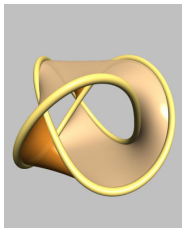


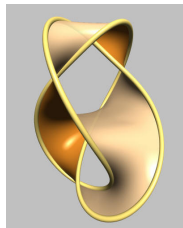
Invariants de type fini des entrelacs et des surfaces dans \mathbb{R}^3



Michael Eisermann

Institut Fourier, UJF Grenoble
www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm

15 octobre 2008



Exposé au séminaire général
Institut de Mathématiques de Bourgogne

- 1 Invariants de type fini d'entrelacs et de surfaces
- 2 Le polynôme de Jones des entrelacs rubans
- 3 Théorie des invariants de type fini
- 4 Questions ouvertes

Théorie des invariants de type fini :

Théorie des invariants de type fini :

- Cadre adapté pour étudier les invariants quantiques.

Théorie des invariants de type fini :

- Cadre adapté pour étudier les invariants quantiques.
- Propriétés polynomiales, riche structure algébrique.

Théorie des invariants de type fini :

- Cadre adapté pour étudier les invariants quantiques.
- Propriétés polynomiales, riche structure algébrique.

Inconvénient : difficile à interpréter en termes topologiques

Théorie des invariants de type fini :

- Cadre adapté pour étudier les invariants quantiques.
- Propriétés polynomiales, riche structure algébrique.

Inconvénient : difficile à interpréter en termes topologiques

Idée naturelle : faire intervenir les surfaces !

Théorie des invariants de type fini :

- Cadre adapté pour étudier les invariants quantiques.
- Propriétés polynomiales, riche structure algébrique.

Inconvénient : difficile à interpréter en termes topologiques

Idée naturelle : faire intervenir les surfaces !

- Invariants de surfaces plongées ou immergées dans \mathbb{R}^3 .

Théorie des invariants de type fini :

- Cadre adapté pour étudier les invariants quantiques.
- Propriétés polynomiales, riche structure algébrique.

Inconvénient : difficile à interpréter en termes topologiques

Idée naturelle : faire intervenir les surfaces !

- Invariants de surfaces plongées ou immergées dans \mathbb{R}^3 .
- Interaction avec les entrelacs, obstructions.

Théorie des invariants de type fini :

- Cadre adapté pour étudier les invariants quantiques.
- Propriétés polynomiales, riche structure algébrique.

Inconvénient : difficile à interpréter en termes topologiques

Idée naturelle : faire intervenir les surfaces !

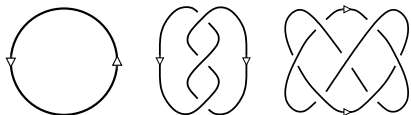
- Invariants de surfaces plongées ou immergées dans \mathbb{R}^3 .
- Interaction avec les entrelacs, obstructions.

Les premiers résultats confirment que c'est le bon point de vue.

- 1 Invariants de type fini d'entrelacs et de surfaces**
 - Invariants de type fini d'entrelacs
 - Invariants de type fini de surfaces
 - Déterminant et polynôme d'Alexander
- 2 Le polynôme de Jones des entrelacs rubans
- 3 Théorie des invariants de type fini
- 4 Questions ouvertes

Nœuds et entrelacs

Un *nœud* est un plongement lisse $f: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 (\subset \mathbb{S}^3)$.



Nœuds et entrelacs

Un *nœud* est un plongement lisse $f: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 (\subset \mathbb{S}^3)$.



Un *entrelacs* est un plongement lisse $f: n \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

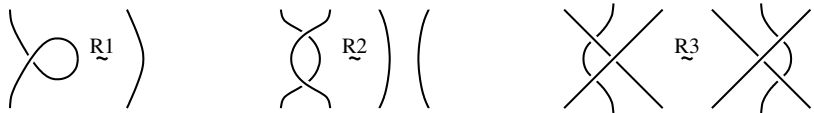
Nœuds et entrelacs

Un *nœud* est un plongement lisse $f: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 (\subset \mathbb{S}^3)$.



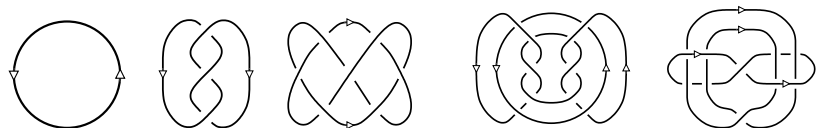
Un *entrelacs* est un plongement lisse $f: n \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

Nous les regardons à isotopie près.



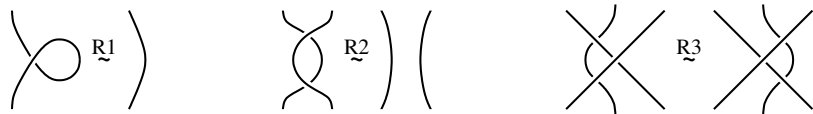
Nœuds et entrelacs

Un *nœud* est un plongement lisse $f: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 (\subset \mathbb{S}^3)$.



Un *entrelacs* est un plongement lisse $f: n \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

Nous les regardons à isotopie près.



Théorème (Reidemeister 1932)

*Tout entrelacs peut être représenté par un diagramme planaire.
Deux diagrammes représentent le même entrelacs à isotopie près si et seulement s'ils sont équivalents par des mouvements de Reidemeister.* □

Exemple : le nombre d'enlacement

Le signe d'un croisement x est défini par

$$\varepsilon \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right) := +1 \quad \text{et} \quad \varepsilon \left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \right) := -1.$$

Exemple : le nombre d'enlacement

Le signe d'un croisement x est défini par

$$\varepsilon \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right) := +1 \quad \text{et} \quad \varepsilon \left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \right) := -1.$$

La somme $\varepsilon(D) = \sum_x \varepsilon(x)$ n'est pas invariant : $\varepsilon \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right) = \varepsilon \left(\begin{array}{c} \diagup \diagup \\ \diagdown \diagdown \end{array} \right) + 1$

Exemple : le nombre d'enlacement

Le signe d'un croisement x est défini par

$$\varepsilon \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right) := +1 \quad \text{et} \quad \varepsilon \left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \right) := -1.$$

La somme $\varepsilon(D) = \sum_x \varepsilon(x)$ n'est pas invariant : $\varepsilon \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \right) = \varepsilon \left(\begin{array}{c} \diagup \diagup \\ \diagdown \diagdown \end{array} \right) + 1$

Définition & proposition

Pour tout diagramme d'entrelacs D le nombre d'enlacement

$$\text{lk}(D) = \frac{1}{2} \sum_{x \text{ mixte}} \varepsilon(x)$$

est un invariant d'entrelacs.

Exemple : le nombre d'enlacement

Le signe d'un croisement x est défini par

$$\varepsilon \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) := +1 \quad \text{et} \quad \varepsilon \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right) := -1.$$

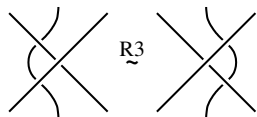
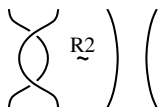
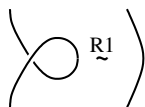
La somme $\varepsilon(D) = \sum_x \varepsilon(x)$ n'est pas invariant : $\varepsilon \left(\begin{array}{c} \text{⌚} \end{array} \right) = \varepsilon \left(\begin{array}{c} \text{⌒} \end{array} \right) + 1$

Définition & proposition

Pour tout diagramme d'entrelacs D le nombre d'enlacement

$$\text{lk}(D) = \frac{1}{2} \sum_{x \text{ mixte}} \varepsilon(x)$$

est un invariant d'entrelacs.



Exemple : le nombre d'enlacement

Le signe d'un croisement x est défini par

$$\varepsilon \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) := +1 \quad \text{et} \quad \varepsilon \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right) := -1.$$

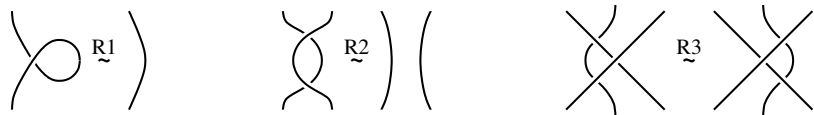
La somme $\varepsilon(D) = \sum_x \varepsilon(x)$ n'est pas invariant : $\varepsilon \left(\begin{array}{c} \text{⌚} \end{array} \right) = \varepsilon \left(\begin{array}{c} \text{⌒} \end{array} \right) + 1$

Définition & proposition

Pour tout diagramme d'entrelacs D le nombre d'enlacement

$$\text{lk}(D) = \frac{1}{2} \sum_{x \text{ mixte}} \varepsilon(x)$$

est un invariant d'entrelacs.



Exemple : $\text{lk}(\bigcirc \bigcirc) = 0$ $\text{lk}(\begin{array}{c} \text{⌚} \end{array}) = +1$ $\text{lk}(\begin{array}{c} \text{⌚} \end{array}) = -1.$

Idée : La différence $v(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \leftarrow \rightarrow \end{array}) - v(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \leftarrow \rightarrow \end{array})$ est une « dérivée combinatoire ».

Invariants de type fini

Idée : La différence $v(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \swarrow \searrow \end{array}) - v(\begin{array}{c} \swarrow \searrow \\ \diagdown \diagup \end{array})$ est une « dérivée combinatoire ».

Dérivées d'ordre supérieur : m changements indépendants.

Idée : La différence $v(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \swarrow \searrow \end{array}) - v(\begin{array}{c} \swarrow \searrow \\ \diagup \diagdown \end{array})$ est une « dérivée combinatoire ».

Dérivées d'ordre supérieur : m changements indépendants.

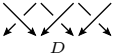

Formellement : Soit D un diagramme et soit Y une famille de croisements.

Invariants de type fini

Idée : La différence $v(\text{diagramme 1}) - v(\text{diagramme 2})$ est une « dérivée combinatoire ».

Dérivées d'ordre supérieur : m changements indépendants.

Formellement : Soit D un diagramme et soit Y une famille de croisements.

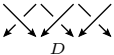
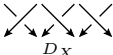
Pour tout $X \subset Y$ on change de  à .

Invariants de type fini

Idée : La différence $v(\text{diagramme à 2 croisements}) - v(\text{diagramme à 1 croisement})$ est une « dérivée combinatoire ».

Dérivées d'ordre supérieur : m changements indépendants.

Formellement : Soit D un diagramme et soit Y une famille de croisements.

Pour tout $X \subset Y$ on change de  à .

Définition (Vassiliev 1990, Goussarov 1991, Birman–Lin 1993)

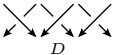
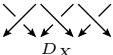
$v: \mathcal{L} \rightarrow A$ est de degré $\leq m$ si $\sum_{X \subset Y} (-1)^{|X|} v(D_X) = 0$ pour $|Y| > m$.

Invariants de type fini

Idée : La différence $v(\text{diagramme à 2 croisements}) - v(\text{diagramme à 1 croisement})$ est une « dérivée combinatoire ».

Dérivées d'ordre supérieur : m changements indépendants.

Formellement : Soit D un diagramme et soit Y une famille de croisements.

Pour tout $X \subset Y$ on change de  à .

Définition (Vassiliev 1990, Goussarov 1991, Birman–Lin 1993)

$v: \mathcal{L} \rightarrow A$ est de degré $\leq m$ si $\sum_{X \subset Y} (-1)^{|X|} v(D_X) = 0$ pour $|Y| > m$.

degré ≤ 0 : $v(\text{diagramme à 2 croisements}) - v(\text{diagramme à 1 croisement}) = 0$

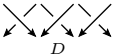
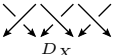
Exemple : Le nombre de composantes est de degré 0.

Invariants de type fini

Idée : La différence $v(\text{diagramme 1}) - v(\text{diagramme 2})$ est une « dérivée combinatoire ».

Dérivées d'ordre supérieur : m changements indépendants.

Formellement : Soit D un diagramme et soit Y une famille de croisements.

Pour tout $X \subset Y$ on change de  à .

Définition (Vassiliev 1990, Goussarov 1991, Birman–Lin 1993)

$v: \mathcal{L} \rightarrow A$ est de degré $\leq m$ si $\sum_{X \subset Y} (-1)^{|X|} v(D_X) = 0$ pour $|Y| > m$.

$$\text{degré} \leq 0 : v(\text{diagramme 1}) - v(\text{diagramme 2}) = 0$$

Exemple : Le nombre de composantes est de degré 0.

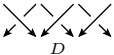
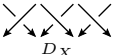
$$\text{degré} \leq 1 : v(\text{diagramme 1}) - v(\text{diagramme 2}) - v(\text{diagramme 3}) + v(\text{diagramme 4}) = 0$$

Invariants de type fini

Idée : La différence $v(\text{diagramme 1}) - v(\text{diagramme 2})$ est une « dérivée combinatoire ».

Dérivées d'ordre supérieur : m changements indépendants.

Formellement : Soit D un diagramme et soit Y une famille de croisements.

Pour tout $X \subset Y$ on change de  à .

Définition (Vassiliev 1990, Goussarov 1991, Birman–Lin 1993)

$v: \mathcal{L} \rightarrow A$ est de degré $\leq m$ si $\sum_{X \subset Y} (-1)^{|X|} v(D_X) = 0$ pour $|Y| > m$.

$$\text{degré} \leq 0 : v(\text{diagramme 1}) - v(\text{diagramme 2}) = 0$$

Exemple : Le nombre de composantes est de degré 0.

$$\text{degré} \leq 1 : v(\text{diagramme 1}) - v(\text{diagramme 2}) - v(\text{diagramme 3}) + v(\text{diagramme 4}) = 0$$

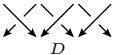
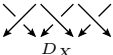
Exemple : Le nombre d'enlacement lk est de degré 1.

Invariants de type fini

Idée : La différence $v(\text{diagramme 1}) - v(\text{diagramme 2})$ est une « dérivée combinatoire ».

Dérivées d'ordre supérieur : m changements indépendants.

Formellement : Soit D un diagramme et soit Y une famille de croisements.

Pour tout $X \subset Y$ on change de  à .

Définition (Vassiliev 1990, Goussarov 1991, Birman–Lin 1993)

$v: \mathcal{L} \rightarrow A$ est de degré $\leq m$ si $\sum_{X \subset Y} (-1)^{|X|} v(D_X) = 0$ pour $|Y| > m$.

degré ≤ 0 : $v(\text{diagramme 1}) - v(\text{diagramme 2}) = 0$

Exemple : Le nombre de composantes est de degré 0.

degré ≤ 1 : $v(\text{diagramme 1}) - v(\text{diagramme 2}) - v(\text{diagramme 3}) + v(\text{diagramme 4}) = 0$

Exemple : Le nombre d'enlacement lk est de degré 1.

degré $\leq m$: les dérivées d'ordre $> m$ s'annulent, donc v est polynomial.

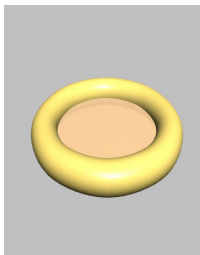
Exemple : invariants quantiques (développement en série convenable)

Théorème (Seifert 1934, Pontryagin 1930)

Pour tout entrelacs $L \subset \mathbb{R}^3$ il existe une surface compacte connexe orientée $S \subset \mathbb{R}^3$ telle que $\partial S = L$. □

Théorème (Seifert 1934, Pontryagin 1930)

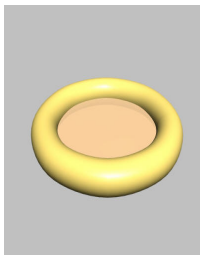
Pour tout entrelacs $L \subset \mathbb{R}^3$ il existe une surface compacte connexe orientée $S \subset \mathbb{R}^3$ telle que $\partial S = L$. □



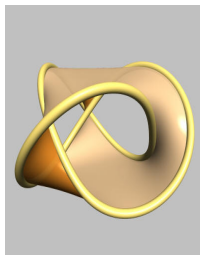
(a) nœud trivial ○

Théorème (Seifert 1934, Pontryagin 1930)

Pour tout entrelacs $L \subset \mathbb{R}^3$ il existe une surface compacte connexe orientée $S \subset \mathbb{R}^3$ telle que $\partial S = L$. □



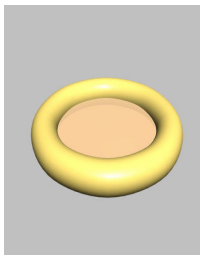
(a) nœud trivial \bigcirc



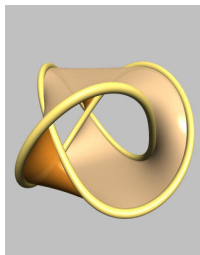
(b) nœud de trèfle 3_1

Théorème (Seifert 1934, Pontryagin 1930)

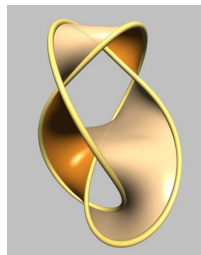
Pour tout entrelacs $L \subset \mathbb{R}^3$ il existe une surface compacte connexe orientée $S \subset \mathbb{R}^3$ telle que $\partial S = L$. \square



(a) nœud trivial \bigcirc



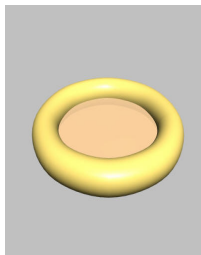
(b) nœud de trèfle 3_1



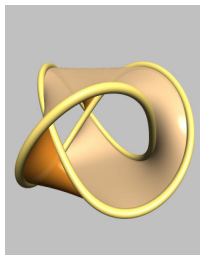
(c) nœud de huit 4_1

Théorème (Seifert 1934, Pontryagin 1930)

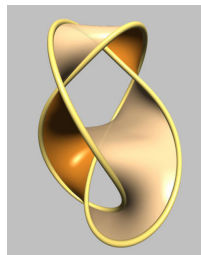
Pour tout entrelacs $L \subset \mathbb{R}^3$ il existe une surface compacte connexe orientée $S \subset \mathbb{R}^3$ telle que $\partial S = L$. □



(a) nœud trivial \bigcirc



(b) nœud de trèfle 3_1

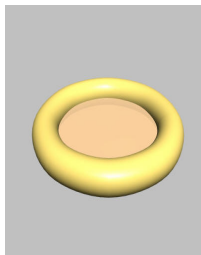


(c) nœud de huit 4_1

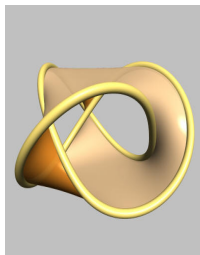
Genre de Seifert $g_3(K) := \min\{g(S) \mid \partial S = K\}$.

Théorème (Seifert 1934, Pontryagin 1930)

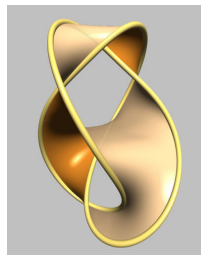
Pour tout entrelacs $L \subset \mathbb{R}^3$ il existe une surface compacte connexe orientée $S \subset \mathbb{R}^3$ telle que $\partial S = L$. □



(a) nœud trivial \bigcirc



(b) nœud de trèfle 3_1



(c) nœud de huit 4_1

Genre de Seifert $g_3(K) := \min\{g(S) \mid \partial S = K\}$.

On a $g_3(K) = 0$ si et seulement si K est trivial.

Toute surface de Seifert se présente par un diagramme en ruban :

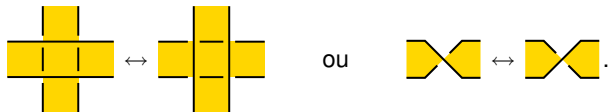


Invariants de surfaces de type fini

Toute surface de Seifert se présente par un diagramme en ruban :



Changements de croisement entre rubans :

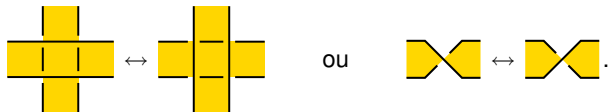


Invariants de surfaces de type fini

Toute surface de Seifert se présente par un diagramme en ruban :



Changements de croisement entre rubans :



Définition

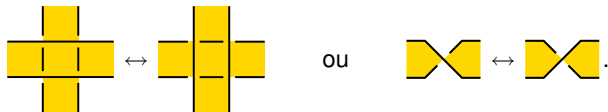
$v: \mathcal{S} \rightarrow A$ est de degré $\leq m$ si $\sum_{X \subset Y} (-1)^{|X|} v(D_X) = 0$ pour $|Y| > m$.

Invariants de surfaces de type fini

Toute surface de Seifert se présente par un diagramme en ruban :



Changements de croisement entre rubans :



Définition

$v: \mathcal{S} \rightarrow A$ est de degré $\leq m$ si $\sum_{X \subset Y} (-1)^{|X|} v(D_X) = 0$ pour $|Y| > m$.

Exemple

La caractéristique d'Euler $S \mapsto \chi(\Sigma)$ est un invariant de degré 0.

Proposition

Si $\mathcal{L} \xrightarrow{v} A$, $L \mapsto v(L)$, est un invariant d'entrelacs de degré $\leq m$, alors $\mathcal{S} \xrightarrow{\partial} \mathcal{L} \xrightarrow{v} A$, $S \mapsto v(\partial S)$, est un invariant de surfaces de degré $\leq m$.

Proposition

Si $\mathcal{L} \xrightarrow{v} A$, $L \mapsto v(L)$, est un invariant d'entrelacs de degré $\leq m$, alors $\mathcal{S} \xrightarrow{\partial} \mathcal{L} \xrightarrow{v} A$, $S \mapsto v(\partial S)$, est un invariant de surfaces de degré $\leq m$.

Démonstration. Changements de croisements entre rubans :



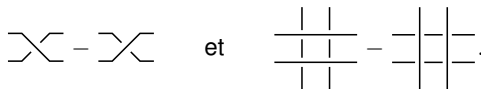
Proposition

Si $\mathcal{L} \xrightarrow{v} A$, $L \mapsto v(L)$, est un invariant d'entrelacs de degré $\leq m$, alors $\mathcal{S} \xrightarrow{\partial} \mathcal{L} \xrightarrow{v} A$, $S \mapsto v(\partial S)$, est un invariant de surfaces de degré $\leq m$.

Démonstration. Changements de croisements entre rubans :



En oubliant la surface on obtient :



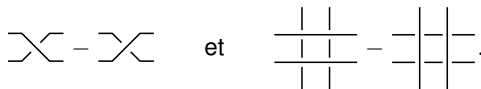
Proposition

Si $\mathcal{L} \xrightarrow{v} A$, $L \mapsto v(L)$, est un invariant d'entrelacs de degré $\leq m$, alors $\mathcal{S} \xrightarrow{\partial} \mathcal{L} \xrightarrow{v} A$, $S \mapsto v(\partial S)$, est un invariant de surfaces de degré $\leq m$.

Démonstration. Changements de croisements entre rubans :



En oubliant la surface on obtient :



C'est une somme télescopique de changements de croisements. □

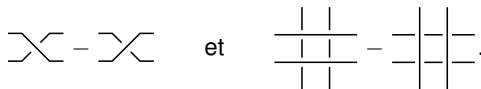
Proposition

Si $\mathcal{L} \xrightarrow{v} A$, $L \mapsto v(L)$, est un invariant d'entrelacs de degré $\leq m$, alors $\mathcal{S} \xrightarrow{\partial} \mathcal{L} \xrightarrow{v} A$, $S \mapsto v(\partial S)$, est un invariant de surfaces de degré $\leq m$.

Démonstration. Changements de croisements entre rubans :



En oubliant la surface on obtient :



C'est une somme télescopique de changements de croisements. □

Slogan

Les invariants de type fini des surfaces englobent tous les invariants de type fini des entrelacs — et beaucoup d'autres invariants encore !

Soit Σ une surface (abstraite) compacte connexe orientée.

Soit Σ une surface (abstraite) compacte connexe orientée.

On a $\chi(\Sigma) = 1 - \text{rk } H_1(\Sigma)$ car $H_0(\Sigma) = 1$ et $H_2(\Sigma) = 0$.

Soit Σ une surface (abstraite) compacte connexe orientée.

On a $\chi(\Sigma) = 1 - \text{rk } H_1(\Sigma)$ car $H_0(\Sigma) = 1$ et $H_2(\Sigma) = 0$.

Le module $H_1(\Sigma) \cong \mathbb{Z}^m$ est libre de rang $m = 1 - \chi(\Sigma)$.

Forme de Seifert

Soit Σ une surface (abstraite) compacte connexe orientée.

On a $\chi(\Sigma) = 1 - \text{rk } H_1(\Sigma)$ car $H_0(\Sigma) = 1$ et $H_2(\Sigma) = 0$.

Le module $H_1(\Sigma) \cong \mathbb{Z}^m$ est libre de rang $m = 1 - \chi(\Sigma)$.

À tout plongement $F: \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ on associe sa forme de Seifert

$$\theta_F: H_1(\Sigma) \times H_1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \theta_F(a, b) = \text{lk}(F^\uparrow(a), F^\downarrow(b)).$$

Soit Σ une surface (abstraite) compacte connexe orientée.

On a $\chi(\Sigma) = 1 - \text{rk } H_1(\Sigma)$ car $H_0(\Sigma) = 1$ et $H_2(\Sigma) = 0$.

Le module $H_1(\Sigma) \cong \mathbb{Z}^m$ est libre de rang $m = 1 - \chi(\Sigma)$.

À tout plongement $F: \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ on associe sa forme de Seifert

$$\theta_F: H_1(\Sigma) \times H_1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \theta_F(a, b) = \text{lk}(F^\uparrow(a), F^\downarrow(b)).$$

Observation

Les coefficients de θ_F sont de degré ≤ 1 .

Soit Σ une surface (abstraite) compacte connexe orientée.

On a $\chi(\Sigma) = 1 - \text{rk } H_1(\Sigma)$ car $H_0(\Sigma) = 1$ et $H_2(\Sigma) = 0$.

Le module $H_1(\Sigma) \cong \mathbb{Z}^m$ est libre de rang $m = 1 - \chi(\Sigma)$.

À tout plongement $F: \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ on associe sa forme de Seifert

$$\theta_F: H_1(\Sigma) \times H_1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \theta_F(a, b) = \text{lk}(F^\uparrow(a), F^\downarrow(b)).$$

Observation

Les coefficients de θ_F sont de degré ≤ 1 .

Le déterminant de F est défini par $\det(F) := \det[-i(\theta_F + \theta_F^*)]$.

Soit Σ une surface (abstraite) compacte connexe orientée.

On a $\chi(\Sigma) = 1 - \text{rk } H_1(\Sigma)$ car $H_0(\Sigma) = 1$ et $H_2(\Sigma) = 0$.

Le module $H_1(\Sigma) \cong \mathbb{Z}^m$ est libre de rang $m = 1 - \chi(\Sigma)$.

À tout plongement $F: \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ on associe sa forme de Seifert

$$\theta_F: H_1(\Sigma) \times H_1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \theta_F(a, b) = \text{lk}(F^\uparrow(a), F^\downarrow(b)).$$

Observation

Les coefficients de θ_F sont de degré ≤ 1 .

Le déterminant de F est défini par $\det(F) := \det[-i(\theta_F + \theta_F^*)]$.

C'est un polynôme homogène de degré m dans les coefficients de θ_F .

Soit Σ une surface (abstraite) compacte connexe orientée.

On a $\chi(\Sigma) = 1 - \text{rk } H_1(\Sigma)$ car $H_0(\Sigma) = 1$ et $H_2(\Sigma) = 0$.

Le module $H_1(\Sigma) \cong \mathbb{Z}^m$ est libre de rang $m = 1 - \chi(\Sigma)$.

À tout plongement $F: \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ on associe sa forme de Seifert

$$\theta_F: H_1(\Sigma) \times H_1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \theta_F(a, b) = \text{lk}(F^\uparrow(a), F^\downarrow(b)).$$

Observation

Les coefficients de θ_F sont de degré ≤ 1 .

Le déterminant de F est défini par $\det(F) := \det[-i(\theta_F + \theta_F^*)]$.

C'est un polynôme homogène de degré m dans les coefficients de θ_F .

Observation

L'invariant $F \mapsto \det(F)$ est de degré $\leq m = 1 - \chi(\Sigma)$.

Proposition

Le déterminant $\det(F) = \det[-i(\theta_F + \theta_F^)]$ ne dépend que de $L = F(\partial\Sigma)$.*

Proposition

Le déterminant $\det(F) = \det[-i(\theta_F + \theta_F^)]$ ne dépend que de $L = F(\partial\Sigma)$.*

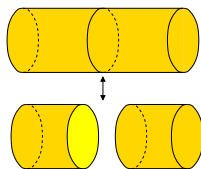
Démonstration. Invariant par changement de base.

Proposition

Le déterminant $\det(F) = \det[-i(\theta_F + \theta_F^*)]$ ne dépend que de $L = F(\partial\Sigma)$.

Démonstration. Invariant par changement de base.

On a $\partial S = \partial S' = L$ si et seulement si ces surfaces sont reliées par une suite de chirurgies dans \mathbb{R}^3 :

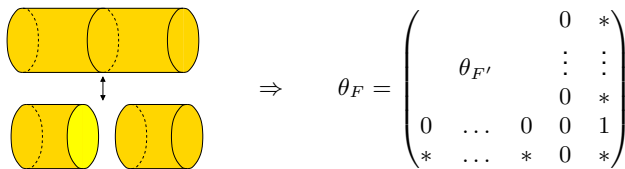


Proposition

Le déterminant $\det(F) = \det[-i(\theta_F + \theta_F^*)]$ ne dépend que de $L = F(\partial\Sigma)$.

Démonstration. Invariant par changement de base.

On a $\partial S = \partial S' = L$ si et seulement si ces surfaces sont reliées par une suite de chirurgies dans \mathbb{R}^3 :



Ceci entraîne $\det[-i(\theta_F + \theta_F^*)] = \det[-i(\theta_{F'} + \theta_{F'}^*)]$

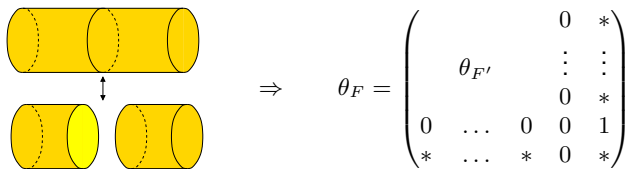
□

Proposition

Le déterminant $\det(F) = \det[-i(\theta_F + \theta_F^*)]$ ne dépend que de $L = F(\partial\Sigma)$.

Démonstration. Invariant par changement de base.

On a $\partial S = \partial S' = L$ si et seulement si ces surfaces sont reliées par une suite de chirurgies dans \mathbb{R}^3 :



Ceci entraîne $\det[-i(\theta_F + \theta_F^*)] = \det[-i(\theta_{F'} + \theta_{F'}^*)]$

□

Remarque

$L \mapsto \det(L)$ n'est pas de type fini dans le sens de Vassiliev–Goussarov.
 $S \mapsto \det(S)$ est de type fini, vu comme invariant de surfaces.

On peut généraliser

$$\det(F) := \det[-i(\theta_F + \theta_F^*)]$$

On peut généraliser

$$\det(F) := \det[-i(\theta_F + \theta_F^*)]$$

au polynôme d'Alexander

$$\Delta(F) = \det(q^- \theta_F^* - q^+ \theta_F).$$

Polynôme d'Alexander

On peut généraliser

$$\det(F) := \det[-i(\theta_F + \theta_F^*)]$$

au polynôme d'Alexander

$$\Delta(F) = \det(q^- \theta_F^* - q^+ \theta_F).$$

On voit que $\det(F) = \Delta(F)_{q \mapsto i}$.

On peut généraliser

$$\det(F) := \det[-i(\theta_F + \theta_F^*)]$$

au polynôme d'Alexander

$$\Delta(F) = \det(q^- \theta_F^* - q^+ \theta_F).$$

On voit que $\det(F) = \Delta(F)_{q \mapsto i}$.

Proposition

L'invariant $F \mapsto \Delta(F)$ est un invariant de degré $\leq m = 1 - \chi(\Sigma)$.

On peut généraliser

$$\det(F) := \det[-i(\theta_F + \theta_F^*)]$$

au polynôme d'Alexander

$$\Delta(F) = \det(q^- \theta_F^* - q^+ \theta_F).$$

On voit que $\det(F) = \Delta(F)_{q \mapsto i}$.

Proposition

L'invariant $F \mapsto \Delta(F)$ est un invariant de degré $\leq m = 1 - \chi(\Sigma)$.

Théorème (Seifert 1934)

L'invariant $\Delta(F)$ ne dépend que de l'entrelacs $L = F(\partial\Sigma)$.

On peut généraliser

$$\det(F) := \det[-i(\theta_F + \theta_F^*)]$$

au polynôme d'Alexander

$$\Delta(F) = \det(q^- \theta_F^* - q^+ \theta_F).$$

On voit que $\det(F) = \Delta(F)_{q \mapsto i}$.

Proposition

L'invariant $F \mapsto \Delta(F)$ est un invariant de degré $\leq m = 1 - \chi(\Sigma)$.

Théorème (Seifert 1934)

L'invariant $\Delta(F)$ ne dépend que de l'entrelacs $L = F(\partial\Sigma)$.

Question

Quels polynômes en θ_F sont des invariants de $S = F(\Sigma)$?

On peut généraliser

$$\det(F) := \det[-i(\theta_F + \theta_F^*)]$$

au polynôme d'Alexander

$$\Delta(F) = \det(q^- \theta_F^* - q^+ \theta_F).$$

On voit que $\det(F) = \Delta(F)_{q \mapsto i}$.

Proposition

L'invariant $F \mapsto \Delta(F)$ est un invariant de degré $\leq m = 1 - \chi(\Sigma)$.

Théorème (Seifert 1934)

L'invariant $\Delta(F)$ ne dépend que de l'entrelacs $L = F(\partial\Sigma)$.

Question

Quels polynômes en θ_F sont des invariants de $S = F(\Sigma)$?

Quels polynômes en θ_F sont des invariants de $L = F(\partial\Sigma)$?

- 1 Invariants de type fini d'entrelacs et de surfaces
- 2 **Le polynôme de Jones des entrelacs rubans**
 - Le problème de Fox : « slice \Rightarrow ribbon ? »
 - Le polynôme de Jones des entrelacs rubans
 - Esquisse de démonstration
- 3 Théorie des invariants de type fini
- 4 Questions ouvertes

Exemple

Soit $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ donnée par $f(z) = (z^2, z^3)$.

Exemple

Soit $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ donnée par $f(z) = (z^2, z^3)$.

En $0 \in \mathbb{R}^4$ la surface $\Sigma = \text{Image}(f)$ n'est pas localement plate.

Exemple

Soit $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ donnée par $f(z) = (z^2, z^3)$.

En $0 \in \mathbb{R}^4$ la surface $\Sigma = \text{Image}(f)$ n'est pas localement plate.

$K_x^\varepsilon := \Sigma \cap \partial B_x^\varepsilon$ est un nœud.

Exemple

Soit $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ donnée par $f(z) = (z^2, z^3)$.

En $0 \in \mathbb{R}^4$ la surface $\Sigma = \text{Image}(f)$ n'est pas localement plate.

$K_x^\varepsilon := \Sigma \cap \partial B_x^\varepsilon$ est un nœud.

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$ ce nœud est indépendant de ε .

Exemple

Soit $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ donnée par $f(z) = (z^2, z^3)$.

En $0 \in \mathbb{R}^4$ la surface $\Sigma = \text{Image}(f)$ n'est pas localement plate.

$K_x^\varepsilon := \Sigma \cap \partial B_x^\varepsilon$ est un nœud.

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$ ce nœud est indépendant de ε .

Dans notre exemple on trouve le nœud de trèfle 3_1 .

Exemple

Soit $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ donnée par $f(z) = (z^2, z^3)$.

En $0 \in \mathbb{R}^4$ la surface $\Sigma = \text{Image}(f)$ n'est pas localement plate.

$K_x^\varepsilon := \Sigma \cap \partial B_x^\varepsilon$ est un nœud.

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$ ce nœud est indépendant de ε .

Dans notre exemple on trouve le nœud de trèfle 3_1 .

Définition (nœud bordant / slice knot)

Un nœud $K \subset \mathbb{S}^3$ est *bordant* [slice] s'il borde un disque lisse dans \mathbb{D}^4 .

Exemple

Soit $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ donnée par $f(z) = (z^2, z^3)$.

En $0 \in \mathbb{R}^4$ la surface $\Sigma = \text{Image}(f)$ n'est pas localement plate.

$K_x^\varepsilon := \Sigma \cap \partial B_x^\varepsilon$ est un nœud.

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$ ce nœud est indépendant de ε .

Dans notre exemple on trouve le nœud de trèfle 3_1 .

Définition (nœud bordant / slice knot)

Un nœud $K \subset \mathbb{S}^3$ est *bordant* [slice] s'il borde un disque lisse dans \mathbb{D}^4 .

Dans ce cas la singularité en $x \in \Sigma$ peut être effacée localement.

Singularités de surfaces dans \mathbb{R}^4 (Fox–Milnor 1958)

Exemple

Soit $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ donnée par $f(z) = (z^2, z^3)$.

En $0 \in \mathbb{R}^4$ la surface $\Sigma = \text{Image}(f)$ n'est pas localement plate.

$K_x^\varepsilon := \Sigma \cap \partial B_x^\varepsilon$ est un nœud.

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$ ce nœud est indépendant de ε .

Dans notre exemple on trouve le nœud de trèfle 3_1 .

Définition (nœud bordant / slice knot)

Un nœud $K \subset \mathbb{S}^3$ est *bordant* [slice] s'il borde un disque lisse dans \mathbb{D}^4 .

Dans ce cas la singularité en $x \in \Sigma$ peut être effacée localement.

Théorème (Fox-Milnor 1966)

Si K est bordant alors $\Delta(K) = P(q) \cdot P(q^{-1})$ pour un $P \in \mathbb{Z}[q]$. \square

Singularités de surfaces dans \mathbb{R}^4 (Fox–Milnor 1958)

Exemple

Soit $f: \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ donnée par $f(z) = (z^2, z^3)$.

En $0 \in \mathbb{R}^4$ la surface $\Sigma = \text{Image}(f)$ n'est pas localement plate.

$K_x^\varepsilon := \Sigma \cap \partial B_x^\varepsilon$ est un nœud.

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$ ce nœud est indépendant de ε .

Dans notre exemple on trouve le nœud de trèfle 3_1 .

Définition (nœud bordant / slice knot)

Un nœud $K \subset \mathbb{S}^3$ est *bordant* [slice] s'il borde un disque lisse dans \mathbb{D}^4 .

Dans ce cas la singularité en $x \in \Sigma$ peut être effacée localement.

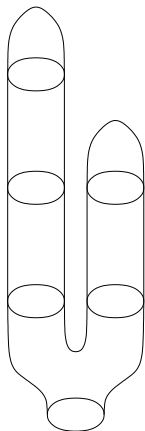
Théorème (Fox-Milnor 1966)

Si K est bordant alors $\Delta(K) = P(q) \cdot P(q^{-1})$ pour un $P \in \mathbb{Z}[q]$. \square

Dans notre exemple : $\Delta(3_1) = q^2 - 1 + q^{-2}$ ne se factorise pas.

Exemple d'un nœud bordant

surface abstraite



$h = 0$

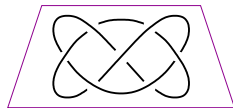
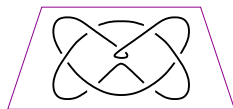
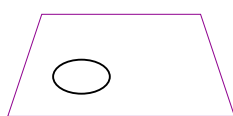
passage d'un maximum

passage d'un maximum

isotopie

passage d'un point selle

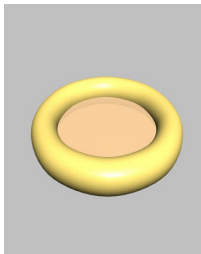
surface plongée dans \mathbb{R}_+^4



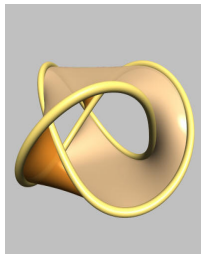
$\mathbb{R}^3 \times 0$

Surfaces plongées et immergées

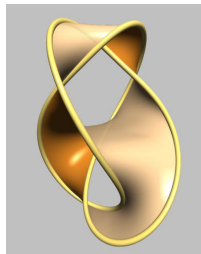
Surfaces plongées à bord :



(a) nœud trivial \bigcirc



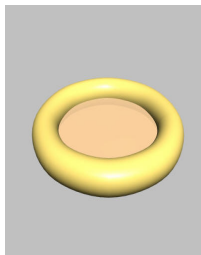
(b) nœud de trèfle 3_1



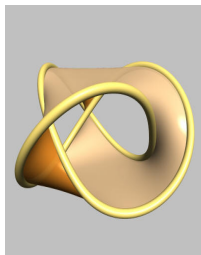
(c) nœud de huit 4_1

Surfaces plongées et immergées

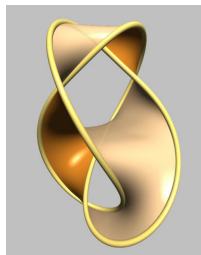
Surfaces plongées à bord :



(a) nœud trivial \bigcirc

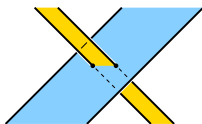


(b) nœud de trèfle 3_1

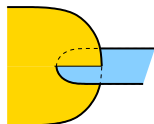


(c) nœud de huit 4_1

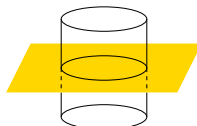
Surfaces immergées à bord :



(d) singularité ruban



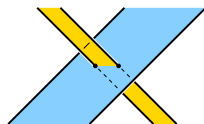
(e) singularité clasp



(f) singularité circulaire

Définition

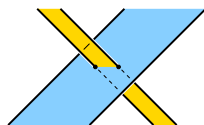
Une *surface ruban* $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface immergée, c'est-à-dire l'image d'une immersion $\Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$, n'ayant que des singularités ruban.



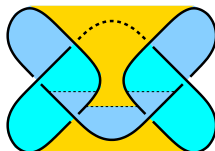
(a) singularité ruban

Définition

Une *surface ruban* $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface immergée, c'est-à-dire l'image d'une immersion $\Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$, n'ayant que des singularités ruban.



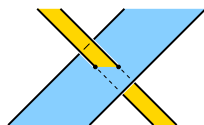
(a) singularité ruban



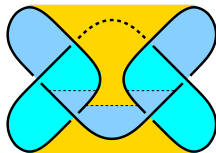
(b) $3_1 \# 3_1^*$

Définition

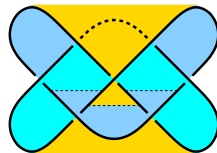
Une *surface ruban* $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface immergée, c'est-à-dire l'image d'une immersion $\Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$, n'ayant que des singularités ruban.



(a) singularité ruban



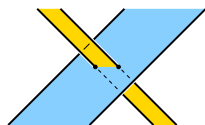
(b) $3_1 \# 3_1^*$



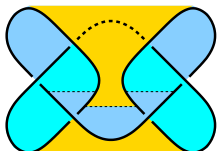
(c) 6_1

Définition

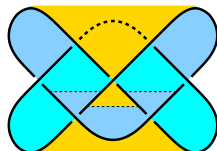
Une *surface ruban* $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface immergée, c'est-à-dire l'image d'une immersion $\Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$, n'ayant que des singularités ruban.



(a) singularité ruban



(b) $3_1 \# 3_1^*$



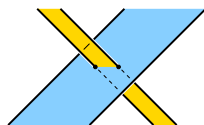
(c) 6_1

Définition

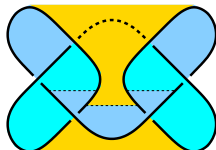
Un entrelacs L est *ruban* s'il borde une surface ruban formée de disques.

Définition

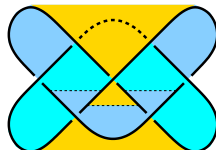
Une *surface ruban* $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface immergée, c'est-à-dire l'image d'une immersion $\Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$, n'ayant que des singularités ruban.



(a) singularité ruban



(b) $3_1 \# 3_1^*$



(c) 6_1

Définition

Un entrelacs L est *ruban* s'il borde une surface ruban formée de disques.

Exemple : Pour tout nœud K la somme $K \# K^*$ est un nœud ruban.

Observation (Fox 1962)

surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ \iff surface lisse $S_+ \subset \mathbb{R}_+^4$ sans minima

Observation (Fox 1962)

surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ \iff surface lisse $S_+ \subset \mathbb{R}_+^4$ sans minima
 \Downarrow $\Uparrow?$
surface lisse $S_+ \subset \mathbb{R}_+^4$

Observation (Fox 1962)

surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ \iff surface lisse $S_+ \subset \mathbb{R}_+^4$ sans minima
 \Downarrow $\Uparrow?$
surface lisse $S_+ \subset \mathbb{R}_+^4$

Genre de Seifert $g_3(K) := \min\{ g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ surface de Seifert, } \partial S = K \}$
 $g_3(K) = 0 \iff K \text{ est trivial}$

Observation (Fox 1962)

$$\begin{array}{ccc} \text{surface ruban } S \subset \mathbb{R}^3 & \iff & \text{surface lisse } S_+ \subset \mathbb{R}_+^4 \text{ sans minima} \\ & & \downarrow \quad \uparrow? \\ & & \text{surface lisse } S_+ \subset \mathbb{R}_+^4 \end{array}$$

Genre de Seifert $g_3(K) := \min\{ g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ surface de Seifert, } \partial S = K \}$
 $g_3(K) = 0 \iff K \text{ est trivial}$

Genre ruban $g_r(K) := \min\{ g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ surface ruban, } \partial S = K \}$
 $g_r(K) = 0 \iff K \text{ est ruban}$

Observation (Fox 1962)

$$\begin{array}{ccc} \text{surface ruban } S \subset \mathbb{R}^3 & \iff & \text{surface lisse } S_+ \subset \mathbb{R}_+^4 \text{ sans minima} \\ & & \downarrow \quad \uparrow? \\ & & \text{surface lisse } S_+ \subset \mathbb{R}_+^4 \end{array}$$

Genre de Seifert $g_3(K) := \min\{ g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ surface de Seifert, } \partial S = K \}$

$$g_3(K) = 0 \iff K \text{ est trivial}$$

Genre ruban $g_r(K) := \min\{ g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ surface ruban, } \partial S = K \}$

$$g_r(K) = 0 \iff K \text{ est ruban}$$

Genre lisse $g_4(K) := \min\{ g(S) \mid S \subset \mathbb{R}_+^4 \text{ surface lisse, } \partial S = K \}$

$$g_4(K) = 0 \iff K \text{ est bordant}$$

Observation (Fox 1962)

$$\begin{array}{ccc} \text{surface ruban } S \subset \mathbb{R}^3 & \iff & \text{surface lisse } S_+ \subset \mathbb{R}_+^4 \text{ sans minima} \\ & & \downarrow \quad \uparrow? \\ & & \text{surface lisse } S_+ \subset \mathbb{R}_+^4 \end{array}$$

Genre de Seifert $g_3(K) := \min\{ g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ surface de Seifert, } \partial S = K \}$
 $g_3(K) = 0 \iff K \text{ est trivial}$

Genre ruban $g_r(K) := \min\{ g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ surface ruban, } \partial S = K \}$
 $g_r(K) = 0 \iff K \text{ est ruban}$

Genre lisse $g_4(K) := \min\{ g(S) \mid S \subset \mathbb{R}_+^4 \text{ surface lisse, } \partial S = K \}$
 $g_4(K) = 0 \iff K \text{ est bordant}$

Question (problème de Fox)

Est-ce que tout nœud bordant est ruban ?

Théorème

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe un unique invariant $V_N : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ satisfaisant $V_N(\bigcirc) = 1$ et la relation locale

$$q^{-N} \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right) - q^{+N} \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array} \right).$$

Théorème

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe un unique invariant $V_N : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ satisfaisant $V_N(\bigcirc) = 1$ et la relation locale

$$q^{-N} \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right) - q^{+N} \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array} \right).$$

$N = 0$: Alexander 1928, Conway 1969 ; $V_0(L) = (-1)^{n+1} \Delta(L)$

$N = 1$: trivial invariant, $V_1 = 1$

$N = 2$: Jones 1984 ; $V := V_2$

$N > 2$: HOMFLY-PT 1985-1987

Théorème

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe un unique invariant $V_N : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ satisfaisant $V_N(\bigcirc) = 1$ et la relation locale

$$q^{-N} \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right) - q^{+N} \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right) \zeta.$$

$N = 0$: Alexander 1928, Conway 1969 ; $V_0(L) = (-1)^{n+1} \Delta(L)$

$N = 1$: trivial invariant, $V_1 = 1$

$N = 2$: Jones 1984 ; $V := V_2$

$N > 2$: HOMFLY-PT 1985-1987

Remarque

$V(\bigcirc^n) = (q^{-1} + q^{+1})^{n-1}$ et $q^{-1} + q^{+1}$ est le polynôme minimal de i .

Théorème

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe un unique invariant $V_N : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ satisfaisant $V_N(\bigcirc) = 1$ et la relation locale

$$q^{-N} \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right) - q^{+N} \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array} \right).$$

$N = 0$: Alexander 1928, Conway 1969 ; $V_0(L) = (-1)^{n+1} \Delta(L)$

$N = 1$: trivial invariant, $V_1 = 1$

$N = 2$: Jones 1984 ; $V := V_2$

$N > 2$: HOMFLY-PT 1985-1987

Remarque

$V(\bigcirc^n) = (q^{-1} + q^{+1})^{n-1}$ et $q^{-1} + q^{+1}$ est le polynôme minimal de i .

En $q = i$ on retrouve $V(L)_{q \mapsto i} = \Delta(L)_{q \mapsto i} = \det(L)$.

Théorème (E 2007)

Si $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ de caractéristique d'Euler $n > 0$, alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Théorème (E 2007)

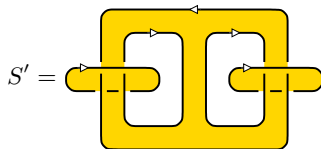
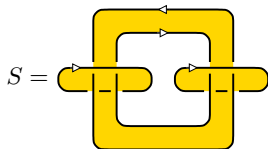
Si $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ de caractéristique d'Euler $n > 0$, alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Plus succinctement : $V(\partial S)$ est divisible par $(q^+ + q^-)^{\chi(S)-1}$.

Théorème (E 2007)

Si $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ de caractéristique d'Euler $n > 0$, alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

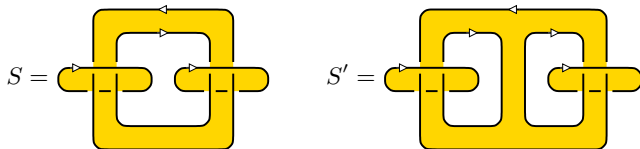
Plus succinctement : $V(\partial S)$ est divisible par $(q^+ + q^-)^{\chi(S)-1}$.



Théorème (E 2007)

Si $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ de caractéristique d'Euler $n > 0$, alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Plus succinctement : $V(\partial S)$ est divisible par $(q^+ + q^-)^{\chi(S)-1}$.



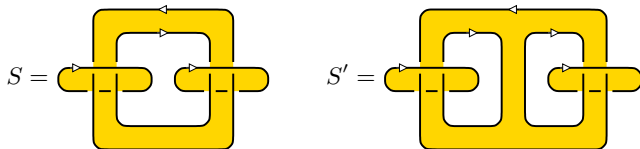
$$\chi(S) = 1 + 1 + 0 = 2,$$

$$V(L) = (q^+ + q^-) \cdot (q^6 - q^4 + 2q^2 + 2q^{-2} - q^{-4} + q^{-6}).$$

Théorème (E 2007)

Si $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ de caractéristique d'Euler $n > 0$, alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Plus succinctement : $V(\partial S)$ est divisible par $(q^+ + q^-)^{\chi(S)-1}$.



$$\chi(S) = 1 + 1 + 0 = 2,$$

$$V(L) = (q^+ + q^-) \cdot (q^6 - q^4 + 2q^2 + 2q^{-2} - q^{-4} + q^{-6}).$$

$$\chi(S') = 1 + 1 - 1 = 1,$$

$$V(L') = (q^{+1} + q^{+5})^2 \cdot (q^{-1} + q^{-5})^2.$$

Théorème (E 2007)

Soit $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ un entrelacs ruban.

Théorème (E 2007)

Soit $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ un entrelacs ruban.

Alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$

Théorème (E 2007)

Soit $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ un entrelacs ruban.

Alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$ et

$$\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q \mapsto i)}$$

Théorème (E 2007)

Soit $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ un entrelacs ruban.

Alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$ et

$$\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q \mapsto i)}$$

satisfait à la congruence

$$\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n) \pmod{32}.$$

Théorème (E 2007)

Soit $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ un entrelacs ruban.

Alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$ et

$$\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q \mapsto i)}$$

satisfait à la congruence

$$\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n) \pmod{32}.$$

En particulier nous obtenons $\det V(L) \equiv 1 \pmod{8}$.

Théorème (E 2007)

Soit $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ un entrelacs ruban.

Alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$ et

$$\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q \mapsto i)}$$

satisfait à la congruence

$$\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n) \pmod{32}.$$

En particulier nous obtenons $\det V(L) \equiv 1 \pmod{8}$.

⇒ Analogie avec la nullité de Seifert : ici $\text{null } V(L) = \text{null}(L)$.

⇒ Analogie avec l'invariant d'Arf : \det modulo 8.

Théorème (E 2007)

Soit $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ un entrelacs ruban.

Alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$ et

$$\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q \mapsto i)}$$

satisfait à la congruence

$$\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n) \pmod{32}.$$

En particulier nous obtenons $\det V(L) \equiv 1 \pmod{8}$.

⇒ Analogie avec la nullité de Seifert : ici $\text{null } V(L) = \text{null}(L)$.

⇒ Analogie avec l'invariant d'Arf : det modulo 8.

Projet

Obstruction pour des entrelacs rubans / bordants.

Définition (crochet de Kauffman)

Il existe une unique application $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm}]$, notée $D \mapsto \langle D \rangle$, telle que

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \rangle &= 1, \\ \langle D \sqcup \bigcirc \rangle &= \langle D \rangle \cdot (-A^{+2} - A^{-2}), \\ \langle \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\rangle \rangle &= A \langle \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right\rangle \rangle + A^{-1} \langle \left\langle \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right\rangle \rangle. \end{aligned}$$

Définition (crochet de Kauffman)

Il existe une unique application $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm}]$, notée $D \mapsto \langle D \rangle$, telle que

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \rangle &= 1, \\ \langle D \sqcup \bigcirc \rangle &= \langle D \rangle \cdot (-A^{+2} - A^{-2}), \\ \langle \langle \diagup \rangle \rangle &= A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle. \end{aligned}$$

$$\langle \langle \diagdown \rangle \rangle = \langle \rangle \langle \rangle \quad \text{et} \quad \langle \langle \diagup \rangle \rangle = \langle \rangle \langle \rangle \quad \text{mais} \quad \langle \bigcirc \rangle = -A^3 \langle \rangle \langle \rangle$$

Définition (crochet de Kauffman)

Il existe une unique application $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm}]$, notée $D \mapsto \langle D \rangle$, telle que

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \rangle &= 1, \\ \langle D \sqcup \bigcirc \rangle &= \langle D \rangle \cdot (-A^{+2} - A^{-2}), \\ \langle \langle \diagdown \rangle \rangle &= A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \langle \diagup \rangle \rangle. \end{aligned}$$

$$\langle \langle \diagdown \rangle \rangle = \langle \rangle \langle \rangle \quad \text{et} \quad \langle \langle \diagup \rangle \rangle = \langle \rangle \langle \rangle \quad \text{mais} \quad \langle \bigcirc \rangle = -A^3 \langle \langle \diagdown \rangle \rangle$$

Théorème (Kauffman 1987)

On a $V(L)|_{(q \mapsto -A^{-2})} = \langle D \rangle \cdot (-A^{-3})^{\epsilon(D)}$.

Définition (crochet de Kauffman)

Il existe une unique application $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm}]$, notée $D \mapsto \langle D \rangle$, telle que

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \rangle &= 1, \\ \langle D \sqcup \bigcirc \rangle &= \langle D \rangle \cdot (-A^{+2} - A^{-2}), \\ \langle \langle \diagdown \rangle \rangle &= A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle. \end{aligned}$$

$$\langle \langle \diagup \rangle \rangle = \langle \rangle \langle \rangle \quad \text{et} \quad \langle \langle \diagdown \rangle \rangle = \langle \rangle \langle \rangle \quad \text{mais} \quad \langle \bigcirc \rangle = -A^3 \langle \rangle \langle \rangle$$

Théorème (Kauffman 1987)

On a $V(L)|_{(q \mapsto -A^{-2})} = \langle D \rangle \cdot (-A^{-3})^{\varepsilon(D)}$.

Construction analogue pour V_N par Murakami–Ohtsuki–Yamada 1998

Proposition (E 2007)

Si $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ de caractéristique d'Euler $n > 0$, alors $V(L)$ est divisible par $V(\mathbb{O}^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Proposition (E 2007)

Si $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ de caractéristique d'Euler $n > 0$, alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Démonstration. Par hypothèse toute composante S_i a du bord.

Proposition (E 2007)

Si $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ de caractéristique d'Euler $n > 0$, alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Démonstration. Par hypothèse toute composante S_i a du bord.

Donc $\chi(S_i) > 0 \Leftrightarrow S_i = \bigcirc \Leftrightarrow \chi(S_i) = 1$.

Proposition (E 2007)

Si $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ de caractéristique d'Euler $n > 0$, alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Démonstration. Par hypothèse toute composante S_i a du bord.

Donc $\chi(S_i) > 0 \Leftrightarrow S_i = \bigcirc \Leftrightarrow \chi(S_i) = 1$.

Récurrence sur le nombre $r(S)$ de singularités rubans :

Proposition (E 2007)

Si $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ de caractéristique d'Euler $n > 0$, alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Démonstration. Par hypothèse toute composante S_i a du bord.

Donc $\chi(S_i) > 0 \Leftrightarrow S_i = \bigcirc \Leftrightarrow \chi(S_i) = 1$.

Récurrence sur le nombre $r(S)$ de singularités rubans :

Si $r(S) = 0$, alors S est plongée et $L = L_0 \sqcup \bigcirc^n$.

Proposition (E 2007)

Si $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ de caractéristique d'Euler $n > 0$, alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Démonstration. Par hypothèse toute composante S_i a du bord.

Donc $\chi(S_i) > 0 \Leftrightarrow S_i = \bigcirc \Leftrightarrow \chi(S_i) = 1$.

Récurrence sur le nombre $r(S)$ de singularités rubans :

Si $r(S) = 0$, alors S est plongée et $L = L_0 \sqcup \bigcirc^n$.

Si $r(S) \geq 1$, alors on considère le crochet de Kauffman :

Proposition (E 2007)

Si $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ de caractéristique d'Euler $n > 0$, alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Démonstration. Par hypothèse toute composante S_i a du bord.

Donc $\chi(S_i) > 0 \Leftrightarrow S_i = \bigcirc \Leftrightarrow \chi(S_i) = 1$.

Récurrence sur le nombre $r(S)$ de singularités rubans :

Si $r(S) = 0$, alors S est plongée et $L = L_0 \sqcup \bigcirc^n$.

Si $r(S) \geq 1$, alors on considère le crochet de Kauffman :

$$\begin{aligned} & \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right\rangle - \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right\rangle = (A^{+2} - A^{-2}) \left[\left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle - \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle \right] \\ & + (A^{+4} - 1) \left[\left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle - \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle \right] + (A^{-4} - 1) \left[\left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle - \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle \right]. \end{aligned}$$

Proposition (E 2007)

Si $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ de caractéristique d'Euler $n > 0$, alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Démonstration. Par hypothèse toute composante S_i a du bord.

Donc $\chi(S_i) > 0 \Leftrightarrow S_i = \bigcirc \Leftrightarrow \chi(S_i) = 1$.

Récurrence sur le nombre $r(S)$ de singularités rubans :

Si $r(S) = 0$, alors S est plongée et $L = L_0 \sqcup \bigcirc^n$.

Si $r(S) \geq 1$, alors on considère le crochet de Kauffman :

$$\begin{aligned} & \langle \text{Cross} \rangle - \langle \text{Cross} \rangle = (A^{+2} - A^{-2}) \left[\langle \text{Cross} \rangle - \langle \text{Cross} \rangle \right] \\ & + (A^{+4} - 1) \left[\langle \text{Cross} \rangle - \langle \text{Cross} \rangle \right] + (A^{-4} - 1) \left[\langle \text{Cross} \rangle - \langle \text{Cross} \rangle \right]. \end{aligned}$$

Annulation miraculeuse ! On conclut par $\chi(\text{Cross}) = \chi(\text{Cross}) + 1$. □

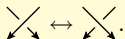
- 1 Invariants de type fini d'entrelacs et de surfaces
- 2 Le polynôme de Jones des entrelacs rubans
- 3 Théorie des invariants de type fini**
 - Développement en invariants de type fini
 - Diagrammes en arcs
 - Vers un invariant universel
- 4 Questions ouvertes

Théorème (Birman-Lin 1993)

On développe $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(L) \cdot h^k$ *en* $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$

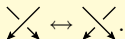
Théorème (Birman-Lin 1993)

On développe $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(L) \cdot h^k$ en $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$
Alors $L \mapsto v_k(L)$ est de degré $\leq k$ par rapport à



Théorème (Birman-Lin 1993)

On développe $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(L) \cdot h^k$ en $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$
Alors $L \mapsto v_k(L)$ est de degré $\leq k$ par rapport à

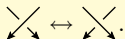


Théorème (E 2007)

On développe $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(L) \cdot h^k$ en
 $q = i \exp(h/2) = i + ih/2 + \dots$

Théorème (Birman-Lin 1993)

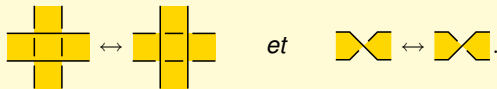
On développe $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(L) \cdot h^k$ en $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$
Alors $L \mapsto v_k(L)$ est de degré $\leq k$ par rapport à



Théorème (E 2007)

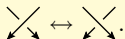
On développe $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(L) \cdot h^k$ en $q = i \exp(h/2) = i + ih/2 + \dots$

Alors $S \mapsto d_k(\partial S)$ est de degré $\leq k + 1 - \chi(S)$ par rapport à



Théorème (Birman-Lin 1993)

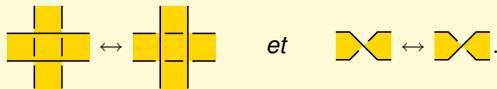
On développe $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(L) \cdot h^k$ en $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$
Alors $L \mapsto v_k(L)$ est de degré $\leq k$ par rapport à



Théorème (E 2007)

On développe $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(L) \cdot h^k$ en
 $q = i \exp(h/2) = i + ih/2 + \dots$

Alors $S \mapsto d_k(\partial S)$ est de degré $\leq k + 1 - \chi(S)$ par rapport à

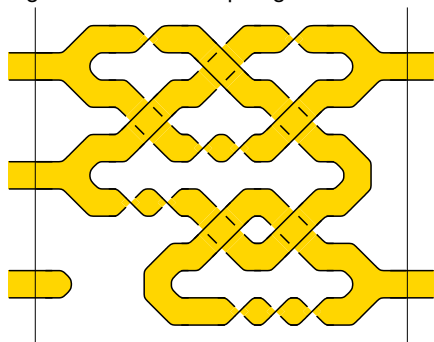


Projet

Élaborer la théorie : invariant universel de type fini,
interprétation topologique ; application aux surfaces, ...

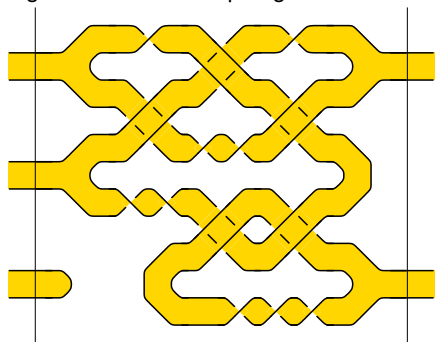
Surfaces plongées

On considère la catégorie des surfaces plongées :



Surfaces plongées

On considère la catégorie des surfaces plongées :

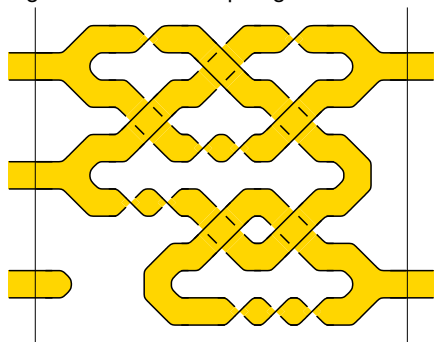


Générateurs :



Surfaces plongées

On considère la catégorie des surfaces plongées :



Générateurs :

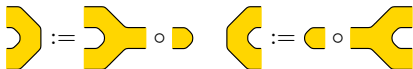


Pour des surfaces rubans la construction est analogue.

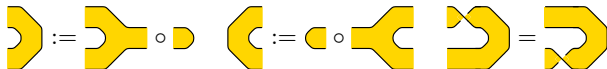
Relations imposées par l'isotopie



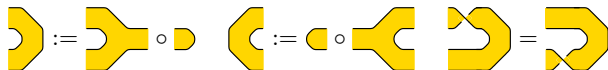
Relations imposées par l'isotopie



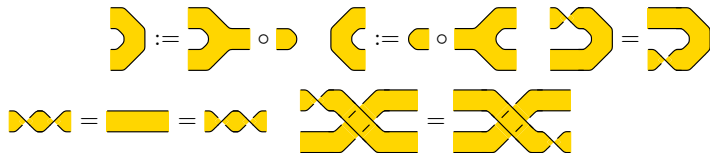
Relations imposées par l'isotopie



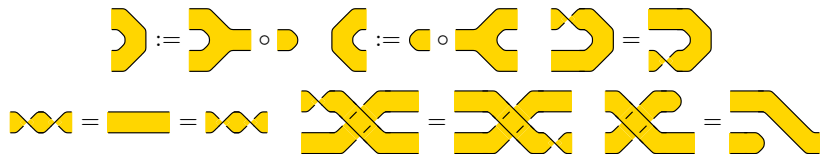
Relations imposées par l'isotopie



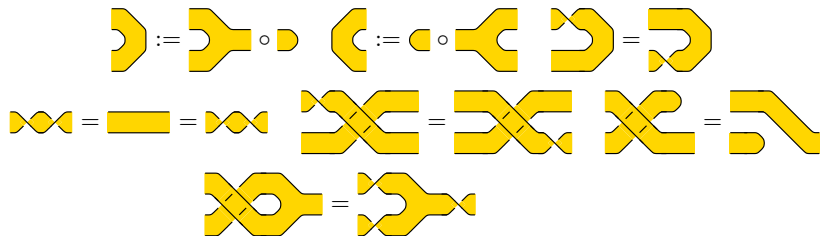
Relations imposées par l'isotopie



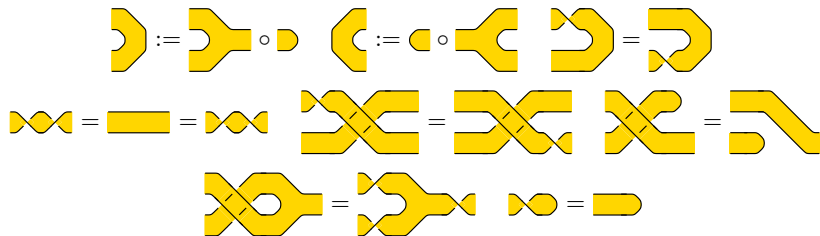
Relations imposées par l'isotopie



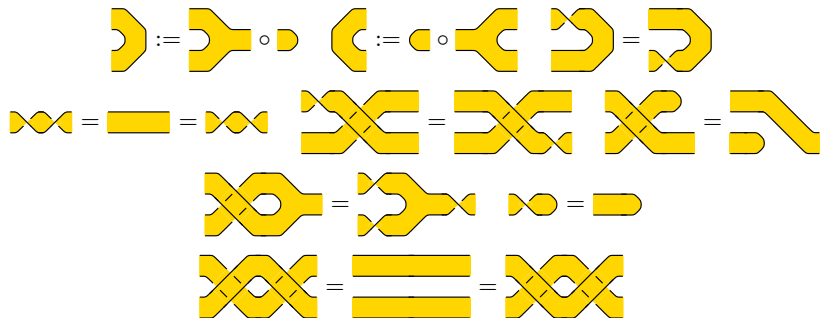
Relations imposées par l'isotopie



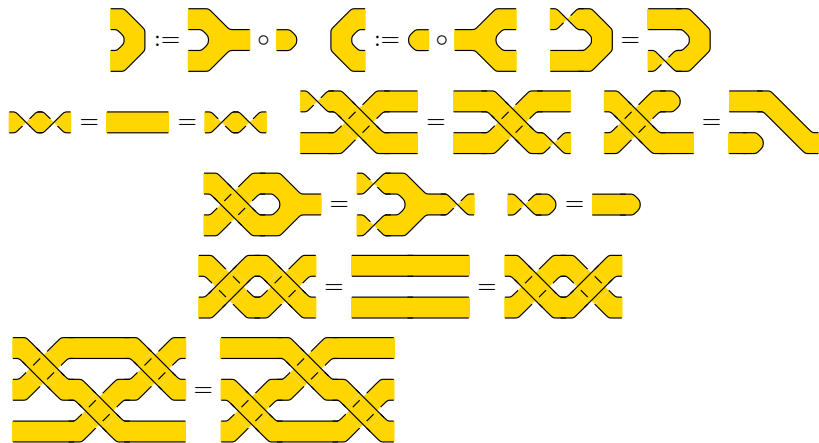
Relations imposées par l'isotopie



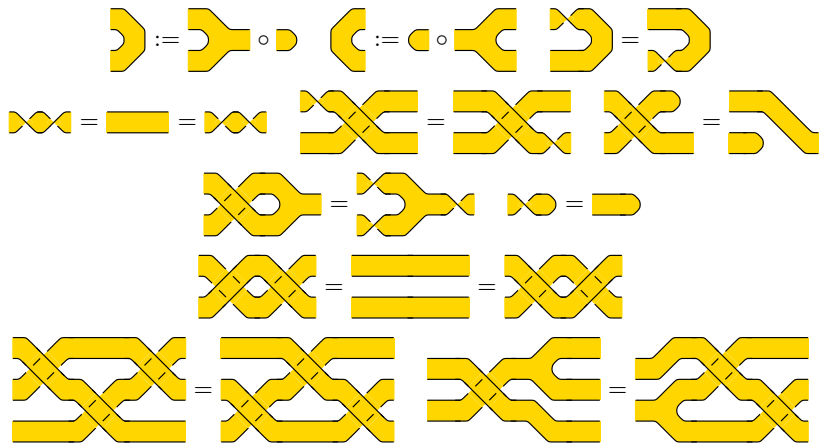
Relations imposées par l'isotopie



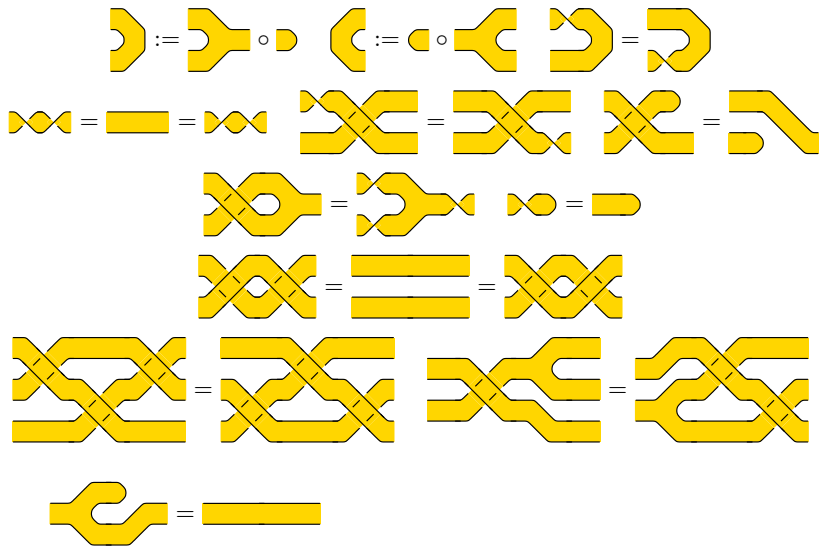
Relations imposées par l'isotopie



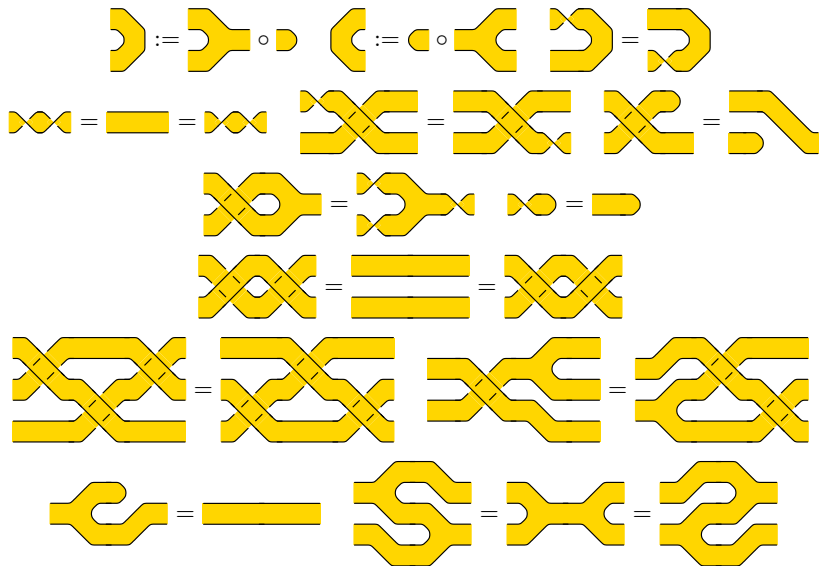
Relations imposées par l'isotopie



Relations imposées par l'isotopie



Relations imposées par l'isotopie



Surfaces abstraites

On considère la catégorie des surfaces abstraites :



Même relations qu'avant mais abstraites (plus plongées).

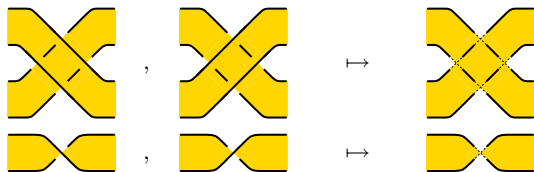
Surfaces abstraites

On considère la catégorie des surfaces abstraites :



Même relations qu'avant mais abstraites (plus plongées).

Foncteur oubliant :



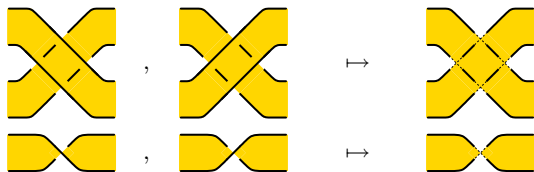
Surfaces abstraites

On considère la catégorie des surfaces abstraites :



Même relations qu'avant mais abstraites (plus plongées).

Foncteur oubliant :



Noyau :

$$I = \left(\begin{array}{c} \text{Cross with dashed diagonal} \\ \text{Cross with solid diagonal} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Cross with solid diagonal} \\ \text{Cross with dashed diagonal} \end{array}, \begin{array}{c} \text{Figure-eight with dashed diagonal} \\ \text{Figure-eight with solid diagonal} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Figure-eight with solid diagonal} \\ \text{Figure-eight with dashed diagonal} \end{array} \right)$$

Diagrammes en arcs

Filtration I -adique engendrée par des changements de croisements rubans :

$$I = \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array}, \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array} \right)$$

Diagrammes en arcs

Filtration I -adique engendrée par des changements de croisements rubans :

$$I = \left(\begin{array}{c} \text{Diagramme 1} \\ \text{Diagramme 2} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagramme 3} \\ \text{Diagramme 4} \end{array}, \begin{array}{c} \text{Diagramme 5} \\ \text{Diagramme 6} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagramme 7} \\ \text{Diagramme 8} \end{array} \right)$$

Ceci peut-être codé par des arcs sur des surfaces abstraites :

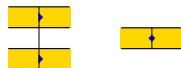


Diagrammes en arcs

Filtration I -adique engendrée par des changements de croisements rubans :

$$I = \left(\begin{array}{c} \text{Diagramme 1} \\ \text{Diagramme 2} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagramme 3} \\ \text{Diagramme 4} \end{array}, \begin{array}{c} \text{Diagramme 5} \\ \text{Diagramme 6} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagramme 7} \\ \text{Diagramme 8} \end{array} \right)$$

Ceci peut-être codé par des arcs sur des surfaces abstraites :



Foncteur résolvant les arcs :



Ceci envoie les surfaces à m arcs sur I^m / I^{m+1} .

Diagrammes en arcs

Filtration I -adique engendrée par des changements de croisements rubans :

$$I = \left(\begin{array}{c} \text{Diagramme 1} \\ \text{Diagramme 2} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagramme 3} \\ \text{Diagramme 4} \end{array}, \begin{array}{c} \text{Diagramme 5} \\ \text{Diagramme 6} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagramme 7} \\ \text{Diagramme 8} \end{array} \right)$$

Ceci peut-être codé par des arcs sur des surfaces abstraites :



Foncteur résolvant les arcs :



Ceci envoie les surfaces à m arcs sur I^m / I^{m+1} .

On quotiente les diagrammes en arcs par les relations évidentes.

Diagrammes en arcs

Filtration I -adique engendrée par des changements de croisements rubans :

$$I = \left(\begin{array}{c} \text{Diagramme 1} \\ \text{Diagramme 2} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagramme 3} \\ \text{Diagramme 4} \end{array}, \begin{array}{c} \text{Diagramme 5} \\ \text{Diagramme 6} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagramme 7} \\ \text{Diagramme 8} \end{array} \right)$$

Ceci peut-être codé par des arcs sur des surfaces abstraites :



Foncteur résolvant les arcs :



Ceci envoie les surfaces à m arcs sur I^m / I^{m+1} .

On quotiente les diagrammes en arcs par les relations évidentes.

Question

Le quotient est-il de dimension finie en tout degré ?

Diagrammes en arcs

Filtration I -adique engendrée par des changements de croisements rubans :

$$I = \left(\begin{array}{c} \text{Diagramme 1} \\ \text{Diagramme 2} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagramme 3} \\ \text{Diagramme 4} \end{array}, \begin{array}{c} \text{Diagramme 5} \\ \text{Diagramme 6} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagramme 7} \\ \text{Diagramme 8} \end{array} \right)$$

Ceci peut-être codé par des arcs sur des surfaces abstraites :



Foncteur résolvant les arcs :



Ceci envoie les surfaces à m arcs sur I^m / I^{m+1} .

On quotiente les diagrammes en arcs par les relations évidentes.

Question

Le quotient est-il de dimension finie en tout degré ?

Le quotient est-il bien isomorphe à I^m / I^{m+1} ?

Vers un invariant universel

On souhaite construire un invariant universel Z comme suit :

Vers un invariant universel

On souhaite construire un invariant universel Z comme suit :

$$Z(\text{diagram}) = \text{Exp}(+\text{diagram}) \circ \text{diagram}$$

$$Z(\text{diagram}) = \text{diagram}$$

$$Z(\text{diagram}) = \text{Exp}(-\text{diagram}) \circ \text{diagram}$$

$$Z(\text{diagram}) = \text{diagram}$$

$$Z(\text{diagram}) = \text{Exp}\left(+\begin{array}{c} \square \\ \downarrow \\ \square \end{array}\right) \circ \text{diagram}$$

$$Z(\text{diagram}) = \text{diagram} + \text{h.o.t.}$$

$$Z(\text{diagram}) = \text{Exp}\left(-\begin{array}{c} \square \\ \downarrow \\ \square \end{array}\right) \circ \text{diagram}$$

$$Z(\text{diagram}) = \text{diagram} + \text{h.o.t.}$$

Vers un invariant universel

On souhaite construire un invariant universel Z comme suit :

$$Z(\text{diagram}) = \text{Exp}(+\text{diagram}) \circ \text{diagram}$$

$$Z(\text{diagram}) = \text{diagram}$$

$$Z(\text{diagram}) = \text{Exp}(-\text{diagram}) \circ \text{diagram}$$

$$Z(\text{diagram}) = \text{diagram}$$

$$Z(\text{diagram}) = \text{Exp}\left(+\begin{matrix} \square \\ \downarrow \\ \square \end{matrix}\right) \circ \text{diagram}$$

$$Z(\text{diagram}) = \text{diagram} + \text{h.o.t.}$$

$$Z(\text{diagram}) = \text{Exp}\left(-\begin{matrix} \square \\ \downarrow \\ \square \end{matrix}\right) \circ \text{diagram}$$

$$Z(\text{diagram}) = \text{diagram} + \text{h.o.t.}$$

La construction naïve ne marche pas : même problème que pour les nœuds.

Vers un invariant universel

On souhaite construire un invariant universel Z comme suit :

$$Z(\text{figure}) = \text{Exp}(+) \circ \text{figure}$$

$$Z(\text{figure}) = \text{figure}$$

$$Z(\text{figure}) = \text{Exp}(-) \circ \text{figure}$$

$$Z(\text{figure}) = \text{figure}$$

$$Z(\text{figure}) = \text{Exp}(+) \circ \text{figure}$$

$$Z(\text{figure}) = \text{figure} + \text{h.o.t.}$$

$$Z(\text{figure}) = \text{Exp}(-) \circ \text{figure}$$

$$Z(\text{figure}) = \text{figure} + \text{h.o.t.}$$

La construction naïve ne marche pas : même problème que pour les nœuds.

On passe à la catégorie non associative et introduit un associateur Φ :

$$Z(\text{figure}) = \Phi(\text{figure})$$

$$Z(\text{figure}) = \Phi(\text{figure})$$

Vers un invariant universel

On souhaite construire un invariant universel Z comme suit :

$$Z(\text{figure}) = \text{Exp}(+) \circ \text{figure}$$

$$Z(\text{figure}) = \text{figure}$$

$$Z(\text{figure}) = \text{Exp}(-) \circ \text{figure}$$

$$Z(\text{figure}) = \text{figure}$$

$$Z(\text{figure}) = \text{Exp}(+) \circ \text{figure}$$

$$Z(\text{figure}) = \text{figure} + \text{h.o.t.}$$

$$Z(\text{figure}) = \text{Exp}(-) \circ \text{figure}$$

$$Z(\text{figure}) = \text{figure} + \text{h.o.t.}$$

La construction naïve ne marche pas : même problème que pour les nœuds.

On passe à la catégorie non associative et introduit un associateur Φ :

$$Z(\text{figure}) = \Phi(\text{figure})$$

$$Z(\text{figure}) = \Phi(\text{figure})$$

Question

Peut-on ainsi satisfaire toutes les relations d'isotopie ?

- 1 Invariants de type fini d'entrelacs et de surfaces
- 2 Le polynôme de Jones des entrelacs rubans
- 3 Théorie des invariants de type fini
- 4 Questions ouvertes**

Questions ouvertes

Polynôme d'Alexander :

Questions ouvertes

Polynôme d'Alexander :

- Quels polynômes en θ_F sont des invariants ?

Questions ouvertes

Polynôme d'Alexander :

- Quels polynômes en θ_F sont des invariants ?

Polynôme de Jones :

Questions ouvertes

Polynôme d'Alexander :

- Quels polynômes en θ_F sont des invariants ?

Polynôme de Jones :

- La nullité de Jones est-elle égale à la nullité de Seifert ?

Questions ouvertes

Polynôme d'Alexander :

- Quels polynômes en θ_F sont des invariants ?

Polynôme de Jones :

- La nullité de Jones est-elle égale à la nullité de Seifert ?
- Généralisations de Jones à HOMFLYPT ? à Kauffman ?

Questions ouvertes

Polynôme d'Alexander :

- Quels polynômes en θ_F sont des invariants ?

Polynôme de Jones :

- La nullité de Jones est-elle égale à la nullité de Seifert ?
- Généralisations de Jones à HOMFLYPT ? à Kauffman ?
- Est-ce un phénomène 3-dimensionnel ? ou plutôt 4-dimensionnel ?

Questions ouvertes

Polynôme d'Alexander :

- Quels polynômes en θ_F sont des invariants ?

Polynôme de Jones :

- La nullité de Jones est-elle égale à la nullité de Seifert ?
- Généralisations de Jones à HOMFLYPT ? à Kauffman ?
- Est-ce un phénomène 3-dimensionnel ? ou plutôt 4-dimensionnel ?
- Interprétation en homologie de Khovanov ?

Questions ouvertes

Polynôme d'Alexander :

- Quels polynômes en θ_F sont des invariants ?

Polynôme de Jones :

- La nullité de Jones est-elle égale à la nullité de Seifert ?
- Généralisations de Jones à HOMFLYPT ? à Kauffman ?
- Est-ce un phénomène 3-dimensionnel ? ou plutôt 4-dimensionnel ?
- Interprétation en homologie de Khovanov ?

Invariants de type fini des surfaces :

Questions ouvertes

Polynôme d'Alexander :

- Quels polynômes en θ_F sont des invariants ?

Polynôme de Jones :

- La nullité de Jones est-elle égale à la nullité de Seifert ?
- Généralisations de Jones à HOMFLYPT ? à Kauffman ?
- Est-ce un phénomène 3-dimensionnel ? ou plutôt 4-dimensionnel ?
- Interprétation en homologie de Khovanov ?

Invariants de type fini des surfaces :

- Diagrammes en arcs modulo relations \implies dimension finie ?

Questions ouvertes

Polynôme d'Alexander :

- Quels polynômes en θ_F sont des invariants ?

Polynôme de Jones :

- La nullité de Jones est-elle égale à la nullité de Seifert ?
- Généralisations de Jones à HOMFLYPT ? à Kauffman ?
- Est-ce un phénomène 3-dimensionnel ? ou plutôt 4-dimensionnel ?
- Interprétation en homologie de Khovanov ?

Invariants de type fini des surfaces :

- Diagrammes en arcs modulo relations \implies dimension finie ?
- Étudier les invariants de petit degré.

Questions ouvertes

Polynôme d'Alexander :

- Quels polynômes en θ_F sont des invariants ?

Polynôme de Jones :

- La nullité de Jones est-elle égale à la nullité de Seifert ?
- Généralisations de Jones à HOMFLYPT ? à Kauffman ?
- Est-ce un phénomène 3-dimensionnel ? ou plutôt 4-dimensionnel ?
- Interprétation en homologie de Khovanov ?

Invariants de type fini des surfaces :

- Diagrammes en arcs modulo relations \implies dimension finie ?
- Étudier les invariants de petit degré.
- Étudier HOMFLYPT, Kauffman, ...

Questions ouvertes

Polynôme d'Alexander :

- Quels polynômes en θ_F sont des invariants ?

Polynôme de Jones :

- La nullité de Jones est-elle égale à la nullité de Seifert ?
- Généralisations de Jones à HOMFLYPT ? à Kauffman ?
- Est-ce un phénomène 3-dimensionnel ? ou plutôt 4-dimensionnel ?
- Interprétation en homologie de Khovanov ?

Invariants de type fini des surfaces :

- Diagrammes en arcs modulo relations \implies dimension finie ?
- Étudier les invariants de petit degré.
- Étudier HOMFLYPT, Kauffman, ...
- Construire un invariant universel.

Questions ouvertes

Polynôme d'Alexander :

- Quels polynômes en θ_F sont des invariants ?

Polynôme de Jones :

- La nullité de Jones est-elle égale à la nullité de Seifert ?
- Généralisations de Jones à HOMFLYPT ? à Kauffman ?
- Est-ce un phénomène 3-dimensionnel ? ou plutôt 4-dimensionnel ?
- Interprétation en homologie de Khovanov ?

Invariants de type fini des surfaces :

- Diagrammes en arcs modulo relations \implies dimension finie ?
- Étudier les invariants de petit degré.
- Étudier HOMFLYPT, Kauffman, ...
- Construire un invariant universel.

Je vous remercie de votre attention.