5 Exercices

5.1 *Weather in the Land of Oz*

In the Land of Oz they never have two nice days in a row. If they have a nice day they are just as likely to have snow as rain in the next . If they have snow (or rain) they have an even chance of having the same in the next day. If there is a change from snow or rain, only half of the time is this change to a nice day.

1. Montrer que le temps au pays d'Oz est une chaîne de Markov homogène et donner sa matrice de transition Π. Calculer Π^5.

   Vous avez prévu d'arriver au pays d'Oz un lundi mais pas dans n'importe quelles conditions : vous n'entreprenez le voyage qui s'il a plu au pays d'Oz le dimanche sinon vous repoussez votre voyage à la semaine suivante.
2. Quelle est la probabilité qu'il ne fasse pas beau le lundi de votre arrivée ?
3. Quelle est la probabilité qu'il fasse beau le samedi qui suit votre arrivée ?
4. Vous arrivez enfin et il neige. Quelle est la probabilité qu'il fasse beau le samedi ?
5. Le mardi vous dormez toute la journée et le mercredi il neige encore. Quelle est la probabilité qu'il ait fait beau pendant votre sommeil ?

5.2 *Propriétés des chaînes de Markov homogènes*

Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène alors :

1. Pour tous états $x_0, x_1, \ldots, x_n$ on a :

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)\pi(x_0, x_1)\pi(x_1, x_2)\cdots\pi(x_{n-1}, x_n)$$

2. Pour tous états $x, y \in E$ on a :

$$P(X_{n+k} = y|X_n = x) = (\pi^k)(x, y)$$

   où $(\pi^k)(x, y)$ est la $x^{\text{ème}}$ ligne, $y^{\text{ème}}$ colonne de la matrice Π^k.

5.3 *Chaîne à deux états*

Soit une chaîne de Markov à deux états 0 et 1 et de loi initiale P_0 et de matrice de transition :

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \qquad 0 \leq p, q \leq 1$$

1. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 0|X_0 = 0 \text{ et } X_2 = 0)$ et $\mathbb{P}(X_1 \neq X_2)$
2. Calculer $\mathbb{P}_n$ en fonction de $\mathbb{P}_{n-1}$. Puis $\mathbb{P}_n$ en fonction de $\mathbb{P}_0$. En déduire Π^n.

5.4 Météo

1. On suppose que le fait qu'il pleuve demain ou non dépend seulement du fait qu'il pleuve ou non aujourd'hui. On suppose que si il pleut aujourd'hui, il pleuvra demain avec une probabilité $1-\alpha$, et s'il ne pleut pas aujourd'hui, il pleuvra demain avec une probabilité β. On représente le temps qu'il fait par 0 quand il pleut et 1 quand il ne pleut pas. Ceci définit un processus X_n état du temps au jour n.
   (a) Écrire la matrice de transition Π.
   (b) Calculer la probabilité qu'il pleuve dans quatre jours sachant qu'il pleut aujourd'hui.
   (c) Calculer la probabilité qu'il pleuve quatre jours de suite sachant qu'il pleut aujourd'hui.
   (d) Montrer qu'il existe une probabilité invariante Q, la calculer en fonction de α et β
   (e) Convergence ?
2. On suppose maintenant que le fait qu'il pleuve ou non demain dépend aussi du temps qu'il a fait hier.
   - S'il a plu hier et aujourd'hui, il pleuvra demain avec une probabilité $1-\alpha$.
   - S'il a plu aujourd'hui et pas hier, il pleuvra demain avec une probabilité $1-\gamma$.
   - S'il a plu hier et pas aujourd'hui, il pleuvra demain avec une probabilité β.
   - S'il n'a plu ni hier ni aujourd'hui, il pleuvra demain avec une probabilité δ.

   (a) Si l'on considère le processus défini à la question 1, montrer que ce processus n'est plus une chaîne de Markov (sauf conditions particulières sur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$).
   (b) On définit alors le processus Y_n ainsi :
   - $Y_n = 0$ s'il pleut au jour n et au jour $n-1$.
   - $Y_n = 1$ s'il pleut au jour n et pas au jour $n-1$.
   - $Y_n = 2$ s'il pleut au jour $n-1$ et pas au jour n.
   - $Y_n = 3$ s'il ne pleut ni au jour n ni au jour $n-1$.

   Écrire la matrice de transition
   (c) Sachant qu'il a plu lundi et mardi, calculer la probabilité qu'il pleuve jeudi.
   (d) Sachant qu'il n'a plu ni samedi ni dimanche, calculer la probabilité qu'il pleuve mardi.
   (e) Déterminer la probabilité stationnaire et la proportion de jours où il pleut, observée sur un temps assez long, en supposant que $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in]0,1[$.