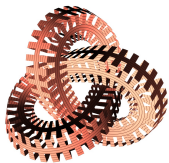


Le polynôme de Jones des entrelacs rubans

Michael Eisermann

Institut Fourier, UJF Grenoble

18 mars 2008



Michael.Eisermann@ujf-grenoble.fr

www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm

- 1 Invariants de nœuds et d'entrelacs**
 - Le polynôme d'Alexander
 - Le polynôme de Jones
 - Interprétation topologique ?
- 2 Le problème de Fox**
 - Entrelacs bordants [slice links]
 - Entrelacs rubans [ribbon links]
 - Le problème « slice \Rightarrow ribbon »
- 3 Le polynôme de Jones des entrelacs rubans**
 - Diagrammes rubans
 - La nullité du polynôme de Jones
 - Le déterminant du polynôme de Jones
- 4 Invariants de type fini de surfaces**
 - Deux notions des invariants de type fini
 - L'exemple du polynôme de Jones
- 5 Questions ouvertes**

Précurseurs (avant 1900)

électromagnétisme (Gauss), topologie (Listing), théorie atomique (Kelvin),
classification empiriques des petits nœuds (Kirkman, Little, Tait)

Précurseurs (avant 1900)

électromagnétisme (Gauss), topologie (Listing), théorie atomique (Kelvin),
classification empiriques des petits nœuds (Kirkman, Little, Tait)

Invariants classiques (dès 1900, environ)

groupe fondamental, polynôme d'Alexander, forme de Seifert, signature, ...

Précurseurs (avant 1900)

électromagnétisme (Gauss), topologie (Listing), théorie atomique (Kelvin),
classification empiriques des petits nœuds (Kirkman, Little, Tait)

Invariants classiques (dès 1900, environ)

groupe fondamental, polynôme d'Alexander, forme de Seifert, signature, ...

Avantages : ils s'appliquent bien à des problèmes de topologie.

Précurseurs (avant 1900)

électromagnétisme (Gauss), topologie (Listing), théorie atomique (Kelvin),
classification empiriques des petits nœuds (Kirkman, Little, Tait)

Invariants classiques (dès 1900, environ)

groupe fondamental, polynôme d'Alexander, forme de Seifert, signature, ...

Avantages : ils s'appliquent bien à des problèmes de topologie.

Inconvénients : $\pi_1(K)$ est très fort mais en général incalculable,
 $\Delta(K)$ est bien calculable mais souvent trop faible.

Précurseurs (avant 1900)

électromagnétisme (Gauss), topologie (Listing), théorie atomique (Kelvin), classification empiriques des petits nœuds (Kirkman, Little, Tait)

Invariants classiques (dès 1900, environ)

groupe fondamental, polynôme d'Alexander, forme de Seifert, signature, ...

Avantages : ils s'appliquent bien à des problèmes de topologie.

Inconvénients : $\pi_1(K)$ est très fort mais en général incalculable, $\Delta(K)$ est bien calculable mais souvent trop faible.

Invariants quantiques (dès 1984)

polynôme de Jones, déformations quantiques, invariants de type fini, ...

Précurseurs (avant 1900)

électromagnétisme (Gauss), topologie (Listing), théorie atomique (Kelvin), classification empiriques des petits nœuds (Kirkman, Little, Tait)

Invariants classiques (dès 1900, environ)

groupe fondamental, polynôme d'Alexander, forme de Seifert, signature, ...

Avantages : ils s'appliquent bien à des problèmes de topologie.

Inconvénients : $\pi_1(K)$ est très fort mais en général incalculable, $\Delta(K)$ est bien calculable mais souvent trop faible.

Invariants quantiques (dès 1984)

polynôme de Jones, déformations quantiques, invariants de type fini, ...

Avantages : bien calculables, très puissants, éventuellement complets.

Précurseurs (avant 1900)

électromagnétisme (Gauss), topologie (Listing), théorie atomique (Kelvin), classification empiriques des petits nœuds (Kirkman, Little, Tait)

Invariants classiques (dès 1900, environ)

groupe fondamental, polynôme d'Alexander, forme de Seifert, signature, ...

Avantages : ils s'appliquent bien à des problèmes de topologie.

Inconvénients : $\pi_1(K)$ est très fort mais en général incalculable, $\Delta(K)$ est bien calculable mais souvent trop faible.

Invariants quantiques (dès 1984)

polynôme de Jones, déformations quantiques, invariants de type fini, ...

Avantages : bien calculables, très puissants, éventuellement complets.

Problèmes : comment interpréter ses invariants en termes topologiques ?
Comment les appliquer pour résoudre des problèmes de topologie ?

Précurseurs (avant 1900)

électromagnétisme (Gauss), topologie (Listing), théorie atomique (Kelvin), classification empiriques des petits nœuds (Kirkman, Little, Tait)

Invariants classiques (dès 1900, environ)

groupe fondamental, polynôme d'Alexander, forme de Seifert, signature, ...

Avantages : ils s'appliquent bien à des problèmes de topologie.

Inconvénients : $\pi_1(K)$ est très fort mais en général incalculable, $\Delta(K)$ est bien calculable mais souvent trop faible.

Invariants quantiques (dès 1984)

polynôme de Jones, déformations quantiques, invariants de type fini, ...

Avantages : bien calculables, très puissants, éventuellement complets.

Problèmes : comment interpréter ses invariants en termes topologiques ?
Comment les appliquer pour résoudre des problèmes de topologie ?

Interactions ? C'est une question vaste et très productive !

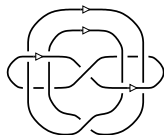
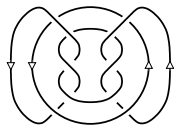
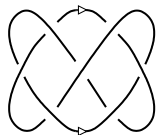
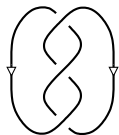
Aujourd'hui : le polynôme de Jones des entrelacs rubans.

- 1 Invariants de nœuds et d'entrelacs**
 - Le polynôme d'Alexander
 - Le polynôme de Jones
 - Interprétation topologique ?
- 2 Le problème de Fox**
 - Entrelacs bordants [slice links]
 - Entrelacs rubans [ribbon links]
 - Le problème « slice \Rightarrow ribbon »
- 3 Le polynôme de Jones des entrelacs rubans**
 - Diagrammes rubans
 - La nullité du polynôme de Jones
 - Le déterminant du polynôme de Jones
- 4 Invariants de type fini de surfaces**
 - Deux notions des invariants de type fini
 - L'exemple du polynôme de Jones
- 5 Questions ouvertes**

Nœuds et entrelacs

Un *nœud* est un plongement lisse $f: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

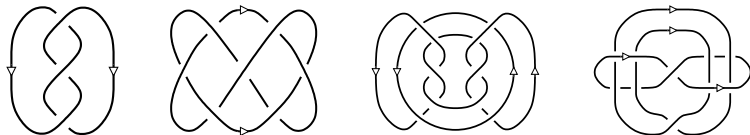
Un *entrelacs* est un plongement lisse $f: n \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.



Nœuds et entrelacs

Un *nœud* est un plongement lisse $f: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

Un *entrelacs* est un plongement lisse $f: n \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.



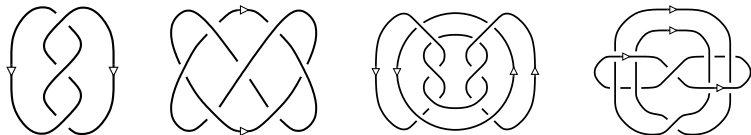
On ne considère des entrelacs qu'à isotopie ambiante près.

On note \mathcal{L} l'ensemble des entrelacs modulo isotopie ambiante.

Nœuds et entrelacs

Un *nœud* est un plongement lisse $f: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

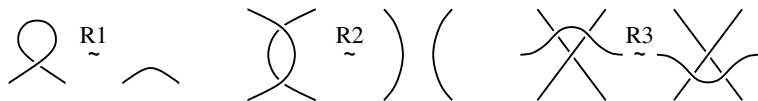
Un *entrelacs* est un plongement lisse $f: n \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.



On ne considère des entrelacs qu'à isotopie ambiante près.

On note \mathcal{L} l'ensemble des entrelacs modulo isotopie ambiante.

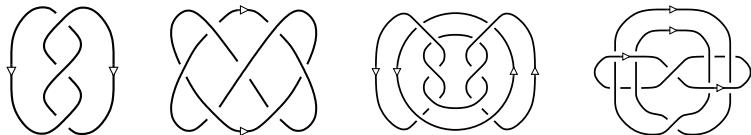
Diagrammes planaires modulo mouvement de Reidemeister :



Nœuds et entrelacs

Un *nœud* est un plongement lisse $f: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

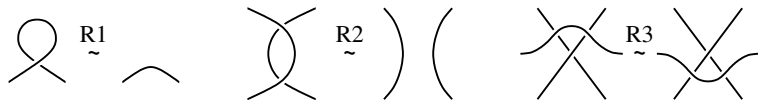
Un *entrelacs* est un plongement lisse $f: n \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.



On ne considère des entrelacs qu'à isotopie ambiante près.

On note \mathcal{L} l'ensemble des entrelacs modulo isotopie ambiante.

Diagrammes planaires modulo mouvement de Reidemeister :



Théorème (Reidemeister 1932)

À isotopie près, tout entrelacs peut être représenté par un diagramme. Deux diagrammes représentent le même entrelacs à isotopie près si et seulement s'ils sont équivalents par des mouvements de Reidemeister. \square

Théorème (Alexander 1928, Conway 1969)

Il existe un unique invariant $\Delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $\Delta(\bigcirc) = 1$ et

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1}) \cdot \Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right).$$

Théorème (Alexander 1928, Conway 1969)

Il existe un unique invariant $\Delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $\Delta(\bigcirc) = 1$ et

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1}) \cdot \Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right).$$

Exemple :

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \bigcirc \\ \infty \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \infty \\ \bigcirc \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1}) \Delta(\bigcirc \bigcirc)$$

Théorème (Alexander 1928, Conway 1969)

Il existe un unique invariant $\Delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $\Delta(\bigcirc) = 1$ et

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1}) \cdot \Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right).$$

Exemple :

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \infty \\ \infty \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \infty \\ \infty \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1})\Delta(\bigcirc \bigcirc) \implies \Delta(\bigcirc \bigcirc) = 0$$

Théorème (Alexander 1928, Conway 1969)

Il existe un unique invariant $\Delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $\Delta(\bigcirc) = 1$ et

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1}) \cdot \Delta\left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array}\right).$$

Exemple :

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \infty \\ \downarrow \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \infty \\ \uparrow \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1})\Delta(\bigcirc\bigcirc) \implies \Delta(\bigcirc\bigcirc) = 0$$

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \downarrow \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \uparrow \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1})\Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \downarrow \end{array}\right)$$

Théorème (Alexander 1928, Conway 1969)

Il existe un unique invariant $\Delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $\Delta(\bigcirc) = 1$ et

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \searrow \\ \nearrow \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1}) \cdot \Delta\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array}\right).$$

Exemple :

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \infty \\ \infty \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \infty \\ \infty \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1})\Delta(\bigcirc \bigcirc) \implies \Delta(\bigcirc \bigcirc) = 0$$

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1})\Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) \implies \Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) = q^{+1} - q^{-1}$$

Théorème (Alexander 1928, Conway 1969)

Il existe un unique invariant $\Delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $\Delta(\bigcirc) = 1$ et

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1}) \cdot \Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right).$$

Exemple :

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \infty \\ \infty \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \infty \\ \infty \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1})\Delta(\bigcirc \bigcirc) \implies \Delta(\bigcirc \bigcirc) = 0$$

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1})\Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) \implies \Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) = q^{+1} - q^{-1}$$

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1})\Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right)$$

Théorème (Alexander 1928, Conway 1969)

Il existe un unique invariant $\Delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $\Delta(\bigcirc) = 1$ et

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1}) \cdot \Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right).$$

Exemple :

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \infty \\ \infty \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \infty \\ \infty \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1})\Delta(\bigcirc \bigcirc) \implies \Delta(\bigcirc \bigcirc) = 0$$

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1})\Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) \implies \Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) = q^{+1} - q^{-1}$$

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1})\Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) \implies \Delta\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) = q^{+2} - 1 + q^{-2}$$

Théorème (Jones 1984)

Il existe un unique invariant $V: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $V(\bigcirc) = 1$ et

$$q^{-2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \downarrow \downarrow \end{array}\right) - q^{+2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \downarrow \downarrow \end{array}\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V\left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array}\right).$$

Théorème (Jones 1984)

Il existe un unique invariant $V: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $V(\bigcirc) = 1$ et

$$q^{-2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) - q^{+2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V\left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array}\right).$$

Exemple :

$$q^{-2} \cdot V\left(\infty\right) - q^{+2} \cdot V\left(\infty\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V\left(\bigcirc\bigcirc\right)$$

Théorème (Jones 1984)

Il existe un unique invariant $V: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $V(\bigcirc) = 1$ et

$$q^{-2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) - q^{+2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V\left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array}\right).$$

Exemple :

$$\begin{aligned} q^{-2} \cdot V\left(\infty\right) - q^{+2} \cdot V\left(\infty\right) &= (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V\left(\bigcirc\bigcirc\right) \\ \implies V\left(\bigcirc\bigcirc\right) &= q^{-1} + q^{+1} \end{aligned}$$

Théorème (Jones 1984)

Il existe un unique invariant $V: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $V(\bigcirc) = 1$ et

$$q^{-2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) - q^{+2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V\left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array}\right).$$

Exemple :

$$q^{-2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \infty \\ \downarrow \end{array}\right) - q^{+2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \infty \\ \uparrow \end{array}\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V\left(\begin{array}{c} \bigcirc \bigcirc \\ \downarrow \end{array}\right) \\ \implies V\left(\begin{array}{c} \bigcirc \bigcirc \\ \downarrow \end{array}\right) = q^{-1} + q^{+1}$$

$$q^{-2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \bigcirc \bigcirc \\ \downarrow \end{array}\right) - q^{+2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \bigcirc \bigcirc \\ \uparrow \end{array}\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V\left(\begin{array}{c} \bigcirc \bigcirc \\ \downarrow \end{array}\right)$$

Théorème (Jones 1984)

Il existe un unique invariant $V: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $V(\bigcirc) = 1$ et

$$q^{-2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) - q^{+2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}\right).$$

Exemple :

$$q^{-2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \infty \\ \curvearrowright \end{array}\right) - q^{+2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \infty \\ \curvearrowleft \end{array}\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V(\bigcirc \bigcirc)$$
$$\implies V(\bigcirc \bigcirc) = q^{-1} + q^{+1}$$

$$q^{-2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \infty \\ \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array}\right) - q^{+2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \infty \\ \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array}\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V\left(\begin{array}{c} \infty \\ \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}\right)$$
$$\implies V\left(\begin{array}{c} \infty \\ \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}\right) = q^{+1} + q^{+5}$$

Théorème (Jones 1984)

Il existe un unique invariant $V: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $V(\bigcirc) = 1$ et

$$q^{-2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) - q^{+2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}\right).$$

Exemple :

$$q^{-2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \infty \\ \downarrow \end{array}\right) - q^{+2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \infty \\ \uparrow \end{array}\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V\left(\begin{array}{c} \bigcirc \bigcirc \\ \downarrow \end{array}\right) \\ \implies V\left(\begin{array}{c} \bigcirc \bigcirc \\ \downarrow \end{array}\right) = q^{-1} + q^{+1}$$

$$q^{-2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \downarrow \end{array}\right) - q^{+2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \uparrow \end{array}\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \downarrow \end{array}\right) \\ \implies V\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \downarrow \end{array}\right) = q^{+1} + q^{+5}$$

$$q^{-2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \downarrow \end{array}\right) - q^{+2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \uparrow \end{array}\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \downarrow \end{array}\right)$$

Théorème (Jones 1984)

Il existe un unique invariant $V: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $V(\bigcirc) = 1$ et

$$q^{-2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) - q^{+2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}\right).$$

Exemple :

$$q^{-2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \infty \\ \infty \end{array}\right) - q^{+2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \infty \\ \infty \end{array}\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V\left(\begin{array}{c} \bigcirc \bigcirc \\ \bigcirc \bigcirc \end{array}\right) \\ \implies V\left(\begin{array}{c} \bigcirc \bigcirc \\ \bigcirc \bigcirc \end{array}\right) = q^{-1} + q^{+1}$$

$$q^{-2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) - q^{+2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) \\ \implies V\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) = q^{+1} + q^{+5}$$

$$q^{-2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) - q^{+2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) \\ \implies V\left(\begin{array}{c} \text{link} \\ \text{link} \end{array}\right) = q^{+2} + q^{+6} - q^{+8}$$

Le polynôme de HOMFLY-PT

(d'après Freyd-Yetter-Hoste-Lickorish-Millett-Ocneanu 1985, Przytycki-Traczyk 1987)

Théorème (Alexander 1928)

Il existe un unique invariant $\Delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $\Delta(\bigcirc) = 1$ et

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1}) \cdot \Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) \Delta\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right).$$

Le polynôme de HOMFLY-PT

(d'après Freyd-Yetter-Hoste-Lickorish-Millett-Ocneanu 1985, Przytycki-Traczyk 1987)

Théorème (Alexander 1928)

Il existe un unique invariant $\Delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $\Delta(\bigcirc) = 1$ et

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1}) \cdot \Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array}\right).$$

Théorème (Jones 1984)

Il existe un unique invariant $V: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $V(\bigcirc) = 1$ et

$$q^{-2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) - q^{+2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array}\right).$$

Le polynôme de HOMFLY-PT

(d'après Freyd-Yetter-Hoste-Lickorish-Millett-Ocneanu 1985, Przytycki-Traczyk 1987)

Théorème (Alexander 1928)

Il existe un unique invariant $\Delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $\Delta(\bigcirc) = 1$ et

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1}) \cdot \Delta\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}\right).$$

Théorème (Jones 1984)

Il existe un unique invariant $V: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $V(\bigcirc) = 1$ et

$$q^{-2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) - q^{+2} \cdot V\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}\right).$$

Théorème (HOMFLY-PT 1985-1987)

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe un unique invariant $V_N: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $V_N(\bigcirc) = 1$ et la relation locale

$$q^{-N} \cdot V_N\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) - q^{+N} \cdot V_N\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V_N\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}\right).$$

Interprétation topologique ?

Constat : La construction de ces invariants est *combinatoire*.

Problème : Comment les interpréter en termes *topologiques* ?

Interprétation topologique ?

Constat : La construction de ces invariants est *combinatoire*.

Problème : Comment les interpréter en termes *topologiques* ?

Le polynôme d'Alexander admet de bonnes interprétations topologiques !

Interprétation topologique ?

Constat : La construction de ces invariants est *combinatoire*.

Problème : Comment les interpréter en termes *topologiques* ?

Le polynôme d'Alexander admet de bonnes interprétations topologiques !

Théorème (Seifert 1934, Pontryagin 1930)

Pour tout entrelacs $L \subset \mathbb{R}^3$ il existe une surface compacte connexe orientée $S \subset \mathbb{R}^3$ telle que $\partial S = L$. On appelle S une surface de Seifert de L . \square

Interprétation topologique ?

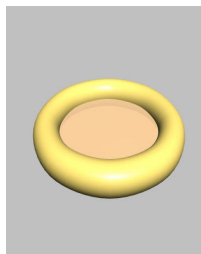
Constat : La construction de ces invariants est *combinatoire*.

Problème : Comment les interpréter en termes *topologiques* ?

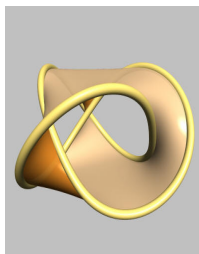
Le polynôme d'Alexander admet de bonnes interprétations topologiques !

Théorème (Seifert 1934, Pontryagin 1930)

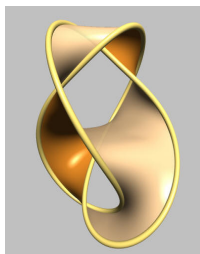
Pour tout entrelacs $L \subset \mathbb{R}^3$ il existe une surface compacte connexe orientée $S \subset \mathbb{R}^3$ telle que $\partial S = L$. On appelle S une surface de Seifert de L . \square



(a) nœud trivial, \bigcirc



(b) nœud de trèfle, 3_1



(c) nœud de huit, 4_1

SeifertView, Jarke van Wijk, TUE

FIG.: Exemples de surfaces de Seifert

Théorème (Seifert 1934)

Tout entrelacs $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface de Seifert $S \subset \mathbb{R}^3$.

Théorème (Seifert 1934)

Tout entrelacs $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface de Seifert $S \subset \mathbb{R}^3$.

Soit $\theta: H_1(S) \times H_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}$ la forme de Seifert, $\theta(a, b) = \text{lk}(a^\perp, b^\uparrow)$.

Théorème (Seifert 1934)

Tout entrelacs $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface de Seifert $S \subset \mathbb{R}^3$.

Soit $\theta: H_1(S) \times H_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}$ la forme de Seifert, $\theta(a, b) = \text{lk}(a^\perp, b^\uparrow)$.

Alors le polynôme $\Delta(L) := \det(q^- \theta^ - q^+ \theta) \in \mathbb{Z}[q^\pm]$ est indépendant de S .*

Théorème (Seifert 1934)

Tout entrelacs $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface de Seifert $S \subset \mathbb{R}^3$.

Soit $\theta: H_1(S) \times H_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}$ la forme de Seifert, $\theta(a, b) = \text{lk}(a^\perp, b^\uparrow)$.

Alors le polynôme $\Delta(L) := \det(q^- \theta^* - q^+ \theta) \in \mathbb{Z}[q^\pm]$ est indépendant de S .
C'est ainsi un invariant de l'entrelacs L . Il vérifie $\Delta(\bigcirc) = 1$ et

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1}) \cdot \Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array}\right) \Delta\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array}\right).$$

C'est donc le polynôme d'Alexander !



Théorème (Seifert 1934)

Tout entrelacs $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface de Seifert $S \subset \mathbb{R}^3$.

Soit $\theta: H_1(S) \times H_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}$ la forme de Seifert, $\theta(a, b) = \text{lk}(a^\downarrow, b^\uparrow)$.

Alors le polynôme $\Delta(L) := \det(q^- \theta^* - q^+ \theta) \in \mathbb{Z}[q^\pm]$ est indépendant de S .
C'est ainsi un invariant de l'entrelacs L . Il vérifie $\Delta(\bigcirc) = 1$ et

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1}) \cdot \Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array}\right) \Delta\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array}\right).$$

C'est donc le polynôme d'Alexander ! □

Le polynôme d'Alexander admet encore d'autres interprétations :

- en termes du groupe fondamental / calcul de Fox,
- en termes du revêtement abélien universel.

Chacune de ces interprétations a ses mérites et ses applications.

Théorème (Seifert 1934)

Tout entrelacs $L \subset \mathbb{R}^3$ borde une surface de Seifert $S \subset \mathbb{R}^3$.

Soit $\theta: H_1(S) \times H_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}$ la forme de Seifert, $\theta(a, b) = \text{lk}(a^\downarrow, b^\uparrow)$.

Alors le polynôme $\Delta(L) := \det(q^- \theta^* - q^+ \theta) \in \mathbb{Z}[q^\pm]$ est indépendant de S .
C'est ainsi un invariant de l'entrelacs L . Il vérifie $\Delta(\bigcirc) = 1$ et

$$\Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) - \Delta\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = (q^{+1} - q^{-1}) \cdot \Delta\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array}\right) \Delta\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array}\right).$$

C'est donc le polynôme d'Alexander ! □

Le polynôme d'Alexander admet encore d'autres interprétations :

- en termes du groupe fondamental / calcul de Fox,
- en termes du revêtement abélien universel.

Chacune de ces interprétations a ses mérites et ses applications.

Théorème (Murasugi 1965, Tristram 1969)

La nullité $\text{null}(\theta + \theta^*)$ et la signature $\text{sign}(\theta + \theta^*)$ sont invariantes.
Ces valeurs sont invariantes par concordance (= cobordisme plongée). □

- 1 Invariants de nœuds et d'entrelacs
 - Le polynôme d'Alexander
 - Le polynôme de Jones
 - Interprétation topologique ?
- 2 Le problème de Fox
 - Entrelacs bordants [slice links]
 - Entrelacs rubans [ribbon links]
 - Le problème « slice \Rightarrow ribbon »
- 3 Le polynôme de Jones des entrelacs rubans
 - Diagrammes rubans
 - La nullité du polynôme de Jones
 - Le déterminant du polynôme de Jones
- 4 Invariants de type fini de surfaces
 - Deux notions des invariants de type fini
 - L'exemple du polynôme de Jones
- 5 Questions ouvertes

Exemple

Considérons $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $f(z) = (z^2, z^3)$.

Topologiquement c'est un plongement propre de \mathbb{C} dans \mathbb{C}^2 .

Mais en 0 la surface $\Sigma = \text{Image}(f)$ n'est pas localement plate !

Exemple

Considérons $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $f(z) = (z^2, z^3)$.

Topologiquement c'est un plongement propre de \mathbb{C} dans \mathbb{C}^2 .

Mais en 0 la surface $\Sigma = \text{Image}(f)$ n'est pas localement plate !

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$ une surface non localement plate en x , singularité isolée.

Exemple

Considérons $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $f(z) = (z^2, z^3)$.

Topologiquement c'est un plongement propre de \mathbb{C} dans \mathbb{C}^2 .

Mais en 0 la surface $\Sigma = \text{Image}(f)$ n'est pas localement plate !

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$ une surface non localement plate en x , singularité isolée.

Alors $\partial B(x, \varepsilon) \cap \Sigma =: K(x, \varepsilon)$ est un nœud dans $\partial B(x, \varepsilon) \cong \mathbb{S}^3$.

Exemple

Considérons $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $f(z) = (z^2, z^3)$.

Topologiquement c'est un plongement propre de \mathbb{C} dans \mathbb{C}^2 .

Mais en 0 la surface $\Sigma = \text{Image}(f)$ n'est pas localement plate !

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$ une surface non localement plate en x , singularité isolée.

Alors $\partial B(x, \varepsilon) \cap \Sigma =: K(x, \varepsilon)$ est un nœud dans $\partial B(x, \varepsilon) \cong \mathbb{S}^3$.

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$ ce nœud est indépendant de ε . On le note donc $K(x)$.

Exemple

Considérons $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $f(z) = (z^2, z^3)$.

Topologiquement c'est un plongement propre de \mathbb{C} dans \mathbb{C}^2 .

Mais en 0 la surface $\Sigma = \text{Image}(f)$ n'est pas localement plate !

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$ une surface non localement plate en x , singularité isolée.

Alors $\partial B(x, \varepsilon) \cap \Sigma =: K(x, \varepsilon)$ est un nœud dans $\partial B(x, \varepsilon) \cong \mathbb{S}^3$.

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$ ce nœud est indépendant de ε . On le note donc $K(x)$.

Définition

Un nœud $K \subset \mathbb{S}^3$ est *bordant* [slice] s'il borde un disque lisse dans \mathbb{D}^4 .

Exemple

Considérons $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $f(z) = (z^2, z^3)$.

Topologiquement c'est un plongement propre de \mathbb{C} dans \mathbb{C}^2 .

Mais en 0 la surface $\Sigma = \text{Image}(f)$ n'est pas localement plate !

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$ une surface non localement plate en x , singularité isolée.

Alors $\partial B(x, \varepsilon) \cap \Sigma =: K(x, \varepsilon)$ est un nœud dans $\partial B(x, \varepsilon) \cong \mathbb{S}^3$.

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$ ce nœud est indépendant de ε . On le note donc $K(x)$.

Définition

Un nœud $K \subset \mathbb{S}^3$ est *bordant* [slice] s'il borde un disque lisse dans \mathbb{D}^4 .

Observation : La singularité en $x \in \Sigma$ peut être effacée, par une modification locale dans $B(x, \varepsilon)$ fixant le bord, si et seulement si $K(x)$ est bordant.

Singularité de surfaces dans \mathbb{R}^4 (d'après Fox-Milnor 1966)

Exemple

Considérons $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $f(z) = (z^2, z^3)$.

Topologiquement c'est un plongement propre de \mathbb{C} dans \mathbb{C}^2 .

Mais en 0 la surface $\Sigma = \text{Image}(f)$ n'est pas localement plate !

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$ une surface non localement plate en x , singularité isolée.

Alors $\partial B(x, \varepsilon) \cap \Sigma =: K(x, \varepsilon)$ est un nœud dans $\partial B(x, \varepsilon) \cong \mathbb{S}^3$.

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$ ce nœud est indépendant de ε . On le note donc $K(x)$.

Définition

Un nœud $K \subset \mathbb{S}^3$ est *bordant* [slice] s'il borde un disque lisse dans \mathbb{D}^4 .

Observation : La singularité en $x \in \Sigma$ peut être effacée, par une modification locale dans $B(x, \varepsilon)$ fixant le bord, si et seulement si $K(x)$ est bordant.

Théorème (Fox-Milnor 1966)

Si K est bordant alors $\Delta(K) = f(q) \cdot f(q^{-1})$ pour un $f \in \mathbb{Z}[q^{\pm}]$. □

Singularité de surfaces dans \mathbb{R}^4 (d'après Fox-Milnor 1966)

Exemple

Considérons $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $f(z) = (z^2, z^3)$.

Topologiquement c'est un plongement propre de \mathbb{C} dans \mathbb{C}^2 .

Mais en 0 la surface $\Sigma = \text{Image}(f)$ n'est pas localement plate !

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$ une surface non localement plate en x , singularité isolée.

Alors $\partial B(x, \varepsilon) \cap \Sigma =: K(x, \varepsilon)$ est un nœud dans $\partial B(x, \varepsilon) \cong \mathbb{S}^3$.

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$ ce nœud est indépendant de ε . On le note donc $K(x)$.

Définition

Un nœud $K \subset \mathbb{S}^3$ est *bordant* [slice] s'il borde un disque lisse dans \mathbb{D}^4 .

Observation : La singularité en $x \in \Sigma$ peut être effacée, par une modification locale dans $B(x, \varepsilon)$ fixant le bord, si et seulement si $K(x)$ est bordant.

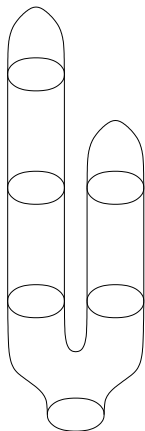
Théorème (Fox-Milnor 1966)

Si K est bordant alors $\Delta(K) = f(q) \cdot f(q^{-1})$ pour un $f \in \mathbb{Z}[q^{\pm}]$. □

Dans notre exemple : $\Delta(3_1) = q^2 - 1 + q^{-2}$ ne se factorise pas.

Exemple d'un nœud bordant

surface abstraite



$h = 0$

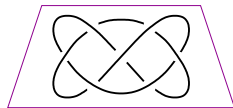
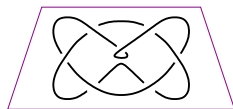
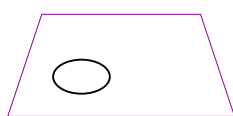
passage d'un maximum

passage d'un maximum

isotopie

passage d'un point selle

surface plongée dans \mathbb{R}_+^4

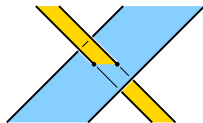


$\mathbb{R}^3 \times 0$

Surfaces rubans (d'après Fox 1962)

Définition

Une *surface ruban* $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface immergée, c'est-à-dire l'image d'une immersion $\Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$, n'ayant que des singularités ruban.

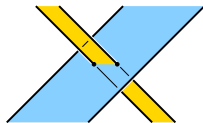


(a) singularité ruban

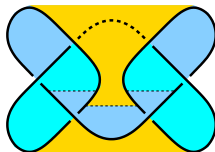
Surfaces rubans (d'après Fox 1962)

Définition

Une *surface ruban* $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface immergée, c'est-à-dire l'image d'une immersion $\Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$, n'ayant que des singularités ruban.



(a) singularité ruban

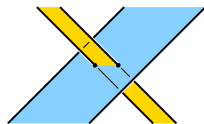


(b) $3_1 \# 3_1^*$

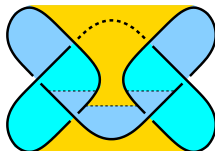
Surfaces rubans (d'après Fox 1962)

Définition

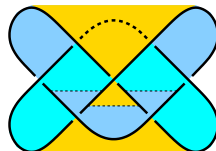
Une *surface ruban* $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface immergée, c'est-à-dire l'image d'une immersion $\Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$, n'ayant que des singularités ruban.



(a) singularité ruban



(b) $3_1 \# 3_1^*$



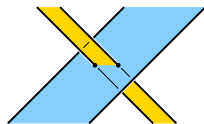
(c) 6_1

FIG.: Surfaces immergées $\Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ n'ayant que des singularités ruban

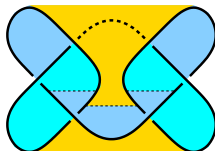
Surfaces rubans (d'après Fox 1962)

Définition

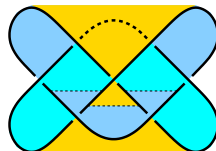
Une *surface ruban* $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface immergée, c'est-à-dire l'image d'une immersion $\Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$, n'ayant que des singularités ruban.



(a) singularité ruban



(b) $3_1 \# 3_1^*$



(c) 6_1

FIG.: Surfaces immergées $\Sigma \looparrowright \mathbb{R}^3$ n'ayant que des singularités ruban

Définition

Un entrelacs L est *ruban* s'il borde une surface ruban formée de disques.

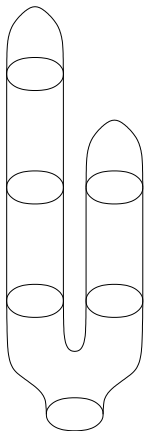
Exemple

Pour tout nœud K la somme $K \# K^*$ est un nœud ruban.

Remarque

surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3 \iff$ surface plongée lisse $S_+ \subset \mathbb{R}_+^4$ sans minima.

surface abstraite



$h = 0$

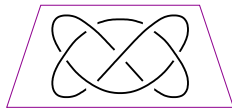
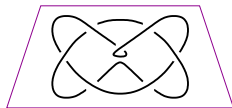
passage d'un maximum

passage d'un maximum

isotopie

passage d'un point selle

surface plongée dans \mathbb{R}_+^4



$\mathbb{R}^3 \times 0$

Le problème « slice \Rightarrow ribbon » (Fox 1962)

Pour un nœud $K \subset \mathbb{R}^3$ on vient d'introduire trois types de surfaces.

Le problème « slice \Rightarrow ribbon » (Fox 1962)

Pour un nœud $K \subset \mathbb{R}^3$ on vient d'introduire trois types de surfaces.

Genre de Seifert :

$$g_3(K) := \min\{ \text{genre}(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ surface de Seifert, } \partial S = K \}$$

$$g_3(K) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K \text{ est trivial}$$

Le problème « slice \Rightarrow ribbon » (Fox 1962)

Pour un nœud $K \subset \mathbb{R}^3$ on vient d'introduire trois types de surfaces.

Genre de Seifert :

$$g_3(K) := \min\{ \text{genre}(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ surface de Seifert, } \partial S = K \}$$

$$g_3(K) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K \text{ est trivial}$$

Genre ruban :

$$g_r(K) := \min\{ \text{genre}(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ surface ruban, } \partial S = K \}$$

$$g_r(K) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K \text{ est ruban}$$

Le problème « slice \Rightarrow ribbon » (Fox 1962)

Pour un nœud $K \subset \mathbb{R}^3$ on vient d'introduire trois types de surfaces.

Genre de Seifert :

$$g_3(K) := \min\{ \text{genre}(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ surface de Seifert, } \partial S = K \}$$

$$g_3(K) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K \text{ est trivial}$$

Genre ruban :

$$g_r(K) := \min\{ \text{genre}(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ surface ruban, } \partial S = K \}$$

$$g_r(K) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K \text{ est ruban}$$

Genre lisse :

$$g_4(K) := \min\{ \text{genre}(S) \mid S \subset \mathbb{R}_+^4 \text{ surface lisse, } \partial S = K \}$$

$$g_4(K) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K \text{ est bordant}$$

Le problème « slice \Rightarrow ribbon » (Fox 1962)

Pour un nœud $K \subset \mathbb{R}^3$ on vient d'introduire trois types de surfaces.

Genre de Seifert :

$$g_3(K) := \min\{ \text{genre}(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ surface de Seifert, } \partial S = K \}$$
$$g_3(K) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K \text{ est trivial}$$

Genre ruban :

$$g_r(K) := \min\{ \text{genre}(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ surface ruban, } \partial S = K \}$$
$$g_r(K) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K \text{ est ruban}$$

Genre lisse :

$$g_4(K) := \min\{ \text{genre}(S) \mid S \subset \mathbb{R}_+^4 \text{ surface lisse, } \partial S = K \}$$
$$g_4(K) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K \text{ est bordant}$$

Évidemment $0 \leq g_4(K) \leq g_r(K) \leq g_3(K)$.

Le problème « slice \Rightarrow ribbon » (Fox 1962)

Pour un nœud $K \subset \mathbb{R}^3$ on vient d'introduire trois types de surfaces.

Genre de Seifert :

$$g_3(K) := \min\{ \text{genre}(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ surface de Seifert, } \partial S = K \}$$
$$g_3(K) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K \text{ est trivial}$$

Genre ruban :

$$g_r(K) := \min\{ \text{genre}(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3 \text{ surface ruban, } \partial S = K \}$$
$$g_r(K) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K \text{ est ruban}$$

Genre lisse :

$$g_4(K) := \min\{ \text{genre}(S) \mid S \subset \mathbb{R}_+^4 \text{ surface lisse, } \partial S = K \}$$
$$g_4(K) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K \text{ est bordant}$$

Évidemment $0 \leq g_4(K) \leq g_r(K) \leq g_3(K)$.

Question (problème de Fox)

Est-ce que tout nœud bordant est ruban ?

- 1 Invariants de nœuds et d'entrelacs
 - Le polynôme d'Alexander
 - Le polynôme de Jones
 - Interprétation topologique ?
- 2 Le problème de Fox
 - Entrelacs bordants [slice links]
 - Entrelacs rubans [ribbon links]
 - Le problème « slice \Rightarrow ribbon »
- 3 Le polynôme de Jones des entrelacs rubans**
 - Diagrammes rubans
 - La nullité du polynôme de Jones
 - Le déterminant du polynôme de Jones
- 4 Invariants de type fini de surfaces
 - Deux notions des invariants de type fini
 - L'exemple du polynôme de Jones
- 5 Questions ouvertes

Théorème (Fox-Milnor 1965)

Si L est un nœud bordant, $\Delta(L) = f(q^+) \cdot f(q^-)$ pour $f \in \mathbb{Z}[q^\pm]$.

On a $\Delta(L) = 0$ pour tout entrelacs bordant ayant plus de 2 composantes. \square

Théorème (Fox-Milnor 1965)

Si L est un nœud bordant, $\Delta(L) = f(q^+) \cdot f(q^-)$ pour $f \in \mathbb{Z}[q^\pm]$.

On a $\Delta(L) = 0$ pour tout entrelacs bordant ayant plus de 2 composantes. \square

Objectif : établir des propriétés analogues du polynôme de Jones.

Théorème (Fox-Milnor 1965)

Si L est un nœud bordant, $\Delta(L) = f(q^+) \cdot f(q^-)$ pour $f \in \mathbb{Z}[q^\pm]$.

On a $\Delta(L) = 0$ pour tout entrelacs bordant ayant plus de 2 composantes. \square

Objectif : établir des propriétés analogues du polynôme de Jones.

Spécialisation commune : $\det(L) = \Delta(L)|_{q \mapsto i} = V(L)|_{q \mapsto i}$.

Théorème (Fox-Milnor 1965)

Si L est un nœud bordant, $\Delta(L) = f(q^+) \cdot f(q^-)$ pour $f \in \mathbb{Z}[q^\pm]$.

On a $\Delta(L) = 0$ pour tout entrelacs bordant ayant plus de 2 composantes. \square

Objectif : établir des propriétés analogues du polynôme de Jones.

Spécialisation commune : $\det(L) = \Delta(L)|_{q \mapsto i} = V(L)|_{q \mapsto i}$.

Définition

Seifert : la nullité $\text{null}(L)$ et la nullité de la matrice de Seifert $\theta + \theta^*$.

Jones : la nullité $\text{null } V(L)$ est l'ordre du zéro en $q = i$.

Théorème (Fox-Milnor 1965)

Si L est un nœud bordant, $\Delta(L) = f(q^+) \cdot f(q^-)$ pour $f \in \mathbb{Z}[q^\pm]$.

On a $\Delta(L) = 0$ pour tout entrelacs bordant ayant plus de 2 composantes. \square

Objectif : établir des propriétés analogues du polynôme de Jones.

Spécialisation commune : $\det(L) = \Delta(L)|_{q \mapsto i} = V(L)|_{q \mapsto i}$.

Définition

Seifert : la nullité $\text{null}(L)$ et la nullité de la matrice de Seifert $\theta + \theta^*$.

Jones : la nullité $\text{null } V(L)$ est l'ordre du zéro en $q = i$.

On a $V(L) = (q^+ + q^-)^{\text{null}(L)} \cdot Q$ où $Q \in \mathbb{Z}[q^\pm]$ tel que $Q(i) \neq 0$.

Théorème (Fox-Milnor 1965)

Si L est un nœud bordant, $\Delta(L) = f(q^+) \cdot f(q^-)$ pour $f \in \mathbb{Z}[q^\pm]$.

On a $\Delta(L) = 0$ pour tout entrelacs bordant ayant plus de 2 composantes. \square

Objectif : établir des propriétés analogues du polynôme de Jones.

Spécialisation commune : $\det(L) = \Delta(L)|_{q \mapsto i} = V(L)|_{q \mapsto i}$.

Définition

Seifert : la nullité $\text{null}(L)$ et la nullité de la matrice de Seifert $\theta + \theta^*$.

Jones : la nullité $\text{null } V(L)$ est l'ordre du zéro en $q = i$.

On a $V(L) = (q^+ + q^-)^{\text{null}(L)} \cdot Q$ où $Q \in \mathbb{Z}[q^\pm]$ tel que $Q(i) \neq 0$.

Si L a n composantes, alors $V(1) = 2^{n-1}$ et donc $0 \leq \text{null } V(L) \leq n - 1$.

Théorème (Fox-Milnor 1965)

Si L est un nœud bordant, $\Delta(L) = f(q^+) \cdot f(q^-)$ pour $f \in \mathbb{Z}[q^\pm]$.

On a $\Delta(L) = 0$ pour tout entrelacs bordant ayant plus de 2 composantes. \square

Objectif : établir des propriétés analogues du polynôme de Jones.

Spécialisation commune : $\det(L) = \Delta(L)|_{q \mapsto i} = V(L)|_{q \mapsto i}$.

Définition

Seifert : la nullité $\text{null}(L)$ et la nullité de la matrice de Seifert $\theta + \theta^*$.

Jones : la nullité $\text{null } V(L)$ est l'ordre du zéro en $q = i$.

On a $V(L) = (q^+ + q^-)^{\text{null}(L)} \cdot Q$ où $Q \in \mathbb{Z}[q^\pm]$ tel que $Q(i) \neq 0$.

Si L a n composantes, alors $V(1) = 2^{n-1}$ et donc $0 \leq \text{null } V(L) \leq n - 1$.

Définition

Seifert : le déterminant est $\det(L) = \det[-i(\theta + \theta^*)] = \Delta(L)|_{q \mapsto i}$.

Jones : le déterminant est $\det V(L) := [V(L)/(q^+ + q^-)^{\text{null}(L)}]_{(q \mapsto i)}$.

Théorème (Fox-Milnor 1965)

Si L est un nœud bordant, $\Delta(L) = f(q^+) \cdot f(q^-)$ pour $f \in \mathbb{Z}[q^\pm]$.

On a $\Delta(L) = 0$ pour tout entrelacs bordant ayant plus de 2 composantes. \square

Objectif : établir des propriétés analogues du polynôme de Jones.

Spécialisation commune : $\det(L) = \Delta(L)|_{q \mapsto i} = V(L)|_{q \mapsto i}$.

Définition

Seifert : la nullité $\text{null}(L)$ et la nullité de la matrice de Seifert $\theta + \theta^*$.

Jones : la nullité $\text{null } V(L)$ est l'ordre du zéro en $q = i$.

On a $V(L) = (q^+ + q^-)^{\text{null}(L)} \cdot Q$ où $Q \in \mathbb{Z}[q^\pm]$ tel que $Q(i) \neq 0$.

Si L a n composantes, alors $V(1) = 2^{n-1}$ et donc $0 \leq \text{null } V(L) \leq n - 1$.

Définition

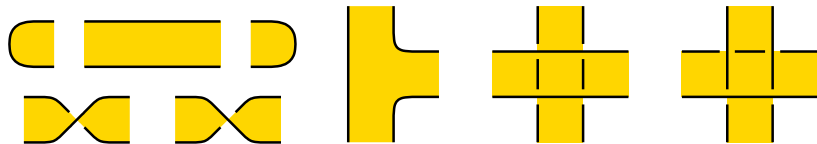
Seifert : le déterminant est $\det(L) = \det[-i(\theta + \theta^*)] = \Delta(L)|_{q \mapsto i}$.

Jones : le déterminant est $\det V(L) := [V(L)/(q^+ + q^-)^{\text{null}(L)}]_{(q \mapsto i)}$.

Donc $\text{null}(L) = 0 \iff \text{null } V(L) = 0 \implies \det(L) = \det V(L)$.

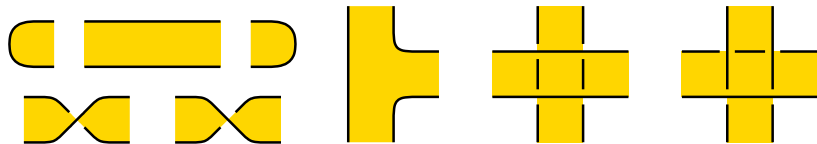
Définition

Un *diagramme ruban* est un diagramme formé des pièces suivantes :



Définition

Un *diagramme ruban* est un diagramme formé des pièces suivantes :

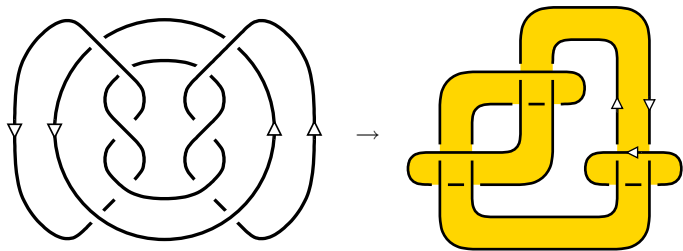


Proposition

Toute surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ se représente par un diagramme ruban.
(Toute surface plongée $S \subset \mathbb{R}^3$ se représente ainsi sans singularités.) □

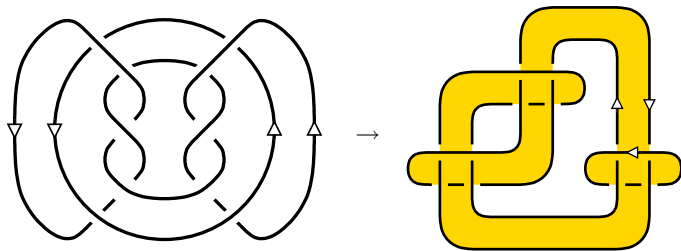
Exemples : diagramme ruban

Toute surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ se représente par un diagramme ruban.

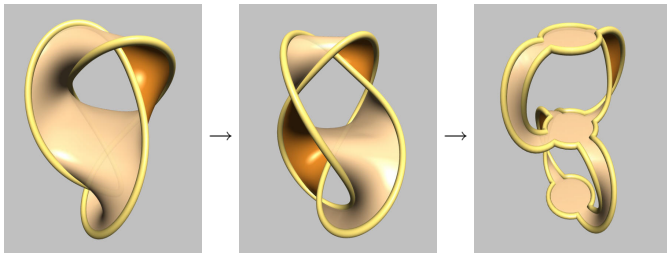


Exemples : diagramme ruban

Toute surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ se représente par un diagramme ruban.



Toute surface plongée $S \subset \mathbb{R}^3$ se représente ainsi sans singularités.



Définition (crochet de Kauffman)

Il existe une unique application $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm}]$, notée $D \mapsto \langle D \rangle$, telle que

$$\langle \bigcirc \rangle = 1.$$

$$\langle D \sqcup \bigcirc \rangle = \langle D \rangle \cdot (-A^{+2} - A^{-2}),$$

$$\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle = A \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle + A^{-1} \langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \rangle,$$

Définition (crochet de Kauffman)

Il existe une unique application $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm}]$, notée $D \mapsto \langle D \rangle$, telle que

$$\begin{aligned}\langle \bigcirc \rangle &= 1. \\ \langle D \sqcup \bigcirc \rangle &= \langle D \rangle \cdot (-A^{+2} - A^{-2}), \\ \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle &= A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle, \end{aligned}$$

On trouve $\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle = \langle \rangle \langle \rangle$

Définition (crochet de Kauffman)

Il existe une unique application $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm}]$, notée $D \mapsto \langle D \rangle$, telle que

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \rangle &= 1. \\ \langle D \sqcup \bigcirc \rangle &= \langle D \rangle \cdot (-A^{+2} - A^{-2}), \\ \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle &= A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle, \end{aligned}$$

On trouve $\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle = \langle \rangle \langle \rangle$ et $\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle = \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle$

Définition (crochet de Kauffman)

Il existe une unique application $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm}]$, notée $D \mapsto \langle D \rangle$, telle que

$$\langle \bigcirc \rangle = 1.$$

$$\langle D \sqcup \bigcirc \rangle = \langle D \rangle \cdot (-A^{+2} - A^{-2}),$$

$$\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle,$$

On trouve $\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle = \langle \rangle \langle \rangle$ et $\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle = \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle$ mais $\langle \bigcirc \rangle = -A^3 \langle \frown \rangle$.

Définition (crochet de Kauffman)

Il existe une unique application $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm}]$, notée $D \mapsto \langle D \rangle$, telle que

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \rangle &= 1. \\ \langle D \sqcup \bigcirc \rangle &= \langle D \rangle \cdot (-A^{+2} - A^{-2}), \\ \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle &= A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle, \end{aligned}$$

On trouve $\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle = \langle \rangle \langle \rangle$ et $\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle = \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle$ mais $\langle \bigcirc \rangle = -A^3 \langle \frown \rangle$.

Correction : on pose $\text{vrille}(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}) := +1$ et $\text{vrille}(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}) := -1$.

Définition (crochet de Kauffman)

Il existe une unique application $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm}]$, notée $D \mapsto \langle D \rangle$, telle que

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \rangle &= 1. \\ \langle D \sqcup \bigcirc \rangle &= \langle D \rangle \cdot (-A^{+2} - A^{-2}), \\ \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle &= A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle, \end{aligned}$$

On trouve $\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle = \langle \rangle \langle \rangle$ et $\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle = \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle$ mais $\langle \bigcirc \rangle = -A^3 \langle \frown \rangle$.

Correction : on pose $\text{vrille}(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}) := +1$ et $\text{vrille}(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}) := -1$.

Théorème (Kauffman 1987)

Le polynôme $\langle D \rangle \cdot (-A^3)^{-\text{vrille}(D)}$ est invariant.

Définition (crochet de Kauffman)

Il existe une unique application $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm}]$, notée $D \mapsto \langle D \rangle$, telle que

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \rangle &= 1. \\ \langle D \sqcup \bigcirc \rangle &= \langle D \rangle \cdot (-A^{+2} - A^{-2}), \\ \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle &= A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle, \end{aligned}$$

On trouve $\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle = \langle \rangle \langle \rangle$ et $\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle = \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle$ mais $\langle \bigcirc \rangle = -A^3 \langle \frown \rangle$.

Correction : on pose $\text{vrille}(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}) := +1$ et $\text{vrille}(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}) := -1$.

Théorème (Kauffman 1987)

Le polynôme $\langle D \rangle \cdot (-A^3)^{-\text{vrille}(D)}$ est invariant.

Il vérifie la même relation locale que le polynôme de Jones :
on conclut ainsi que $\langle D \rangle \cdot (-A^{-3})^{\text{vrille}(D)} = V(L)|_{(q \mapsto -A^{-2})}$. □

Théorème (E 2007)

Soit $L \subset \mathbb{R}^3$ un entrelacs qui borde une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ de caractéristique d'Euler positive $n = \chi(S)$. Alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n)$.

Théorème (E 2007)

Soit $L \subset \mathbb{R}^3$ un entrelacs qui borde une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ de caractéristique d'Euler positive $n = \chi(S)$. Alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n)$.

Remarque : Par convention S n'a pas de composantes fermées. Pour toute composante connexe S_i on a alors $\chi(S_i) > 0 \Leftrightarrow S_i = \bigcirc \Leftrightarrow \chi(S_i) = 1$.

Théorème (E 2007)

Soit $L \subset \mathbb{R}^3$ un entrelacs qui borde une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ de caractéristique d'Euler positive $n = \chi(S)$. Alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n)$.

Remarque : Par convention S n'a pas de composantes fermées. Pour toute composante connexe S_i on a alors $\chi(S_i) > 0 \Leftrightarrow S_i = \bigcirc \Leftrightarrow \chi(S_i) = 1$.

Démonstration.

On procède par récurrence sur le nombre $r(S)$ des singularités.

Si $r(S) = 0$ alors S est plongée et $L = L_0 \sqcup \bigcirc^n$.

Nullité du polynôme de Jones

Théorème (E 2007)

Soit $L \subset \mathbb{R}^3$ un entrelacs qui borde une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$ de caractéristique d'Euler positive $n = \chi(S)$. Alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n)$.

Remarque : Par convention S n'a pas de composantes fermées. Pour toute composante connexe S_i on a alors $\chi(S_i) > 0 \Leftrightarrow S_i = \bigcirc \Leftrightarrow \chi(S_i) = 1$.

Démonstration.

On procède par récurrence sur le nombre $r(S)$ des singularités.

Si $r(S) = 0$ alors S est plongée et $L = L_0 \sqcup \bigcirc^n$.

Si $r(S) \geq 1$ on considère le crochet de Kauffman :

$$\begin{aligned} \langle \text{Diagram 1} \rangle - \langle \text{Diagram 2} \rangle &= (A^{+2} - A^{-2}) \left[\langle \text{Diagram 3} \rangle - \langle \text{Diagram 4} \rangle \right] \\ + (A^{+4} - 1) \left[\langle \text{Diagram 5} \rangle - \langle \text{Diagram 6} \rangle \right] &+ (A^{-4} - 1) \left[\langle \text{Diagram 7} \rangle - \langle \text{Diagram 8} \rangle \right]. \end{aligned}$$

On conclut par récurrence, en utilisant $\chi(\text{Diagram 9}) = \chi(\text{Diagram 10}) + 1$. □

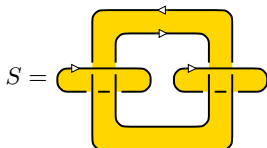
Exemples : nullité de Jones

Exemple

Dans la figure on a $\chi(S) = 1 + 1 + 0 = 2$ et

$$V(L) = (q^+ + q^-) \cdot (q^6 - q^4 + 2q^2 + 2q^{-2} - q^{-4} + q^{-6}).$$

Ainsi L borde des surfaces avec $\chi \leq 2$ mais pas avec $\chi \geq 3$.



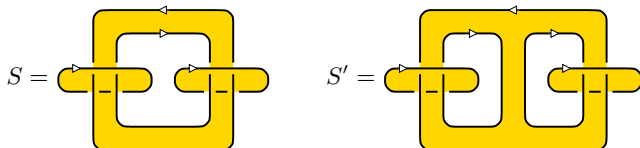
Exemples : nullité de Jones

Exemple

Dans la figure on a $\chi(S) = 1 + 1 + 0 = 2$ et

$$V(L) = (q^+ + q^-) \cdot (q^6 - q^4 + 2q^2 + 2q^{-2} - q^{-4} + q^{-6}).$$

Ainsi L borde des surfaces avec $\chi \leq 2$ mais pas avec $\chi \geq 3$.



Exemple

Pour S' on trouve $\chi(S') = 1 + 1 - 1 = 1$. On remarque que $L' = \partial S'$ est la somme connexe $H_+ \# H_- \# H_+ \# H_-$ de quatre entrelacs de Hopf, donc

$$V(L) = (q^{+1} + q^{+5})^2 \cdot (q^{-1} + q^{-5})^2.$$

Ainsi L' borde des surfaces avec $\chi \leq 1$ mais pas avec $\chi \geq 2$.

Le déterminant du polynôme de Jones

Pour tout entrelacs à n composantes on a $0 \leq \text{null } V(L) \leq n - 1$.

Le déterminant du polynôme de Jones

Pour tout entrelacs à n composantes on a $0 \leq \text{null } V(L) \leq n - 1$.

Pour tout entrelacs ruban à n composantes on a $\text{null } V(L) = n - 1$.

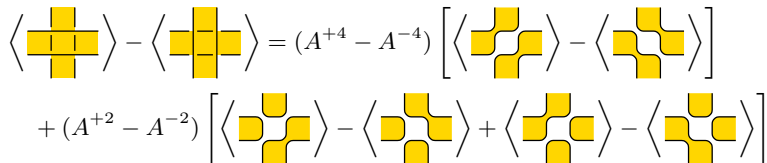
Le déterminant du polynôme de Jones

Pour tout entrelacs à n composantes on a $0 \leq \text{null } V(L) \leq n - 1$.

Pour tout entrelacs ruban à n composantes on a $\text{null } V(L) = n - 1$.

Proposition

Le déterminant de Jones $\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q \mapsto i)}$ est invariant par rapport au changement de croisements rubans.

$$\begin{aligned} \langle \text{Diagram 1} \rangle - \langle \text{Diagram 2} \rangle &= (A^{+4} - A^{-4}) \left[\langle \text{Diagram 3} \rangle - \langle \text{Diagram 4} \rangle \right] \\ &+ (A^{+2} - A^{-2}) \left[\langle \text{Diagram 5} \rangle - \langle \text{Diagram 6} \rangle + \langle \text{Diagram 7} \rangle - \langle \text{Diagram 8} \rangle \right] \end{aligned}$$


Le déterminant du polynôme de Jones

Pour tout entrelacs à n composantes on a $0 \leq \text{null } V(L) \leq n - 1$.

Pour tout entrelacs ruban à n composantes on a $\text{null } V(L) = n - 1$.

Proposition

Le déterminant de Jones $\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q \mapsto i)}$ est invariant par rapport au changement de croisements rubans.

$$\begin{aligned} \langle \text{Crossing 1} \rangle - \langle \text{Crossing 2} \rangle &= (A^{+4} - A^{-4}) \left[\langle \text{Crossing 3} \rangle - \langle \text{Crossing 4} \rangle \right] \\ &+ (A^{+2} - A^{-2}) \left[\langle \text{Crossing 5} \rangle - \langle \text{Crossing 6} \rangle + \langle \text{Crossing 7} \rangle - \langle \text{Crossing 8} \rangle \right] \end{aligned}$$

Corollaire

Si $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ borde une surface ruban formée de n disques (immergés) disjoints, alors $\det V(L) = \det(K_1) \cdots \det(K_n)$. □

Le déterminant du polynôme de Jones

Pour tout entrelacs à n composantes on a $0 \leq \text{null } V(L) \leq n - 1$.

Pour tout entrelacs ruban à n composantes on a $\text{null } V(L) = n - 1$.

Proposition

Le déterminant de Jones $\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q \mapsto i)}$ est invariant par rapport au changement de croisements rubans.

$$\begin{aligned} \langle \text{Crossing 1} \rangle - \langle \text{Crossing 2} \rangle &= (A^{+4} - A^{-4}) \left[\langle \text{Crossing 3} \rangle - \langle \text{Crossing 4} \rangle \right] \\ &+ (A^{+2} - A^{-2}) \left[\langle \text{Crossing 5} \rangle - \langle \text{Crossing 6} \rangle + \langle \text{Crossing 7} \rangle - \langle \text{Crossing 8} \rangle \right] \end{aligned}$$

Corollaire

Si $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ borde une surface ruban formée de n disques (immergés) disjoints, alors $\det V(L) = \det(K_1) \cdots \det(K_n)$. □

Théorème (E 2007)

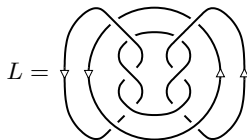
Pour tout entrelacs ruban on a $\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n) \pmod{32}$.
En particulier $\det V(L) \equiv 1 \pmod{8}$, en analogie avec l'invariant d'Arf. □

Exemple

La valeur 32 est optimale : l'entrelacs $L = 10n36$ est ruban et vérifie

$$V(L) = (q^+ + q^-)(-q^{+8} + 2q^{+6} - 3q^{+4} + 4q^{+2} - 3 + 4q^{-2} - 3q^{-4} + 2q^{-6} - q^{-8}).$$

Ici $\det V(L) = -23$ alors que $\det(K_1) = 1$ et $\det(K_2) = 9$.



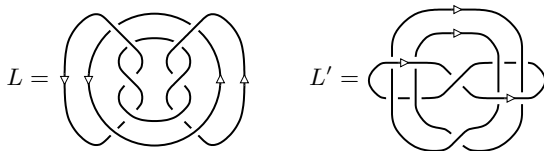
Exemples : déterminant de Jones

Exemple

La valeur 32 est optimale : l'entrelacs $L = 10n36$ est ruban et vérifie

$$V(L) = (q^+ + q^-)(-q^{+8} + 2q^{+6} - 3q^{+4} + 4q^{+2} - 3 + 4q^{-2} - 3q^{-4} + 2q^{-6} - q^{-8}).$$

Ici $\det V(L) = -23$ alors que $\det(K_1) = 1$ et $\det(K_2) = 9$.



Exemple

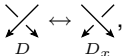
Les entrelacs ne satisfont pas tous à la congruence modulo 32 :

$$V(L') = (q^+ + q^-)(q^{+6} - 2q^{+4} + 2q^{+2} - 2 + 3q^{-2} - 2q^{-4} + 2q^{-6} - q^{-8})$$



Ici $\det V(L') = -15$ alors que $\det(K'_1) = 1$ et $\det(K'_2) = 1$.

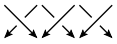
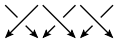
- 1 Invariants de nœuds et d'entrelacs
 - Le polynôme d'Alexander
 - Le polynôme de Jones
 - Interprétation topologique ?
- 2 Le problème de Fox
 - Entrelacs bordants [slice links]
 - Entrelacs rubans [ribbon links]
 - Le problème « slice \Rightarrow ribbon »
- 3 Le polynôme de Jones des entrelacs rubans
 - Diagrammes rubans
 - La nullité du polynôme de Jones
 - Le déterminant du polynôme de Jones
- 4 Invariants de type fini de surfaces
 - Deux notions des invariants de type fini
 - L'exemple du polynôme de Jones
- 5 Questions ouvertes

Invariants de type fini d'entrelacs



Étant donné un diagramme D on peut changer un croisement : 

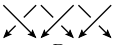
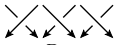
Invariants de type fini d'entrelacs

Étant donné un diagramme D on peut changer un croisement :  \leftrightarrow ,

ou une famille X de croisements :  \leftrightarrow .

Invariants de type fini d'entrelacs

Étant donné un diagramme D on peut changer un croisement :  \leftrightarrow ,

ou une famille X de croisements :  \leftrightarrow .



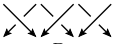
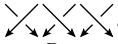
Définition (Vassiliev 1989, Goussarov 1991)

Un invariant d'entrelacs $L \mapsto v(L)$ est de degré $\leq m$ si

$$\sum_{Y \subset X} (-1)^{|Y|} v(D_Y) = 0 \quad \text{pour tout } X \text{ tel que } |X| > m.$$

On dit que v est de *type fini* s'il est de degré $\leq m$ pour un $m \in \mathbb{N}$.

Invariants de type fini d'entrelacs

Étant donné un diagramme D on peut changer un croisement :  \leftrightarrow ,
ou une famille X de croisements :  \leftrightarrow .

Définition (Vassiliev 1989, Goussarov 1991)

Un invariant d'entrelacs $L \mapsto v(L)$ est de degré $\leq m$ si

$$\sum_{Y \subset X} (-1)^{|Y|} v(D_Y) = 0 \quad \text{pour tout } X \text{ tel que } |X| > m.$$



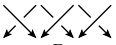
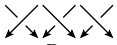
On dit que v est de *type fini* s'il est de degré $\leq m$ pour un $m \in \mathbb{N}$.

degré ≤ 0 : $v(\text{crossing}) - v(\text{no crossing}) = 0$, càd v est « constant »

degré ≤ 1 : $v(\text{two crossings}) - v(\text{crossing 1}) - v(\text{crossing 2}) + v(\text{no crossings}) = 0$

degré $\leq m$: les « dérivées » d'ordre $m + 1$ s'annulent.

Invariants de type fini d'entrelacs

Étant donné un diagramme D on peut changer un croisement :  \leftrightarrow ,
ou une famille X de croisements :  \leftrightarrow .

Définition (Vassiliev 1989, Goussarov 1991)

Un invariant d'entrelacs $L \mapsto v(L)$ est de degré $\leq m$ si

$$\sum_{Y \subset X} (-1)^{|Y|} v(D_Y) = 0 \quad \text{pour tout } X \text{ tel que } |X| > m.$$

On dit que v est de *type fini* s'il est de degré $\leq m$ pour un $m \in \mathbb{N}$.

degré ≤ 0 : $v(\text{diagramme à 1 croisement}) - v(\text{diagramme à 1 croisement}) = 0$, càd v est « constant »

degré ≤ 1 : $v(\text{diagramme à 2 croisements}) - v(\text{diagramme à 2 croisements}) - v(\text{diagramme à 2 croisements}) + v(\text{diagramme à 2 croisements}) = 0$

degré $\leq m$: les « dérivées » d'ordre $m + 1$ s'annulent.

Remarque (abondance des invariants de type fini d'entrelacs)

Dans un développement en série convenable, tous les invariants quantiques sont de type fini (Goussarov 1991, Birman-Lin 1993, Bar-Natan 1995).

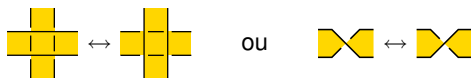
L'intégrale de Kontsevich construit un invariant universel de type fini.

Invariants de type fini de surfaces

Soit D un diagramme ruban d'une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$.

Soit X un ensemble de croisements ruban de D .

Pour $Y \subset X$ on note D_Y le diagramme obtenu par changement des croisements dans Y :

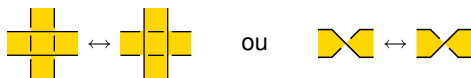


Invariants de type fini de surfaces

Soit D un diagramme ruban d'une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$.

Soit X un ensemble de croisements ruban de D .

Pour $Y \subset X$ on note D_Y le diagramme obtenu par changement des croisements dans Y :



Définition (invariant de type fini des surfaces)

Un invariant de surfaces $S \mapsto d(S)$ est de degré $\leq m$ si

$$\sum_{Y \subset X} (-1)^{|Y|} d(D_Y) = 0 \quad \text{pour tout } X \text{ tel que } |X| > m.$$

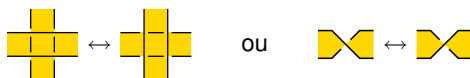
On dit que d est de *type fini* s'il est de degré $\leq m$ pour un $m \in \mathbb{N}$.

Invariants de type fini de surfaces

Soit D un diagramme ruban d'une surface ruban $S \subset \mathbb{R}^3$.

Soit X un ensemble de croisements ruban de D .

Pour $Y \subset X$ on note D_Y le diagramme obtenu par changement des croisements dans Y :



Définition (invariant de type fini des surfaces)

Un invariant de surfaces $S \mapsto d(S)$ est de degré $\leq m$ si

$$\sum_{Y \subset X} (-1)^{|Y|} d(D_Y) = 0 \quad \text{pour tout } X \text{ tel que } |X| > m.$$

On dit que d est de *type fini* s'il est de degré $\leq m$ pour un $m \in \mathbb{N}$.

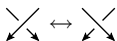
Remarque (abondance des invariants de type fini de surfaces)

Si $L \mapsto v(L)$ est de degré $\leq m$, alors $S \mapsto v(\partial S)$ est de degré $\leq m$.

Invariants de type fini de surfaces

Rappel : Soit $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(L) \cdot h^k$ le développement en $q = \exp(h/2)$.

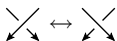
Alors $v_k(L)$ est de degré $\leq k$ par rapport au changement de croisements :



Invariants de type fini de surfaces

Rappel : Soit $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(L) \cdot h^k$ le développement en $q = \exp(h/2)$.

Alors $v_k(L)$ est de degré $\leq k$ par rapport au changement de croisements :



Soit $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(L) \cdot h^k$ le développement en $q = i \exp(h/2)$.

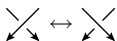
Les invariants $d_k(L)$ ne sont pas de type fini / Vassiliev-Goussarov.

Notamment $d_0(L) = V(L)_{q \mapsto i} = \Delta(L)_{q \mapsto i} = \det(L) = \det[-i(\theta + \theta^*)]$.

Invariants de type fini de surfaces

Rappel : Soit $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(L) \cdot h^k$ le développement en $q = \exp(h/2)$.

Alors $v_k(L)$ est de degré $\leq k$ par rapport au changement de croisements :



Soit $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(L) \cdot h^k$ le développement en $q = i \exp(h/2)$.

Les invariants $d_k(L)$ ne sont pas de type fini / Vassiliev-Goussarov.

Notamment $d_0(L) = V(L)_{q \mapsto i} = \Delta(L)_{q \mapsto i} = \det(L) = \det[-i(\theta + \theta^*)]$.

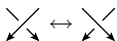
Proposition

L'invariant $S \mapsto d_k(\partial S)$ est de type fini par rapport au changement de croisements rubans : il est de degré $\leq m$ pour $m = k + 1 - \chi(S)$.

Invariants de type fini de surfaces

Rappel : Soit $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(L) \cdot h^k$ le développement en $q = \exp(h/2)$.

Alors $v_k(L)$ est de degré $\leq k$ par rapport au changement de croisements :



Soit $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(L) \cdot h^k$ le développement en $q = i \exp(h/2)$.

Les invariants $d_k(L)$ ne sont pas de type fini / Vassiliev-Goussarov.

Notamment $d_0(L) = V(L)_{q \mapsto i} = \Delta(L)_{q \mapsto i} = \det(L) = \det[-i(\theta + \theta^*)]$.

Proposition

L'invariant $S \mapsto d_k(\partial S)$ est de type fini par rapport au changement de croisements rubans : il est de degré $\leq m$ pour $m = k + 1 - \chi(S)$.

$$\begin{aligned} \langle \text{Crossing 1} \rangle - \langle \text{Crossing 2} \rangle &= (A^{+4} - A^{-4}) \left[\langle \text{Crossing 3} \rangle - \langle \text{Crossing 4} \rangle \right] \\ &+ (A^{+2} - A^{-2}) \left[\langle \text{Crossing 5} \rangle - \langle \text{Crossing 6} \rangle + \langle \text{Crossing 7} \rangle - \langle \text{Crossing 8} \rangle \right]. \end{aligned}$$

- 1 Invariants de nœuds et d'entrelacs
 - Le polynôme d'Alexander
 - Le polynôme de Jones
 - Interprétation topologique ?
- 2 Le problème de Fox
 - Entrelacs bordants [slice links]
 - Entrelacs rubans [ribbon links]
 - Le problème « slice \Rightarrow ribbon »
- 3 Le polynôme de Jones des entrelacs rubans
 - Diagrammes rubans
 - La nullité du polynôme de Jones
 - Le déterminant du polynôme de Jones
- 4 Invariants de type fini de surfaces
 - Deux notions des invariants de type fini
 - L'exemple du polynôme de Jones
- 5 Questions ouvertes

Polynômes des entrelacs rubans :

- Généralisation aux entrelacs bordants [slice] ? Obstructions ?
- La nullité de Jones est-elle égale à la nullité de Seifert ?
- Généralisation Jones \rightarrow HOMFLYPT ? ou Jones \rightarrow Kauffman ?
- Quelle est l'interprétation au niveau de l'homologie de Khovanov ?

Polynômes des entrelacs rubans :

- Généralisation aux entrelacs bordants [slice] ? Obstructions ?
- La nullité de Jones est-elle égale à la nullité de Seifert ?
- Généralisation Jones \rightarrow HOMFLYPT ? ou Jones \rightarrow Kauffman ?
- Quelle est l'interprétation au niveau de l'homologie de Khovanov ?

Invariants de type fini de surfaces :

- Développer la théorie analogue aux invariants de type fini d'entrelacs.
- Exemples provenant de HOMFLYPT ou d'autres invariants quantiques ?
- Rapport entre les invariants de type fini d'entrelacs et de surfaces ?
- Application aux surfaces de Seifert : minoration de $g_3(K)$?
- Application aux surfaces rubans : minoration de $g_r(K)$?

Polynômes des entrelacs rubans :

- Généralisation aux entrelacs bordants [slice] ? Obstructions ?
- La nullité de Jones est-elle égale à la nullité de Seifert ?
- Généralisation Jones \rightarrow HOMFLYPT ? ou Jones \rightarrow Kauffman ?
- Quelle est l'interprétation au niveau de l'homologie de Khovanov ?

Invariants de type fini de surfaces :

- Développer la théorie analogue aux invariants de type fini d'entrelacs.
- Exemples provenant de HOMFLYPT ou d'autres invariants quantiques ?
- Rapport entre les invariants de type fini d'entrelacs et de surfaces ?
- Application aux surfaces de Seifert : minoration de $g_3(K)$?
- Application aux surfaces rubans : minoration de $g_r(K)$?

Je vous remercie de votre attention.