

Le polynôme de Jones des entrelacs rubans

Michael Eisermann

Institut Fourier

28 septembre 2007



Motivation (Les définitions suivront...)

Théorème (Fox-Milnor 1965)

Si L est un nœud bordant, $\Delta(L) = f(q^+) \cdot f(q^-)$ pour $f \in \mathbb{Z}[q^{\pm}]$.
(Et $\Delta(L) = 0$ pour tout entrelacs bordant à ≥ 2 composantes.)

Pour le polynôme de Jones rien de semblable n'est connu.
Cet exposé présente quelques premiers résultats :

Théorème (nullité de Jones des entrelacs rubans)

Si $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ est un entrelacs ruban à n composantes alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$.

⇒ Analogie avec la nullité de Seifert-Murasugi.

Théorème (multiplicativité du déterminant modulo 32)

Le déterminant de Jones $\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q=-i)}$ vérifie $\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n) \pmod{32}$.

⇒ Congruence $\det V(L) \equiv 1 \pmod{8}$, similaire à l'invariant d'Arf.

1/22

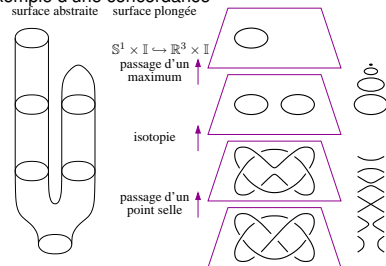
2/22

Plan de l'exposé

- 1 Rappel des notations
 - Concordance d'entrelacs
 - Polynôme d'Alexander, signature, nullité
- 2 Le polynôme de Jones
 - La nullité de Jones
 - Le déterminant de Jones
 - Multiplicativité modulo 32
- 3 Preuve du théorème sur la nullité
 - Diagrammes rubans
 - Preuve par récurrence
 - Comptage des disques
- 4 Questions ouvertes

3/22

Exemple d'une concordance



4/22

Concordance

Soient $f_0, f_1: n \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ deux entrelacs.

Définition (concordance)

Une *concordance* est un plongement $F: n \times S^1 \times I \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \times I$ de sorte que $F_0 = f_0 \times \text{id}_{\{0\}}$ et $F_1 = f_1 \times \text{id}_{\{1\}}$.

La concordance définit une relation d'équivalence, plus faible que l'isotopie, plus forte que le bordisme.

Définition (entrelacs bordant)

L est dit *bordant* s'il est concordant à l'entrelacs trivial \bigcirc^n .

$\Leftrightarrow L$ borde $n \times \mathbb{D}^2$ plongé dans $\mathbb{R}_+^4 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 \geq 0\}$.

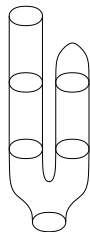
Remarque

Les nœuds modulo concordance forment un groupe; produit $[K] \cdot [K'] = [K \# K']$, neutre $[\bigcirc]$, inverse $[K^*]$.

5/22

Notre exemple à nouveau

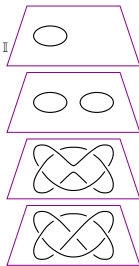
surface abstraite surface plongée



$S^1 \times I \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \times I$
passage d'un maximum

isotopie

passage d'un point selle



6/22

Concordance ruban

Définition (concordance ruban)

Une concordance est de type *ruban* si elle n'a pas de minima locaux par rapport à $\text{proj}: \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow I$.

Les seuls points critiques sont des points selles et des maxima. C'est une relation réflexive et transitive, mais non symétrique.

Définition (entrelacs ruban)

L est dit *ruban* s'il est concordant de type ruban à \bigcirc^n .

$\Leftrightarrow L$ borde $n \times \mathbb{D}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}_+^4$ sans minima locaux.

Le problème « bordant implique ruban » (Fox 1962)

$$\{\text{entrelacs rubans}\} \subset \{\text{entrelacs bordants}\} \\ \text{?} \quad \text{?}$$

7/22

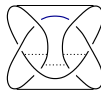
Surfaces immergées

Proposition

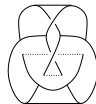
L est ruban $\Leftrightarrow L$ borde une surface immergée $F: n \times \mathbb{D}^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ dont toutes les singularités sont de type ruban.



(a) singularité ruban



(b) $3_1 \# 3_1^*$



(c) 8_{20}

Remarque

Pour tout nœud K la somme $K \# K^*$ est un nœud ruban.

8/22

Polynôme d'Alexander

Notation

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface de Seifert, $\partial S = L$, et soit
 $\theta: H_1(S) \times H_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}$ la forme de Seifert, $\theta(a, b) = \text{lk}(a^1, b^1)$.
 $\Delta(L) := \det(q^{-\theta^*} - q^{\theta}) \in \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ est le polynôme d'Alexander.

Théorème (Fox-Milnor 1965)

Si L est un nœud bordant, $\Delta(L) = f(q^+) \cdot f(q^-)$ pour $f \in \mathbb{Z}[q^{\pm}]$.

Si $n \geq 2$ alors $\Delta(L) = 0$.

Corollaire (invariant d'Arf)

Le déterminant $\det(L) := \Delta(L)|_{(q \rightarrow i)} = \det[-i(\theta + \theta^*)]$ d'un nœud bordant est un carré, en particulier $\det(L) \equiv 1 \pmod{8}$.

9/22

Signature et nullité

Définition (signature et nullité)

$\text{sign}(L) := \text{sign}(\theta + \theta^*)$
 $\text{null}(L) := \text{null}(\theta + \theta^*)$

Remarque

$\det(L) = 0 \iff \text{null}(L) \geq 1$
 $0 \leq \text{null}(L) \leq \text{null}(\bigcirc^n) = n - 1$

Théorème (Murasugi 1965)

Signature et nullité sont invariants par concordance.

Corollaire

Si L est bordant alors $\text{sign}(L) = 0$ et $\text{null}(L) = n - 1$.

10/22

Le polynôme de Jones

Notation

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe un unique invariant $V_N: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm}]$ qui vérifie $V_N(\bigcirc) = 1$ et la relation skein

$$q^{-N} \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right) - q^{+N} \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) = (q^{-1} - q^{+1}) \cdot V_N \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array} \right).$$

$N = 0$: Alexander (1928), Conway (1969)

$N = 1$: invariant trivial, $V_1(L) = 1$

$N = 2$: Jones (1985), noté $V := V_2$

$N \in \mathbb{N}$: HOMFLY-PT (1986, 1988)

Remarque

$V_N(L \sqcup \bigcirc) = V_N(L) \cdot U_N$ avec $U_N = \frac{q^{-N} - q^{+N}}{q^{-1} - q^{+1}}$.
 $U_0 = 0$, $U_1 = 1$, $U_2 = q^- + q^+, \dots$

11/22

La nullité de Jones

Définition (nullité de Jones)

On pose $\text{null } V(L) := \max \{ \nu \in \mathbb{N} \mid V(L) = (q^+ + q^-)^\nu \cdot \tilde{V}(L) \}$

Remarque

Puisque $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$ on a $V(\bigcirc^n) = n - 1$.
Puisque $V(L)|_{(q \rightarrow 1)} = 2^{n-1}$ on a $0 \leq \text{null } V(L) \leq n - 1$.

Théorème (nullité de Jones des entrelacs rubans)

Si L est un entrelacs ruban à n composantes alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$. Ainsi $\text{null } V(L) = n - 1$.

Question

Pour tout entrelacs ruban L on a donc $\text{null}(L) = \text{null } V(L)$.
Pour quels autres entrelacs est-ce vrai ? pour tous ?

12/22

Le déterminant de Jones

Définition (déterminant de Jones)

Soit $V(L) = (q^+ + q^-)^{\nu} \cdot \tilde{V}(L)$ avec $\nu = \text{null } V(L)$.

On pose $\det V(L) := \tilde{V}(L)|_{(q \rightarrow i)}$.

Soit $L = K_1 \cup \dots \cup K_n \subset \mathbb{R}^3$ un entrelacs à n composantes bordant une surface ruban $S = S_1 \cup \dots \cup S_n \subset \mathbb{R}^3$.

Proposition

Le déterminant de Jones $\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]|_{(q \rightarrow i)}$ est invariant par changement de croisements $\begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{c} \text{+} \\ \text{+} \end{array}$.

Corollaire

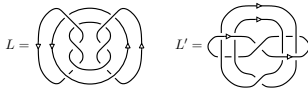
Si $S_i \cap S_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ alors $\det V(L) = \det(K_1) \cdots \det(K_n)$ et ainsi $\det V(L)$ est un carré dans \mathbb{Z} .

13/22

Multiplicativité du déterminant modulo 32

Théorème

On a $\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n) \pmod{32}$ et en particulier $\det V(L) \equiv 1 \pmod{8}$.



Exemple (modulo 32 est optimal)

$\det V(L) = -23$ tandis que $\det(K_1) = 1$ et $\det(K_2) = 9$.

Exemple (l'hypothèse $\text{null } V(L') = n - 1$ ne suffit pas)

$\det V(L') = -15$ tandis que $\det(K'_1) = \det(K'_2) = 1$.

14/22

Diagrammes rubans

Définition (diagramme ruban)

Un *diagramme ruban* est un diagramme planaire formé des pièces élémentaires suivantes :



FIG.: Pièces élémentaires d'un diagramme ruban

Proposition

Toute surface immergée $S \subset \mathbb{R}^3$ n'ayant que des singularités de type ruban se représente par un diagramme ruban.

15/22

Exemple d'un diagramme ruban

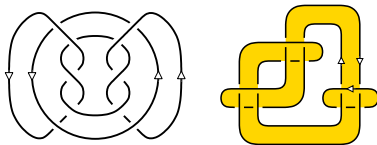


FIG.: L'entrelacs L_{10n36} et une surface ruban

16/22

Crochet de Kauffman

Définition (crochet de Kauffman)

On définit $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm}]$, noté $D \mapsto \langle D \rangle$, par

$$\begin{aligned} \langle \text{X} \rangle &= A \langle \text{ } \rangle + A^{-1} \langle \text{ } \rangle, \\ \langle D \sqcup \bigcirc \rangle &= \langle D \rangle \cdot (-A^{+2} - A^{-2}), \\ \langle \bigcirc \rangle &= 1. \end{aligned}$$

Théorème (Kauffman 1987)

On a $V(L)|_{(q=-A^{-2})} = \langle D \rangle \cdot (-A^{-3})^{\text{writhe}(D)}$.

17/22

La preuve par récurrence

Théorème

Soit $L \subset \mathbb{R}^3$ un entrelacs qui borde une surface immergée $S \subset \mathbb{R}^3$ consistant en n disques et éventuellement des anneaux ou des rubans de Möbius. Alors $V(L)$ est divisible par $V(\bigcirc^n)$.

Démonstration.



On procède par récurrence sur le nombre $r(S)$ des singularités.

Si $r(S) = 0$ alors $L = L_0 \sqcup \bigcirc^n$, donc $V(\bigcirc^n) \mid V(L)$.

Si $r(S) \geq 1$ on considère le nombre $r_0(S)$

des singularités qui percent des disques.

Si $r_0(S) = 0$ alors $L = L_0 \sqcup \bigcirc^n$, donc $V(\bigcirc^n) \mid V(L)$.

Si $r_0(S) \geq 1$ alors on résout une telle singularité :  \rightarrow .

Le lemme suivant conclut la récurrence. \square

18/22

Résolution d'une singularité

La récurrence s'achève par le lemme suivant :

Lemme

Pour le crochet de Kauffman on trouve

$$\begin{aligned} \langle \text{X} \rangle - \langle \text{ } \rangle &= (A^{+2} - A^{-2}) \left(\langle \text{ } \rangle - \langle \text{ } \rangle \right) \\ &+ (A^{+4} - 1) \left(\langle \text{ } \rangle - \langle \text{ } \rangle \right) + (A^{-4} - 1) \left(\langle \text{ } \rangle - \langle \text{ } \rangle \right). \end{aligned}$$

Supposons que la surface à gauche consiste en n disques et éventuellement des anneaux ou des rubans de Möbius.

Alors les surfaces à droite ont $n + 1$ ou n disques et éventuellement des anneaux ou des rubans de Möbius.

19/22

Preuve du lemme : comptage des disques

Lemme (rappel)

$$\begin{aligned} \langle \text{X} \rangle - \langle \text{ } \rangle &= (A^{+2} - A^{-2}) \left(\langle \text{ } \rangle - \langle \text{ } \rangle \right) \\ &+ (A^{+4} - 1) \left(\langle \text{ } \rangle - \langle \text{ } \rangle \right) + (A^{-4} - 1) \left(\langle \text{ } \rangle - \langle \text{ } \rangle \right) \end{aligned}$$

1er cas : deux disques intersectent.



2nd cas : un disque se perce lui-même.



20/22

Preuve du lemme : comptage des disques

Lemme (rappel)

$$\langle \text{Cross} \rangle - \langle \text{Cross} \rangle = (A^{+2} - A^{-2}) \left(\langle \text{Cross} \rangle - \langle \text{Cross} \rangle \right) \\ + (A^{+4} - 1) \left(\langle \text{Cross} \rangle - \langle \text{Cross} \rangle \right) + (A^{-4} - 1) \left(\langle \text{Cross} \rangle - \langle \text{Cross} \rangle \right)$$

3e cas : un anneau perce un disque de manière inessentielle.



4e cas : un anneau perce un disque de manière essentielle.



21/22

Questions ouvertes

- 1 On a $\text{null}(L) = \text{null } V(L)$ pour tout entrelacs ruban L .
Est-ce valable pour tout L ? bordant ? bord ?
- 2 Si L est un entrelacs ruban, on a $V_N(L) = U_N^{n-1} \cdot \tilde{V}_N(L)$ pour $N = 0$ (Alexander-Conway) et pour $N = 2$ (Jones).
Est-ce valable pour tout N (HOMFLYPT) ?
Quel rapport avec la signature & nullité de Tristram ?
- 3 Que se passe-t-il pour l'homologie de Khovanov ?
Notation : $L \mapsto Kh(L) = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}} Kh_{i,j}(L)$,
 $L \mapsto P(t, q) = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} t^i q^j \dim_{\mathbb{Q}}(Kh_{i,j}(L) \otimes \mathbb{Q})$,
 $P(-1, q) = V(L) \cdot (q^+ + q^-)$.
A-t-on $Kh(L) \cong Kh(\bigcirc^n) \otimes \tilde{K}h(L)$?
Ou au moins $P(L) = (q^+ + q^-)^n \cdot \tilde{P}(L)$?

Je vous remercie de votre attention.

22/22