Courbes rationnelles et applications à quelques problèmes de géométrie algébrique complexe

Stéphane Druel

Université Grenoble 1

26 Septembre 2008

On se donne une variété algébrique complexe X, projective, lisse et connexe.

On se donne une variété algébrique complexe X, projective, lisse et connexe.

L'un des premiers objets intrinsèquement attachés à X est son *fibré canonique* $\omega_X = \det(\Omega^1_X)$.

On se donne une variété algébrique complexe X, projective, lisse et connexe.

L'un des premiers objets intrinsèquement attachés à X est son *fibré canonique* $\omega_X = \det(\Omega^1_X)$.

Le m-ième *plurigenre* (m entier $\geqslant 0$) est $p_m(X) = h^0(X, \omega_X^{\otimes m})$.

On se donne une variété algébrique complexe X, projective, lisse et connexe.

L'un des premiers objets intrinsèquement attachés à X est son *fibré canonique* $\omega_X = \det(\Omega^1_X)$.

Le m-ième *plurigenre* (m entier $\geqslant 0$) est $p_m(X) = h^0(X, \omega_X^{\otimes m})$.

La *dimension de Kodaira* est

$$\kappa(X) = \limsup_{m \to +\infty} \frac{\log p_m(X)}{\log m}$$

On se donne une variété algébrique complexe X, projective, lisse et connexe.

L'un des premiers objets intrinsèquement attachés à X est son *fibré canonique* $\omega_X = \det(\Omega^1_X)$.

Le m-ième *plurigenre* (m entier $\geqslant 0$) est $p_m(X) = h^0(X, \omega_X^{\otimes m})$.

La *dimension de Kodaira* est

$$\kappa(X) = \limsup_{m \to +\infty} \frac{\log p_m(X)}{\log m}$$

$$(\text{« } p_m(X) \sim_{m \to +\infty} (\textit{constante}) m^{\kappa(X)} \text{ »}).$$

On se donne une variété algébrique complexe X, projective, lisse et connexe.

L'un des premiers objets intrinsèquement attachés à X est son *fibré canonique* $\omega_X = \det(\Omega^1_X)$.

Le m-ième *plurigenre* (m entier $\geqslant 0$) est $p_m(X) = h^0(X, \omega_X^{\otimes m})$.

La *dimension de Kodaira* est

$$\kappa(X) = \limsup_{m \to +\infty} \frac{\log p_m(X)}{\log m}$$

$$(\text{« } p_m(X) \sim_{m \to +\infty} (\mathit{constante}) m^{\kappa(X)} \text{ »}).$$

On a $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, \ldots, \dim(X)\}$.

Exemple

Si $\dim(X) = 1$ (X est une surface de Riemann compacte) alors

1. $\kappa(X) = -\infty$ si $g(X) = 0$,
2. $\kappa(X) = 0$ si $g(X) = 1$ et
3. $\kappa(X) = 1$ si $g(X) \geqslant 2$.

Exemple

Si $\dim(X) = 1$ (X est une surface de Riemann compacte) alors

1. $\kappa(X) = -\infty$ si $g(X) = 0$,
2. $\kappa(X) = 0$ si $g(X) = 1$ et
3. $\kappa(X) = 1$ si $g(X) \geqslant 2$.

Exemple

Si X est une hypersurface de degré d d'un espace projectif $\mathbf{P}^N$ ($N \geqslant 2$) alors

1. $\kappa(X) = -\infty$ si $d \leqslant N$,
2. $\kappa(X) = 0$ si $d = N + 1$ et
3. $\kappa(X) = \dim(X)$ si $d \geqslant N + 2$.

On s'intéresse ici aux variétés avec $\kappa(X) = -\infty$ (*i.e.* pour tout $m \geqslant 0$, on a $p_m(X) = 0$).

On s'intéresse ici aux variétés avec $\kappa(X) = -\infty$ (*i.e.* pour tout $m \geqslant 0$, on a $p_m(X) = 0$).

Conjecture

On a $\kappa(X) = -\infty$ si et seulement si X est couverte par des courbes rationnelles (on dit alors que X est uniréglée).

Une courbe est dite *rationnelle* si c'est l'image d'une droite projective.

On s'intéresse ici aux variétés avec $\kappa(X) = -\infty$ (*i.e.* pour tout $m \geqslant 0$, on a $p_m(X) = 0$).

Conjecture

On a $\kappa(X) = -\infty$ si et seulement si X est couverte par des courbes rationnelles (on dit alors que X est uniréglée).

Une courbe est dite *rationnelle* si c'est l'image d'une droite projective.

On montre facilement que si X est uniréglée alors $\kappa(X) = -\infty$.

On s'intéresse ici aux variétés avec $\kappa(X) = -\infty$ (*i.e.* pour tout $m \geqslant 0$, on a $p_m(X) = 0$).

Conjecture

On a $\kappa(X) = -\infty$ si et seulement si X est couverte par des courbes rationnelles (on dit alors que X est uniréglée).

Une courbe est dite *rationnelle* si c'est l'image d'une droite projective.

On montre facilement que si X est uniréglée alors $\kappa(X) = -\infty$.

La conjecture est vraie si $\dim(X) \leqslant 3$ (Kawamata, Miyaoka, Mori, Shokurov ...).

On s'intéresse ici aux variétés avec $\kappa(X) = -\infty$ (*i.e.* pour tout $m \geqslant 0$, on a $p_m(X) = 0$).

Conjecture

On a $\kappa(X) = -\infty$ si et seulement si X est couverte par des courbes rationnelles (on dit alors que X est uniréglée).

Une courbe est dite *rationnelle* si c'est l'image d'une droite projective.

On montre facilement que si X est uniréglée alors $\kappa(X) = -\infty$.

La conjecture est vraie si $\dim(X) \leqslant 3$ (Kawamata, Miyaoka, Mori, Shokurov ...).

Exemple

Une hypersurface de degré $d \leqslant N$ dans $\mathbf{P}^N$ ($N \geqslant 2$) est couverte par des droites si $d \leqslant N - 1$ et par des coniques si $d = N$.

On peut retrouver certaines propriétés géométriques d'une variété en étudiant les courbes (rationnelles) qu'elle contient.

On peut retrouver certaines propriétés géométriques d'une variété en étudiant les courbes (rationnelles) qu'elle contient.

1. Existence de morphisme(s) $X \to Y$ avec $0 < \dim(Y) < \dim(X)$ (on « simplifie » X).

On peut retrouver certaines propriétés géométriques d'une variété en étudiant les courbes (rationnelles) qu'elle contient.

1. Existence de morphisme(s) $X \to Y$ avec $0 < \dim(Y) < \dim(X)$ (on « simplifie » X).
2. Caractérisations des espaces projectifs et des quadriques.

On note $D \cdot C$ le nombre d'intersection « $\#\{D \cap C\}$ » où $D \subset X$ est une hypersurface et $C \subset X$ est une courbe.

On note $D \cdot C$ le nombre d'intersection « $\#\{D \cap C\}$ » où $D \subset X$ est une hypersurface et $C \subset X$ est une courbe.

On pose

$$\mathrm{N}_1(X) = \{\text{1-cycles}\}/\{\text{1-cycles d'intersection 0 avec toute hypersurface}\}.$$

C'est un espace vectoriel réel de dimension finie $\rho(X)$.

On note $D \cdot C$ le nombre d'intersection « $\#\{D \cap C\}$ » où $D \subset X$ est une hypersurface et $C \subset X$ est une courbe.

On pose

$$\mathrm{N}_1(X) = \{\text{1-cycles}\}/\{\text{1-cycles d'intersection 0 avec toute hypersurface}\}.$$

C'est un espace vectoriel réel de dimension finie $\rho(X)$.

On note $\overline{\mathrm{NE}}(X) \subset \mathrm{N}_1(X)$ le sous-cône convexe fermé engendré par les classes des courbes contenues dans X (cône de Mori).

On note $D \cdot C$ le nombre d'intersection « $\#\{D \cap C\}$ » où $D \subset X$ est une hypersurface et $C \subset X$ est une courbe.

On pose

$$\mathrm{N}_1(X) = \{\text{1-cycles}\}/\{\text{1-cycles d'intersection 0 avec toute hypersurface}\}.$$

C'est un espace vectoriel réel de dimension finie $\rho(X)$.

On note $\overline{\mathrm{NE}}(X) \subset \mathrm{N}_1(X)$ le sous-cône convexe fermé engendré par les classes des courbes contenues dans X (cône de Mori).

Une *arête* de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ est une demi-droite $R \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ telle que, pour tout $z_1, z_2 \in \overline{\mathrm{NE}}(X)$, si $z_1 + z_2 \in R$ alors $z_1, z_2 \in R$.

On note K_X un diviseur canonique sur X, c'est-à-dire le diviseur des pôles et zéros d'une forme méromorphe de degré maximal, et $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X \geqslant 0} = \{z \in \overline{\mathrm{NE}}(X) | K_X \cdot z \geqslant 0\}$.

On note K_X un diviseur canonique sur X, c'est-à-dire le diviseur des pôles et zéros d'une forme méromorphe de degré maximal, et $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X \geqslant 0} = \{z \in \overline{\mathrm{NE}}(X) | K_X \cdot z \geqslant 0\}$.

Théorème (Kawamata, Kollár, Mori, Shokurov ...)

1. *Il existe une famille au plus dénombrable $(C_i)_{i \in I}$ de courbes rationnelles telle que, pour tout $i \in I$, $K_X \cdot C_i < 0$, $R_i = \mathbf{R}^+[C_i]$ soit une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ et*

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X \geqslant 0} + \sum_{i \in I} R_i.$$

On note K_X un diviseur canonique sur X, c'est-à-dire le diviseur des pôles et zéros d'une forme méromorphe de degré maximal, et $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X \geqslant 0} = \{z \in \overline{\mathrm{NE}}(X) | K_X \cdot z \geqslant 0\}$.

Théorème (Kawamata, Kollár, Mori, Shokurov ...)

1. *Il existe une famille au plus dénombrable* $(C_i)_{i \in I}$ *de courbes rationnelles telle que, pour tout* $i \in I$, $K_X \cdot C_i < 0$, $R_i = \mathbf{R}^+[C_i]$ *soit une arête du cône* $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ *et*
$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X \geqslant 0} + \sum_{i \in I} R_i.$$
2. *Soit* $i \in I$. *Il existe un (unique) morphisme projectif à fibres connexes* $c_i : X \to Y_i$ *(*Y_i *normale) tel que, pour toute courbe complète* $C \subset X$, $\dim(c_i(C)) = 0$ *si et seulement si* $[C] \in R_i$.

Le cône de Mori est en général très difficile à expliciter ; l'ensemble de ses arêtes dans le demi-espace $K_X < 0$ peut être infini

Le cône de Mori est en général très difficile à expliciter ; l'ensemble de ses arêtes dans le demi-espace $K_X < 0$ peut être infini (c'est le cas si X est le plan projectif éclaté en 9 points en position générale).

Le cône de Mori est en général très difficile à expliciter ; l'ensemble de ses arêtes dans le demi-espace $K_X < 0$ peut être infini (c'est le cas si X est le plan projectif éclaté en 9 points en position générale).

Comment caractériser « simplement » les courbes qui engendrent une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ *contenue dans le demi-espace* $K_X < 0$ *?*

Le cône de Mori est en général très difficile à expliciter ; l'ensemble de ses arêtes dans le demi-espace $K_X < 0$ peut être infini (c'est le cas si X est le plan projectif éclaté en 9 points en position générale).

Comment caractériser « simplement » les courbes qui engendrent une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ *contenue dans le demi-espace* $K_X < 0$ *?*

Si $\dim(X) = 2$, toute courbe rationnelle lisse C avec $K_X \cdot C = -1$ engendre une arête du cône de Mori.

On note $\mathrm{Chow}_1(X)$ l'ensemble des 1-cycles à coefficients entiers $\geqslant 0$ sur X

On note $\mathrm{Chow}_1(X)$ l'ensemble des 1-cycles à coefficients entiers $\geqslant 0$ sur X ; $\mathrm{Chow}_1(X)$ est réunion dénombrable de variétés projectives.

On note $\mathrm{Chow}_1(X)$ l'ensemble des 1-cycles à coefficients entiers $\geqslant 0$ sur X ; $\mathrm{Chow}_1(X)$ est réunion dénombrable de variétés projectives.

On note $\mathrm{RatCurves}(X)$ l'ouvert dont les points correspondent à des cycles réduits de support une courbe rationnelle.

On note $\mathrm{Chow}_1(X)$ l'ensemble des 1-cycles à coefficients entiers $\geqslant 0$ sur X ; $\mathrm{Chow}_1(X)$ est réunion dénombrable de variétés projectives.

On note $\mathrm{RatCurves}(X)$ l'ouvert dont les points correspondent à des cycles réduits de support une courbe rationnelle.

On se donne H une *famille de courbes rationnelles* sur X, c'est-à-dire une composante irréductible de $\mathrm{RatCurves}(X)$, et on note $\bar{H}$ son adhérence dans $\mathrm{Chow}_1(X)$.

On note $\mathrm{Chow}_1(X)$ l'ensemble des 1-cycles à coefficients entiers $\geqslant 0$ sur X ; $\mathrm{Chow}_1(X)$ est réunion dénombrable de variétés projectives.

On note $\mathrm{RatCurves}(X)$ l'ouvert dont les points correspondent à des cycles réduits de support une courbe rationnelle.

On se donne H une *famille de courbes rationnelles* sur X, c'est-à-dire une composante irréductible de $\mathrm{RatCurves}(X)$, et on note $\bar{H}$ son adhérence dans $\mathrm{Chow}_1(X)$.

Définition

On dit que H est numériquement complète s'il existe une demi-droite $R_H \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ telle que, pour tout $[C] \in \bar{H}$ et toute composante irréductible C' du support du cycle associé C, on ait $[C'] \in R_H$.

On note $\mathrm{Chow}_1(X)$ l'ensemble des 1-cycles à coefficients entiers $\geqslant 0$ sur X ; $\mathrm{Chow}_1(X)$ est réunion dénombrable de variétés projectives.

On note $\mathrm{RatCurves}(X)$ l'ouvert dont les points correspondent à des cycles réduits de support une courbe rationnelle.

On se donne H une *famille de courbes rationnelles* sur X, c'est-à-dire une composante irréductible de $\mathrm{RatCurves}(X)$, et on note $\bar{H}$ son adhérence dans $\mathrm{Chow}_1(X)$.

Définition

On dit que H est numériquement complète s'il existe une demi-droite $R_H \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ telle que, pour tout $[C] \in \bar{H}$ et toute composante irréductible C' du support du cycle associé C, on ait $[C'] \in R_H$.

Toute famille complète est numériquement complète.

Conjecture (Bonavero, Casagrande, –)

Toute famille dominante et numériquement complète de courbes rationnelles sur X engendre une arête de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ (contenue dans le demi-espace $K_X < 0$).

Conjecture (Bonavero, Casagrande, —)

Toute famille dominante et numériquement complète de courbes rationnelles sur X engendre une arête de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ (contenue dans le demi-espace $K_X < 0$).

L'hypothèse numériquement complète est nécessaire mais pas suffisante. En effet, soit Y une variété analytique compacte non projective et $Z \subset Y$ une sous-variété lisse telle que l'éclatement X de Y le long de Z soit une variété projective. La famille H des « droites » contractées est complète (donc numériquement complète) mais R_H n'est pas *en général* une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.

Conjecture (Bonavero, Casagrande, —)

Toute famille dominante et numériquement complète de courbes rationnelles sur X engendre une arête de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ (contenue dans le demi-espace $K_X < 0$).

L'hypothèse numériquement complète est nécessaire mais pas suffisante. En effet, soit Y une variété analytique compacte non projective et $Z \subset Y$ une sous-variété lisse telle que l'éclatement X de Y le long de Z soit une variété projective. La famille H des « droites » contractées est complète (donc numériquement complète) mais R_H n'est pas *en général* une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.

Théorème (Bonavero, Casagrande, —)

La conjecture est vraie si $\dim(X) \leqslant 4$.

Idée de la démonstration :

Idée de la démonstration : on étudie, pour $x \in X$, l'ensemble $V_H(x)$ des points de X qui peuvent être reliés à x par une chaîne de cycles paramétrés par $\bar{H}$; c'est un fermé de X si x est général.

Idée de la démonstration : on étudie, pour $x \in X$, l'ensemble $V_H(x)$ des points de X qui peuvent être reliés à x par une chaîne de cycles paramétrés par $\bar{H}$; c'est un fermé de X si x est général.

On peut montrer que si R_H est une arête de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ alors les fibres générales de la contraction correspondante sont les $V_H(x)$.

Idée de la démonstration : on étudie, pour $x \in X$, l'ensemble $V_H(x)$ des points de X qui peuvent être reliés à x par une chaîne de cycles paramétrés par $\bar{H}$; c'est un fermé de X si x est général.

On peut montrer que si R_H est une arête de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ alors les fibres générales de la contraction correspondante sont les $V_H(x)$.

On obtient la contraction cherchée quitte à modifier X.

Idée de la démonstration : on étudie, pour $x \in X$, l'ensemble $V_H(x)$ des points de X qui peuvent être reliés à x par une chaîne de cycles paramétrés par $\bar{H}$; c'est un fermé de X si x est général.

On peut montrer que si R_H est une arête de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ alors les fibres générales de la contraction correspondante sont les $V_H(x)$.

On obtient la contraction cherchée quitte à modifier X. On montre finalement qu'il existe un diviseur numériquement effectif D sur X tel que $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{D=0} = R_H$.

Idée de la démonstration : on étudie, pour $x \in X$, l'ensemble $V_H(x)$ des points de X qui peuvent être reliés à x par une chaîne de cycles paramétrés par $\bar{H}$; c'est un fermé de X si x est général.

On peut montrer que si R_H est une arête de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ alors les fibres générales de la contraction correspondante sont les $V_H(x)$.

On obtient la contraction cherchée quitte à modifier X. On montre finalement qu'il existe un diviseur numériquement effectif D sur X tel que $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{D=0} = R_H$.

Théorème (Bonavero, Casagrande, —)

Soit X une variété projective lisse et connexe. Si H est une famille dominante et numériquement complète de courbes rationnelles sur X et si $\dim(V_H(x)) \geqslant \dim(X) - 3$ pour $x \in X$ général alors R_H est une arête de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.

L'étude des courbes tracées sur une variété permet quelques fois de déterminer complètement la géométrie de la variété.

L'étude des courbes tracées sur une variété permet quelques fois de déterminer complètement la géométrie de la variété.

Théorème (Mori)

Soit X une variété projective lisse et connexe de dimension $n \geqslant 1$. Si T_X est ample alors $X \simeq \mathbf{P}^n$.

L'étude des courbes tracées sur une variété permet quelques fois de déterminer complètement la géométrie de la variété.

Théorème (Mori)

Soit X une variété projective lisse et connexe de dimension $n \geqslant 1$. Si T_X est ample alors $X \simeq \mathbf{P}^n$.

Théorème (Mori)

Soit X une variété projective lisse et connexe et soit $C \subset X$ une courbe irréductible. Si $K_X \cdot C < 0$ alors par tout point de C passe une courbe rationnelle.

L'étude des courbes tracées sur une variété permet quelques fois de déterminer complètement la géométrie de la variété.

Théorème (Mori)

Soit X une variété projective lisse et connexe de dimension $n \geqslant 1$. Si T_X est ample alors $X \simeq \mathbf{P}^n$.

Théorème (Mori)

Soit X une variété projective lisse et connexe et soit $C \subset X$ une courbe irréductible. Si $K_X \cdot C < 0$ alors par tout point de C passe une courbe rationnelle.

Théorème (Wahl, –)

Soient X une variété projective lisse et connexe de dimension $n \geqslant 1$ et L un fibré en droites ample sur X. Si $h^0(X, T_X \otimes L^{\otimes -1}) \neq 0$ alors (X, L) est isomorphe ou bien à $(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$ ou bien à $(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2))$.

Idée de la démonstration :

Idée de la démonstration : on étudie le feuilletage (singulier) $L \subset T_X$.

Idée de la démonstration : on étudie le feuilletage (singulier) $L \subset T_X$.

L'algébricité ou non des feuilles d'un feuilletage est une question délicate en général.

Idée de la démonstration : on étudie le feuilletage (singulier) $L \subset T_X$.

L'algébricité ou non des feuilles d'un feuilletage est une question délicate en général.

Théorème (Kebekus, Solá Conde, Toma)

Soient X une variété projective lisse, $B \subset X$ une courbe complète et $F \subset T_X$ un feuilletage régulier le long de B. On suppose que la restriction de F à B est un fibré vectoriel ample. Alors l'adhérence de la feuille passant par $x \in B$ est algébrique et elle est rationnellement connexe par chaînes si x est général dans B.

Idée de la démonstration : on étudie le feuilletage (singulier) $L \subset T_X$.

L'algébricité ou non des feuilles d'un feuilletage est une question délicate en général.

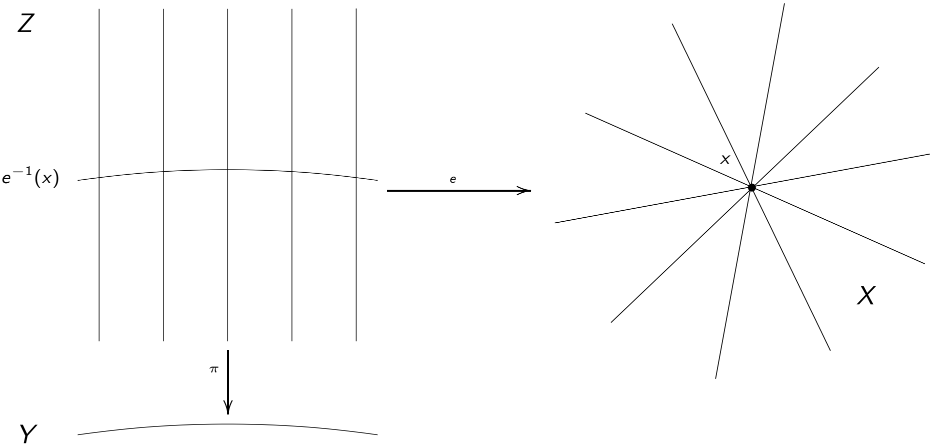
Théorème (Kebekus, Solá Conde, Toma)

Soient X une variété projective lisse, $B \subset X$ une courbe complète et $F \subset T_X$ un feuilletage régulier le long de B. On suppose que la restriction de F à B est un fibré vectoriel ample. Alors l'adhérence de la feuille passant par $x \in B$ est algébrique et elle est rationnellement connexe par chaînes si x est général dans B.

Conclusion : sous les hypothèses du théorème de Wahl, les adhérences des feuilles générales sont des courbes rationnelles.

On note Y la variété paramétrant les feuilles et $Z \subset Y \times X$ la variété d'incidence.

On note Y la variété paramétrant les feuilles et $Z \subset Y \times X$ la variété d'incidence.



On montre que X est un « cône » sur Y : Z est isomorphe à la variété $\mathbf{P}_Y(\mathcal{O}_Y \oplus L_Y)$ (au-dessus de Y) où L_Y est un fibré en droites ample sur Y et e s'identifie à la contraction de la section $\mathbf{P}_Y(\mathcal{O}_Y) \subset \mathbf{P}_Y(\mathcal{O}_Y \oplus L_Y)$, autrement dit, *via* l'isomorphisme précédent, $e^{-1}(x)$ s'identifie à $\mathbf{P}_Y(\mathcal{O}_Y)$ et e induit un isomorphisme de $Z \setminus e^{-1}(x)$ sur $X \setminus \{x\}$.

Théorème (–)

Soient X une variété projective lisse et connexe et L un fibré en droites sur X tel que $L \cdot C > 0$ pour toute courbe $C \subset X$. Si $h^0(X, T_X \otimes L^{\otimes -1}) \neq 0$ et si L n'est pas ample alors il existe une fibration en droites projectives $X \to Y$ telle que $L = T_{X/Y} \subset T_X$.

Théorème (Araujo,–, Kovács (conjecturé par Beauville))

Soient X une variété projective lisse et connexe de dimension $n \geqslant 1$ et L un fibré en droites ample sur X. On suppose $h^0(X, \wedge^k(T_X \otimes L^{\otimes -1})) \neq 0$ pour un entier $k \geqslant 1$. Alors, ou bien $(X, L) \simeq (\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$ ou bien $k = n$ et $(X, L) \simeq (Q_n, \mathcal{O}_{Q_n}(1))$ où $Q_n \subset \mathbf{P}^{n+1}$ est une quadrique lisse de dimension n.

Théorème (Araujo,–, Kovács (conjecturé par Beauville))

Soient X une variété projective lisse et connexe de dimension $n \geqslant 1$ et L un fibré en droites ample sur X. On suppose $h^0(X, \wedge^k(T_X \otimes L^{\otimes -1})) \neq 0$ pour un entier $k \geqslant 1$. Alors, ou bien $(X, L) \simeq (\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$ ou bien $k = n$ et $(X, L) \simeq (Q_n, \mathcal{O}_{Q_n}(1))$ où $Q_n \subset \mathbf{P}^{n+1}$ est une quadrique lisse de dimension n.

Théorème (Miyaoka)

Soit X une variété projective lisse et connexe, de dimension $n \geqslant 1$ et soit A un diviseur ample sur X. Si X n'est pas uniréglée alors il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que le fibré vectoriel $\Omega^1_{X|C}$ soit numériquement effectif pour toute courbe C intersection complète d'éléments généraux du système linéaire $|kA|$.

Théorème (Araujo,−, Kovács (conjecturé par Beauville))

Soient X une variété projective lisse et connexe de dimension $n \geqslant 1$ et L un fibré en droites ample sur X. On suppose $h^0(X, \wedge^k(T_X \otimes L^{\otimes -1})) \neq 0$ pour un entier $k \geqslant 1$. Alors, ou bien $(X, L) \simeq (\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$ ou bien $k = n$ et $(X, L) \simeq (Q_n, \mathcal{O}_{Q_n}(1))$ où $Q_n \subset \mathbf{P}^{n+1}$ est une quadrique lisse de dimension n.

Théorème (Miyaoka)

Soit X une variété projective lisse et connexe, de dimension $n \geqslant 1$ et soit A un diviseur ample sur X. Si X n'est pas uniréglée alors il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que le fibré vectoriel $\Omega^1_{X|C}$ soit numériquement effectif pour toute courbe C intersection complète d'éléments généraux du système linéaire $|kA|$.

On a $L^{\otimes k} \subset \wedge^k T_X \simeq (\Omega^k_X)^\vee$ et Ω^1_X n'est donc pas génériquement nef.

Question

L'énoncé du théorème est-t-il vrai pour d'autres représentations de $\mathrm{GL}(\mathbf{C}^n)$ que $\wedge^k(\mathbf{C}^n)$?

Question

L'énoncé du théorème est-t-il vrai pour d'autres représentations de $\mathrm{GL}(\mathbf{C}^n)$ que $\wedge^k(\mathbf{C}^n)$?

Théorème (Araujo, –, Kovács)

Soient X une variété projective lisse et connexe de dimension $n \geqslant 1$ et L un fibré en droites ample sur X. On suppose $\rho(X) = 1$ et $h^0(X, \otimes^k(T_X \otimes L^{\otimes -1})) \neq 0$ pour un entier $k \geqslant 1$. Alors, ou bien $(X, L) \simeq (\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$ ou bien $k = n \neq 2$ et $(X, L) \simeq (Q_n, \mathcal{O}_{Q_n}(1))$.

On dit que X est une *variété de Fano* si son *fibré anticanonique* $\omega_X^{\otimes -1}$ est ample ; on a alors $\kappa(X) = -\infty$ et X est uniréglée (Mori).

On dit que X est une *variété de Fano* si son *fibré anticanonique* $\omega_X^{\otimes -1}$ est ample ; on a alors $\kappa(X) = -\infty$ et X est uniréglée (Mori).

Exemple

Une hypersurface (lisse et connexe) de degré d dans $\mathbf{P}^N$ ($N \geqslant 2$) est de Fano si et seulement si $d \leqslant N$.

On dit que X est une *variété de Fano* si son *fibré anticanonique* $\omega_X^{\otimes -1}$ est ample ; on a alors $\kappa(X) = -\infty$ et X est uniréglée (Mori).

Exemple

Une hypersurface (lisse et connexe) de degré d dans $\mathbf{P}^N$ ($N \geqslant 2$) est de Fano si et seulement si $d \leqslant N$.

Théorème (Kollár, Miyaoka, Mori)

Il n'y a qu'un nombre fini de types de déformation de variétés de Fano de dimension donnée, autrement dit, étant donné un entier $n \geqslant 1$, il existe une variété quasi-projective T et un morphisme propre et lisse $\mathcal{X} \to T$ tels que toute variété de Fano de dimension n soit isomorphe à l'une des variétés $\mathcal{X}_t$ pour un point $t \in T$ convenable.