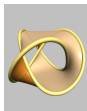


Invariants de type fini des entrelacs et des surfaces dans \mathbb{R}^3



Michael Eisermann

Institut Fourier, UJF Grenoble
www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm

15 octobre 2008



Exposé au séminaire général
Institut de Mathématiques de Bourgogne

Plan de l'exposé

- 1 Invariants de type fini d'entrelacs et de surfaces
 - Invariants de type fini d'entrelacs
 - Invariants de type fini de surfaces
 - Déterminant et polynôme d'Alexander
- 2 Le polynôme de Jones des entrelacs rubans
 - Le problème de Fox : « slice \Rightarrow ruban ? »
 - Le polynôme de Jones des entrelacs rubans
 - Esquisse de démonstration
- 3 Théorie des invariants de type fini
 - Développement en invariants de type fini
 - Diagrammes en arcs
 - Vers un invariant universel
- 4 Questions ouvertes

Motivation

Théorie des invariants de type fini :

- Cadre adapté pour étudier les invariants quantiques.
- Propriétés polynomiales, riche structure algébrique.

Inconvénient : difficile à interpréter en termes topologiques

Idée naturelle : faire intervenir les surfaces !

- Invariants de surfaces plongées ou immergées dans \mathbb{R}^3 .
- Interaction avec les entrelacs, obstructions.

Les premiers résultats confirment que c'est le bon point de vue.

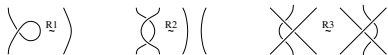
Nœuds et entrelacs

Un *nœud* est un plongement lisse $f: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 (\subset S^3)$.



Un *entrelacs* est un plongement lisse $f: n \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

Nous les regardons à isotopie près.



Théorème (Reidemeister 1932)

Tout entrelacs peut être représenté par un diagramme planaire.
Deux diagrammes représentent le même entrelacs à isotopie près si et seulement s'ils sont équivalents par des mouvements de Reidemeister. \square

Exemple : le nombre d'enlacement

Le signe d'un croisement x est défini par

$$\varepsilon \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) := +1 \quad \text{et} \quad \varepsilon \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right) := -1.$$

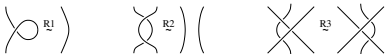
La somme $\varepsilon(D) = \sum_x \varepsilon(x)$ n'est pas invariant : $\varepsilon \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) = \varepsilon \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right) + 1$

Définition & proposition

Pour tout diagramme d'entrelacs D le nombre d'enlacement

$$\text{lk}(D) = \frac{1}{2} \sum_{x \text{ minis}} \varepsilon(x)$$

est un invariant d'entrelacs.



Exemple : $\text{lk}(\bigcirc \bigcirc) = 0$ $\text{lk}(\text{link of two circles}) = +1$ $\text{lk}(\text{link of two circles}) = -1$.

§1.1

5/29 §1.1

Invariants de type fini

Idée : La différence $v \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) - v \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right)$ est une « dérivée combinatoire ».

Dérivées d'ordre supérieur : m changements indépendants.

Formellement : Soit D un diagramme et soit Y une famille de croisements.

Pour tout $X \subset Y$ on change de $\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}$ à $\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}$.

Définition (Vassiliev 1990, Goussarov 1991, Birman–Lin 1993)

$v: \mathcal{L} \rightarrow A$ est de degré $\leq m$ si $\sum_{X \subset Y} (-1)^{|X|} v(D_X) = 0$ pour $|Y| > m$.

degré ≤ 0 : $v \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) - v \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right) = 0$

Exemple : Le nombre de composantes est de degré 0.

degré ≤ 1 : $v \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) - v \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right) - v \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array} \right) + v \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array} \right) = 0$

Exemple : Le nombre d'enlacement lk est de degré 1.

degré $\leq m$: les dérivées d'ordre $> m$ s'annulent, donc v est polynomial.

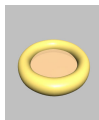
Exemple : invariants quantiques (développement en série convenable)

6/29

Surfaces de Seifert

Théorème (Seifert 1934, Pontryagin 1930)

Pour tout entrelacs $L \subset \mathbb{R}^3$ il existe une surface compacte connexe orientée $S \subset \mathbb{R}^3$ telle que $\partial S = L$. \square



(a) nœud trivial \bigcirc



(b) nœud de trèfle 3_1



(c) nœud de huit 4_1

Genre de Seifert $g_3(K) := \min \{ g(S) \mid \partial S = K \}$.

On a $g_3(K) = 0$ si et seulement si K est trivial.

§1.2

7/29 §1.2

Invariants de surfaces de type fini

Toute surface de Seifert se présente par un diagramme en ruban :



Changements de croisement entre rubans :



Définition

$v: \mathcal{S} \rightarrow A$ est de degré $\leq m$ si $\sum_{X \subset Y} (-1)^{|X|} v(D_X) = 0$ pour $|Y| > m$.

Exemple

La caractéristique d'Euler $S \mapsto \chi(S)$ est un invariant de degré 0.

8/29

Invariants de type fini

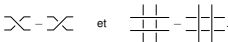
Proposition

Si $\mathcal{L} \xrightarrow{v} A$, $L \mapsto v(L)$, est un invariant d'entrelacs de degré $\leq m$, alors $\mathcal{S} \xrightarrow{v} \mathcal{L} \xrightarrow{v} A$, $S \mapsto v(\partial S)$, est un invariant de surfaces de degré $\leq m$.

Démonstration. Changements de croisements entre rubans :



En oubliant la surface on obtient :



C'est une somme télescopique de changements de croisements. \square

Slogan

Les invariants de type fini des surfaces englobent tous les invariants de type fini des entrelacs — et beaucoup d'autres invariants encore !

§1.2

§29 §1.3

Forme de Seifert

Soit Σ une surface (abstraite) compacte connexe orientée.

On a $\chi(\Sigma) = 1 - \text{rk } H_1(\Sigma)$ car $H_0(\Sigma) = 1$ et $H_2(\Sigma) = 0$.

Le module $H_1(\Sigma) \cong \mathbb{Z}^m$ est libre de rang $m = 1 - \chi(\Sigma)$.

À tout plongement $F : \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ on associe sa forme de Seifert

$$\theta_F : H_1(\Sigma) \times H_1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \theta_F(a, b) = \text{lk}(F^\dagger(a), F^\dagger(b)).$$

Observation

Les coefficients de θ_F sont de degré ≤ 1 .

Le déterminant de F est défini par $\det(F) := \det[-i(\theta_F + \theta_F^*)]$.

C'est un polynôme homogène de degré m dans les coefficients de θ_F .

Observation

L'invariant $F \mapsto \det(F)$ est de degré $\leq m = 1 - \chi(\Sigma)$.

§29

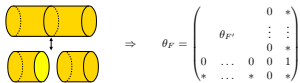
Le déterminant d'un entrelacs

Proposition

Le déterminant $\det(F) = \det[-i(\theta_F + \theta_F^*)]$ ne dépend que de $L = F(\partial\Sigma)$.

Démonstration. Invariant par changement de base.

On a $\partial S = \partial S' = L$ si et seulement si ces surfaces sont reliées par une suite de chirurgies dans \mathbb{R}^3 :



Ceci entraîne $\det[-i(\theta_F + \theta_F^*)] = \det[-i(\theta_{F'} + \theta_{F'}^*)]$ \square

Remarque

$L \mapsto \det(L)$ n'est pas de type fini dans le sens de Vassiliev–Goussarov. $S \mapsto \det(S)$ est de type fini, vu comme invariant de surfaces.

§1.3

§1.29 §1.3

Polynôme d'Alexander

On peut généraliser

$$\det(F) := \det[-i(\theta_F + \theta_F^*)]$$

au polynôme d'Alexander

$$\Delta(F) = \det(q^{-1}\theta_F^* - q^+\theta_F).$$

On voit que $\det(F) = \Delta(F)_{q \rightarrow i}$.

Proposition

L'invariant $F \mapsto \Delta(F)$ est un invariant de degré $\leq m = 1 - \chi(\Sigma)$.

Théorème (Seifert 1934)

L'invariant $\Delta(F)$ ne dépend que de l'entrelacs $L = F(\partial\Sigma)$.

Question

Quels polynômes en θ_F sont des invariants de $S = F(\Sigma)$?
Quels polynômes en θ_F sont des invariants de $L = F(\partial\Sigma)$?

§29

Singularités de surfaces dans \mathbb{R}^4 (Fox–Milnor 1958)

Exemple

Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ donnée par $f(z) = (z^2, z^3)$.
 En $0 \in \mathbb{R}^4$ la surface $\Sigma = \text{Image}(f)$ n'est pas localement plate.

$K_\varepsilon^3 := \Sigma \cap \partial B_\varepsilon^4$ est un nœud.
 Pour $\varepsilon \rightarrow 0$ ce nœud est indépendant de ε .
 Dans notre exemple on trouve le nœud de trèfle 3_1 .

Définition (nœud bordant / slice knot)

Un nœud $K \subset S^3$ est *bordant* [slice] s'il borde un disque lisse dans \mathbb{D}^4 .

Dans ce cas la singularité en $x \in \Sigma$ peut être effacée localement.

Théorème (Fox–Milnor 1966)

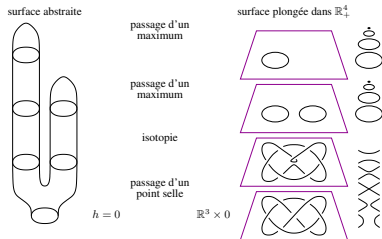
Si K est bordant alors $\Delta(K) = P(q) \cdot P(q^{-1})$ pour un $P \in \mathbb{Z}[q]$. \square

Dans notre exemple : $\Delta(3_1) = q^2 - 1 + q^{-2}$ ne se factorise pas.

§2.1

13/29 §2.1

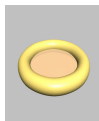
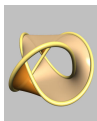
Exemple d'un nœud bordant



14/29

Surfaces plongées et immergées

Surfaces plongées à bord :

(a) nœud trivial \bigcirc (b) nœud de trèfle 3_1 (c) nœud de huit 4_1

Surfaces immergées à bord :



(d) singularité ruban



(e) singularité clasp



(f) singularité circulaire

§2.1

15/29 §2.1

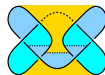
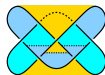
Surfaces rubans (Fox 1962)

Définition

Une *surface ruban* $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface immergée, c'est-à-dire l'image d'une immersion $\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$, n'ayant que des singularités ruban.



(a) singularité ruban

(b) 3_1 ; $\sharp 3_1^*$ (c) 6_1

Définition

Un entrelacs L est *ruban* s'il borde une surface ruban formée de disques.

Exemple : Pour tout nœud K la somme $K \sharp K^*$ est un nœud ruban.

16/29

Le problème « slice \Rightarrow ribbon » (Fox 1962)

Observation (Fox 1962)

$$\begin{array}{ccc} \text{surface ruban } S \subset \mathbb{R}^3 & \iff & \text{surface lisse } S_+ \subset \mathbb{R}_+^4 \text{ sans minima} \\ & & \downarrow \quad \uparrow? \\ & & \text{surface lisse } S_+ \subset \mathbb{R}_+^4 \end{array}$$

Genre de Seifert $g_S(K) := \min\{g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ surface de Seifert, } \partial S = K\}$
 $g_S(K) = 0 \iff K \text{ est trivial}$

Genre ruban $g_r(K) := \min\{g(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ surface ruban, } \partial S = K\}$
 $g_r(K) = 0 \iff K \text{ est ruban}$

Genre lisse $g_l(K) := \min\{g(S) \mid S \subset \mathbb{R}_+^4 \text{ surface lisse, } \partial S = K\}$
 $g_l(K) = 0 \iff K \text{ est bordant}$

Question (problème de Fox)

Est-ce que tout nœud bordant est ruban ?

§2.1

19/29 §2.2

Le polynôme de Jones

Théorème

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe un unique invariant $V_N : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ satisfaisant $V_N(\bigcirc) = 1$ et la relation locale

$$q^{-N} \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) - q^{+N} \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array} \right).$$

$N = 0$: Alexander 1928, Conway 1969 ; $V_0(L) = (-1)^{n+1} \Delta(L)$

$N = 1$: trivial invariant, $V_1 = 1$

$N = 2$: Jones 1984 ; $V := V_2$

$N > 2$: HOMFLY-PT 1985-1987

Remarque

$V(\bigcirc^n) = (q^{-1} + q^{+1})^{n-1}$ et $q^{-1} + q^{+1}$ est le polynôme minimal de i .

En $q = i$ on retrouve $V(L)_{q=i} = \Delta(L)_{q=i} = \det(L)$.

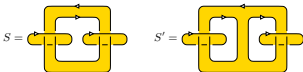
18/29

Divisibilité du polynôme de Jones

Théorème (E 2007)

Si $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ de caractéristique d'Euler $n > 0$, alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Plus succinctement : $V(\partial S)$ est divisible par $(q^+ + q^-)^{\chi(S)-1}$.



$$\chi(S) = 1 + 1 + 0 = 2,$$

$$V(L) = (q^+ + q^-) \cdot (q^6 - q^4 + 2q^2 + 2q^{-2} - q^{-4} + q^{-6}).$$

$$\chi(S') = 1 + 1 - 1 = 1,$$

$$V(L') = (q^{+1} + q^{+5})^2 \cdot (q^{-1} + q^{-5})^2.$$

§2.2

19/29 §2.2

Le polynôme de Jones des entrelacs rubans

Théorème (E 2007)

Soit $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ un entrelacs ruban.

Alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$ et

$$\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q=i)}$$

satisfait à la congruence

$$\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n) \pmod{32}.$$

En particulier nous obtenons $\det V(L) \equiv 1 \pmod{8}$.

\Rightarrow Analogie avec la nullité de Seifert : ici $\text{null } V(L) = \text{null}(L)$.

\Rightarrow Analogie avec l'invariant d'Arf : \det modulo 8.

Projet

Obstruction pour des entrelacs rubans / bordants.

20/29

Esquisse de démonstration (1/2)

Définition (crochet de Kauffman)

Il existe une unique application $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm}]$, notée $D \mapsto \langle D \rangle$, telle que

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \rangle &= 1, \\ \langle D \sqcup \bigcirc \rangle &= \langle D \rangle \cdot (-A^{+2} - A^{-2}), \\ \langle \times \rangle &= A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle. \end{aligned}$$

$$\langle \diagdown \rangle = \langle \rangle \langle \rangle \quad \text{et} \quad \langle \diagup \rangle = \langle \diagdown \rangle \quad \text{mais} \quad \langle \bigcirc \rangle = -A^3 \langle \curvearrowright \rangle$$

Théorème (Kauffman 1987)

On a $V(L)|_{(q \mapsto -A^{-2})} = \langle D \rangle \cdot (-A^{-3})^{\epsilon(D)}$.

Construction analogue pour V_N par Murakami–Ohtsuki–Yamada 1998

12.3

21.29

Esquisse de démonstration (2/2)

Proposition (E 2007)

Si $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ de caractéristique d'Euler $n > 0$, alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

Démonstration. Par hypothèse toute composante S_i a du bord.

Donc $\chi(S_i) > 0 \Leftrightarrow S_i = \bigcirc \Leftrightarrow \chi(S_i) = 1$.

Récurrence sur le nombre $r(S)$ de singularités rubans :

Si $r(S) = 0$, alors S est plongée et $L = L_0 \sqcup \bigcirc^n$.

Si $r(S) \geq 1$, alors on considère le crochet de Kauffman :

$$\begin{aligned} \langle \text{cross} \rangle - \langle \text{cross} \rangle &= (A^{+2} - A^{-2}) \left[\langle \text{cross} \rangle - \langle \text{cross} \rangle \right] \\ + (A^{+4} - 1) \left[\langle \text{cross} \rangle - \langle \text{cross} \rangle \right] &+ (A^{-4} - 1) \left[\langle \text{cross} \rangle - \langle \text{cross} \rangle \right]. \end{aligned}$$

Annulation miraculeuse ! On conclut par $\chi(\bigcirc \sqcup \bigcirc) = \chi(\text{rectangle}) + 1$. \square

22.29

Développement en invariants de type fini

Théorème (Birman-Lin 1993)

On développe $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(L) \cdot h^k$ en $q = \exp(h/2) = 1 + h/2 + \dots$.
Alors $L \mapsto v_k(L)$ est de degré $\leq k$ par rapport à

$$\langle \diagdown \rangle \leftrightarrow \langle \diagup \rangle$$

Théorème (E 2007)

On développe $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(L) \cdot h^k$ en $q = i \exp(h/2) = i + ih/2 + \dots$.
Alors $S \mapsto d_k(\partial S)$ est de degré $\leq k + 1 - \chi(S)$ par rapport à

$$\langle \text{cross} \rangle \leftrightarrow \langle \text{cross} \rangle \quad \text{et} \quad \langle \text{cross} \rangle \leftrightarrow \langle \text{cross} \rangle$$

Projet

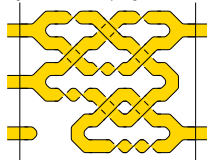
Élaborer la théorie : invariant universel de type fini, interprétation topologique ; application aux surfaces, ...

13.1

23.29

Surfaces plongées

On considère la catégorie des surfaces plongées :



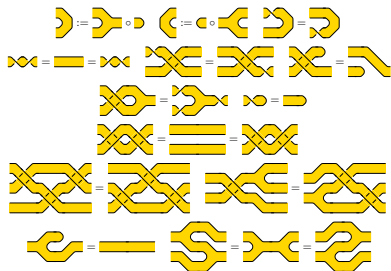
Générateurs :



Pour des surfaces rubans la construction est analogue.

24.29

Relations imposées par l'isotopie



§3.2

25/29 §3.2

Surfaces abstraites

On considère la catégorie des surfaces abstraites :



Même relations qu'avant mais abstraites (plus plongées).

Foncteur oubliant :



Noyau :

$$I = \left(\begin{array}{c} \text{Crossing} - \text{Crossing} \\ \text{Pair of pants with hole} - \text{Pair of pants} \end{array} \right)$$

26/29

Diagrammes en arcs

Filtration I -adique engendrée par des changements de croisements rubans :

$$I = \left(\text{Crossing} - \text{Crossing}, \text{Pair of pants} - \text{Pair of pants} \right)$$

Ceci peut-être codé par des arcs sur des surfaces abstraites :



Foncteur résolvant les arcs :



Ceci envoie les surfaces à m arcs sur I^m / I^{m+1} .

On quotiente les diagrammes en arcs par les relations évidentes.

Question

Le quotient est-il de dimension finie en tout degré ?

Le quotient est-il bien isomorphe à I^m / I^{m+1} ?

§3.2

27/29 §3.3

Vers un invariant universel

On souhaite construire un invariant universel Z comme suit :

$$Z \left(\text{Pair of pants} \right) = \text{Exp} \left(\begin{array}{c} \text{Crossing} \\ \text{Pair of pants} \end{array} \right) \circ \text{Pair of pants} \quad Z \left(\text{Circle} \right) = \text{Circle}$$

$$Z \left(\text{Pair of pants with hole} \right) = \text{Exp} \left(\begin{array}{c} \text{Crossing} \\ \text{Pair of pants with hole} \end{array} \right) \circ \text{Pair of pants with hole} \quad Z \left(\text{Circle with hole} \right) = \text{Circle with hole}$$

$$Z \left(\text{Crossing} \right) = \text{Exp} \left(\begin{array}{c} \text{Crossing} \\ \text{Crossing} \end{array} \right) \circ \text{Crossing} \quad Z \left(\text{Pair of pants} \right) = \text{Pair of pants} + \text{h.o.t.}$$

$$Z \left(\text{Crossing} \right) = \text{Exp} \left(\begin{array}{c} \text{Crossing} \\ \text{Crossing} \end{array} \right) \circ \text{Crossing} \quad Z \left(\text{Pair of pants} \right) = \text{Pair of pants} + \text{h.o.t.}$$

La construction naïve ne marche pas : même problème que pour les nœuds.

On passe à la catégorie non associative et introduit un associateur Φ :

$$Z \left(\begin{array}{c} \text{Crossing} \\ \text{Pair of pants} \end{array} \right) = \Phi \left(\begin{array}{c} \text{Crossing} \\ \text{Crossing} \\ \text{Pair of pants} \end{array} \right) \quad Z \left(\begin{array}{c} \text{Crossing} \\ \text{Pair of pants} \end{array} \right) = \Phi \left(\begin{array}{c} \text{Crossing} \\ \text{Pair of pants} \\ \text{Pair of pants} \end{array} \right)$$

Question

Peut-on ainsi satisfaire toutes les relations d'isotopie ?

28/29

Questions ouvertes

Polynôme d'Alexander :

- Quels polynômes en θ_F sont des invariants ?

Polynôme de Jones :

- La nullité de Jones est-elle égale à la nullité de Seifert ?
- Généralisations de Jones à HOMFLYPT ? à Kauffman ?
- Est-ce un phénomène 3-dimensionnel ? ou plutôt 4-dimensionnel ?
- Interprétation en homologie de Khovanov ?

Invariants de type fini des surfaces :

- Diagrammes en arcs modulo relations \implies dimension finie ?
- Étudier les invariants de petit degré.
- Étudier HOMFLYPT, Kauffman, ...
- Construire un invariant universel.

Je vous remercie de votre attention.