

Quelques interactions de la topologie classique et quantique en dimension trois

Michael Eisermann
www-fourier.ujf-grenoble.fr/eiserm



14 décembre 2007



1/30

Plan de l'exposé

- 1 Topologie classique et quantique
 - Groupe fondamental et polynôme d'Alexander
 - Polynôme de Jones et invariants quantiques
 - Invariants de type fini et la question de Vassiliev
- 2 Yang-Baxter ensembliste et théorie des quandles
 - Quandles et actions des tresses
 - Yang-Baxter ensembliste et invariants de coloriage
 - Classification des déformations de Yang-Baxter
- 3 Surfaces et invariants de type fini
 - Entrelacs bordants et entrelacs rubans
 - Le polynôme de Jones des entrelacs rubans
 - Invariants de type fini de surfaces
- 4 Questions ouvertes

2/30

Aperçu historique

Précurseurs (avant 1900)

électromagnétisme (Gauss), topologie (Listing), théorie atomique (Kelvin), classification empiriques des petits nœuds (Kirkman, Little, Tait)

Topologie classique (dès 1900)

groupe fondamental, homologie, revêtements, surfaces de Seifert, calcul de Fox, topologie des 3-variétés, ... (Poincaré, Wirtinger, Dehn, Alexander, Reidemeister, Seifert, Fox, Milnor, Papakyriakopoulos, Waldhausen, ...)

Topologie quantique (dès 1984)

représentations des tresses, théorie des déformations, groupes quantiques, invariants de type fini, ... (Jones, HOMFLYPT, Kauffman, Vassiliev, Goussarov, Birman, Lin, Bar-Natan, Drinfel'd, Kontsevich, ...)

3/30

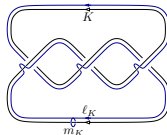
Groupe fondamental et système périphérique

Théorème (Dehn 1914)

Les deux images miroir du nœud de trèfle sont distincts.

$\pi_K := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$
méridien m_K
longitude ℓ_K

Le triple (π_K, m_K, ℓ_K) est un invariant du nœud K .



Théorème (Papakyriakopoulos 1957)

Le nœud K est trivial si et seulement si $\ell_K = 1$ dans π_K .

Théorème (Waldhausen 1968)

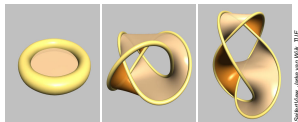
L'invariant $K \mapsto (\pi_K, m_K, \ell_K)$ classe les nœuds à isotopie près.

4/30

Surfaces de Seifert et polynôme d'Alexander

Théorème (Seifert 1935)

Pour tout entrelacs $L \subset \mathbb{R}^3$ il existe une surface compacte connexe orientée $S \subset \mathbb{R}^3$ telle que $\partial S = L$. On appelle S une surface de Seifert de L .



(a) nœud trivial, \emptyset (b) nœud de trèfle, 3_1 (c) nœud de huit, 4_1

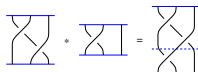
Théorème (Alexander 1928, Seifert 1935)

Soit $\theta: H_1(S) \times H_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}$, la forme de Seifert, $\theta(a, b) = \text{lk}(a^1, b^1)$. Alors $\Delta(L) = \det(q^{-\theta} - q^{\theta}) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ est un invariant de L .

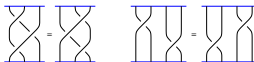
5/30

Le groupe des tresses (d'après Artin)

Multiplication des tresses :



Relations évidentes :



Théorème (Artin 1925, 1947)

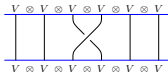
Le groupe B_n des tresses à n brins est présenté par

$$B_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \begin{array}{ll} s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & \text{si } |i-j|=1 \\ s_i s_j = s_i s_j & \text{si } |i-j| \geq 2 \end{array} \rangle$$

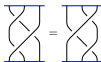
6/30

Représentations de Yang-Baxter

Tout opérateur $c \in \text{Aut}(V \otimes V)$ agit sur le produit $V^{\otimes n}$:



On exige la relation de tresse / de Yang-Baxter :



$$(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c)(\text{id} \otimes c) = (\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c)$$

Corollaire (du théorème d'Artin)

Tout opérateur de Yang-Baxter $c \in \text{Aut}(V \otimes V)$ induit une représentation $\rho_n^c: B_n \rightarrow \text{Aut}(V^{\otimes n})$ par $s_i \mapsto \underbrace{\text{id} \otimes \dots \otimes \text{id}}_{V^{\otimes(i-1)}} \otimes c \otimes \underbrace{\text{id} \otimes \dots \otimes \text{id}}_{V^{\otimes(n-i-1)}}$.

7/30

Représentations quantiques de Yang-Baxter

Exemple (Jones 1984)

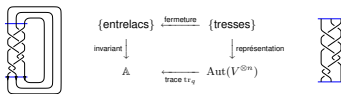
Soit $V = Au \oplus Av$ et ainsi $V \otimes V = Auu \oplus Au v \oplus Avu \oplus Avv$.

Pour tout $q \in \mathbb{A}^\times$ la matrice $c(q)$ représente un opérateur de Yang-Baxter :

$$c(q) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & q^2 & q - q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \xrightarrow{q \rightarrow 1} c(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $q = 1$ nous obtenons la solution triviale : la transposition τ de $V \otimes V$.

Sur $\mathbb{A} = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ l'opérateur c permet de construire l'invariant de Jones :



Généralisation : les déformations de τ induisent des invariants quantiques.

8/30

Relations combinatoires

Observation : dans l'exemple on a $q^{-2} \cdot c - q^2 \cdot c^{-1} = (q^{-1} - q) \cdot \text{id}$

Théorème (Alexander-Conway, Jones, HOMFLYPT)

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe un unique invariant d'entrelacs $V_N : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ vérifiant $V_N(\bigcirc) = 1$ et la relation locale

$$q^{-N} \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right) - q^{+N} \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right).$$

On a $V_N(L \sqcup \bigcirc) = V_N(L) \cdot U_N$ avec $U_N = \frac{q^{-N} - q^{+N}}{q^{-1} - q^{+1}} = q^{1-N} + \dots + q^{N-1}$.

$N = 0$: Alexander (1928), Conway (1969), noté $\Delta = V_0$

$N = 1$: invariant trivial, $V_1(L) = 1$ pour tout $L \in \mathcal{L}$

$N = 2$: Jones (1984), noté $V = V_2$ dans la suite

$N \in \mathbb{N}$: HOMFLYPT (Freyd-Yetter-Hoste-Lickorish-Millett-Oceanu 1985, Przytyki-Traczyk 1987)

Exemple (nœud de trèfle et nœud de huit)

$$\begin{aligned} \Delta(3_1) &= q^2 - 1 + q^{-2} & \Delta(4_1) &= -q^2 + 3 - q^{-2} \\ V(3_1) &= q^2 + q^6 - q^8 & V(4_1) &= q^4 - q^2 + 1 - q^{-2} + q^{-4} \end{aligned}$$

9/30

Invariants de type fini (d'après Vassiliev-Goussarov)

Observation : en posant $q = \exp(h) = 1 + h + \dots$ on trouve

$$c = \tau + O(h) \quad \text{et} \quad c^{-1} = \tau^{-1} + O(h) \quad \text{donc} \quad c - c^{-1} \in O(h).$$

Étant donné un diagramme D on peut changer un croisement $\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}$ ou une famille X de croisements : $\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}$.

Définition

$F : \mathcal{L} \rightarrow A$ est de degré $\leq m$ si $\sum_{X \subset Y} (-1)^{|X|} F(D_X) = 0$ pour $|Y| > m$.

degré ≤ 0 : $F \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right) - F \left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \right) = 0$, c-à-d F est « constant »

degré ≤ 1 : $F \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \diagdown \diagup \end{array} \right) - F \left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \diagup \diagdown \end{array} \right) - F \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \diagup \diagdown \end{array} \right) + F \left(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \diagdown \diagup \end{array} \right) = 0$

degré $\leq m$: les « dérivées » d'ordre $m+1$ s'annulent.

Théorème

Soit $V(L) = \sum v_k(L) \cdot h^k$ le développement en $q = 1 + h$.

Alors le coefficient $v_k(L)$ est un invariant de degré $\leq k$.

Travaux de Vassiliev, Goussarov, Birman, Lin, Bar-Natan, Kontsevich, ...
Les invariants de type fini sont nombreux et puissants.

10/30

Les invariants de type fini distinguent-ils tous les nœuds ?

Théorème (torsion dans $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$)

Il existe des nœuds dans $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ qui ne sont pas distingués par des invariants rationnels de type fini mais qui sont distingués par des invariants de type fini à valeur dans $\mathbb{Z}/2$.

Théorème (torsion provenant du groupe modulaire)

Soit V une 3-variété fermée. Si le noyau de $\pi_0 \text{Diff}(V) \rightarrow \text{Out } \pi_1(V)$ contient des éléments de torsion, alors il existe des nœuds distincts dans V qui ne sont pas distingués par des invariants rationnels de type fini.

Théorème (variétés de Whitehead)

Soit W une 3-variété ouverte contractile qui n'est pas homéomorphe à \mathbb{R}^3 mais qui se plonge dans \mathbb{R}^3 . Alors il existe des nœuds distincts dans W qui ne sont distingués par aucun invariant de type fini.

Théorème (sphère d'homotopie)

Si les invariants de type fini distinguent tous les nœuds dans n'importe quelle 3-sphère d'homotopie alors ceci implique la conjecture de Poincaré.

11/30

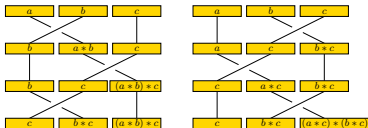
Quandles et actions des tresses

Soit (G, \cdot) un groupe. Pour $a * b := b^{-1}ab$ et $a \bar{*} b := bab^{-1}$ on constate :

- (Q1) $a * a = a$ (idempotence)
 (Q2) $(a * b) \bar{*} b = (a \bar{*} b) * b = a$ (inversibilité à droite)
 (Q3) $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$ (auto-distributivité)

Définition (d'après Joyce)

Un quandle est un ensemble Q muni de $*$, $\bar{*}$: $Q \times Q \rightarrow Q$ vérifiant (Q1-Q3).



Ainsi le groupe B_n des tresses à n brins agit sur Q^n (Brieskorn 1986).
Solutions ensemblistes de Yang-Baxter (Freyd-Yetter 1989, Drinfel'd 1990).

12/30

Yang-Baxter ensembliste et invariants de coloriage

Soit G un groupe et $Q = x^G$ une classe de conjugaison.

On pose $V = \mathbb{Z}Q$ et $c_Q: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$, $a \otimes b \mapsto b \otimes (a * b)$.

Alors Q est un quandle et c_Q est un opérateur de Yang-Baxter.

Théorème (Freyd-Yetter 1989)

L'invariant $F_G^Q: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ ainsi obtenu est le nombre des coloriages :

$$F_G^Q(K) = \# \text{Hom}(\pi_K, m_K; G, x).$$

Question naturelle : c_Q admet-il des déformations intéressantes ?

On définit le *polynôme de coloriage* $P_G^Q: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{Z}[G]$ par

$$P_G^Q(K) := \sum_{\rho: \pi_K \rightarrow G} \rho(\ell_K).$$

On remarque que $\varepsilon P_G^Q = F_G^Q$ pour $\varepsilon: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$.

Théorème

Le polynôme $P_G^Q(K)$ peut être présenté comme invariant de Yang-Baxter.

13/30

Exemples : polynôme de coloriage

On choisit $G = A_5$ et $x = (12345)$. Alors $P(3_1) = 1 + 5x$ et $P(3_1^*) = 1 + 5x^{-1}$.



Soit M_{11} le groupe de Mathieu d'ordre $7920 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$:

$$M_{11} = \langle x = (abcde fghijk), y = (abcej k dghf) \rangle \subset A_{11}$$

Pour le nœud K de Kinoshita-Terasaka et le nœud C de Conway on trouve

$$\begin{aligned} P(K) &= 1 + 11x^3 + 11x^7 & P(C) &= 1 + 11x^3 + 11x^7 \\ P(K^*) &= 1 + 11x^4 + 11x^8 & P(C^*) &= 1 + 11x^4 + 11x^8 \\ P(K^\times) &= 1 + 11x^4 + 22x^8 & P(C^\times) &= 1 + 11x^4 + 11x^6 + 11x^8 \\ P(K^l) &= 1 + 22x^3 + 11x^7 & P(C^l) &= 1 + 11x^3 + 11x^5 + 11x^7 \end{aligned}$$

Les invariants de Yang-Baxter détectent des nœuds non inversibles.

14/30

Classification des déformations de Yang-Baxter

Théorème

Supposons $Q \rightarrow \text{Inn}(Q)$ injectif. Alors toute déformation de l'opérateur $c_Q: \mathbb{A}Q \otimes \mathbb{A}Q \rightarrow \mathbb{A}Q \otimes \mathbb{A}Q$ dans l'espace des opérateurs de Yang-Baxter sur $\mathbb{A} = \mathbb{K}[h]/(h^2)$ est équivalente à une déformation diagonale.

Théorème (Fenn-Rourke, Carter et al. E)

On a une correspondance entre

- les déformations diagonales de c_Q sur $\mathbb{A} = \mathbb{K}[h]/(h^2)$,
- la cohomologie $H^2(Q, \mathbb{K})$ du quandle Q à coefficients dans \mathbb{K} ,
- les extensions $\mathcal{E}(Q, \mathbb{K})$ du quandle Q par le groupe $(\mathbb{K}, +)$.

Théorème

Les invariants de nœuds ainsi obtenus sont des (spécialisations des) polynômes de coloriage.

Outils : revêtements d'un quandle et correspondance de Galois

15/30

Motivation (d'après Fox-Milnor)

Exemple

Considérons $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $f(z) = (z^2, z^3)$.

Topologiquement c'est un plongement propre de \mathbb{C} dans \mathbb{C}^2 .

Mais en 0 la surface $S = \text{Image}(f)$ n'est pas localement plate !

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$ une surface non localement plate en x , singularité isolée.

Soit $B(x, \varepsilon)$ une petite boule centrée en x , et soit $S(x, \varepsilon)$ son bord.

Alors $K(x, \varepsilon) = \Sigma \cap S(x, \varepsilon)$ est un nœud dans $S(x, \varepsilon) \cong \mathbb{S}^3$.

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$ ce nœud est indépendant de ε . On le note donc $K(x)$.

Observation

La singularité en x peut être effacée par une modification locale si et seulement si $K(x) \subset \mathbb{S}^4$ borde un disque dans \mathbb{D}^4 .

Un tel nœud est appelé *bordant*, ou *slice*.

Théorème (Fox-Milnor 1966)

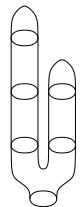
Si K est bordant alors $\Delta(K) = f(q) \cdot f(q^{-1})$ pour un $f \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$.

Dans notre exemple on a $K = 3_1$, et $\Delta(K) = q^2 - 1 + q^{-2}$ ne factorise pas.

16/30

Exemple d'un nœud bordant

surface abstraite



$$h = 0$$

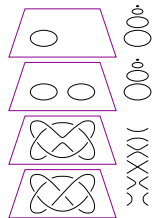
passage d'un maximum

passage d'un maximum

isotopie

passage d'un point selle

surface plongée dans \mathbb{R}^4_+



$$\mathbb{R}^3 \times 0$$

17/30

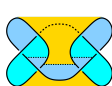
Surfaces immergées (d'après Fox)

Soit Σ une surface compacte orientée sans composantes fermées.

On considère les immersions $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ n'ayant que des singularités ruban.



(d) singularité ruban



(e) $3_1 \sharp 3_1^*$



(f) 8_{20}

Définition

Un entrelacs L est *ruban* s'il borde une surface immergée formée de disques.

Exemple

Pour tout nœud K la somme $K \sharp K^*$ est un nœud ruban.

Remarque

surface immergée $S \subset \mathbb{R}^3 \iff$ surface plongée lisse $S_+ \subset \mathbb{R}^4_+$ sans minima.

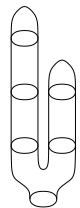
18/30

Entrelacs bordants et entrelacs rubans

Remarque

surface immergée $S \subset \mathbb{R}^3 \iff$ surface plongée lisse $S_+ \subset \mathbb{R}^4_+$ sans minima.

surface abstraite



$$h = 0$$

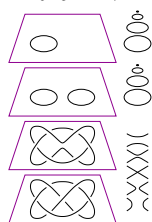
passage d'un maximum

passage d'un maximum

isotopie

passage d'un point selle

surface plongée dans \mathbb{R}^4_+



$$\mathbb{R}^3 \times 0$$

18/30

Le problème « slice \Rightarrow ruban » (Fox 1962)

Question (problème de Fox)

Est-ce que tout nœud bordant est ruban ?

$$g_s(K) := \min\{ \text{genre}(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3, \partial S = K, \text{ surface de Seifert} \}$$

$$g_s(K) = 0 \iff K \text{ est trivial}$$

$$g_r(K) := \min\{ \text{genre}(S) \mid S \subset \mathbb{R}^3, \partial S = K, \text{ surface ruban} \}$$

$$g_r(K) = 0 \iff K \text{ est ruban}$$

$$g_4(K) := \min\{ \text{genre}(S) \mid S \subset \mathbb{R}^4_+, \partial S = K, \text{ surface lisse} \}$$

$$g_4(K) = 0 \iff K \text{ est bordant}$$

20/30

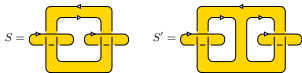
Exemples : nullité de Jones

Exemple

Dans la figure ci-dessous on a $\chi(S) = 1 + 1 + 0 = 2$. Pour $L = \partial S$ on trouve

$$V(L) = (q^+ + q^-) \cdot (q^6 - q^4 + 2q^2 + 2q^{-2} - q^{-4} + q^{-6}).$$

Ainsi L borde des surfaces avec $\chi \leq 2$ mais pas avec $\chi \geq 3$.



Exemple

Pour S' on trouve $\chi(S') = 1 + 1 - 1 = 1$. On remarque que $L' = \partial S'$ est la somme connexe $H_+ \sharp H_- \sharp H_+ \sharp H_-$ de quatre entrelacs de Hopf, donc

$$V(L) = (q^{+1} + q^{+5})^2 \cdot (q^{-1} + q^{-5})^2.$$

Ainsi L' borde des surfaces avec $\chi \leq 1$ mais pas avec $\chi \geq 2$.

25/30

Le polynôme de Jones des entrelacs rubans

Théorème (Fox-Milnor 1966)

Si L est un nœud bordant, $\Delta(L) = f(q^+) \cdot f(q^-)$ pour $f \in \mathbb{Z}[q^{\pm}]$.

On a $\Delta(L) = 0$ pour tout entrelacs bordant ayant plus de 2 composantes.

Résultats analogues pour le polynôme de Jones ?

Théorème (nullité de Jones des entrelacs rubans)

Si $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ est un entrelacs ruban à n composantes alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

⇒ Analogie avec la nullité de Seifert-Murasugi.

Théorème (multiplicativité du déterminant modulo 32)

Le déterminant de Jones det $V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q \rightarrow -1)}$

vérifie $\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n) \pmod{32}$.

⇒ Congruence $\det V(L) \equiv 1 \pmod{8}$, similaire à l'invariant d'Arf.

26/30

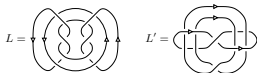
Exemples : déterminant de Jones

Exemple

La valeur 32 est optimale : l'entrelacs $L = 10n36$ est ruban et on trouve

$$V(L) = (q^+ + q^-)(-q^{+8} + 2q^{+6} - 3q^{+4} + 4q^{+2} - 3 + 4q^{-2} - 3q^{-4} + 2q^{-6} - q^{-8}).$$

Ici det $V(L) = -23$ alors que $\det(K_1) = 1$ et $\det(K_2) = 9$.



Exemple

Les entrelacs ne satisfont pas tous à la congruence modulo 32 :

$$V(L') = (q^+ + q^-)(q^{+6} - 2q^{+4} + 2q^{+2} - 2 + 3q^{-2} - 2q^{-4} + 2q^{-6} - q^{-8})$$

Ici $\det V(L') = -15$ alors que $\det(K'_1) = 1$ et $\det(K'_2) = 1$.

27/30

Invariants de type fini de surfaces

Rappel : Soit $V(L) = \sum v_k(L) \cdot h^k$ le développement en $q = 1 + h$.

Alors $v_k(L)$ est de degré $\leq k$ par rapport au changement de croisements :



Soit $V(L) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(L) \cdot h^k$ le développement en $q = i + h$.

Ici $d_0(L) = V(L)_{q \rightarrow -1} = \Delta(L)_{q \rightarrow -1} = \det(L) = \det[-i(\theta + \theta^*)]$.

Les invariants $d_k(L)$ ne sont pas de type fini / Vassiliev-Goussarov.

Proposition

L'invariant $S \mapsto d_k(\partial S)$ est de type fini par rapport au changement de croisements rubans : il est de degré $\leq m$ pour $m = k + 1 - \chi(S)$.

$$\begin{aligned} \langle \text{Crossing} \rangle - \langle \text{Crossing} \rangle &= (A^{+4} - A^{-4}) \left[\langle \text{Crossing} \rangle - \langle \text{Crossing} \rangle \right] \\ &+ (A^{+2} - A^{-2}) \left[\langle \text{Crossing} \rangle - \langle \text{Crossing} \rangle + \langle \text{Crossing} \rangle - \langle \text{Crossing} \rangle \right]. \end{aligned}$$

28/30

Questions ouvertes

La question de Vassiliev pour les nœuds dans les 3-variétés :

- Groupe modulaire, torsion, somme connexe, décomposition JSJ.
- Peut-on ramener la question pour les 3-variétés fermées à S^3 ?

Théorie des quandles, Yang-Baxter ensembliste et déformations :

- Étude complète des déformations infinitésimales.
- Théorie des revêtements algébriques.

Polynômes des entrelacs rubans :

- Nullité de Seifert-Murasugi vs nullité de Jones. (Et la signature ?)
- Généralisation Jones \rightarrow HOMFLYPT. (Et Murasugi \rightarrow Tristram ?)
- Quelle est l'interprétation dans l'homologie de Khovanov ?
- Généralisation aux entrelacs bordants. (Obstructions ?)

Invariants de type fini de surfaces :

- Développer la théorie des invariants de type fini de surfaces.
- Application aux surfaces de Seifert : minoration de $g_3(K)$?
- Application aux surfaces immergées : minoration de $g_r(K)$?

Je vous remercie de votre attention.