COURBES RATIONNELLES ET APPLICATIONS À QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE COMPLEXE

par

Stéphane DRUEL

Mémoire présenté pour obtenir le
Diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches

Soutenu le 26 septembre 2008 devant le jury composé de

Arnaud BEAUVILLE
Olivier DEBARRE
Jean-Pierre DEMAILLY
Philippe EYSSIDIEUX
Laurent MANIVEL
Christoph SORGER

au vu des rapports de Stefan KEBEKUS, Ngaiming MOK et Christoph SORGER.

Je remercie très sincèrement Stefan KEBEKUS, Ngaiming MOK et Christoph SORGER qui ont accepté de rapporter sur mes travaux, ainsi qu'Arnaud BEAUVILLE, Olivier DEBARRE, Jean-Pierre DEMAILLY, Philippe EYSSIDIEUX et Laurent MANIVEL qui ont accepté de faire partie du jury.

Je veux aussi exprimer ma reconnaissance à toutes celles et tous ceux avec qui j'ai eu le plaisir de travailler : Carolina ARAUJO, Laurent BONAVERO, Cinzia CASAGRANDE, Olivier DEBARRE et Sándor J. KOVÁCS.

Je veux également remercier toutes celles et tous ceux qui ont été à l'origine des nombreuses activités scientifiques qui ont rythmé mon activité de recherche depuis mon arrivée à l'Institut Fourier ; je pense en particulier aux membres du thème Algèbre et Géométries de l'Institut Fourier mais également aux membres du projet 3AGC financé par l'ANR.

Je remercie tous les collègues de l'Institut Fourier qui font de cet endroit un lieu très agréable ainsi que tous les personnels pour leur disponibilité et leur efficacité.

Enfin, je remercie Laurent BONAVERO à qui je dois beaucoup.

À Solène et Cléa

Table des matières

PUBLICATIONS

Articles originaux non présentés

[**Dru98**] S. Druel – « Structures de contact sur les variétés algébriques de dimension 5 », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **327** (1998), no. 4, p. 365–368.

[**Dru99a**] ———, « Structures de contact sur les variétés toriques », *Math. Ann.* **313** (1999), no. 3, p. 429–435.

[**Dru99b**] ———, « Structures de Poisson sur les variétés algébriques de dimension 3 », *Bull. Soc. Math. France* **127** (1999), no. 2, p. 229–253.

[**Dru00a**] ———, « Espace des modules des faisceaux de rang 2 semi-stables de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ et $c_3 = 0$ sur la cubique de $\mathbf{P}^4$ », *Internat. Math. Res. Notices* (2000), no. 19, p. 985–1004.

[**Dru00b**] ———, « Variétés algébriques dont le fibré tangent est totalement décomposé », *J. Reine Angew. Math.* **522** (2000), p. 161–171.

Articles originaux présentés

[**BCDD03**] L. Bonavero, C. Casagrande, O. Debarre & S. Druel – « Sur une conjecture de Mukai », *Comment. Math. Helv.* **78** (2003), no. 3, p. 601–626.

[**Dru04a**] S. Druel – « Caractérisation de l'espace projectif », *Manuscripta Math.* **115** (2004), no. 1, p. 19–30.

[**Dru04b**] ———, « Singularités symplectiques », *J. Algebraic Geom.* **13** (2004), no. 3, p. 427–439.

[**Dru06**] ———, « Classes de Chern des variétés uniréglées », *Math. Ann.* **335** (2006), no. 4, p. 917–935.

[**BCD07**] L. Bonavero, C. Casagrande & S. Druel – « On covering and quasi-unsplit families of curves », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **9** (2007), no. 1, p. 45–57.

[**ADK08**] C. Araujo, S. Druel & S. J. Kovács – « Cohomological characterizations of projective spaces and hyperquadrics », *Invent. Math.* (2008), à paraître.

Article d'exposition

[**Dru08**] S. Druel – « Existence de modèles minimaux pour les variétés de type général (d'après Birkar, Cascini, Hacon et McKernan) », *Astérisque* (2008), Exposé 982, Séminaire Bourbaki. Vol. 2007/2008, à paraître.

INTRODUCTION

Toutes nos variétés sont algébriques et définies sur le corps des nombres complexes. Une courbe irréductible est dite *rationnelle* si sa normalisée est isomorphe à la droite projective. Ces courbes sont le fil conducteur de ce texte de synthèse : *on étudie les propriétés géométriques d'une variété via les courbes (rationnelles) qu'elle contient.*

Soit X une variété projective lisse et connexe. Un des premiers objets intrinsèquement attachés à X est son *fibré canonique* ω_X, défini comme le déterminant de son fibré cotangent. On désigne par K_X tout diviseur sur X vérifiant $\mathcal{O}_X(K_X) \simeq \omega_X$ (il est donc défini à équivalence linéaire près). Pour tout entier $m \geqslant 0$, le m-ième *plurigenre* est la dimension de l'espace vectoriel des sections globales du fibré en droites $\omega_X^{\otimes m}$, on le note $p_m(X)$. On définit un invariant numérique de X, appelé sa *dimension de Kodaira*, en posant $\kappa(X) = \limsup\limits_{m \to +\infty} \dfrac{\log p_m(X)}{\log m}$. On a $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, \ldots, \dim(X)\}$; on dit que X est *de type général* si $\kappa(X) = \dim(X)$. Par exemple, si X est une hypersurface de degré d dans $\mathbf{P}^n$ $(n \geqslant 2)$ alors $\kappa(X) = -\infty$ si $d \leqslant n$, $\kappa(X) = 0$ si $d = n+1$ et $\kappa(X) = \dim(X)$ si $d \geqslant n+2$.

On dit que X est une *variété de Fano* si son *fibré anticanonique* $\omega_X^{\otimes -1}$ est ample ; on a alors $\kappa(X) = -\infty$. Une hypersurface lisse et connexe de degré d dans $\mathbf{P}^n$ $(n \geqslant 2)$ est de Fano si et seulement si $d \leqslant n$.

On note $\mathrm{NS}(X)$ le groupe de Néron-Severi de X, c'est-à-dire le groupe des diviseurs de Weil sur X modulo l'équivalence algébrique ; c'est un groupe abélien de type fini. La dimension $\rho(X)$ de l'espace vectoriel réel $\mathrm{NS(X)} \otimes \mathbf{R}$ est appelée le *nombre de Picard de* X.

Les courbes sur une variété sont apparues ces vingt dernières années comme un outil très efficace pour étudier les propriétés géométriques de la variété. Ce point de vue permet par exemple à Mori ([**Mor79**]) de montrer que toute variété projective lisse dont le fibré tangent est ample est isomorphe à un espace projectif ; Mori montre au passage dans *loc. cit.* que toute variété de Fano X est *uniréglée*, c'est-à-dire, que par tout point général x de X (1) passe une courbe rationnelle. L'un des résultats les plus jolis obtenus par ces méthodes est le fait qu'il n'y ait qu'un nombre fini de types de déformation de variétés de Fano de dimension donnée, autrement dit, qu'étant donné un entier $n \geqslant 1$, il existe une variété quasi-projective T et un morphisme propre et lisse $\mathcal{X} \to T$ tels que toute variété de Fano de dimension n soit isomorphe à l'une des variétés $\mathcal{X}_t$ pour un point $t \in T$ convenable ([**KMM92**], voir également [**Cam91**] et [**Nad91**]). Le point clef ici est de montrer que toute variété de Fano est en fait *rationnellement connexe*, c'est-à-dire, que par deux points quelconques passe une courbe rationnelle.

Le programme des modèles minimaux ou MMP (« Minimal Model Program » en anglais) illustre également ce point de vue et motive par ailleurs l'étude des variétés uniréglées : ce sont conjecturalement les variétés X vérifiant $\kappa(X) = -\infty$ (voir par exemple [**Rei83**]). Commençons par examiner le cas des surfaces, bien compris des géomètres italiens depuis le début du siècle dernier (2). Soit X une surface projective lisse et connexe. Il existe une surface projective lisse Y et un morphisme birationnel $X \to Y$ tels que

- ou bien le diviseur canonique K_Y soit numériquement effectif (3),

(1) On dit qu'une propriété est vraie en un point général d'une variété si l'ensemble des points où elle est vérifée contient un ouvert dense.

(2) Le point de vue adopté ici, généralement attribué à Reid, diffère de celui des géomètres italiens.

(3) On dit qu'un diviseur D sur Y est numériquement effectif si $D \cdot C \geqslant 0$ pour toute courbe $C \subset Y$.

- ou bien Y soit une surface géométriquement réglée,
- ou bien $Y \simeq \mathbf{P}^2$.

Ce résultat se démontre de la façon suivante. Si X ne satisfait aucune des trois alternatives, on montre qu'il existe une courbe rationnelle lisse $C \subset X$ d'auto-intersection -1. D'après le théorème de Castelnuovo, la courbe C peut être contractée, autrement dit, il existe une surface projective lisse X_1 et un morphisme $c_1 : X \to X_1$ tels que $\dim(c_1(C)) = 0$ et tels que la restriction de c_1 à $X \setminus C$ induise un isomorphisme de $X \setminus C$ sur $X_1 \setminus c_1(C)$. On remplace X par X_1 et on recommence. Le processus s'arrête puisqu'à chaque étape, le rang du groupe de Néron-Severi de la surface diminue strictement.

Le MMP est une généralisation (en partie conjecturale) à la dimension $\geqslant 3$ du résultat précédent, proposée par Reid ([**Rei83**]) à la suite des travaux de Mori ([**Mor82**]).

Conjecture. — *Soit X une variété projective lisse et connexe.*

1. *Si K_X est pseudo-effectif* [4] *alors il existe une variété projective Y birationnellement équivalente à X, peu singulière* [5]*, telle que K_Y soit numériquement effectif.*
2. *Si K_X n'est pas pseudo-effectif alors il existe une variété projective Y birationnellement équivalente à X, peu singulière, et un morphisme projectif $c : Y \to Z$ tels que* $\dim(Z) < \dim(Y)$ *et $-K_Y$ soit ample relativement à Z.*

Le MMP prédit également comment modifier successivement X pour obtenir un modèle birationnel Y de X vérifiant l'une des deux alternatives ci-dessus ; il ne suffit plus, comme c'était le cas pour les surfaces, de contracter des diviseurs, il faut introduire de nouvelles transformations birationnelles, appelées *flips*, dont l'existence était encore conjecturale jusqu'aux travaux récents de Birkar, Cascini, Hacon et M$^{\text{c}}$Kernan ([**HM05**] et [**BCHM06**]). Le point important pour nous est que ces transformations birationnelles sont liées à la présence de courbes rationnelles très particulières. Nous y reviendrons un peu plus en detail au paragraphe 6.

La conjecture ci-dessus a été démontrée en dimension 3 et 4 entre 1988 et 2003 par Kawamata, Kollár, Mori, Reid et Shokurov pour les principales contributions. Les résultats obtenus par Birkar, Cascini, Hacon et M$^{\text{c}}$Kernan sont les suivants [6].

Théorème **([HM05] et [BCHM06])**. — *Soit X une variété projective lisse et connexe.*

1. *Si X est de type général alors il existe une variété projective Y birationnellement équivalente à X, peu singulière, telle que K_Y soit numériquement effectif.*
2. *Si K_X n'est pas pseudo-effectif alors il existe une variété projective Y birationnellement équivalente à X, peu singulière, et un morphisme projectif $c : Y \to Z$ tels que* $\dim(Z) < \dim(Y)$ *et $-K_Y$ soit ample relativement à Z.*

On retrouve ainsi un résultat de Boucksom, Demailly, Păun et Peternell : X est uniréglée si et seulement si K_X n'est pas pseudo-effectif ([**BDPP04**]).

Le mémoire est organisé de la façon suivante. On rassemble dans la première partie quelques résultats (bien connus pour beaucoup d'entre eux) sur les courbes rationnelles

(4) On dit qu'un diviseur D sur X est pseudo-effectif si sa classe dans $\mathrm{NS(X)} \otimes \mathbf{R}$ est limite de classes de diviseurs effectifs.

(5) Reid a donné dans [**Rei87**] un exemple de variété projective lisse X de dimension 3 et de type général telle que pour toute variété projective lisse Y birationnellement équivalente à X, K_Y ne soit pas numériquement effectif.

(6) J'ai rédigé un texte sur ces résultats pour le Séminaire Bourbaki ([**Dru08**]).

et leurs espaces de modules ainsi que sur les relations d'équivalence et « quotients » associés. L'étude des courbes tracées sur une variété permet dans certains cas de déterminer complètement la géométrie de la variété : c'est le cas pour tous les résultats exposés dans la deuxième partie de ce texte. On présente des résultats généraux sur les variétés uniréglées d'une part et sur les variétés de Fano d'autre part dans la troisième et dernière partie de ce mémoire. On donne, lorsque c'est possible, les grandes lignes des démonstrations. Enfin, on propose tout au long de ce texte quelques pistes à explorer dans le futur.

PARTIE I
QUELQUES RAPPELS SUR LES COURBES RATIONNELLES ET LEURS ESPACES DE MODULES

1. Familles presque complètes de courbes rationnelles et variétés des tangentes associées

Il y a de nombreux critères garantissant l'existence de courbes rationnelles sur une variété X. L'un de ces critères, dont la démonstration est superbe, est le suivant.

Théorème 1.1 **([Mor82]).** — *Soit X une variété projective lisse et connexe et soit $C \subset X$ une courbe irréductible. Si $K_X \cdot C < 0$ alors par tout point de C passe une courbe rationnelle.*

L'existence de courbes rationnelles peut également se déduire de certaines propriétés de positivité du fibré tangent T_X. Le résultat le plus important dans cette direction est la caractérisation des variétés uniréglées par Miyaoka.

Théorème 1.2 **([Miy87, Theorem 8.5]).** — *Soit X une variété projective lisse et connexe, de dimension $n \geqslant 1$ et soit A un diviseur ample sur X. Si X n'est pas uniréglée alors il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que le fibré vectoriel $\Omega^1_{X|C}$ soit numériquement effectif pour toute courbe C intersection complète d'éléments généraux du système linéaire $|kA|$.*

Soient k et d deux entiers positifs ou nuls et $\mathrm{Chow}_{k,d}(X)$ la variété projective paramétrant les cycles effectifs de dimension k [(7)] et degré d [(8)] sur X. On pose $\mathrm{Chow}(X) := \sqcup_{k\geqslant 0, d\geqslant 0}\mathrm{Chow}_{k,d}(X)$; $\mathrm{Chow}(X)$ est appelée la « variété » de Chow de X. Soient enfin $\mathrm{RatCurves}(X)$ l'ouvert de $\mathrm{Chow}(X)$ dont les points correspondent aux 1-cycles irréductibles et réduits de support une courbe rationnelle et $\mathrm{RatCurves}^n(X)$ sa normalisation.

Définition 1.3. — Une *famille de courbes rationnelles sur X* est une composante irréductible H de $\mathrm{RatCurves}^n(X)$. Elle est dite *dominante* si par un point général de X passe l'une des courbes paramétrées par H [(9)].

Notations 1.4. — Soient H une famille de courbes rationnelles sur X et $U \subset H \times X$ la famille universelle. On note π et e

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{e} & X \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \\ H & & \end{array}$$

les restrictions à U des projections de $H \times X$ sur H et X respectivement.

Les courbes paramétrées par les familles que nous allons considérer maintenant ont de bonnes propriétés comme nous le verrons ensuite.

Définition 1.5. — Soit H une famille de courbes rationnelles sur X.

- Elle est dite *complète* si H est une variété compacte.

(7) C'est-à-dire les combinaisons linéaires formelles à coefficients entiers positifs ou nuls de sous-variétés irréductibles de X de dimension k.
(8) La construction dépend bien sûr du choix d'une polarisation sur X.
(9) On remarque qu'une telle famille existe si et seulement si X est uniréglée.

- Elle est dite *presque complète* (« generically unsplit » en anglais) si pour $x \in e(U)$ général, la variété
$$H_x := \pi(e^{-1}(x)) = \{[\ell] \in H \mid x \in \ell\} \text{ }^{(10)}$$
est compacte.

Notations 1.6. — On pose $U_x := \pi^{-1}(H_x)$ et on note π_x et e_x les restrictions à U_x de π et e respectivement.

Exemple 1.7. — L'ensemble des droites de $\mathbf{P}^n$ est une famille dominante et complète de courbes rationnelles sur $\mathbf{P}^n$ isomorphe à la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension 2 d'un espace vectoriel de dimension $n+1$.

Exemple 1.8. — Soit $X \subset \mathbf{P}^3$ une surface cubique lisse ; X contient 27 droites. L'ensemble des coniques de $\mathbf{P}^3$ contenues dans X est une famille dominante de courbes rationnelles, elle est presque complète mais elle n'est pas complète.

Exemple 1.9. — La famille des coniques lisses du plan projectif n'est pas presque complète. En effet, soient $C \subset \mathbf{P}^2$ est conique lisse et x un point de C. On peut trouver une famille de coniques $(C_t)_{t\in\mathbf{A}^1}$ telle que $C_0 = C$, C_1 soit une conique réductible et telle que $x \in C_t$ pour tout $t \in \mathbf{A}^1$.

Remarque 1.10. — Il n'existe pas en général de famille dominante et complète de courbes rationnelles sur une variété uniréglée quelconque ; c'est le cas par exemple pour les surfaces cubiques.

Notation 1.11. — Soient L un fibré en droites ample sur X et H une famille de courbes rationnelles. Le nombre d'intersection $L \cdot \ell$ ne dépend pas du choix de $[\ell] \in H$ et sera noté $L \cdot H$.

Remarque 1.12. — La « limite » dans $\mathrm{Chow}(X)$ de 1-cycles rationnels [(11)] est encore un 1-cycle rationnel. On en déduit immédiatement qu'une famille de courbes rationnelles de degré minimal relativement à une polarisation donnée est complète et qu'une famille dominante de courbes rationnelles de degré minimal relativement à une polarisation donnée (parmi les familles dominantes de courbes rationnelles sur X) est dominante et presque complète (voir [**Kol96**, Theorem IV.2.4]) ; c'est le cas dans l'exemple 1.8.

La proposition suivante rassemble quelques propriétés élémentaires de la variété $\mathrm{RatCurves}^n(X)$.

Proposition 1.13 **(**[**Kol96**, II Proposition 3.10, Corollary IV.2.9]**)**
Soient X une variété projective lisse et connexe et x un point général de X. Soient H une famille dominante de courbes rationnelles sur X, $[\ell] \in H_x$ et $\tilde{\ell} \simeq \mathbf{P}^1$ la normalisée de ℓ.

1. *La variété H est régulière en $[\ell]$ de dimension $-K_X \cdot \ell + \dim(X) - 3$.*
2. *La normalisée $\tilde{H}_x$ de H_x est régulière de dimension $-K_X \cdot \ell - 2$; en particulier $-K_X \cdot \ell - 2 \geqslant 0$.*

---

(10) Ici $[\ell]$ est un point de $\mathrm{RatCurves}^n(X)$ et $\ell \subset X$ est la courbe rationnelle correspondante (voir la remarque 1.14).

(11) On dit qu'un 1-cycle est rationnel si toutes les composantes irréductibles de son support sont des courbes rationnelles.

3. *Si H est presque complète et si $[\ell] \in H_x$ est général alors*

$$T_{X|\tilde{\ell}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)^{\oplus d} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus(\dim(X)-d-1)} \text{ (12)}$$

où $d := -K_X \cdot \ell - 2$.

Remarque 1.14. — Si H est une famille dominante de courbes rationnelles sur X et si x est un point général de X alors l'ensemble des points de H_x est en correspondance bijective avec l'ensemble des courbes rationnelles correspondantes (voir [**KK04**, Lemma 5.2]). Il n'y a par ailleurs pas en général de correspondance bijective entre l'ensemble des points de $\tilde{H}_x$ et l'ensemble des courbes rationnelles correspondantes. Si $[\ell] \in H_x$ alors il y a autant de points dans $\tilde{H}_x$ au-dessus de $[\ell]$ qu'il y a de points dans $\tilde{\ell}$ au-dessus de x (voir [**Kol96**, Theorem II.2.6]) ; autrement dit, un point de $\tilde{H}_x$ est la donnée de $[\ell] \in H_x$ et d'un point $\tilde{x} \in \tilde{\ell}$ au dessus de x, où $\tilde{\ell}$ est la normalisée de ℓ.

Le résultat suivant est plus difficile.

Théorème 1.15 **([Keb02b])**. — *Soient X une variété projective lisse, H une famille dominante et presque complète de courbes rationnelles sur X et x un point général de X. Alors les courbes paramétrées par H_x sont toutes immergées en x (13), le fermé de H_x dont les points correspondent à des courbes singulières est de dimension au plus 1 et celui dont les points correspondent à des courbes singulières en x est fini.*

Question 1.16 **(Hwang)**. — Soient X une variété projective lisse, H une famille dominante et presque complète de courbes rationnelles sur X et x un point général de X. Posons $d := -K_X \cdot \ell - 2$. A-t-on, pour tout $[\ell] \in H_x$ (pas seulement général)

$$T_{X|\tilde{\ell}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)^{\oplus d} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus(\dim(X)-d-1)},$$

où $\tilde{\ell} \simeq \mathbf{P}^1$ désigne la normalisée de ℓ ?

Une réponse positive à cette question permetrait de montrer, sous les mêmes hypothèses, que pour *tout* $[\ell] \in H_x$, la courbe correspondante ℓ est régulière en x et que le fermé de H_x dont les points correspondent à des courbes singulières est fini.

Fixons maintenant une famille dominante et presque complète H de courbes rationnelles sur X et x un point général de X. Soit τ_x l'application rationnelle

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_x & \dashrightarrow & \mathbf{P}(T_{X,x}^\vee) \\ [\ell] & \longmapsto & \mathbf{P}(T_{\ell,x}^\vee) \end{array}$$

et $C_x := \tau_x(\tilde{H}_x) \subset \mathbf{P}(T_{X,x}^\vee)$ (14) ; τ_x est en fait un morphisme (voir [**Keb02b**]).

Définition 1.17. — La variété C_x est appelée la variété des tangentes en x.

La variété des tangentes $C_x \subset \mathbf{P}(T_{X,x}^\vee)$ et son plongement ont été considérés par Mori ([**Mor79**]) pour démontrer la conjecture d'Hartshorne puis par Mok ([**Mok88**]) pour étudier la conjecture de Frankel généralisée.

(12) Ici $T_{X|\tilde{\ell}}$ désigne le faisceau n^*T_X où $n : \tilde{\ell} \to \ell \subset X$ est le morphisme naturel.

(13) Une courbe $C \subset X$ est dite *immergée* en un point x de X si l'application tangente $dn : T_{\tilde{C}} \to n^*T_X$ est injective en tout point $\tilde{x}$ de $\tilde{C}$ au-dessus de x, où $\tilde{C}$ désigne la normalisée de C et $n : \tilde{C} \to C \subset X$ le morphisme induit.

(14) Ici $\mathbf{P}(T_{X,x}^\vee)$ désigne l'ensemble des hyperplans de l'espace vectoriel $T_{X,x}^\vee$.

Exemple 1.18. — Si $X = \mathbf{P}^n$ et H est la famille des droites de $\mathbf{P}^n$ alors $C_x = \mathbf{P}(T_{X,x}^\vee)$ pour tout $x \in X$.

Exemple 1.19. — Soient $X \subset \mathbf{P}^{n+1}$ ($n \geqslant 3$) une hypersurface lisse de degré d, $2 \leqslant d \leqslant n$, et H la famille (complète) des droites de $\mathbf{P}^{n+1}$ contenues dans X. La variété des tangentes $C_x \subset \mathbf{P}(T_{X,x}^\vee)$ en un point général x de X est intersection complète lisse de $d-1$ hypersurfaces de degrés respectifs $2, \ldots, d$ (voir par exemple [**Hwa01**, Example 1.4.2]).

L'idée générale est que la variété plongée $C_x \subset \mathbf{P}(T_{X,x}^\vee)$ contient beaucoup des propriétés géométriques de X. Commençons par énoncer quelques propriétés de ces variétés. Le premier résultat n'est pas difficile. Soit $([\ell], \tilde{x})$ un point général de $\tilde{H}_x$ (voir la remarque 1.14), $\tilde{\ell} \simeq \mathbf{P}^1$ la normalisée de ℓ et, avec les notations de la proposition 1.13, soit

$$T_{X,\tilde{\ell}}^+ \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)^{\oplus d}$$

le sous-fibré ample maximal de $T_{X|\tilde{\ell}}$. Soit enfin $T_{X,\ell,x}^+$ la fibre de $T_{X,\tilde{\ell}}^+$ en $\tilde{x}$ vue comme sous-espace vectoriel de $T_{X,x}$.

Lemme 1.20 **([AW01**, Lemma 2.1] **et** [**Hwa01**, Proposition 2.3]**)**
Soient X une variété projective lisse et connexe, H une famille dominante et presque complète de courbes rationnelles sur X et x un point général de X. L'espace tangent à C_x en $\tau_x([\ell])$ est le sous-espace linéaire $\mathbf{P}((T_{X,\ell,x}^+)^\vee)$ de $\mathbf{P}(T_{X,x}^\vee)$.

Le second résultat est plus difficile et exprime de façon un peu plus précise qu'une courbe rationnelle correspondant à un point général de H_x est déterminée par sa tangente au point x.

Théorème 1.21. — *Sous les hypothèses du lemme précédent, l'application rationnelle τ_x est un morphisme fini* ([**Keb02b**]) *et birationnel* ([**HM04**]).

Les propriétés géométriques des variétés de tangentes $C_x \subset \mathbf{P}(T_{X,x}^\vee)$ (pour $x \in X$ général) déterminent dans certains cas la géométrie de X ; c'est le cas pour les deux résultats qui suivent.

Théorème 1.22 **([CMSB02]** **et** **[Keb02a]).** — *Soient X une variété projective lisse et connexe, H une famille dominante et presque complète de courbes rationnelles sur X. Si $C_x = \mathbf{P}(T_{X,x}^\vee)$ pour x général dans X alors X est isomorphe à un espace projectif $\mathbf{P}$ et H s'identifie à la famille des droites de $\mathbf{P}$.*

Le premier de nos résultats est une généralisation du théorème précédent (il est en grande partie déjà contenu dans [**Ara06**]) ; sa démonstration illustre bien comment déduire des propriétés géométriques de X des propriétés de la variété des tangentes $C_x \subset \mathbf{P}(T_{X,x}^\vee)$ et inversement.

Théorème 1.23 **([ADK08**, Proposition 2.7]**).** — *Soient X une variété de Fano avec $\rho(X) = 1$, H une famille dominante et presque complète de courbes rationnelles sur X et E un sous-faisceau localement libre de T_X tel que, pour $[\ell] \in H$ général, le fibré vectoriel $E_{|\tilde{\ell}}$ soit ample, où $\tilde{\ell}$ désigne la normalisée de ℓ. Alors X est isomorphe à un espace projectif $\mathbf{P}$ et H s'identifie à la famille des droites de $\mathbf{P}$.*

Remarque 1.24. — L'hypothèse sur E est en particulier satisfaite lorsque E est un fibré vectoriel ample ou encore lorsque E est un fibré en droites grand.

Démonstration (esquisse). — Soient x un point général de X et C_x la variété des tangentes en x.

Étape 1. *C_x est un sous-espace linéaire de $\mathbf{P}(T_{X,x}^\vee)$.* Le fibré $T_{X|\tilde{\ell}}$ s'identifie au fibré

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)^{\oplus d} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus(\dim(X)-d-1)}$$

avec $d := -K_X \cdot \ell - 2 = \dim(C_x)$ (voir Proposition 1.13) et, puisque $E_{|\tilde{\ell}}$ est ample,

$$E_{|\tilde{\ell}} \subset T^+_{X,\tilde{\ell}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)^{\oplus d}.$$

En particulier, $\mathbf{P}(E_x^\vee) \subset T_{C_x,\tau_x([\ell])}$ pour tout $[\ell]$ général dans H_x et C_x est donc un cône de sommet $\mathbf{P}(E_x^\vee)$; la normalisée de C_x étant lisse par le théorème 1.21, C_x est finalement réunion de sous-espaces linéaires. Il reste encore à voir que C_x est irréductible, ce que nous ne ferons pas ici.

Étape 2. *Étude du feuilletage associé d'après* [**Ara06**]. Soit F le plus grand sous-faisceau de T_X dont la fibre en un point général x de X est le cône affine dans $T_{X,x}$ au-dessus de C_x. Soient X_0 l'ouvert de X où F est localement libre et F_0 la restriction de F à X_0. On montre que $F_0 \subset T_{X_0}$ est le feuilletage dont les feuilles générales sont les sous-variétés complètes $\cup_{[\ell]\in H_x}\ell$ pour x (général) dans X_0 puis que celles-ci sont isomorphes à des espaces projectifs de dimension $d+1$.

Étape 3. *Conclusion.* Il existe un ouvert dense $X_0 \subset X$ et un morphisme propre $X_0 \to Y_0$, où Y_0 est une variété quasi-projective, dont les fibres sont les feuilles du feuilletage. Supposons $\dim(Y_0) \geqslant 1$. Soit D_0 l'image inverse d'une hypersurface de Y_0 et D son adhérence dans X. Si $\ell \subset X_0$ est une courbe complète contractée dans Y_0 alors $D \cdot \ell = 0$, une contradiction puisque $\rho(X) = 1$. ☐

On termine ce paragraphe par quelques remarques. Les espaces de modules paramétrant les courbes rationnelles contenues dans une variété X ou plus exactement les morphismes de $\mathbf{P}^1$ vers X sont bien compris lorsque X est lisse mais le sont beaucoup moins lorsque X est singulière ; par exemple, si X est une variété (projective) lisse, $Z \subset X$ un fermé de codimension au moins 2 dans X et si H est une famille dominante de courbes rationnelles sur X alors, pour $[\ell]$ général dans H, la courbe ℓ est entièrement contenue dans $X \setminus Z$ (voir par exemple [**Kol96**, Proposition II.3.7]).

L'énoncé analogue lorsque X est singulière n'est pas vrai en toute généralité : si X est un cône de base une courbe elliptique, il n'existe pas de courbe rationnelle sur X contenue dans le lieu non singulier de X.

Question 1.25. — Soit X une variété normale uniréglée. Peut-on garantir, sous des hypothèses sur les singularités de X, l'existence d'une courbe rationnelle entièrement contenue dans le lieu non singulier de X ? Est-il possible de donner une borne sur le degré minimal d'une telle courbe ?

La question a déjà été abordée par plusieurs auteurs ; Keel et McKernan démontrent par exemple dans [**KM99**] que c'est effectivement le cas pour les surfaces de del Pezzo à singularités quotients et nombre de Picard 1.

Il serait également bien utile de pouvoir donner des conditions numériques assurant qu'une courbe rationnelle $\ell \subset X$ se déforme effectivement (lorsque X est lisse, il suffit d'avoir $-K_X \cdot \ell + \dim(X) - 3 \geqslant 1$).

Question 1.26. — Peut-on estimer la dimension de $\mathrm{RatCurves}^n(X)$ en $[\ell]$ (au moins si X n'est pas trop singulière) ?

La question semble difficile mais un résultat de cette nature permettrait par exemple de donner une nouvelle preuve du théorème du cône (voir paragraphe 6) lorsque la variété est singulière, par des arguments géométriques analogues à ceux utilisés par Mori dans le cas non singulier ([**Mor82**]).

2. Familles dominantes de courbes rationnelles et applications presque régulières associées

Une construction analogue à celle que nous allons présenter ici a été utilisée dans [**Cam92**] et [**KMM92**] pour montrer que les variétés de Fano sont rationnellement connexes.

Définition 2.1. — Soient X et Q des variétés projectives et quasi-projectives respectivement et $q : X \dashrightarrow Q$ une application rationnelle. On dit que q est presque régulière s'il existe des ouverts denses X_0 et Q_0 de X et Q respectivement tels que la restriction de q à X_0 induise un morphisme propre et surjectif $q_0 : X_0 \to Q_0$; de façon équivalente, si le lieu d'indétermination de q ne domine pas Q.

Notations 2.2. — Soient H une famille dominante de courbes rationnelles sur X, $\bar{H}$ son adhérence dans $\mathrm{Chow}(X)$ et $\bar{U} \subset \bar{H} \times X$ le cycle universel. On note $\bar{\pi}$ et $\bar{e}$

$$\begin{tikzcd} \bar{U} \arrow[r, "\bar{e}"] \arrow[d, "\bar{\pi}"'] & X \\ \bar{H} & \end{tikzcd}$$

les restrictions à $\bar{U}$ des projections sur $\bar{H}$ et X respectivement.

Définition 2.3. — Les points x et x' de X sont dits $\bar{H}$-équivalents s'il existe un entier $k \geqslant 1$ et $[C_1], \dots, [C_k] \in \bar{H}$ tels que $\mathrm{Supp}(C_1) \cup \cdots \cup \mathrm{Supp}(C_k)$ soit connexe et contienne x et x', où $\mathrm{Supp}(C_i)$ désigne le support du cycle C_i.

Les classes d'équivalence pour cette relation d'équivalence sont *a priori* réunion au plus dénombrable de fermés. Si l'une d'elles n'est pas fermée, il n'existe pas de structure de variété algébrique sur l'ensemble des classes d'équivalence faisant de l'application naturelle de X sur cet ensemble un morphisme de variétés algébriques, autrement dit, le *quotient géométrique* n'existe pas (voir également le paragraphe 6). On peut toutefois montrer que la classe d'équivalence d'un point général de X est fermée, c'est l'objet du résultat suivant.

Théorème 2.4 **([Cam92]).** — *On suppose la variété X normale. Il existe une variété quasi-projective Q et une application rationnelle presque régulière $q : X \dashrightarrow Q$ dont les fibres générales sont des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence introduite ci-dessus ; $q : X \dashrightarrow Q$ est unique à équivalence birationnelle près et est appelé le quotient $\bar{H}$-rc de X.*

Le résultat suivant est un critère assurant que la fibration ci-dessus n'est pas triviale.

Proposition 2.5 **([AW01**, Proposition 1.1**]).** — *Soient X une variété projective lisse et connexe, H une famille complète de courbes rationnelles sur X et $q : X \dashrightarrow Q$ le quotient $\bar{H}$-rc de X. Alors* $\dim(Q) = 0$ *si et seulement si* $\rho(X) = 1$.

Si le quotient géométrique existe alors on peut trouver une variété (projective) Q et une application rationnelle $q : X \dashrightarrow Q$ définie en codimension 1 dans X telles que $q : X \dashrightarrow Q$ soit le quotient $\bar{H}$-rc de X ; nous montrons que c'est toujours le cas si H est supposée complète. Le résultat est implicite dans [**BCD07**], il est énoncé et précisé dans [**ADK08**].

Théorème 2.6 ([**ADK08**, Lemma 2.2]). — *Soient X une variété projective lisse et connexe et H une famille dominante et complète de courbes rationnelles sur X. Alors il existe un ouvert X_0 de X dont le complémentaire est de codimension $\geqslant 2$, une variété quasi-projective Q_0 et un morphisme propre, surjectif et équidimensionnel $q_0 : X_0 \to Q_0$ tels que l'application rationnelle induite $q : X \dashrightarrow Q_0$ soit le quotient $\bar{H}$-rc de X. On peut également supposer les fibres de q_0 irréductibles et réduites.*

La démonstration de ce résultat sera esquissée au paragraphe 6.

PARTIE II
SINGULARITÉS SYMPLECTIQUES ET CARACTÉRISATIONS DES ESPACES PROJECTIFS

3. Singularités symplectiques

Beauville introduit dans [**Bea00**] une classe de singularités qu'il appelle *singularités symplectiques*. Leur définition est en partie motivée par le théorème de décomposition suivant (voir [**Bea83**, Théorème 1]) : toute variété (lisse) compacte kählérienne *simplement connexe* avec $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$ se décompose en un produit

$$\prod_{i\in I} Y_i \times \prod_{j\in J} Z_j$$

où Y_i est une variété projective simplement connexe de dimension $\geqslant 3$ avec $H^0(Y_i,\Omega^\bullet_{Y_i}) = \mathbf{C}\oplus\mathbf{C}\omega_i$ pour une forme différentielle ω_i de degré maximal partout non nulle (Y_i est dite de *Calabi-Yau*), et Z_j est une variété simplement connexe avec $H^0(Z_j,\Omega^\bullet_{Z_j}) = \mathbf{C}[\sigma_j]$ pour une 2-forme σ_j partout non dégénérée (Z_j est dite *symplectique irréductible*).

Définition 3.1 **(**[**Bea00**, Definition 1.1]**).** — Un germe V de variété analytique complexe est dit à singularités symplectiques si V est normal et s'il existe une 2-forme symplectique [15] σ sur le lieu régulier V_{reg} de V telle que, pour toute résolution $\pi : X \to V$ des singularités de V [16], σ s'étende en une 2-forme régulière sur X[17].

Exemple 3.2. — En dimension 2, les singularités symplectiques sont les points réguliers et les points doubles rationnels, localement analytiquement isomorphes à l'une des singularités d'hypersurface de $\mathbf{C}^3$ suivantes :

$$\begin{array}{rl} \mathrm{A}_k\ (k\geqslant 1) & x^2+y^2+z^{k+1}=0,\\ \mathrm{D}_k\ (k\geqslant 4) & x^2+y^2z+z^{k-1}=0,\\ \mathrm{E}_6 & x^2+y^3+z^4=0,\\ \mathrm{E}_7 & x^2+y^3+yz^3=0,\\ \mathrm{E}_8 & x^2+y^3+z^5=0. \end{array}$$

Exemple 3.3. — Soient V une variété affine à singularités symplectiques et G un groupe fini d'automorphismes de V préservant une forme symplectique sur V_{reg} ; V/G est alors à singularités symplectiques (voir [**Bea00**, Proposition 2.4]).

Exemple 3.4. — Soit Z une variété de dimension $2n+1$. Une *structure de contact* sur Z est la donnée d'un fibré en droites L sur Z et d'une 1-forme tordue $\theta \in H^0(Z,\Omega^1_Z\otimes L)$, la *forme de contact*, tels que $\theta\wedge(d\theta)^{\wedge n} \in H^0(Z,\det(\Omega^1_Z)\otimes L^{\otimes(n+1)})$ soit partout non nulle [18]. Soit $L^\times$ le $\mathbf{C}^*$-fibré principal associé à $L^{\otimes -1}$, c'est-à-dire, le complémentaire de la section nulle dans $L^{\otimes -1}$, sur lequel $\mathbf{C}^*$ agit par homothéties. Soient p la projection de $L^{\otimes -1}$ sur Z et $\tau : p^*L \to L^{\otimes -1}\times\mathbf{C}$ l'application canonique ; la restriction de τ à $L^\times$ est un isomorphisme

[15] C'est-à-dire une 2-forme holomorphe fermée et partout non dégénérée.

[16] Une résolution des singularités $\pi : X \to V$ est un morphisme propre et birationnel avec X lisse ; il en existe toujours.

[17] En particulier, V est de Gorenstein et à singularités rationnelles.

[18] La forme $d\theta$ se calcule localement *via* une trivialisation du fibré L.

et, *via* τ, la 1-forme $p^*\theta$ induit une 1-forme, toujours notée $p^*\theta$, sur $L^{\otimes -1}$. La restriction à $L^\times$ de la 2-forme $\sigma := d(p^*\theta)$ est une forme *symplectique* sur $L^\times$ (voir [**LeB95**]) (19).

Supposons maintenant L ample et soit V la variété affine d'algèbre

$$R(Z, L) := \oplus_{k \geqslant 0} H^0(Z, L^{\otimes k}).$$

L'application d'évaluation des sections définit un morphisme

$$L^{\otimes -1} \to V = \operatorname{Spec}(R(Z, L)) \ ;$$

ce morphisme induit un isomorphisme de $L^\times$ sur $V \setminus \{o\}$ où o est le point fermé d'idéal $\oplus_{k \geqslant 1} H^0(Z, L^{\otimes k})$ dans l'anneau $R(Z, L)$. La variété V est à singularités symplectiques et si L est (ample et) engendré par ses sections globales alors $L^{\otimes -1}$ s'identifie à l'éclatement normalisé de l'idéal maximal de o dans V.

Lorsque L est très ample, on peut montrer que Z est une variété homogène ([**Bea98**, Corollary 1.8]) (20) et s'obtient de la façon suivante (voir [**Bea98**]). Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple. Son groupe adjoint G agit sur $\mathbf{P}(\mathfrak{g})$ et a une unique orbite fermée $Z_{\mathfrak{g}} = \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathfrak{g}})$ où $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ est une orbite nilpotente convenable ; la structure symplectique naturelle (dite de Kostant-Kirillov) sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ induit une structure de contact sur $Z_{\mathfrak{g}}$ avec $L := \mathcal{O}_{Z_{\mathfrak{g}}}(1)$ et le groupe des automorphismes préservant la structure de contact a pour algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Enfin, $L^{\otimes -1}$ s'identifie à l'éclatement de l'idéal maximal de 0 dans $V = \mathcal{O}_{\mathfrak{g}} \cup \{0\} \subset \mathfrak{g}$.

Beauville décrit dans [**Bea00**] les singularités symplectiques isolées les plus simples.

Théorème 3.5 **(**[**Bea00**, Theorem]**)**. — *Toute singularité symplectique isolée dont le cône tangent est lisse est analytiquement isomorphe au germe* $(\mathcal{O}_{\mathfrak{g}} \cup \{0\}, 0)$ *pour une algèbre de Lie complexe simple convenable.*

Nous généralisons le résultat précédent dans [**Dru04b**].

Théorème 3.6 **(**[**Dru04b**, Théorème]**)**. — *Soit* (V, o) *une singularité symplectique isolée de dimension* $2n \geqslant 6$ *et soit* $\pi : X \to V$ *l'éclatement normalisé de* o *dans* V*. On suppose le diviseur* $\pi^{-1}(o)$ *réduit et son support à croisements normaux simples. Alors*

1. *ou bien* (V, o) *est analytiquement isomorphe à* $(\operatorname{Spec}(R(Z, L), o)$ *où* (Z, L, θ) *est une variété de contact,*
2. *ou bien* (V, o) *est analytiquement isomorphe à la singularité quotient* $(\mathbf{C}^{2n} / < \zeta >, 0)$ *où* $\zeta \neq 1$ *est une racine cubique de l'unité agissant sur* $\mathbf{C}^{2n}$ *par*

$$\zeta \cdot (z_1, z_2, \ldots, z_{2n-1}, z_{2n}) = (\zeta z_1, \zeta^2 z_2, \ldots, \zeta z_{2n-1}, \zeta^2 z_{2n}).$$

Démonstration (esquisse). — On adapte les arguments de Beauville, la structure de la preuve est identique.

Fixons les notations. Soit (V, o) une singularité symplectique isolée de dimension $2n$ $(n > 1)$ vérifiant les hypothèses du théorème et soit $\pi : X \to V$ l'éclatement normalisé de l'idéal maximal de o dans V. Notons $E = E_1 \cup \cdots \cup E_l$ $(l \geqslant 1)$ le diviseur exceptionnel et $L := \mathcal{O}_X(-E)$; $L_{|E}$ est *ample et engendré par ses sections globales.*

Soit σ une 2-forme holomorphe sur X dont la restriction à $X \setminus E \simeq V \setminus \{o\}$ est une 2-forme symplectique.

(19) La 2-forme σ est *équivariante* sous l'action de $\mathbf{C}^*$, *i.e.*, $\lambda^*\omega = \lambda\omega$, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}^*$ et réciproquement, toute 2-forme symplectique σ sur $L^\times$ $\mathbf{C}^*$-équivariante induit une unique forme de contact $\theta \in H^0(X, \Omega^1_X \otimes L)$ telle que $\omega = d(p^*\theta)$.

(20) On conjecture que c'est toujours le cas si Z est de Fano.

Étape 1. On montre que l'ordre d'annulation de σ^n le long de E_i est $n-1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant l$ (ou encore que $\mathrm{div}(\sigma^n) = (n-1)E$) sauf si $(E, L_{|E}) \simeq (\mathbf{P}^{2n-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{2n-1}}(1))$ auquel cas o est un point régulier de V. L'ingrédient principal ici est le résultat suivant sur lequel nous reviendrons au paragraphe 5.

Lemme 3.7 **(**[**Bea00**, Lemma 3.3]**).** — *Soient Y une variété projective lisse de dimension $d \geqslant 2$ et L un fibré en droites sur Y. On suppose L ample et engendré par ses sections globales. Si $H^0(Y, \wedge^2(T_Y \otimes L^{\otimes -1})) \neq 0$ alors, ou bien $(Y, L) \simeq (\mathbf{P}^d, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^d}(1))$ ou bien $(Y, L) \simeq (Q_2, \mathcal{O}_{Q_2}(1))$ où Q_2 est une quadrique lisse de dimension 2.*

Étape 2. On étudie ensuite le diviseur E. Fixons encore quelques notations. Soit $a \in \mathbf{Z}$. Soient

$$F_a := \mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(a) \oplus H^0(\mathbf{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}})$$

et i_a l'immersion fermée

$$\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1} \simeq \mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(H^0(\mathbf{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}) \subset F_a.$$

Supposons E irréductible. On vérifie que la 2-forme σ est à valeurs dans le fibré $\Omega^2_X(\log \mathrm{E})(-E)) \subset \Omega^2_X$ où $\Omega^2_X(\log \mathrm{E})$ est le faisceau des 2-formes différentielles méromorphes à pôles au pire logarithmiques le long de E et que son résidu $\theta \in H^0(E, \Omega^1_E \otimes L_{|E})$ le long de E définit une structure de contact sur E. Ce point a été démontré par Beauville ([**Bea00**]).

Supposons $l \geqslant 2$. On sait d'après le résultat de l'étape 2 que pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$ on a

$$\mathcal{O}_{E_i}(K_{E_i}) \simeq L^{\otimes -n}_{|E_i} \otimes \mathcal{O}(-\sum_{j \neq i} E_i \cap E_j).$$

On déduit alors de la proposition 3.8 que E a exactement deux composantes irréductibles et s'identifie au recollement de deux copies de F_2 le long de $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ *via* i_2 et $i_2 \circ s$ où s est l'involution de $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}$ qui échange les deux facteurs.

Proposition 3.8 **(**[**Dru04b**, Proposition 2.4]**).** — *Soit (Y, L) une variété polarisée de dimension $m \geqslant 2$ et soit $W = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} W_i$ un diviseur réduit sur Y dont le support est à croisements normaux simples. On suppose $\mathcal{O}_Y(K_Y) \simeq \mathrm{L}^{\otimes -k}(-W)$ pour un entier $k \in \mathbf{N}$.*

1. *Si $k > \frac{m+1}{2}$ et $r = 1$ ou $k \geqslant \frac{m+1}{2}$ et $r \geqslant 2$ alors Y est une variété de Fano et $b_2(Y) = 1$.*
2. *Si $k = \frac{m+1}{2}$ et $r = 1$ alors ou bien W et Y sont des variétés de Fano et $\rho(W) = \rho(Y) = 1$ ou bien (W, Y) est isomorphe à l'une des paires $(Q_2, \mathbf{P}^3)$, (Q_2, Q_3) (où Q_d est une quadrique lisse de dimension d) ou encore $(\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{n-1}, F_a)$ pour un entier $a \geqslant 0$ convenable.*

Étape 3. La fin de la démonstration est grosso modo la suivante. On suppose $l \geqslant 2$ (le cas E irréductible est analogue). On montre, en utilisant des techniques cohomologiques bien rodées (c'est ici que la restriction $2n \geqslant 6$ est nécessaire), que le complété formel de X le long de E est isomorphe au complété formel de l'éclatement normalisé de $\mathbf{C}^{2n} / < \zeta >$ en 0 le long du diviseur exceptionnel correspondant. On en déduit que les complétés $\widehat{\mathcal{O}}_{V,o}$ et $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbf{C}^{2n} / < \zeta >, 0}$ sont isomorphes puis que les deux germes de singularités le sont également par le théorème d'approximation d'Artin. $\square$

4. Caractérisation des espaces projectifs : une nouvelle démonstration du théorème de Wahl

Le théorème de Wahl est le suivant.

Théorème 4.1 **([Wah83**, Theorem 1]**).** — *Soient X une variété projective lisse et connexe de dimension $n \geqslant 1$ et L un fibré en droites ample sur X. Si $H^0(X, T_X \otimes L^{\otimes -1}) \neq 0$ alors (X, L) est isomorphe ou bien à $(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$ ou bien à $(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2))$.*

Démonstration (esquisse). — La donnée d'une section globale non nulle du fibré $T_X \otimes L^{\otimes -1}$ est équivalente à la donnée d'une dérivation D non nulle de degré -1 sur l'algèbre graduée $R(X, L) := \oplus_{k \geqslant 0} H^0(X, L^{\otimes k})$. Il faut ensuite montrer, c'est la partie délicate de l'argument, qu'il existe un élement $t \in R$ de degré 1 tel que $Dt = 1$. On en déduit $R = A[t]$ avec $A := \{r \in R \,|\, Dr = 0\}$ et $D = \frac{\partial}{\partial t}$ ou encore que X est un cône généralisé de base $\mathrm{Proj}(A)$. $\square$

On donne dans [**Dru04a**] une nouvelle démonstration du théorème 4.1 en étudiant le feuilletage en courbes $L \subset T_X$.

Définition 4.2. — Soient X une variété lisse et (F, η) un feuilletage sur X, c'est-à-dire la donnée d'un faisceau localement libre F et d'un morphisme injectif $\eta : F \to T_X$ tel que $\eta(F)$ soit intégrable. Le *lieu singulier* $Z(F, \eta)$ du feuilletage est le lieu des zéros de η. On dit que F est *régulier en un point* x de X si $x \notin Z(F, \eta)$ et qu'il est *régulier* s'il est régulier en tout point de X. On dit qu'une feuille est *algébrique* si son adhérence dans X est une sous-variété de dimension le rang de F.

Exemple 4.3. — Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme lisse à fibres connexes. L'inclusion $T_{X/Y} \subset T_X$ définit un feuilletage régulier sur X dont les feuilles sont les fibres de φ.

Exemple 4.4. — On se donne une section globale non nulle de $T_{\mathbf{P}^n}(-1)$ ($n \geqslant 2$). Les feuilles du feuilletage en courbes correspondant sont toutes algébriques et leurs adhérences sont les droites de $\mathbf{P}^n$ passant par un point $x \in \mathbf{P}^n$ qui est son lieu singulier ; l'ensemble H_x des feuilles est isomorphe à $\mathbf{P}^{n-1}$. Soit U_x la variété d'incidence associée, c'est-à-dire,

$$U_x := \{([\ell], y) \in H_x \times \mathbf{P}^n \,|\, y \in \ell\} \subset H_x \times \mathbf{P}^n,$$

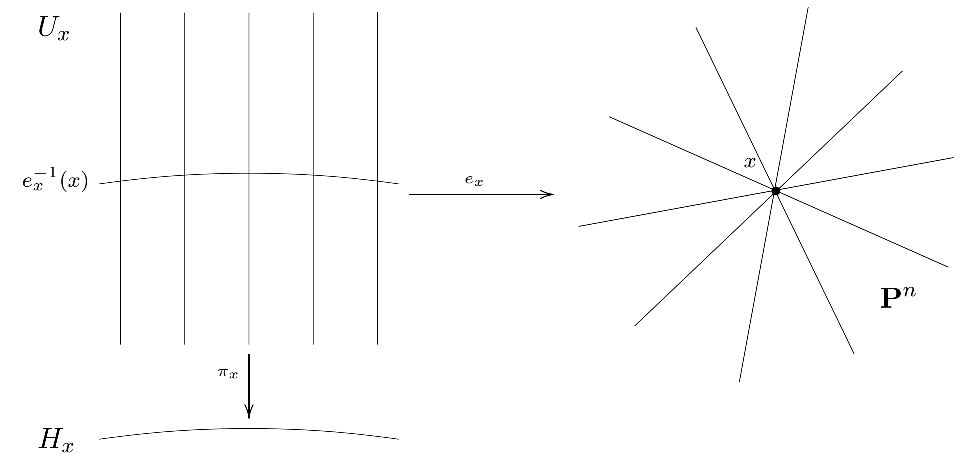
et soient π_x et e_x les restrictions à U_x des projections sur H_x et $\mathbf{P}^n$ respectivement. La fibre de π_x au-dessus d'un point $[\ell] \in H_x$ s'identifie à la droite de $\{[\ell]\} \times \mathbf{P}^n \simeq \mathbf{P}^n$ correspondante ; e_x induit un isomorphisme de l'ouvert $U_x \setminus e_x^{-1}(x)$ sur $\mathbf{P}^n \setminus \{x\}$ et contracte $e_x^{-1}(x) \simeq H_x$ sur $\{x\}$. Le morphisme e_x est en fait l'éclatement du point x dans $\mathbf{P}^n$ et U_x s'identifie à la variété $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^{n-1}}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1))$ au-dessus de $H_x \simeq \mathbf{P}^{n-1}$ (voir figure).

Notre résultat est le suivant.

Théorème 4.5 **([Dru04a**, Corollaire]**).** — *Soient X une variété projective lisse et connexe de dimension $n \geqslant 2$ et (L, η) un feuilletage en courbes sur X. On suppose $L \cdot C \geqslant 1$ pour toute courbe $C \subset X$.*

1. *Si $Z(L, \eta) = \emptyset$ alors (L, η) est le feuilletage décrit dans l'exemple 4.3 où $\varphi : X \to Y$ est une fibration en droites projectives.*
2. *Si $Z(L, \eta) \neq \emptyset$ alors X est isomorphe à l'espace projectif $\mathbf{P}^n$ et le feuilletage (L, η) est celui décrit dans l'exemple 4.4.*

Remarque 4.6. — L'hypothèse sur L est en particulier satisfaite si L est ample. On retrouve ainsi le résultat de Wahl.



Exemple 4.7. — Soit B une courbe projective lisse et connexe de genre $g(B) \geqslant 2$ et soit E un fibré vectoriel de rang 2 et de degré 0 sur B dont toutes les puissances symétriques sont stables (voir [**Har70**, Example 10.6]). Soit enfin $S := \mathbf{P}_B(E)$. Le fibré $L := T_{S/B} \subset T_S$ est de degré $\geqslant 1$ sur toutes les courbes de S mais il n'est pas ample.

Démonstration du théorème 4.5 (esquisse). — Les données sont celles de l'énoncé.

Étape 1. *Étude des feuilles.* L'algébricité ou non des feuilles d'un feuilletage est une question délicate en général et résulte ici de l'énoncé suivant.

Théorème 4.8 **([BM01], [Bos01] et [KSCT07**, Theorem 1]**)**
Soient X une variété projective lisse, $B \subset X$ une courbe complète irréductible et $F \subset T_X$ un feuilletage régulier le long de B. On suppose que la restriction de F à B est un fibré vectoriel ample. Si x est un point quelconque de B alors la feuille passant par x est algébrique et si x est général dans B, son adhérence est rationnellement connexe par chaînes (21).

Le résultat (élémentaire) suivant permet de déduire la seconde assertion du théorème ci-dessus de la première pour les feuilletages en courbes.

Lemme 4.9 **([Dru04a**, Lemme 1.2]**)**. — *Soient X une variété algébrique et (L, η) un feuilletage en courbes sur X. Soient $C \subset X$ une courbe complète irréductible et $\tilde{C}$ sa normalisée. On suppose $C \not\subset Z(L, \eta)$. Si C est l'adhérence d'une feuille alors l'application (non nulle) $L_{|\tilde{C}} \to T_{X|\tilde{C}}$ se factorise à travers $T_{\tilde{C}} \subset T_{X|\tilde{C}}$; en particulier $L \cdot C \leqslant 2 - 2g(\tilde{C})$.*

Sous les hypothèses du théorème 4.5, les feuilles sont donc toutes algébriques et, si C est l'adhérence de l'une d'elles alors son genre géométrique est nul, autrement dit, C est une courbe rationnelle, et $L \cdot C \in \{1, 2\}$.

Soit Y' l'adhérence du lieu des points de $\mathrm{Chow}(X)$ correspondants aux cycles irréductibles et réduits de support l'adhérence d'une feuille et soit Y la composante irréductible de Y' telle que la variété d'incidence $Z \subset Y \times X$ correspondante domine X. On note, comme toujours, π et e les restrictions à Z des projections sur Y et X respectivement.

Expliquons la démonstration du théorème 4.5 lorsque $L \cdot C = 1$ en gardant à l'esprit l'exemple 4.4.

(21) Une variété projective est dite *rationnellement connexe par chaînes* si deux points quelconques de X peuvent être reliés par une courbe connexe dont toutes les composantes irréductibles sont rationnelles.

Étape 2. *Étude du lieu singulier du feuilletage.* Soient C l'adhérence d'une feuille et $\tilde{C}$ sa normalisée ; d'après le lemme 4.9, l'application $L_{|\tilde{C}} \to T_{X|\tilde{C}}$ se factorise à travers $T_{\tilde{C}} \subset T_{X|\tilde{C}}$. L'application induite $L_{|\tilde{C}} \to T_{\tilde{C}}$ n'est pas un isomorphisme puisque le premier des deux fibrés en droites est de degré 1 sur les fibres de π et le second de degré 2, $Z(L,\eta)$ est donc *non vide.*

On montre que $Z(L,\eta)$ *est réduit à un point x et que toutes les feuilles de (L,η) passent par x* de la façon suivante. Soient x_1 et x_2 deux points de $Z(L,\eta)$, $B \subset Z$ une courbe complète irréductible générale telle que $\{x_1, x_2\} \subset e(\pi^{-1}(B))$ et $\tilde{B}$ sa normalisée. Soient $S := \pi^{-1}(B)$ et $\tilde{S}$ sa normalisée. On voit facilement que la surface $\tilde{S}$ est géométriquement réglée au-dessus de $\tilde{B}$. Soit D le diviseur effectif sur $\tilde{S}$ tel que $L_{|\tilde{S}}(D) \simeq T_{\tilde{S}/\tilde{B}}$. Le point clef est que *l'image du support de D dans X est exactement* $e(S) \cap Z(L,\eta)$ (voir [**Dru04a**, Lemme 1.2]) [22] et contient en particulier x_1 et x_2. Soient $B_0 \subset \tilde{S}$ une section de $\tilde{S} \to \tilde{B}$ (bien choisie) et $\tilde{\ell} \subset \tilde{S}$ l'une de ses fibres. On pose $e = -B_0^2$. L'espace vectoriel $\mathrm{NS}(\tilde{S}) \otimes \mathbf{R}$ est engendré par les classes de B_0 et $\tilde{\ell}$, que nous désignerons par les mêmes symboles, avec

$$B_0 \cdot \tilde{\ell} = 1 \text{ et } \tilde{\ell}^2 = 0.$$

Soit $aB_0 + b\tilde{\ell}$ la classe de D dans $NS(S)$; a est donné par le calcul

$$a = D \cdot \tilde{\ell} = -K_{\tilde{S}/\tilde{B}} \cdot \tilde{\ell} - L_{|\tilde{S}} \cdot \tilde{\ell} = 2 - 1 = 1.$$

On en déduit que $L_{|\tilde{S}} \equiv B_0 + (e-b)\tilde{\ell}$ puisque $-K_{\tilde{S}/\tilde{B}} \equiv 2B_0 + e\tilde{\ell}$ et enfin que

$$L_{|\tilde{S}} \cdot D = (B_0 + (e-b)\tilde{\ell}) \cdot (B_0 + b\tilde{\ell}) = -e + b + (e-b) = 0.$$

Écrivons maintenant $D = D_1 + D_2$ où D_1 est la partie verticale de D et D_2 sa partie horizontale (relativement à la projection sur $\tilde{B}$) ; D_2 est irréductible puisque $D \cdot \tilde{\ell} = 1$. Le fibré $L_{|\tilde{S}}$ est numériquement effectif par hypothèse et on a donc

$$L_{|\tilde{S}} \cdot D_1 = L_{|\tilde{S}} \cdot D_2 = 0.$$

On en déduit que $D_1 = 0$ et que le support de D_2 est une courbe irréductible contractée dans X puisque $L \cdot C \geqslant 1$ pour toute courbe $C \subset X$; finalement, $x_1 = x_2$ et les adhérences de toutes les feuilles (paramétrées par B) passent par l'unique point x de $Z(L,\eta)$.

Étape 3. *Conclusion.* On montre enfin que Z s'identifie à la variété $\mathbf{P}_Y(\mathcal{O}_Y \oplus L_Y)$ (au-dessus de Y) où L_Y est un fibré en droites ample sur Y puis que le morphisme e s'identifie à la contraction de la section $\mathbf{P}_Y(\mathcal{O}_Y) \subset \mathbf{P}_Y(\mathcal{O}_Y \oplus L_Y)$, autrement dit, que *via* l'isomorphisme précédent, $e^{-1}(x)$ s'identifie à $\mathbf{P}_Y(\mathcal{O}_Y)$ et que e induit un isomorphisme de $Z \setminus e^{-1}(x)$ sur $X \setminus \{x\}$. ☐

Remarque 4.10. — Les énoncés des théorèmes 4.1 et 4.5 sont corrects si la variété est définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. L'exemple suivant montre que ce n'est plus le cas en caractéristique $p > 0$ (voir [**Wah83**]). Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 2 et soit $X \subset \mathbf{P}^{2n}$ $(n \geqslant 1)$ la quadrique lisse d'équation $x_0^2 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i x_{i+n}$. Le champ de vecteurs $x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} \in H^0(\mathbf{P}^{2n}, T_{\mathbf{P}^{2n}})$ est tangent à X et non identiquement nul le long de X.

Question 4.11. — Que peut-on dire sous les hypothèses du théorème 4.1 si la caractéristique du corps de base est > 0 ?

[22] Autrement dit, le support du lieu singulier du feuilletage induit sur $\tilde{S}$ est l'image inverse dans $\tilde{S}$ du support du lieu singulier du feuilletage sur X.

Question 4.12. — Que peut-on dire si L n'est plus supposé ample mais numériquement effectif et grand ? seulement grand ? ou encore si $L \cdot C \geqslant 1$ pour toute courbe mobile C ?

Le théorème 4.1 reste vrai si L n'est plus supposé inversible.

Théorème 4.13 **([AW01, Theorem]).** — *Soit X une variété projective lisse et connexe de dimension $n \geqslant 1$. Soit E est un sous-faisceau localement libre de T_X de rang $\geqslant 1$. Si E est ample alors $X \simeq \mathbf{P}^n$ et ou bien $E \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)^{\oplus r}$ ou bien $E \simeq T_X$.*

On termine ce paragraphe par une dernière question. Soit (X, L, θ) une variété de contact de dimension $2n+1 \geqslant 1$ avec L ample (voir Exemple 3.4). Comme nous l'avons déjà dit, on conjecture que X est homogène. Soient S le spectre d'une sous-algèbre A de $\mathbf{C}$, de type fini sur $\mathbf{Z}$, et $\mathcal{X} \to S$ un schéma projectif et lisse sur S tels que $\mathcal{X} \times_S \operatorname{Spec}(\mathbf{C}) \simeq X$ où le point $\operatorname{Spec}(\mathbf{C}) \to S$ est le morphisme correspondant à l'inclusion $A \subset \mathbf{C}$. On suppose également qu'il existe un fibré inversible $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{X}$ ample sur S et une 1-forme relative tordue $\Theta \in H^0(\mathcal{X}, \Omega^1_{\mathcal{X}/S} \otimes \mathcal{L}^{\otimes -1})$ induisant respectivement L et θ sur $\mathcal{X} \times_S \operatorname{Spec}(\mathbf{C})$ et tels que la section $\Theta \wedge (d\Theta)^{\wedge n} \in H^0(\mathcal{X}, \det(\Omega^1_{\mathcal{X}/S}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes(n+1)})$ soit partout non nulle. Soit $s \in S$ un point fermé de S et $\mathcal{X}_{\bar{s}}$ la fibre géométrique de $\mathcal{X} \to S$ au-dessus de s. La « variété » de contact $(\mathcal{X}_{\bar{s}}, \mathcal{L}_{\bar{s}}, \Theta_{\bar{s}})$ est définie sur une clôture algébrique du corps résiduel $k(s)$ de s lequel est de caractéristique $p > 0$. Soit $\mathcal{D}_{\bar{s}} := \ker(\Theta_{\bar{s}})$ où la section $\Theta_{\bar{s}}$ est vue comme une application linéaire (partout non nulle) $T_{X_{\bar{s}}} \to \mathcal{L}_{\bar{s}}$. On voit facilement que l'application $\mathcal{D}_{\bar{s}} \times \mathcal{D}_{\bar{s}} \to \mathcal{L}_{\bar{s}}$ déduite du crochet de Lie est partout non dégénérée. Soient U un ouvert de $\mathcal{X}_{\bar{s}}$ et $v \in H^0(U, T_{\mathcal{X}_{\bar{s}}})$. On montre que l'application $H^0(U, \mathcal{D}_{\bar{s}}) \ni w \mapsto \Theta_{\bar{s}}([v,w]) \in H^0(U, \mathcal{L}_{\bar{s}})$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\bar{s}}}(U)$-linéaire et induit un scindage de la suite exacte de faisceaux de groupes abéliens

$$0 \to \mathcal{D}_{\bar{s}} \to T_{\mathcal{X}_{\bar{s}}} \to \mathcal{L}_{\bar{s}} \to 0$$

(voir [**LeB95**]). On vérifie enfin que le scindage ci-dessus est $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\bar{s}}}(U)^p$-linéaire. En particulier, si $F : X_{\bar{s}} \to X_{\bar{s}}$ désigne le morphisme de Frobenius absolu, $F_*\mathcal{L}_{\bar{s}}$ est un facteur direct de $F_*T_{\mathcal{X}_{\bar{s}}}$.

Question 4.14. — Soient X une variété projective lisse et connexe définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et L un fibré en droites ample sur X. Soit $F : X \to X$ le morphisme de Frobenius absolu. Que peut-on dire sur (X, L) si F_*L est un sous-fibré de F_*T_X ?

5. Caractérisations des espaces projectifs et des quadriques

L'énoncé principal de ce paragraphe généralise le théorème de Wahl.

Théorème 5.1 **([ADK08, Theorem 1.1]).** — *Soient X une variété projective lisse et connexe de dimension $n \geqslant 1$ et L un fibré en droites ample sur X. On suppose $H^0(X, \wedge^k(T_X \otimes L^{\otimes -1})) \neq 0$ pour un entier $k \geqslant 1$. Alors, ou bien $(X, L) \simeq (\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$ ou bien $k = n$ et $(X, L) \simeq (Q_n, \mathcal{O}_{Q_n}(1))$ où $Q_n \subset \mathbf{P}^{n+1}$ est une quadrique lisse de dimension n.*

L'énoncé a été conjecturé par Beauville dans [**Bea00**] et démontré par lui en supposant L *très ample* (voir Lemme 3.7). Lorsque $k = 1$, l'énoncé précédent n'est rien d'autre que l'énoncé du théorème 4.1 dont nous avons déjà parlé au paragraphe 4. Enfin, lorsque $k = n$, notre résultat est une conséquence de l'énoncé bien connu suivant.

Théorème 5.2 **([KO73]).** — *Soient X une variété projective lisse et connexe de dimension $n \geqslant 1$ et L un fibré en droites ample sur X. Si $\omega_X \simeq L^{\otimes(n+1)}$ (resp. $\omega_X \simeq L^{\otimes n}$) alors $(X, L) \simeq (\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$ (resp. $(X, L) \simeq (Q_n, \mathcal{O}_{Q_n}(1))$).*

Remarque 5.3. — Fixons $k \in \{2, \ldots, n\}$. Le morphisme $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)^{\oplus k} \to T_{\mathbf{P}^n}$ correspondant à la donnée de k sections générales du fibré $T_{\mathbf{P}^n}(-1)$ induit un morphisme non nul $\wedge^k(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)^{\oplus k}) \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(k) \to \wedge^k T_{\mathbf{P}^n}$ ou encore une section globale du fibré $\wedge^k(T_{\mathbf{P}^n}(-1))$ mais une section générale de $\wedge^k(T_{\mathbf{P}^n}(-1))$ n'est pas associée à une distribution de rang k et la méthode exposée au paragraphe 4 pour démontrer le théorème 4.5 ne fonctionne donc plus ici.

L'énoncé suivant, dont la démonstration est plus facile, sera utilisé ensuite.

Théorème 5.4 **([ADK08, Theorem 1.3]).** — *Soient X une variété projective lisse et connexe de dimension $n \geqslant 1$ et L un fibré en droites ample sur X. On suppose $H^0(X, \wedge^k(T_X \otimes L^{\otimes -1}) \otimes L^{\otimes -s}) \neq 0$ pour des entiers $k \geqslant 1$ et $s \geqslant 1$. Alors $s = 1$ et $(X, L) \simeq (\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$.*

Démonstration du théorème 5.1 (esquisse). — Le théorème se démontre par récurrence sur la dimension de X, le cas $\dim(X) = 1$ étant immédiat. Les données sont celles de l'énoncé et on suppose $\dim(X) \geqslant 2$.

Étape 1. *Le nombre de Picard $\rho(X)$ vaut 1 sauf si $(X, L) \simeq (Q_2, \mathcal{O}_{Q_2}(1))$.* On suppose $k \geqslant 2$ dans la suite, le cas $k = 1$ ayant déjà été discuté. La variété X est uniréglée par le théorème 1.2 ; soit H une famille dominante et presque complète de courbes rationnelles sur X, $[\ell] \in H$ général et $\tilde{\ell} \simeq \mathbf{P}^1$ sa nomalisée. Le fibré $T_{X|\tilde{\ell}}$ s'identifie au fibré

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)^{\oplus d} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus(\dim(X)-d-1)}$$

avec $d := -K_X \cdot \ell - 2$ (voir la proposition 1.13) et $\wedge^k(T_X \otimes L^{\otimes -1}))_{|\tilde{\ell}}$ est donc de la forme

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_r)$$

où r est son rang, $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_r \leqslant k + 1 - k(L \cdot \ell)$ et $a_1 \geqslant 0$ par la proposition 1.13. On a donc $L \cdot \ell \leqslant \frac{k+1}{k} < 2$ et $L \cdot \ell = 1$ car $k \geqslant 2$; la famille H est donc *complète.*

On considère maintenant $q : X \dashrightarrow Q$ le quotient $\bar{H}$-rc de X ; par la proposition 2.5, il suffit de montrer que si $\dim(Q) \geqslant 1$ alors $(X, L) \simeq (Q_2, \mathcal{O}_{Q_2}(1))$. On suppose maintenant $\dim(Q) \geqslant 1$. Soient X_0 et Q_0 des ouverts denses de X et Q respectivement tels que la restriction q_0 de q à X_0 induise un morphisme propre et surjectif $X_0 \to Q_0$. D'après le théorème 2.6, on peut supposer le complémentaire de X_0 dans X de codimension $\geqslant 2$ et les fibres de q_0 réduites et irréductibles. Soit X_1 l'ouvert de X des points où q_0 est lisse ; son complémentaire dans X est également de codimension $\geqslant 2$. On note enfin q_1 la restriction de q_0 à X_1. Soient s une section non nulle du fibré $\wedge^k(T_X \otimes L^{\otimes -1})$ et s_1 sa restriction à X_1. Soit F une fibre générale de q_0. En combinant le théorème 5.4 et l'hypothèse de récurrence, on obtient que

1. ou bien $(F, L_{|F}) \simeq (\mathbf{P}^{k-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k-1}}(1))$ et s_1 provient du fibré $\wedge^{k-1}(T_{X_1/Q_0} \otimes L_{|X_1}^{\otimes -1}) \otimes q_1^* T_{Q_0} \otimes L_{|X_1}^{\otimes -1}$,
2. ou bien $(F, L_{|F}) \simeq (\mathbf{P}^{k'}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{k'}}(1))$ ($k' \geqslant k$) et s_1 provient du fibré $\wedge^k(T_{X_1/Q_0} \otimes L_{|X_1}^{\otimes -1})$,
3. ou bien $(F, L_{|F}) \simeq (Q_k, \mathcal{O}_{Q_k}(1))$ et s_1 provient à nouveau du fibré $\wedge^k(T_{X_1/Q_0} \otimes L_{|X_1}^{\otimes -1})$.

On montre dans le premier cas que la section (non nulle) s_1 induit un feuilletage en courbes $\det(q_{1*}L) \subset T_{Q_0}$ sur Q_0 et en étudiant ce feuilletage, on montre finalement que $(X,L) \simeq (Q_2, \mathcal{O}_{Q_2}(1))$. On vérifie enfin que les deux autres situations conduisent à des contradictions. L'argument dans le dernier cas est le suivant (l'autre cas n'est pas plus difficile). Le complémentaire de X_0 dans X étant de codimension $\geqslant 2$, Q_0 contient des courbes complètes. Supposons pour simplifier que Q_0 contienne une courbe complète lisse B et posons $X_B := q_0^{-1}(B)$. La section s_1 induit une section globale du fibré $\omega_{X_B/B}^{-1} \otimes L_{|X_B}^{-k}$ et $\omega_{X_B/B}^{-1}$ est donc ample. La contradiction est donnée par le résultat suivant.

Théorème 5.5 (**[ADK08**, Theorem 3.1]). — *Soient X une variété projective irréductible et normale, $\mathbf{Q}$-Gorenstein et $X \to B$ un morphisme surjectif sur une courbe projective lisse dont les fibres générales sont lisses. Alors $\omega_{X/B}^{-1}$ n'est pas ample.*

Étape 2. *Conclusion.* Le théorème résulte maintenant d'un autre énoncé, le théorème 5.6 ci-après. □

Théorème 5.6 (**[ADK08**, Theorem 1.2]). — *Soient X une variété projective lisse et connexe de dimension $n \geqslant 1$ et L un fibré en droites ample sur X. On suppose $\rho(X) = 1$ et $H^0(X, \otimes^k(T_X \otimes L^{\otimes -1})) \neq 0$ pour un entier $k \geqslant 1$. Alors, ou bien $(X,L) \simeq (\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$ ou bien $k = n \neq 2$ et $(X,L) \simeq (Q_n, \mathcal{O}_{Q_n}(1))$.*

Démonstration (esquisse). — Les données sont celles de l'énoncé.

Étape 1. Le fibré T_X contient un sous-faisceau réflexif et saturé E, de rang $r_E \geqslant 1$ et de pente $\mu(E) \geqslant \mu(L)$ (23). C'est une conséquence du résultat suivant.

Lemme 5.7 (**[ADK08**, Lemma 6.2]). — *Soient X une variété projective lisse et L un fibré en droites ample sur X. Soient F un fibré vectoriel sur X, k un entier $\geqslant 1$ et N un sous-faisceau inversible de $F^{\otimes k}$. Alors F contient un sous-faisceau réflexif et saturé E, de rang $r_E \geqslant 1$ et de pente $\mu(E) \geqslant \frac{\mu(N)}{k}$.*

Étape 2. La variété X est uniréglée à nouveau par le théorème 1.2 ; soit H une famille presque complète de courbes rationnelles sur X, $[\ell] \in H$ général et $\tilde{\ell} \simeq \mathbf{P}^1$ sa normalisée. Le point clef ici est que l'inégalité

$$\mu(E) \geqslant \mu(L)$$

est équivalente à l'inégalité

$$\frac{\deg(E_{|\tilde{\ell}})}{r_E} \geqslant \deg(L_{|\tilde{\ell}})$$

puisque $\rho(X) = 1$.

Le fibré $T_{X|\tilde{\ell}}$ s'identifie au fibré

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)^{\oplus d} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus(\dim(X)-d-1)}$$

avec $d := -K_X \cdot \ell - 2$ (voir Proposition 1.13) et $E_{|\tilde{\ell}}$ en est un sous-fibré ; l'inégalité précédente entraîne immédiatement que ou bien $E_{|\tilde{\ell}}$ est ample, ou bien $E_{|\tilde{\ell}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)^{\oplus(r_E-2)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}$.

(23) La pente d'un faisceau sans torsion E de rang $r_E \geqslant 1$ sur X relativement à la polarisation L est le rationnel $\mu(E) := \frac{c_1(E)\cdot c_1(L)^{n-1}}{r_E}$.

Étape 3. Supposons $E_{|\tilde{\ell}}$ ample. On a alors $(X,L) \simeq (\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$ par le théorème 4.1 (resp. par le théorème 1.23 [24]) si $r_E = 1$ (resp. si $r_E \geqslant 2$).

Étape 4. Supposons $E_{|\tilde{\ell}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)^{\oplus(r_E-2)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}$. Soient x général dans X et C_x la variété des tangentes en x. On a $\mathbf{P}(T_{\ell,x}^{\vee}) \subset \mathbf{P}(E_x^{\vee})$ pour $[\ell]$ général dans H_x et donc $C_x \subset \mathbf{P}(E_x^{\vee})$ pour x général. On a, pour $x' \in \ell$ général,

$$T_{C_{x'},\tau_{x'}([\ell])} = \mathbf{P}((T^+_{X,\ell,x'})^{\vee}) \subset \mathbf{P}(E^{\vee}_{x'})$$

et donc

$$T^+_{X,\tilde{\ell}} \subset E_{|\tilde{\ell}}$$

puis

$$E_{|\tilde{\ell}} \simeq T^+_{X,\tilde{\ell}} \oplus \mathcal{O}_{\tilde{\ell}}.$$

On en déduit que $\det(T_X) \simeq L^{\otimes n}$ puis que $(X,L) \simeq (Q_n, \mathcal{O}_{Q_n}(1))$ par le théorème 5.2. □

Question 5.8. — Que peut-on dire sous les hypothèses des théorèmes 5.1, 5.4 et 5.6 si la caractéristique du corps de base est > 0 ?

Il y a quelques résultats dans cette direction, mentionnons seulement une démonstration en caractéristique arbitraire du théorème 5.2 dans [**KK00**].

Question 5.9. — L'énoncé du théorème 5.1 est-t-il vrai pour d'autres représentations de $\mathrm{GL}(\mathbf{C}^n)$ que $\wedge^k(\mathbf{C}^n)$ (si $\rho(X) \geqslant 2$) ?

[24] On a supposé E localement libre dans l'énoncé du théorème 1.23 mais le lecteur se convaincra facilement que cette hypothèse n'est pas nécessaire, en remarquant que pour $[\ell]$ général dans H, la courbe ℓ est contenue dans le lieu des points où E est localement libre (voir la fin du paragraphe 1).

PARTIE III
QUELQUES PROPRIÉTÉS DES VARIÉTÉS UNIRÉGLÉES

6. Quelques propriétés des familles de courbes rationnelles

Commençons par quelques rappels. Soit X une variété projective lisse. Soit $\mathrm{N}_1(X) = (\{1\text{-cycles}\}/\equiv)\otimes\mathbf{R}$ où $\equiv$ désigne l'équivalence numérique. On note $\overline{\mathrm{NE}}(X) \subset \mathrm{N}_1(X)$ le sous-cône convexe fermé engendré par les classes des 1-cycles effectifs ; $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ est appelé le cône de Mori. Une *arête* est une demi-droite R dans $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ telle que, pour tout $z_1, z_2 \in \overline{\mathrm{NE}}(X)$, si $z_1 + z_2 \in R$ alors $z_1, z_2 \in R$. Toute arête R du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ telle que $K_X \cdot R < 0$ peut être contractée, c'est-à-dire qu'il existe une variété projective normale Y et un morphisme surjectif $c : X \to Y$, à fibres connexes, tels que, pour toute courbe $C \subset X$, $\dim(c(C)) = 0$ si et seulement si $[C] \in R$; de plus, les fibres de c non réduites à un point sont uniréglées et l'arête R est en particulier engendrée par la classe d'une courbe rationnelle ([**Mor82**]). On appelle généralement « théorème du cône » l'ensemble de ces résultats.

Il est difficile de déterminer lesquelles des courbes rationnelles sur X engendrent une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ contenue dans le demi-espace $\{z \in \mathrm{N}_1(X) | K_X \cdot z < 0\}$ mais la question est importante puisque, nous venons de le voir, ces courbes codent une partie de la géométrie de X.

Remarque 6.1. — Si H est une famille dominante de courbes rationnelles sur X et $[\ell] \in H$ est général alors $K_X \cdot \ell < 0$ par la proposition 1.13.

Le problème considéré ici est le suivant.

Question 6.2. — Soient X une variété projective lisse et connexe et $\ell \subset X$ une courbe rationnelle. Peut-on donner des conditions « géométriques » sur ℓ (et/ou ses déformations dans X) garantissant que ℓ engendre une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$?

On pense par exemple au cas des surfaces (projectives lisses) : toute courbe rationnelle lisse E telle que $E^2 = -1$ engendre une arête du cône de Mori. On propose dans [**BCD07**] une réponse partielle à cette question. La définition qui suit est motivée par l'observation simple suivante. Soient H une famille de courbes rationnelles sur X et $\bar{H}$ son adhérence dans $\mathrm{Chow}(X)$. Soient $[\ell] \in H$ général et R la demi-droite engendrée par ℓ dans $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. Si R est une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ alors pour tout $[C] \in \bar{H}$ et toute composante irréductible C' du support du cycle associé C, on a $[C'] \in R$.

Définition 6.3. — Soient X une variété projective lisse, H une famille de courbes rationnelles sur X, $\bar{H}$ son adhérence dans $\mathrm{Chow}(X)$. La famille H est dite *numériquement complète* s'il existe une demi-droite $R_H \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ telle que, pour tout $[C] \in \bar{H}$ et toute composante irréductible C' du support du cycle associé C, on ait $[C'] \in R_H$.

Remarque 6.4. — Toute famille complète de courbes rationnelles sur X est certainement numériquement complète.

Conjecture 6.5 ([**BCD07**]). — *Si H est une famille dominante et numériquement complète de courbes rationnelles sur X alors la demi-droite R_H est une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.*

Remarque 6.6. — L'hypothèse « H numériquement complète » est nécessaire comme nous l'avons déjà remarqué. L'hypothèse « H dominante » l'est également comme le montre l'exemple suivant. Soit Y une variété analytique compacte non projective et $Z \subset Y$ une sous-variété lisse telle que l'éclatement X de Y le long de Z soit une variété projective. La famille H des « droites » contractées est complète (donc numériquement complète) mais R_H n'est pas *en général* une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ (voir par exemple [**Bon00**]).

Nos principaux résultats sont les suivants.

Théorème 6.7 ([**BCD07**, Theorem 2]). — *Soient X une variété projective lisse et connexe, H une famille dominante et numériquement complète de courbes rationnelles sur X, $\bar{H}$ son adhérence dans* Chow(X) *et $q : X \dashrightarrow Q$ le quotient $\bar{H}$-rc de X. Si* $\dim(Q) \leqslant 3$ *alors R_H est une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.*

Théorème 6.8 ([**BCD07**, Theorem 3]). — *Soient X une variété torique projective lisse et connexe et H une famille dominante et numériquement complète de courbes rationnelles sur X. Alors R_H est une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.*

La proposition suivante explique le lien entre le quotient $\bar{H}$-rc de X et la contraction de l'arête R_H.

Proposition 6.9 ([**BCD07**, Proposition 4]). — *Soient X une variété projective lisse et connexe, H une famille dominante et numériquement complète de courbes rationnelles sur X et $\bar{H}$ son adhérence dans* Chow(X)*. On suppose que R_H est une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. Soit $c : X \to Y$ la contraction de R_H. Alors $c : X \to Y$ est le quotient $\bar{H}$-rc de X.*

Soient X une variété projective lisse, H une famille dominante de courbes rationnelles sur X, $\bar{H}$ son adhérence dans Chow(X) et $q : X \dashrightarrow Q$ le quotient $\bar{H}$-rc de X.

Définition 6.10. — Un morphisme $\bar{q} : X \to \bar{Q}$ est appelé un quotient géométrique pour la relation d'équivalence introduite au paragraphe 2 si $\bar{Q}$ est une variété normale et si toute fibre de $\bar{q}$ est une classe d'équivalence.

Remarque 6.11. — Un quotient géométrique (s'il existe) est unique à isomorphisme près et c'est le quotient $\bar{H}$-rc de X.

On s'intéresse aussi dans [**BCD07**] à la question bien naturelle suivante.

Question 6.12. — Existe-t-il des hypothèses raisonables sur H garantissant l'existence du quotient géométrique ?

Supposons que le quotient géométrique $\bar{q} : X \to \bar{Q}$ existe. Si $\bar{Q}$ est une variété projective et H est numériquement complète alors R_H est une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ et $\bar{q} : X \to \bar{Q}$ est la contraction de R_H. Nous montrons que dans certains cas, si H est une famille dominante et numériquement complète de courbes rationnelles sur X et si R_H est une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ alors la contraction $c : X \to Y$ de R_H est le quotient géométrique.

Théorème 6.13 ([**BCD07**, Theorem 2, Theorem 3]). — *Sous les hypothèses du théorème 6.7 ou celles du théorème 6.8, la contraction $c : X \to Y$ de R_H est le quotient géométrique.*

Démonstration des théorèmes 2.6, 6.7 et 6.13 (esquisse). — Soient X une variété projective lisse et connexe, H une famille dominante et numériquement complète de courbes rationnelles sur X, $\bar{H}$ son adhérence dans Chow(X) et $q : X \dashrightarrow Q$ le quotient $\bar{H}$-rc de X. Soit $\bar{Q}$ la normalisation de l'adhérence de l'image de l'application rationnelle (génériquement injective) $Q \dashrightarrow \mathrm{Chow}(X)$, $\bar{U} \subset \bar{Q} \times X$ le cycle universel, $\bar{\pi}$ et $\bar{e}$

$$\begin{tikzcd} \bar{U} \arrow[r, "\bar{e}"] \arrow[d, "\bar{\pi}"'] & X \\ \bar{Q} & \end{tikzcd}$$

les restrictions à $\bar{U}$ des projections sur $\bar{Q}$ et X respectivement ; on a $q = \bar{\pi} \circ \bar{e}^{-1}$. On note E le lieu exceptionnel de $\bar{e}$ et B son image dans X.

Le résultat clef est le suivant (voir [**BCD07**, Proposition 1]). Soit $D_{\bar{Q}}$ un diviseur très ample sur $\bar{Q}$ (assez « général ») et $D_X := \bar{e}(\bar{\pi}^{-1}(D_{\bar{Q}}))$. Soit $C \subset X$ une courbe irréductible. Si $D_X \cdot C = 0$ alors ou bien $C \subset B$ ou bien $C \cap B = \emptyset$ et $\bar{\pi}(\tilde{C})$ est un point, où $\tilde{C}$ est la transformée stricte de C dans $\bar{U}$.

On en déduit facilement que B est la réunion de toutes les classes d'équivalence de dimension $> \dim(X) - \dim(Q)$ puis que B est stable par la relation d'équivalence. Ceci démontre la première assertion du théorème 2.6.

Supposons B non vide et $\dim(Q) \leqslant 3$. On voit alors que toute composante connexe de B est une classe d'équivalence. On en déduit que D_X est numériquement effectif puis que $R_H = \overline{\mathrm{NE}}(X) \cap \{z | D_X \cdot z = 0\}$, autrement dit, que R_H est bien une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. La contraction associée $c : X \to Y$ est clairement le quotient géométrique cherché. □

7. Classes de Chern des variétés uniréglées

L'anneau de Chow des cycles algébriques modulo l'équivalence rationnelle est un invariant important des variétés algébriques projectives et il est assez mal compris en général ; on cherche, dans ce paragraphe, à comparer les classes $c_2(X)$ et $c_1(X)^2$ d'une variété (projective lisse) X. On commence par quelques rappels.

Soit X une variété projective lisse de dimension n. S'il existe une forme de Kähler-Einstein ω sur X alors on a l'inégalité de Miyaoka-Yau (voir [**CO75**])

$$\int_X (c_2(X) - \frac{n}{2(n+1)} c_1(X)^2) \wedge \omega^{n-2} \geqslant 0.$$

On rappelle que X possède une métrique de Kähler-Einstein si $K_X \equiv 0$ ou si K_X est ample par les travaux de Yau ([**Yau78**]). Si $-K_X$ est ample, c'est-à-dire si X est une variété de Fano, la question est plus délicate : on ne connaît pas de condition nécessaire et suffisante garantissant l'existence d'une telle métrique.

On conjecture par ailleurs que le fibré tangent d'une variété de Fano X avec $\rho(X) = 1$ est stable ; on aurait alors l'inégalité de Bogomolov

$$\int_X (c_2(X) - \frac{n-1}{2n} c_1(X)^2) \wedge c_1(X)^{n-2} \geqslant 0.$$

C'est le cas si $r_X = 1$ [(25)] ([**Rei78**]) ou si $\dim(X) \leqslant 5$ ([**PW95**] et [**Hwa98**]).

On montre dans [**Dru06**] que certains cycles naturels, formellement analogues à ceux considérés ci-dessus sont effectifs. Soient X une variété projective lisse et connexe, H une famille dominante et presque complète de courbes rationnelles sur X. On pose $p := -K_X \cdot H$ et on reprend les notations du paragraphe 1.

(25) Ici r_X désigne l'indice de X (voir 8.1).

Théorème 7.1 ([**Dru06**, Théorème 5.8]). — *Si x est un point général de X alors le cycle*
$$[e_x(U_x)]\cdot(c_2(X)-\frac{p-1}{2p}c_1(X)^2)$$
est effectif.

Remarque 7.2. — Soient C une courbe complète lisse, $X := \mathbf{P}^{p-1}\times C$ ($p\geqslant 3$) et H la variété des « droites » contenues dans les $\mathbf{P}^{p-1}\times\{c\}$ pour $c\in C$; pour $x=(p,c)\in\mathbf{P}^{p-1}\times C$, le cycle
$$[e_x(U_x)]\cdot(c_2(X)-\frac{p-1}{2p}c_1(X)^2)=[\mathbf{P}^{p-1}\times\{c\}]\cdot(c_2(X)-\frac{p-1}{2p}c_1(X)^2)$$
est nul mais le cycle
$$c_2(X)-\lambda c_1(X)^2$$
n'est effectif pour aucun choix de $\lambda\in\mathbf{R}$ si $g(C)\geqslant 2$.

Corollaire 7.3. — *Soit X une variété de Fano de dimension n. On suppose $\rho(X)=1$ et que les classes dans $H^{2n-4}(X,\mathbf{Q})$ de deux surfaces algébriques arbitraires contenues dans X sont proportionnelles* [(26)]. *On a* [(27)]
$$\int_X (c_2(X)-\frac{i_X-1}{2i_X}c_1(X)^2)\wedge c_1(X)^{n-2}\geqslant 0.$$

On est assez loin d'une relation du type de l'inégalité de Bogomolov mais la méthode convenablement modifiée pourrait peut-être donner de meilleurs résultats, nous y reviendrons à la fin du paragraphe.

Démonstration du Théorème 7.1(esquisse). — On reprend les notations du paragraphe 1. Soit $\sigma_x\subset U_x$ la section de π_x contractée par e_x ; *via* l'isomorphisme $\sigma_x\simeq H_x$, le fibré normal de σ_x dans U_x, qui n'est autre que la restriction du fibré T_{U_x/H_x} à σ_x, s'identifie au fibré en droites $L_x:=\tau_x^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}(T_{X,x}^\vee)}(1)$. Il est en particulier ample et engendré par ses sections globales par le théorème 1.21. On a $p:=\dim(H_x)+2$ par la proposition 1.13.

Étape 1. Un calcul dans l'anneau de Chow de U_x montre que pour tout cycle α de codimension pure $k\geqslant 1$ sur X,
$$e_x^*\alpha=\pi_x^*(\pi_{x*}e_x^*\alpha)\cdot(\sigma_x+\pi_x^*c_1(L_x)).$$

En particulier, pour que $e_x^*\alpha$ soit effectif il faut et il suffit que $\pi_{x*}e_x^*\alpha$ le soit. On applique ce résultat au cycle $\alpha := c_2(X)-\frac{p-1}{2p}c_1(X)^2$: le cycle $[e(U_x)]\cdot(c_2(X)-\frac{p-1}{2p}c_1(X)^2)$ (qui est proportionnel au cycle $e_{x*}(e_x^*\alpha)$ par la formule de projection) est donc effectif si $\pi_{x*}e_x^*\alpha$ l'est.

Étape 2. L'interprétation modulaire de H_x et la formule de Grothendieck-Riemann-Roch permettent de calculer ensuite $c_1(H_x)$; on obtient la formule
$$-c_1(H_x)+(p-1)c_1(L_x)=\pi_{x*}{e_x}^*(c_2(X)-\frac{p-1}{2p}c_1(X)^2)=\pi_{x*}e_x^*\alpha.$$

Étape 3. *Conclusion.* Il reste à vérifier que le diviseur $K_{H_x}+(\dim(H_x)+1)L_x$ est effectif à équivalence linéaire près ; on démontre l'assertion par récurrence sur la dimension. □

(26) C'est par exemple le cas si $b_4(X)=1$ ou plus généralement si X est dominée par une variété Y avec $h^{n-2,n-2}(Y)=1$.
(27) Ici i_X désigne le pseudo-indice de X (voir 8.2).

Remarque 7.4. — Soient X une variété projective lisse et A un diviseur ample sur X. La conjecture de Fujita prédit que le système linéaire adjoint $|K_X + (\dim(X)+1)A|$ est sans point base ; nous n'avons heureusement besoin ici que d'un résultat bien plus faible.

On termine ce paragraphe par quelques spéculations. Soit X une variété de Fano de dimension n avec $\rho(X) = 1$. L'énoncé 7.1 donne l'inégalité de Bogomolov si $\dim(e_x(U_x)) \geqslant \dim(X) - 1$ mais par ailleurs, si $\dim(e_x(U_x)) = \dim(X)$ (resp. $\dim(e_x(U_x)) = \dim(X) - 1$) alors X est isomorphe à un espace projectif (resp. une quadrique).

On pourrait essayer de suivre les grandes lignes de l'argument précédent mais avec des familles H de courbes rationnelles telles que $e_x(U_x) = X$ qui ne sont donc plus nécessairement presque complètes. Soit H une telle famille et soit $[\ell] \in H$.

Il faudrait avant tout compactifier convenablement H et H_x. On pense bien sûr aux espaces de modules $\bar{M}(X,\beta)$ d'applications stables de courbes de genre zéro dans X avec $\beta := [\ell] \in H^{2n-4}(X,\mathbf{Q})$ et, en notant $\bar{U}$ la famille universelle, $\bar{\pi} : \bar{U} \to \bar{M}(X,\beta)$ et $\bar{e} : \bar{U} \to X$ les morphismes naturels, on pourrait considérer $\bar{M}(X,\beta)_x := \bar{\pi}(\bar{e}^{-1}(x))$. Il faudrait ensuite « calculer » $c_1(\bar{M}(X,\beta)_x)$ comme ci-dessus. Le calcul de $c_1(\bar{M}(X,\beta))$ est fait dans [**dJS06**] : un rapide coup d'oeil montre que la formule n'est pas facile à exploiter.

8. La conjecture de Mukai généralisée

La géométrie très riche des variétés de Fano a permis de déterminer complètement ces variétés en dimension $\leqslant 3$: en dimension 1, il n'y a que la droite projective, en dimension 2, il y a dix familles, $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et $\mathbf{P}^2$ éclaté en au plus 8 points en position générale, en dimension 3, elles se répartissent en 105 familles ([**Isk77**], [**Isk78**], [**Šok79**], [**MM82**] et [**MM03**]). Il n'y a bien sûr aucun espoir d'obtenir des résultats aussi précis en toutes dimensions ; il faut donc fixer certains invariants.

Définition 8.1. — L'indice r_X d'une variété de Fano X est l'entier

$$r_X := \max\{k \in \mathbf{N} \mid \exists D \text{ un diviseur sur } X \text{ tel que } -K_X \equiv kD\}.$$

L'indice r_X d'une variété de Fano X est toujours $\leqslant \dim(X)+1$ avec égalité si et seulement si $X \simeq \mathbf{P}^{\dim(X)}$ ([**KO73**]). Mukai a proposé l'inégalité

$$\rho(X)(r_X - 1) \leqslant \dim(X),$$

et l'a vérifiée en dimension $\leqslant 3$. L'indice ne donne en général aucune information sur les variétés de Fano X dont le nombre de Picard est $\geqslant 2$; en effet, l'indice de la variété produit $\mathbf{P}^k \times \mathbf{P}^{k+1}$ ($k \geqslant 1$) est 1. Il faut introduire un invariant plus fin.

Définition 8.2. — Le pseudo-indice i_X d'une variété de Fano X est l'entier

$$i_X := \min\{-K_X \cdot \ell \text{ où } \ell \text{ est une courbe rationnelle sur } X\}.$$

Le pseudo-indice i_X est un multiple entier de l'indice r_X, toujours $\leqslant \dim(X) + 1$ ([**Mor79**]) avec égalité si et seulement si $X \simeq \mathbf{P}^{\dim(X)}$ ([**CMSB02**] et [**Keb02a**]).

Nous proposons dans [**BCDD03**] la variante suivante de la conjecture de Mukai.

Conjecture 8.3 **(Conjecture de Mukai généralisée).** — *Pour toute variété de Fano X, de pseudo-indice i_X et de nombre de Picard $\rho(X)$, on a*

$$\rho(X)(i_X - 1) \leqslant \dim(X)$$

avec égalité si et seulement si X est isomorphe au produit de $\rho(X)$ copies de $\mathbf{P}^{i_X - 1}$.

Le premier résultat dans cette direction (qui motive en partie la conjecture précédente) est le suivant.

Théorème 8.4 ([**Wiś90**]). — *Soit X une variété de Fano. Si $i_X > \frac{\dim(X)+2}{2}$ alors $\rho(X) = 1$ et si $r_X = \frac{\dim(X)+2}{2}$ alors ou bien $\rho(X) = 1$ ou bien $X \simeq \mathbf{P}^{i_X - 1} \times \mathbf{P}^{i_X - 1}$.*

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 8.5 ([**BCDD03**]). — *La conjecture de Mukai est vraie si* $\dim(X) \leqslant 4$.

La méthode employée ici n'est finalement qu'une variation sur les techniques utilisées dans [**Wiś90**] que nous rappelons maintenant. Soient X une variété projective lisse et connexe et H une famille de courbes rationnelles sur X. On reprend les notations du paragraphe 1.

Lemme 8.6 ([**Ion86**]). — *Soit $x \in X$. Si H_x est une variété compacte alors* $\dim(e_x(U_x)) \geqslant -K_X \cdot H - 1$.

Démonstration du théorème 8.4. — Mori a montré dans [**Mor79**] que par tout point x de X passe une courbe rationnelle ℓ_x avec $-K_X \cdot \ell_x \leqslant \dim(X) + 1$. Il existe donc une famille dominante et presque complète H de courbes rationnelles sur X telle que $-K_X \cdot H \leqslant \dim(X) + 1$. On voit facilement que la famille H est complète puisque $i_X > \frac{\dim(X)+2}{2}$.

Soient R' une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$, $c : X \to Y$ la contraction associée et H' une famille complète (mais non nécessairement dominante) de courbes rationnelles sur X telle que, pour tout $[\ell'] \in H'$, ℓ' soit contractée par c. Soit $x \in e'(U')$. Les variétés H'_x et H_x étant compactes, on a

$$\dim(e'_x(U'_x)) > \frac{\dim(X)}{2}$$

et

$$\dim(e(U_x)) > \frac{\dim(X)}{2}$$

par le lemme 8.6 et on a donc

$$\dim(e'_x(U'_x) \cap e_x(U_x)) \geqslant 1.$$

Les classes dans $\mathrm{N}_1(X)$ des courbes tracées sur $e_x(U_x)$ étant toutes proportionnelles à la classe d'une courbe ℓ, $[\ell] \in H$ fixé (voir par exemple [**Kol96**, Corollary II 4.21]), l'arête R' est engendrée par la classe dans $\mathrm{N}_1(X)$ de la courbe ℓ et on a bien $\dim(\mathrm{N}_1(X)) = \rho(X) = 1$. □

Le principe de la démonstration de notre résultat est le suivant. On étudie les contractions associées aux arêtes du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$: si $\rho(X)$ et i_X sont simultanément « grands » alors il y a d'une part « beaucoup » de contractions et d'autre part, la dimension des fibres non triviales de ces contractions est « grande », on aboutit à une contradiction. La principale difficulté pour démontrer la conjecture par ce type de méthodes, qui explique l'hypothèse de petite dimension dans notre résultat, vient de ce que les fibres (non triviales) des différentes contractions sont éventuellement disjointes. On illustre cette difficulté par un autre de nos résultats qui généralise le lemme 8.6.

Soient X une variété projective lisse et $H_1, \ldots, H_k$ ($k \geqslant 1$) des familles *complètes* (non nécessairement dominantes) de courbes rationnelles sur X. Soient $x \in X$ et $L(H_1, \ldots, H_k, x) \subset X$ le fermé des points x' de X tels qu'il existe des courbes $\ell_1, \ldots, \ell_k$ avec

- $[\ell_i] \in H_i$,
- $\ell_i \cap \ell_{i+1} \neq \emptyset$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}$,

- $x \in \ell_1$ et $x' \in \ell_k$ [28].

Proposition 8.7 **([BCDD03**, Théorème 5.2]**).** — *Si les classes* $[H_1], \dots, [H_k]$ *dans* $N_1(X)$ *sont linéairement indépendantes et si le fermé* $L(H_1, \dots, H_k, x)$ *n'est pas vide alors*

$$\dim(L(H_1, \dots, H_k, x)) \geqslant -(\sum_{1 \leqslant i \leqslant k} K_X \cdot H_i) - k \geqslant k(i_X - 1).$$

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

Théorème 8.8 **([BCDD03**, Corollaire 5.3]**).** — *Soit X une variété de Fano. On suppose qu'il existe $\rho(X)$ famille complètes (pas nécessairement dominantes) $H_1, \dots, H_{\rho(X)}$ de courbes rationnelles sur X dont les classes dans $N_1(X)$ sont linéairement indépendantes telles que le fermé $L(H_1, \dots, H_{\rho(X)}, x)$ soit non vide. Alors $\rho(X)(i_X - 1) \leqslant \dim(X)$.*

La conjecture résiste encore aujourd'hui. Le résultat suivant est obtenu en développant les idées que nous venons d'exposer ici.

Théorème 8.9 **([ACO04]).** — *La conjecture est vraie si*

1. $\dim(X) = 5$,
2. $i_X \geqslant \frac{\dim(X)+3}{3}$ *et il existe une famille complète de courbes rationnelles sur X,*
3. $i_X \geqslant \frac{\dim(X)+3}{3}$ *et la contraction $c : X \to Y$ d'au moins une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ est telle que $\dim(Y) < \dim(X)$ ou*
4. $i_X \geqslant \frac{\dim(X)+3}{3}$ *et si, pour toute contraction birationnelle $c : X \to Y$ d'une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$, on a $\dim(\mathrm{Exc}(c)) = \dim(X) - 1$.*

Les deux derniers résultats que nous voulons mentionner sont obtenus par des méthodes *ad-hoc*.

Théorème 8.10. — *La conjecture de Mukai généralisée est vraie*

1. *pour les variétés de Fano toriques* (**[Cas06]**) *et*
2. *pour les variétés de Fano horosphériques* (**[Pas08]**).

[28] On a par exemple $L(H, x) = e_x(U_x)$.

Références

[ACO04] M. Andreatta, E. Chierici & G. Occhetta – « Generalized Mukai conjecture for special Fano varieties », *Cent. Eur. J. Math.* **2** (2004), no. 2, p. 272–293 (electronic).

[ADK08] C. Araujo, S. Druel & S. J. Kovács – « Cohomological characterizations of projective spaces and hyperquadrics », *Invent. Math.* (2008), à paraître.

[Ara06] C. Araujo – « Rational curves of minimal degree and characterizations of projective spaces », *Math. Ann.* **335** (2006), no. 4, p. 937–951.

[AW01] M. Andreatta & J. A. Wiśniewski – « On manifolds whose tangent bundle contains an ample subbundle », *Invent. Math.* **146** (2001), no. 1, p. 209–217.

[BCD07] L. Bonavero, C. Casagrande & S. Druel – « On covering and quasi-unsplit families of curves », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **9** (2007), no. 1, p. 45–57.

[BCDD03] L. Bonavero, C. Casagrande, O. Debarre & S. Druel – « Sur une conjecture de Mukai », *Comment. Math. Helv.* **78** (2003), no. 3, p. 601–626.

[BCHM06] C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon & J. McKernan – « Existence of minimal models for varieties of log general type », prépublication électronique `arXiv :math/0610203`, 2006.

[BDPP04] S. Boucksom, J.-P. Demailly, M. Păun & T. Peternell – « The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension », prépublication électronique `arXiv :math/0405285`, 2004.

[Bea83] A. Beauville – « Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle », *J. Differential Geom.* **18** (1983), no. 4, p. 755–782 (1984).

[Bea98] ———, « Fano contact manifolds and nilpotent orbits », *Comment. Math. Helv.* **73** (1998), no. 4, p. 566–583.

[Bea00] ———, « Symplectic singularities », *Invent. Math.* **139** (2000), no. 3, p. 541–549.

[BM01] F. A. Bogomolov & M. McQuillan – « Rational curves on foliated varieties », prépublication IHES, 2001.

[Bon00] L. Bonavero – « Sur des variétés toriques non projectives », *Bull. Soc. Math. France* **128** (2000), no. 3, p. 407–431.

[Bos01] J.-B. Bost – « Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2001), no. 93, p. 161–221.

[Cam91] F. Campana – « Une version géométrique généralisée du théorème du produit de Nadel », *Bull. Soc. Math. France* **119** (1991), no. 4, p. 479–493.

[Cam92] ———, « Connexité rationnelle des variétés de Fano », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **25** (1992), no. 5, p. 539–545.

[Cas06] C. Casagrande – « The number of vertices of a Fano polytope », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **56** (2006), no. 1, p. 121–130.

[CMSB02] K. Cho, Y. Miyaoka & N. I. Shepherd-Barron – « Characterizations of projective space and applications to complex symplectic manifolds », in *Higher dimensional birational geometry (Kyoto, 1997)*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 35, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002, p. 1–88.

[CO75] B.-y. Chen & K. Ogiue – « Some characterizations of complex space forms in terms of Chern classes », *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **26** (1975), no. 104, p. 459–464.

[dJS06] A. J. de Jong & J. Starr – « Divisor classes and the virtual canonical bundle for genus 0 maps », prépublication électronique `arXiv :math/0602642`, 2006.

[Dru98] S. Druel – « Structures de contact sur les variétés algébriques de dimension 5 », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **327** (1998), no. 4, p. 365–368.

[Dru99a] ———, « Structures de contact sur les variétés toriques », *Math. Ann.* **313** (1999), no. 3, p. 429–435.

[Dru99b] ———, « Structures de Poisson sur les variétés algébriques de dimension 3 », *Bull. Soc. Math. France* **127** (1999), no. 2, p. 229–253.

[Dru00a] ______, « Espace des modules des faisceaux de rang 2 semi-stables de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ et $c_3 = 0$ sur la cubique de $\mathbf{P}^4$ », *Internat. Math. Res. Notices* (2000), no. 19, p. 985–1004.

[Dru00b] ______, « Variétés algébriques dont le fibré tangent est totalement décomposé », *J. Reine Angew. Math.* **522** (2000), p. 161–171.

[Dru04a] ______, « Caractérisation de l'espace projectif », *Manuscripta Math.* **115** (2004), no. 1, p. 19–30.

[Dru04b] ______, « Singularités symplectiques », *J. Algebraic Geom.* **13** (2004), no. 3, p. 427–439.

[Dru06] ______, « Classes de Chern des variétés uniréglées », *Math. Ann.* **335** (2006), no. 4, p. 917–935.

[Dru08] ______, « Existence de modèles minimaux pour les variétés de type général (d'après Birkar, Cascini, Hacon et M^{c}Kernan) », *Astérisque* (2008), Exposé 982, Séminaire Bourbaki. Vol. 2007/2008, à paraître.

[Har70] R. Hartshorne – *Ample subvarieties of algebraic varieties*, Notes written in collaboration with C. Musili. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 156, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[HM04] J.-M. Hwang & N. Mok – « Birationality of the tangent map for minimal rational curves », *Asian J. Math.* **8** (2004), no. 1, p. 51–63.

[HM05] C. Hacon & J. M^{c}Kernan – « On the existence of flips », prépublication électronique `arXiv :math/0507597v1`, 2005.

[Hwa98] J.-M. Hwang – « Stability of tangent bundles of low-dimensional Fano manifolds with Picard number 1 », *Math. Ann.* **312** (1998), no. 4, p. 599–606.

[Hwa01] ______, « Geometry of minimal rational curves on Fano manifolds », in *School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry (Trieste, 2000)*, ICTP Lect. Notes, vol. 6, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2001, p. 335–393.

[Ion86] P. Ionescu – « Generalized adjunction and applications », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **99** (1986), no. 3, p. 457–472.

[Isk77] V. A. Iskovskikh – « Fano threefolds. I », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **41** (1977), no. 3, p. 516–562, 717.

[Isk78] V. A. Iskovskih – « Fano threefolds. II », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **42** (1978), no. 3, p. 506–549.

[Keb02a] S. Kebekus – « Characterizing the projective space after Cho, Miyaoka and Shepherd-Barron », in *Complex geometry (Göttingen, 2000)*, Springer, Berlin, 2002, p. 147–155.

[Keb02b] ______, « Families of singular rational curves », *J. Algebraic Geom.* **11** (2002), no. 2, p. 245–256.

[KK00] Y. Kachi & J. Kollár – « Characterizations of $\mathbf{P}^n$ in arbitrary characteristic », *Asian J. Math.* **4** (2000), no. 1, p. 115–121, Kodaira's issue.

[KK04] S. Kebekus & S. J. Kovács – « Are rational curves determined by tangent vectors ? », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **54** (2004), no. 1, p. 53–79.

[KM99] S. Keel & J. McKernan – « Rational curves on quasi-projective surfaces », *Mem. Amer. Math. Soc.* **140** (1999), no. 669, p. viii+153.

[KMM92] J. Kollár, Y. Miyaoka & S. Mori – « Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds », *J. Differential Geom.* **36** (1992), no. 3, p. 765–779.

[KO73] S. Kobayashi & T. Ochiai – « Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics », *J. Math. Kyoto Univ.* **13** (1973), p. 31–47.

[Kol96] J. Kollár – *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 32, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[KSCT07] S. Kebekus, L. Solá Conde & M. Toma – « Rationally connected foliations after Bogomolov and McQuillan », *J. Algebraic Geom.* **16** (2007), no. 1, p. 65–81.

[LeB95] C. LeBrun – « Fano manifolds, contact structures, and quaternionic geometry », *Internat. J. Math.* **6** (1995), no. 3, p. 419–437.

[Miy87] Y. Miyaoka – « Deformations of a morphism along a foliation and applications », in *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, p. 245–268.

[MM03] S. Mori & S. Mukai – « Erratum : "Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$" [Manuscripta Math. **36** (1981/82), no. 2, 147–162 ; MR0641971 (83f :14032)] », *Manuscripta Math.* **110** (2003), no. 3, p. 407.

[MM82] ———, « Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$ », *Manuscripta Math.* **36** (1981/82), no. 2, p. 147–162.

[Mok88] N. Mok – « The uniformization theorem for compact Kähler manifolds of nonnegative holomorphic bisectional curvature », *J. Differential Geom.* **27** (1988), no. 2, p. 179–214.

[Mor79] S. Mori – « Projective manifolds with ample tangent bundles », *Ann. of Math. (2)* **110** (1979), no. 3, p. 593–606.

[Mor82] ———, « Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective », *Ann. of Math. (2)* **116** (1982), no. 1, p. 133–176.

[Nad91] A. M. Nadel – « The boundedness of degree of Fano varieties with Picard number one », *J. Amer. Math. Soc.* **4** (1991), no. 4, p. 681–692.

[Pas08] B. Pasquier – « The pseudo-index of horospherical fano varieties », prépublication électronique `arXiv :0802.0612`, 2008.

[PW95] T. Peternell & J. A. Wiśniewski – « On stability of tangent bundles of Fano manifolds with $b_2 = 1$ », *J. Algebraic Geom.* **4** (1995), no. 2, p. 363–384.

[Rei78] M. Reid – « Bogomolov's theorem $c_1^2 \leq 4c_2$ », in *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977)* (Tokyo), Kinokuniya Book Store, 1978, p. 623–642.

[Rei83] ———, « Minimal models of canonical 3-folds », in *Algebraic varieties and analytic varieties (Tokyo, 1981)*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1983, p. 131–180.

[Rei87] ———, « Young person's guide to canonical singularities », in *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, p. 345–414.

[Šok79] V. V. Šokurov – « The existence of a line on Fano varieties », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **43** (1979), no. 4, p. 922–964, 968.

[Wah83] J. M. Wahl – « A cohomological characterization of $\mathbf{P}^n$ », *Invent. Math.* **72** (1983), no. 2, p. 315–322.

[Wiś90] J. A. Wiśniewski – « On a conjecture of Mukai », *Manuscripta Math.* **68** (1990), no. 2, p. 135–141.

[Yau78] S. T. Yau – « On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I », *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), no. 3, p. 339–411.

Stéphane DRUEL, Institut Fourier, UMR 5582 du CNRS, Université Joseph Fourier, BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères, France. • *E-mail :* `druel@ujf-grenoble.fr`
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~druel/`