

## Le polynôme de Jones des entrelacs rubans

Michael Eisermann

Institut Fourier, UJF Grenoble

15 janvier 2008

1/19

## Plan de l'exposé

- 1 Motivation
  - Entrelacs bordants [slice links]
  - Entrelacs rubans [ribbon links]
  - Le problème « slice  $\Rightarrow$  ribbon »
- 2 Le polynôme de Jones des entrelacs rubans
  - Diagrammes rubans
  - La nullité du polynôme de Jones
  - Le déterminant du polynôme de Jones
- 3 Invariants de type fini de surfaces
  - Deux notions des invariants de type fini
  - L'exemple du polynôme de Jones
- 4 Questions ouvertes

2/19

## Motivation (d'après Fox-Milnor 1966)

### Exemple

Considérons  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ ,  $f(z) = (z^2, z^3)$ .  
Topologiquement c'est un plongement propre de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}^2$ .  
Mais en 0 la surface  $S = \text{Image}(f)$  n'est pas localement plate !

Soit  $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$  une surface non localement plate en  $x$ , singularité isolée.  
Alors  $K(x, \varepsilon) = \Sigma \cap S(x, \varepsilon)$  est un nœud dans  $S(x, \varepsilon) \cong S^3$ .  
Pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  ce nœud est indépendant de  $\varepsilon$ . On le note donc  $K(x)$ .

### Définition

Un nœud  $K$  est appelé *bordant* [slice] s'il borde un disque lisse dans  $\mathbb{D}^4$ .

Observation : La singularité en  $x \in \Sigma$  peut être effacée par une modification locale si et seulement si  $K(x)$  est bordant.

### Théorème (Fox-Milnor 1966)

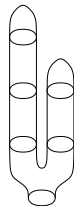
Si  $K$  est bordant alors  $\Delta(K) = f(q) \cdot f(q^{-1})$  pour un  $f \in \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ .

Dans notre exemple :  $\Delta(3_1) = q^2 - 1 + q^{-2}$  ne se factorise pas.

3/19

## Exemple d'un nœud bordant

surface abstraite



$h = 0$

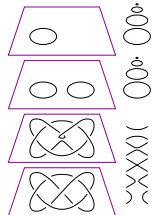
passage d'un maximum

passage d'un maximum

isotopie

passage d'un point selle

surface plongée dans  $\mathbb{R}^4$



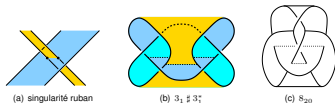
$\mathbb{R}^3 \times 0$

4/19

## Surfaces rubans (d'après Fox 1962)

### Définition

Une *surface ruban* est une surface immergée n'ayant que des singularités ruban.



(a) singularité ruban

(b)  $3_1 \sharp 3_1^*$

(c)  $8_{20}$

FIG.: Surfaces immergées  $\Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  n'ayant que des singularités ruban

### Définition

Un entrelacs  $L$  est *ruban* s'il borde une surface ruban formée de disques.

### Exemple

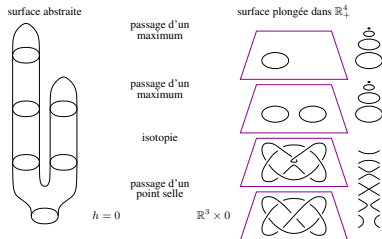
Pour tout nœud  $K$  la somme  $K \sharp K^*$  est un nœud ruban.

5/19

## Surfaces rubans dans $\mathbb{R}_+^4$

### Remarque

surface ruban  $S \subset \mathbb{R}^3 \iff$  surface plongée lisse  $S_+ \subset \mathbb{R}_+^4$  sans minima.



6/19

## Le problème « slice $\Rightarrow$ ribbon » (Fox 1962)

### Question (problème de Fox)

Est-ce que tout nœud bordant est ruban ?

$$g_3(K) := \min\{ \text{genre}(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3, \partial S = K, \text{ surface de Seifert} \}$$

$$g_3(K) = 0 \iff K \text{ est trivial}$$

$$g_r(K) := \min\{ \text{genre}(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3, \partial S = K, \text{ surface ruban} \}$$

$$g_r(K) = 0 \iff K \text{ est ruban}$$

$$g_4(K) := \min\{ \text{genre}(S) \mid S \subset \mathbb{R}_+^4, \partial S = K, \text{ surface lisse} \}$$

$$g_4(K) = 0 \iff K \text{ est bordant}$$

7/19

## Nullité et déterminant

### Définition

Seifert : la nullité  $\text{null}(L)$  est la nullité de la matrice de Seifert  $\theta + \theta^*$ .

Jones : la nullité  $\text{null} V(L)$  est l'ordre du zéro en  $q = i$ .

### Remarque

On a  $V(L) = (q^+ + q^-)^{\text{null}(L)} \cdot Q$  avec  $Q \in \mathbb{Z}[q^{\pm}]$  et  $Q(i) \neq 0$ .

Si  $L$  a  $n$  composantes, alors  $V(1) = 2^{n-1}$  et donc  $0 \leq \text{null} V(L) \leq n - 1$ .

### Définition

Seifert : le déterminant est  $\det(L) = \det[-i(\theta + \theta^*)]$ .

Jones : le déterminant est  $\det V(L) := [V(L)/(q^+ + q^-)^{\text{null}(L)}]_{(q=i)}$ .

### Remarque

On a  $\det(L) = V(L)|_{q=i}$ , donc  $\text{null}(L) = 0 \iff \text{null} V(L) = 0$ .

Sans nullité on a  $\det(L) = \det V(L)$ .

8/19

## Diagrammes rubans

### Définition

Un *diagramme ruban* est un diagramme formé des pièces suivantes :



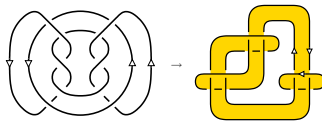
### Proposition

Toute surface ruban  $S \subset \mathbb{R}^3$  se représente par un diagramme ruban.  
Toute surface plongée  $S \subset \mathbb{R}^3$  se représente ainsi sans singularités.

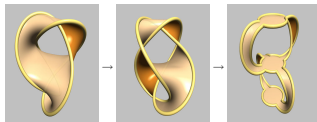
9/19

## Exemples : diagramme ruban

Toute surface ruban  $S \subset \mathbb{R}^3$  se représente par un diagramme ruban.



Toute surface plongée  $S \subset \mathbb{R}^3$  se représente ainsi sans singularités.



Shutterstock, Jule von Witz, TUE

10/19

## Crochet de Kauffman

### Théorème (Kauffman 1987)

Il existe une unique application  $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm}]$ , notée  $D \mapsto \langle D \rangle$ , telle que

$$\begin{aligned} \langle \times \rangle &= A \langle \rangle + A^{-1} \langle \smile \rangle, \\ \langle D \sqcup \bigcirc \rangle &= \langle D \rangle \cdot (-A^{+2} - A^{-2}), \\ \langle \bigcirc \rangle &= 1. \end{aligned}$$

Cette application vérifie  $\langle D \rangle \cdot (-A^{-3})^{\text{writhe}(D)} = V(L)|_{(q \mapsto -A^{-2})}$ .  $\square$

11/19

## Nullité du polynôme de Jones

### Proposition

Soit  $L \subset \mathbb{R}^3$  un entrelacs qui borde une surface ruban  $S \subset \mathbb{R}^3$  de caractéristique d'Euler positive  $n = \chi(S)$ . Alors  $V(L)$  est divisible par  $V(\bigcirc^n)$ .

Remarque : Par convention  $S$  n'a pas de composantes fermées. Pour toute composante connexe  $S_i$  on a alors  $\chi(S_i) > 0 \Leftrightarrow S_i = \bigcirc \Leftrightarrow \chi(S_i) = 1$ .

### Démonstration.

On procède par récurrence sur le nombre  $r(S)$  des singularités.

Si  $r(S) = 0$  alors  $S$  est plongée et  $L = L_0 \sqcup \bigcirc^n$ .

Si  $r(S) \geq 1$  on considère le crochet de Kauffman :

$$\begin{aligned} \langle \text{cross} \rangle - \langle \text{cross} \rangle &= (A^{+2} - A^{-2}) \left[ \langle \text{cross} \rangle - \langle \text{cross} \rangle \right] \\ + (A^{+4} - 1) \left[ \langle \text{cross} \rangle - \langle \text{cross} \rangle \right] &+ (A^{-4} - 1) \left[ \langle \text{cross} \rangle - \langle \text{cross} \rangle \right]. \end{aligned}$$

On conclut par récurrence, utilisant  $\chi(\bigcirc) = \chi(\text{yellow bar}) + 1$ .  $\square$

12/19

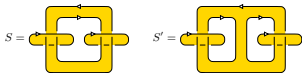
## Exemples : nullité de Jones

### Exemple

Dans la figure on a  $\chi(S) = 1 + 1 + 0 = 2$  et

$$V(L) = (q^+ + q^-) \cdot (q^6 - q^4 + 2q^2 + 2q^{-2} - q^{-4} + q^{-6}).$$

Ainsi  $L$  borde des surfaces avec  $\chi \leq 2$  mais pas avec  $\chi \geq 3$ .



### Exemple

Pour  $S'$  on trouve  $\chi(S') = 1 + 1 - 1 = 1$ . On remarque que  $L' = \partial S'$  est la somme connexe  $H_+ \sharp H_- \sharp H_+ \sharp H_-$  de quatre entrelacs de Hopf, donc

$$V(L) = (q^{+1} + q^{+5})^2 \cdot (q^{-1} + q^{-5})^2.$$

Ainsi  $L'$  borde des surfaces avec  $\chi \leq 1$  mais pas avec  $\chi \geq 2$ .

13/19

## Le déterminant du polynôme de Jones

### Proposition

Le déterminant de Jones  $\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q \rightarrow -1)}$  est invariant par rapport au changement de croisements rubans.

$$\begin{aligned} \langle \text{Crossing} \rangle - \langle \text{Crossing} \rangle &= (A^{+4} - A^{-4}) \left[ \langle \text{Crossing} \rangle - \langle \text{Crossing} \rangle \right] \\ &+ (A^{+2} - A^{-2}) \left[ \langle \text{Crossing} \rangle - \langle \text{Crossing} \rangle + \langle \text{Crossing} \rangle - \langle \text{Crossing} \rangle \right] \end{aligned}$$

### Corollaire

Si  $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$  borde une surface ruban formée de  $n$  disques (immergés) disjoints, alors  $\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n)$ .

### Théorème (multiplicativité du déterminant modulo 32)

En général on a  $\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n) \pmod{32}$ .

$\Rightarrow$  Congruence  $\det V(L) \equiv 1 \pmod{8}$ , en analogie avec l'invariant d'Arf.

14/19

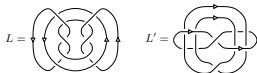
## Exemples : déterminant de Jones

### Exemple

La valeur 32 est optimale : l'entrelacs  $L = 10_n36$  est ruban et on trouve

$$V(L) = (q^+ + q^-)(-q^{+8} + 2q^{+6} - 3q^{+4} + 4q^{+2} - 3 + 4q^{-2} - 3q^{-4} + 2q^{-6} - q^{-8}).$$

Ici  $\det V(L) = -23$  alors que  $\det(K_1) = 1$  et  $\det(K_2) = 9$ .



### Exemple

Les entrelacs ne satisfont pas tous à la congruence modulo 32 :

$$V(L') = (q^+ + q^-)(q^{+6} - 2q^{+4} + 2q^{+2} - 2 + 3q^{-2} - 2q^{-4} + 2q^{-6} - q^{-8})$$

Ici  $\det V(L') = -15$  alors que  $\det(K'_1) = 1$  et  $\det(K'_2) = 1$ .

15/19

## Invariants de type fini d'entrelacs

Soit  $D$  un diagramme d'entrelacs.

Soit  $X$  un ensemble de croisements de  $D$ .

Pour  $Y \subset X$  on note  $D_Y$  le diagramme obtenu par changement des croisements dans  $Y$  :



### Définition (type fini d'après Vassiliev et Goussarov)

Un invariant d'entrelacs  $L \mapsto v(L)$  est de degré  $\leq m$  si

$$\sum_{Y \subset X} (-1)^{|Y|} v(D_Y) = 0 \quad \text{pour tout } X \text{ tel que } |X| > m.$$

On dit que  $v$  est de type fini s'il est de degré  $\leq m$  pour un  $m \in \mathbb{N}$ .

### Remarque (abondance des invariants de type fini d'entrelacs)

Dans un développement en série convenable, tous les invariants quantiques sont de type fini.

16/19

## Invariants de type fini de surfaces

Soit  $D$  un diagramme ruban d'une surface.

Soit  $X$  un ensemble de croisements de  $D$ .

Pour  $Y \subset X$  on note  $D_Y$  le diagramme obtenu par changement des croisements dans  $Y$  :



### Définition (invariant de type fini des surfaces)

Un invariant de surfaces  $S \mapsto d(S)$  est de degré  $\leq m$  si

$$\sum_{Y \subset X} (-1)^{|Y|} d(D_Y) = 0 \quad \text{pour tout } X \text{ tel que } |X| > m.$$

On dit que  $d$  est de *type fini* s'il est de degré  $\leq m$  pour un  $m \in \mathbb{N}$ .

### Remarque (abondance des invariants de type fini de surfaces)

Si  $L \mapsto v(L)$  est de degré  $\leq m$ , alors  $S \mapsto v(\partial S)$  est de degré  $\leq m$ .

## Invariants de type fini de surfaces

Rappel : Soit  $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(L) \cdot h^k$  le développement en  $q = \exp(h/2)$ .

Alors  $v_k(L)$  est de degré  $\leq k$  par rapport au changement de croisements :



Soit  $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(L) \cdot h^k$  le développement en  $q = i \exp(h/2)$ .

Les invariants  $d_k(L)$  ne sont pas de type fini / Vassiliev-Goussarov.

Notamment  $d_0(L) = V(L)_{q \rightarrow i} = \Delta(L)_{q \rightarrow i} = \det(L) = \det[-i(\theta + \theta^*)]$ .

### Proposition

L'invariant  $S \mapsto d_k(\partial S)$  est de type fini par rapport au changement de croisements rubans : il est de degré  $\leq m$  pour  $m = k + 1 - \chi(S)$ .

$$\begin{aligned} \langle \text{Cross} \rangle - \langle \text{Cross} \rangle &= (A^{+4} - A^{-4}) \left[ \langle \text{Cross} \rangle - \langle \text{Cross} \rangle \right] \\ &+ (A^{+2} - A^{-2}) \left[ \langle \text{Cross} \rangle - \langle \text{Cross} \rangle + \langle \text{Cross} \rangle - \langle \text{Cross} \rangle \right]. \end{aligned}$$

17/19

18/19

## Questions ouvertes et projets

Polynômes des entrelacs rubans :

- Généralisation aux entrelacs slice ? Obstructions ?
- La nullité de Jones est-elle égale à la nullité de Seifert ?
- Généralisation Jones  $\rightarrow$  HOMFLYPT ? ou Jones  $\rightarrow$  Kauffman ?
- Quelle est l'interprétation au niveau de l'homologie de Khovanov ?

Invariants de type fini de surfaces :

- Développer la théorie analogue aux invariants de type fini d'entrelacs.
- Exemples provenant de HOMFLYPT ou d'autres invariants quantiques ?
- Rapport entre les invariants de type fini d'entrelacs et de surfaces ?
- Application aux surfaces de Seifert : minoration de  $g_3(K)$  ?
- Application aux surfaces rubans : minoration de  $g_r(K)$  ?

Je vous remercie de votre attention.

18/19