugation  $a * b := b^{-1}ab$  und  $a \bar{*} b := bab^{-1}$  in einer Gruppe:

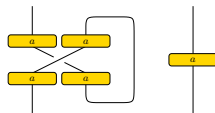
$$(Q1) \quad a * a = a \quad (\text{Idempotenz})$$

$$(Q2) \quad (a * b) \bar{*} b = (a \bar{*} b) * b = a \quad (\text{Invertierbarkeit})$$

$$(Q3) \quad (a * b) * c = (a * c) * (b * c) \quad (\text{Selbst-Distributivität})$$

Dies entspricht den Reidemeister-Zügen (R1), (R2), (R3).

(Q1) entspricht dem ersten Reidemeister-Zug:



16/32

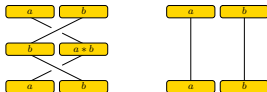
## Zopfgruppen operieren auf Gruppen

Konjugation  $a * b := b^{-1}ab$  und  $a \bar{*} b := bab^{-1}$  in einer Gruppe:

- (Q1)  $a * a = a$  (Idempotenz)  
 (Q2)  $(a * b) \bar{*} b = (a \bar{*} b) * b = a$  (Invertierbarkeit)  
 (Q3)  $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$  (Selbst-Distributivität)

Dies entspricht den Reidemeister-Zügen (R1), (R2), (R3).

(Q2) entspricht der Zopfrelation auf 2 Strängen:



§2.1

17/92 §2.1

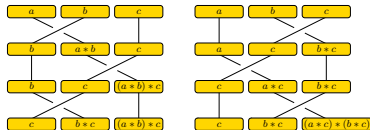
## Zopfgruppen operieren auf Gruppen

Konjugation  $a * b := b^{-1}ab$  und  $a \bar{*} b := bab^{-1}$  in einer Gruppe:

- (Q1)  $a * a = a$  (Idempotenz)  
 (Q2)  $(a * b) \bar{*} b = (a \bar{*} b) * b = a$  (Invertierbarkeit)  
 (Q3)  $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$  (Selbst-Distributivität)

Dies entspricht den Reidemeister-Zügen (R1), (R2), (R3).

(Q3) entspricht der Zopfrelation auf 3 Strängen:



18/92

## Zopfgruppen operieren auf Quandeln

Konjugation  $a * b := b^{-1}ab$  und  $a \bar{*} b := bab^{-1}$  in einer Gruppe:

- (Q1)  $a * a = a$  (Idempotenz)  
 (Q2)  $(a * b) \bar{*} b = (a \bar{*} b) * b = a$  (Invertierbarkeit)  
 (Q3)  $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$  (Selbst-Distributivität)

Dies entspricht den Reidemeister-Zügen (R1), (R2), (R3).

### Definition (Joyce 1982)

Ein *Quandel*  $(Q, *, \bar{*})$  ist eine Menge  $Q$  mit zwei Operationen  $*, \bar{*}: Q \times Q \rightarrow Q$  mit obigen Eigenschaften (Q1-Q3).

- $\Rightarrow$  Aktion der Zopfgruppe  $B_n$  auf  $Q^n$  (Brieskorn 1986)  
 $\Rightarrow$  Diskreter Yang-Baxter-Operator (Freyd-Yetter 1989, Drinfel'd 1990)

§2.1

19/92 §2.2

## Diskrete Yang-Baxter-Operatoren und Färbungsinvarianten

Sei  $G$  eine Gruppe und  $Q = x^G$  eine Konjugationsklasse.  
 Sei  $E = \mathbb{Z}Q$  und  $c_Q: E \otimes E \rightarrow E \otimes E$ ,  $a \otimes b \mapsto b \otimes (a * b)$ .  
 Dann ist  $Q$  ein Quandel und  $c_Q$  ist ein Yang-Baxter-Operator.

### Satz (Freyd-Yetter 1989)

Die so erhaltene Invariante  $F_G^x: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Z}$  ist die Färbungszahl

$$F_G^x(K) = \# \text{Hom}(\pi_K, m_K; G, x).$$

Natürliche Frage: Lässt sich  $c_Q$  deformieren?

Das Färbungspolynom  $P_G^x: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Z}[G]$  ist definiert als die Summe

$$P_G^x(K) := \sum_{\rho} \rho(\ell_K) \quad \text{über } \rho: \pi_K \rightarrow G \text{ mit } \rho(m_k) = x.$$

### Satz

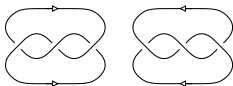
2007

Das Färbungspolynom  $P_G^x(K)$  ist ebenfalls eine Yang-Baxter-Invariante.

20/92

## Erstes Beispiel zu Färbungspolynomen

Die beiden Kleeblattschlingen:



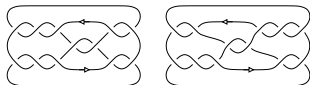
Wir wählen  $G = A_5$  und  $x = (12345)$

und finden  $P_G^x(3_1) = 1 + 5x$  und  $P_G^x(3_1^*) = 1 + 5x^{-1}$ .

12.2

21.92

## Zweites Beispiel zu Färbungspolynomen



Sei  $M_{11}$  die Mathieu-Gruppe der Ordnung  $7920 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ ,

$$M_{11} = \langle x = (abcdefghijk), y = (abcjikdghf) \rangle \subset A_{11}.$$

Für den Kinoshita-Terasaka-Knoten  $K$  und den Conway-Knoten  $C$  finden wir

$$\begin{aligned} P(K) &= 1 + 11x^3 + 11x^7 & P(C) &= 1 + 11x^3 + 11x^7 \\ P(K^*) &= 1 + 11x^4 + 11x^8 & P(C^*) &= 1 + 11x^4 + 11x^8 \\ P(K^\times) &= 1 + 11x^4 + 22x^8 & P(C^\times) &= 1 + 11x^4 + 11x^6 + 11x^8 \\ P(K^1) &= 1 + 22x^3 + 11x^7 & P(C^1) &= 1 + 11x^3 + 11x^5 + 11x^7 \end{aligned}$$

Yang-Baxter-Invarianten können also nicht-invertierbare Knoten erkennen!  
Für die Unterklasse der Quanten-Invarianten bleibt diese Frage bislang offen.

22.72

## Klassifikation der Yang-Baxter-Deformationen

**Satz** 2007

Sei  $Q \rightarrow \text{Inn}(Q)$  injektiv. Dann ist jede Yang-Baxter-Deformation von  $c_Q: \mathbb{A}Q^2 \rightarrow \mathbb{A}Q^2$  über  $\mathbb{A} = \mathbb{K}[h]/(h^2)$  diagonal (modulo Äquivalenz).

Hilfsmittel: Yang-Baxter-Kohomologie, Homotopie-Retraktion

**Satz** 2007

Sei  $Q \rightarrow \text{Inn}(Q)$  injektiv. Alle durch Deformation aus  $c_Q$  gewonnenen Invarianten sind Spezialisierungen von Färbungspolynomen.

Hilfsmittel: Überlagerungen und Galois-Korrespondenz für Quandel.

**Satz (Fenn-Rourke, Carter et al, Eisermann)**

Es gibt eine Korrespondenz zwischen

- diagonalen Deformationen von  $c_Q$  über  $\mathbb{A} = \mathbb{K}[h]/(h^2)$ ,
- der Quandel-Homologie  $H^2(Q, \mathbb{K})$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{K}$ ,
- den zentralen Erweiterungen  $\mathcal{E}(Q, \mathbb{K})$  von  $Q$  durch die Gruppe  $(\mathbb{K}, +)$ .

12.3

23.92

## Singularitäten von Flächen in $\mathbb{R}^4$ (Fox-Milnor 1958)

**Beispiel**

Sei  $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$  gegeben durch  $f(z) = (z^2, z^3)$ .  
In  $0 \in \mathbb{R}^4$  ist die Fläche  $\Sigma = \text{Im}(f)$  nicht lokal flach.

$K_\varepsilon := \Sigma \cap \partial B_\varepsilon^4$  ist ein Knoten. Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  ist dieser unabhängig von  $\varepsilon$ .  
In unserem Beispiel finden wir die Kleeblattschlinge,  $K_x = 3_1$ .

**Definition (Scheibenknoten / slice knot)**

$K \subset S^3$  heißt *Scheibenknoten* wenn er eine glatte Scheibe in  $\mathbb{B}^4$  berandet.

Ist  $K_x$  ein Scheibenknoten, so kann die Singularität in  $x$  behoben werden.  
Man kann  $\Sigma$  lokal, d.h. in  $B_\varepsilon^4$ , durch eine Scheibe ersetzen.

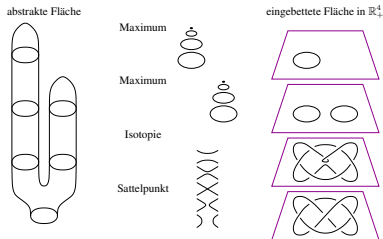
**Satz (Fox-Milnor 1966)**

Für jeden Scheibenknoten  $K$  gilt  $\Delta(K) = P(q) \cdot P(q^{-1})$  mit  $P \in \mathbb{Z}[q]$ .  $\square$

In unserem Beispiel gilt  $\Delta(3_1) = q^2 - 1 + q^{-2}$ . Dies zerfällt nicht.

24.72

## Beispiel eines nicht-trivialen Scheibenknotens



§3.1

25/32 §3.1

## Bandflächen in $\mathbb{R}^3$ (nach Fox 1962)

Eingebettete Flächen mit Rand:



(a) trivialer Knoten  $\bigcirc$  (b) Kleeblattschlinge  $3_1$  (c) Achterknoten  $4_1$

Immerierte Flächen mit Rand:



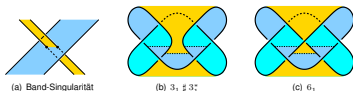
(d) Band-Singularität (e) Clasp-Singularität

26/32

## Bandflächen im $\mathbb{R}^3$ (nach Fox 1962)

### Definition

Eine *Bandfläche* ist eine immertierte Fläche nur mit Band-Singularitäten.



(a) Band-Singularität

(b)  $3_1$ ,  $3_1^*$ (c)  $6_1$ 

Abbildung: Immertierte Flächen mit Bandsingularitäten

### Definition

Ein Knoten  $K \subset \mathbb{R}^3$  heißt *Bandknoten* wenn er eine immertierte Kreisfläche  $S \subset \mathbb{R}^3$  berandet, die nur Band-Singularitäten hat.

### Beispiel

Für jeden Knoten  $K$  ist die symmetrische Summe  $K \# K^*$  ein Bandknoten.

§3.1

27/32 §3.1

## Die Band-Vermutung (Fox 1962)

### Beobachtung (Fox 1962)

Bandfläche  $S \subset \mathbb{R}^3 \iff$  glatte Fläche  $S_+ \subset \mathbb{R}_+^4$  ohne Minima  
 glatte Fläche  $S_+ \subset \mathbb{R}_+^4$  evtl. mit Minima  
 (Note:  $\uparrow$  and  $\downarrow$  with a question mark between the two rows)

3-dimensionales Geschlecht:

$$g_3(K) := \min\{g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ Seifert-Fläche, } \partial S = K\}$$

$$g_3(K) = 0 \iff K \text{ ist trivial}$$

Bandgeschlecht:

$$g_r(K) := \min\{g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ Bandfläche, } \partial S = K\}$$

$$g_r(K) = 0 \iff K \text{ ist Bandknoten}$$

4-dimensionales Geschlecht:

$$g_4(K) := \min\{g(S) \mid S \subset \mathbb{R}_+^4 \text{ eingebettete Fläche, } \partial S = K\}$$

$$g_4(K) = 0 \iff K \text{ ist Scheibenknoten}$$

### Frage (Band-Vermutung, Fox 1962)

Ist jeder Scheibenknoten ein Bandknoten?

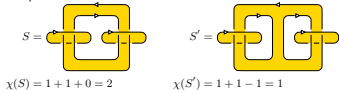
28/32

## Integralitäts-Eigenschaft des Jones-Polynoms

**Satz** 2007

Wenn eine Verschlingung  $L \subset \mathbb{R}^3$  eine Bandfläche  $S \subset \mathbb{R}^3$  mit  $\chi(S) = n$  berandet, dann ist  $V(L)$  teilbar durch  $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$ .

Zwei Beispiele:



Hier gilt  $V(L) = (q^{-1} + q^{+1}) \cdot (q^6 - q^4 + 2q^2 + 2q^{-2} - q^{-4} + q^{-6})$ .  
Also berandet  $L$  Bandflächen mit  $\chi \leq 2$  aber nicht mit  $\chi \geq 3$ .

Weiter gilt  $V(L') = (q^{+1} + q^{+5})^2 \cdot (q^{-1} + q^{-5})^2$ .  
Also berandet  $L'$  Bandflächen mit  $\chi \leq 1$  aber nicht mit  $\chi \geq 2$ .

§3.1

29/32 §3.2

## Das Jones-Polynom von Bandverschlingungen

**Satz (Kongruenz modulo 32)** 2007

Sei  $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$  eine Bandverschlingung mit  $n$  Komponenten.

Dann ist  $V(L)$  teilbar durch  $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$ . Die ganze Zahl

$$\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q \rightarrow -i)}$$

erfüllt die Kongruenz

$$\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n) \pmod{32}.$$

Insbesondere gilt  $\det V(L) \equiv 1 \pmod{8}$ .

⇒ Analogie zur Seifert-Nullität:  $\text{null } V(L) = \text{null}(L)$ . Gilt das allgemein?

⇒ Analogie zur Arf-Invariante:  $\det(K) = 1$  modulo 8. Gilt das allgemein?

⇒ Hindernisse für Band-/Scheiben-Verschlingungen?

30/32

## Entwicklung in Invarianten von endlichem Typ

**Satz (Birman-Lin 1993)**

Entwickle  $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(L) \cdot h^k$  in  $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$ .  
Dann ist  $L \mapsto v_k(L)$  vom Grad  $\leq k$  bezüglich Kreuzungswechsel



**Satz** 2007

Entwickle  $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(L) \cdot h^k$  in  $q = i \exp(h/2) = i + ih/2 + \dots$ .  
Dann ist  $S \mapsto d_k(\partial S)$  vom Grad  $\leq k + 1 - \chi(S)$  bezüglich



Man beachte:  $d_k(L)$  ist keine Vassiliev-Invariante, insbesondere nicht die Determinante  $d_0(L) = V(L)_{q \rightarrow -i} = \Delta(L)_{q \rightarrow -i} = \det(L) = \det[-i(\theta + \theta^*)]$ .

**Forschungsprojekt**

Ausarbeitung der Theorie: universelle Flächeninvariante von endlichem Typ, topologische Interpretation, Anwendung auf Knoten und Flächen, ...

§3.3

31/32 §4.0

## Zusammenfassung und Ausblick

Quanteninvarianten und Invarianten von endlichem Typ  
Wechselwirkungen mit der Topologie von 3-Mannigfaltigkeiten

Deformationstheorie angewendet auf Gruppen und Quandel  
Klassifikation mittels Yang-Baxter-Kohomologie

Anwendungen des Jones-Polynoms auf Knoten im  $\mathbb{R}^3$  und Flächen im  $\mathbb{R}^4$ .  
Flächeninvarianten von endlichem Typ, Kategorifizierung

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.

32/32