

Géométrie Complexe et Courbure Négative

Martin Deraux

Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches

Soutenu le 29 octobre 2010 à l'Institut Fourier devant un jury composé de

Gérard Besson (Institut Fourier)
Gilles Courtois (Université Paris VI)
Jean-Pierre Demailly (Institut Fourier)
Elisha Falbel (Université Paris VI)
Bruno Klingler (Université Paris VII)
Luc Lemaire (Université Libre de Bruxelles)

au vu des rapports de William M. Goldman (University of Maryland), Bruno Klingler
et Luc Lemaire.

A Sophie, Samaya et Myosotis.

Remerciements

J'ai eu la chance d'être exposé à des environnements de recherche assez différents, en Belgique, aux Etats-Unis, puis en France ; j'y ai trouvé des gens exceptionnels, pour leurs connaissances et capacités de recherche bien sûr, mais aussi pour leurs qualités humaines. C'est avec grand plaisir que je constate que nombre de mes collègues sont avant tout des amis.

Je remercie chaleureusement Domingo Toledo, qui a exercé une profonde influence sur tout le début de ma carrière. J'ai essayé de suivre ses conseils avec d'autant plus d'enthousiasme qu'il est touchant par sa chaleur humaine. Il m'a transmis un goût pour des domaines variés des mathématiques, allant de la géométrie algébrique à la topologie, en passant par la géométrie riemannienne et l'analyse complexe. Je pense à lui comme un modèle impressionnant d'ouverture et de culture mathématique. Il m'a appris à passer outre ma peur de sujets difficiles, et à essayer tant que possible de les apprivoiser. Il m'a aussi transmis le goût d'une certaine élégance, des preuves "sans calcul" (même si j'ai de nombreuses fois pêché dans l'excès de calcul, comme ma bibliographie en témoigne).

Pour l'aspect calculatoire, voire expérimental, de mes recherches, je dois beaucoup à Rich Schwartz. C'est en grande partie la beauté des travaux de Rich qui m'a convaincu de l'apport bénéfique que pouvait avoir l'expérimentation à l'aide de l'ordinateur pour les problèmes géométriques, en particulier pour l'étude des sous-groupes discrets des groupes de Lie.

J'ai également beaucoup bénéficié de mes contacts avec Elisha Falbel de son enthousiasme, son émerveillement devant l'avancée des mathématiques, et son inventivité. A mon arrivée à Paris, il a été un moteur auxiliaire infatigable pour ma lecture de l'article de Mostow donnant la première construction de réseaux non-arithmétiques de $PU(2, 1)$ (le fameux article qu'aucun homme sain d'esprit ne passerait son temps à lire en détail). Je lui en suis extrêmement reconnaissant.

J'ai trouvé ces dernières années un environnement de travail incroyablement agréable au coeur des montagnes grenobloises. Merci à tous mes collègues de l'Institut Fourier, et particulièrement aux participants du séminaire de théorie des cordes et mousquetons. Je me dois aussi de remercier Michel Brion, qui a su m'encourager à écrire ce texte dans des délais raisonnables.

Je suis très honoré que Bill Goldman, Bruno Klingler et Luc Lemaire aient accepté d'écrire un rapport sur mon habilitation, tous trois ont eu une influence importante sur ma carrière, à des moments très différents. Merci également à Gérard Besson, Gilles Courtois, Jean-Pierre Demailly et Elisha Falbel d'avoir accepté d'être dans mon jury.

Table des matières

1	Introduction	5
2	Quotients de la boule, le cas localement symétrique	9
2.1	Espaces symétriques	9
2.1.1	Sous-variétés totalement géodésiques	10
2.2	L'espace hyperbolique complexe	11
2.2.1	Classification des isométries	13
2.2.2	Sous-variétés totalement géodésiques de $H_{\mathbb{C}}^n$	13
2.3	Espaces symétriques hermitiens	13
2.4	Réseaux, rigidité de Mostow	14
2.5	Premières constructions de réseaux	14
2.5.1	Arithméticité, restriction des scalaires	15
2.5.2	Groupes provenant d'algèbres à division	17
2.5.3	Faux plans projectifs	17
2.5.4	Les travaux de Cartwright/Steger	18
2.5.5	Elements d'ordre fini, lemme de Selberg, orbifolds	19
2.6	Constructions géométriques	19
2.6.1	Théorème de Poincaré	19
2.6.2	Domaines de Dirichlet	21
2.6.3	Procédure de Giraud	21
2.6.4	Groupes de réflexions	23
2.6.5	Uniformisation	33
2.7	Arithméticité	36
2.7.1	Théorèmes de Margulis, Corlette, Gromov-Schoen	36
2.7.2	Réseaux non-arithmétiques	37
2.7.3	Homomorphismes non standards	38
2.7.4	Applications holomorphes entre quotients de la boule	38
3	Le cas non localement symétrique	41
3.1	Uniformisation des variétés kählériennes	41
3.2	Revêtement universel des variétés à courbure négative	44
3.3	Théorème de rigidité de Siu	45
3.4	Les variétés de Mostow-Siu	46
3.5	Pincement des métriques	51
3.5.1	Courbure positive	51
3.5.2	Courbure négative	52

3.5.3	Gromov-Thurston VS Mostow-Siu	54
4	Perspectives et projets de recherche	55
4.1	Domaines de Dirichlet	55
4.1.1	Certification de la combinatoire des polyèdres de Dirichlet	55
4.1.2	Utilisation du théorème de Giraud	55
4.1.3	Calcul du volume	56
4.2	Réseaux en dimension supérieure	56
4.2.1	Groupes de Coxeter	56
4.2.2	Domaines fondamentaux, domaines de Dirichlet	56
4.2.3	Structure des réseaux non-arithmétiques	56
4.3	Variétés de Mostow-Siu	57
4.3.1	Existence/construction en dimension supérieure	57
4.3.2	Pincement des métriques riemanniennes	57
4.3.3	Revêtement universel	57
4.3.4	Groupe fondamental	57

Chapitre 1

Introduction

Le thème central de ce mémoire est l'étude des variétés kähleriennes à courbure négative, de leur uniformisation et de leurs groupes fondamentaux.

Notons que les variétés auxquelles nous nous intéresserons sont aussi des variétés algébriques (projectives quand elles sont compactes, quasi-projectives si elles sont de volume fini). Les travaux que nous présentons se trouvent donc au coeur de plusieurs théories (géométrie riemannienne, géométrie complexe, géométrie algébrique), d'où les techniques et saveurs variées que nous rencontrerons au fil de ce mémoire.

Nous nous attacherons à deux types d'exemples assez différents, selon qu'ils admettent ou non une métrique à courbure sectionnelle holomorphe constante. S'il existe une métrique à courbure sectionnelle holomorphe constante, nous parlerons de *variété hyperbolique complexe*, ou de *quotient de la boule* (selon qu'on veuille insister sur des propriétés géométriques, ou des propriétés analytiques de ces variétés).

Les variétés hyperbolique complexes font l'objet du chapitre 2.1. Rappelons ici que si la courbure sectionnelle holomorphe de l'espace hyperbolique complexe est une constante négative, il n'en est pas de même de la courbure sectionnelle, qui est strictement négative, mais seulement $1/4$ -pincée. Il s'agit d'une certaine façon de la géométrie la moins compliquée qui ne soit pas à courbure constante ; nous verrons à plusieurs reprises que ceci engendre des difficultés significatives par rapport à la géométrie hyperbolique réelle. Il s'agit aussi d'un cadre relativement simple d'illustration des notions générales d'espaces $CAT(K)$ avec $K < 0$, et des résultats généraux valables en courbure négative (éventuellement pincée).

Les deux grandes questions inspiratrices sont, d'une part, l'existence et la classification des réseaux non-arithmétiques, et d'autre part, l'existence de réseaux engendrés par des réflexions, et ce en toute dimension. Les questions analogues dans le contexte de l'espace hyperbolique réel ont été résolues il y a une vingtaine d'années, mais la solution n'offre que peu de prise sur le cas hyperbolique complexe. De manière générale, les résultats classiques en géométrie hyperbolique réelle sont une inspiration importante, par simple analogie d'abord, mais aussi parce que l'espace hyperbolique complexe contient des sous-variétés totalement géodésiques hyperboliques réelles, ce qui permet souvent d'éclairer sa géométrie.

Nous aborderons l'aspect calculatoire de la recherche de réseaux (en particulier engendrés par des réflexions), dans la mesure où l'exploration à l'ordinateur semble une étape importante. Elle était déjà à la base de la découverte de Mostow des premiers réseaux non-arithmétiques de $PU(2,1)$. L'utilisation de l'ordinateur est également une source inspiratrice importante dans les travaux effectués dans [D2], [D4] et [D1], et elle s'est récemment

avérée particulièrement fructueuse dans [D7]. Rappelons que, mises à part les constructions arithmétiques (qui produisent des réseaux dans les groupes d'isométries de tous les espaces symétriques), on connaît à ce jour trois types de méthodes pour la construction de réseaux de $PU(n, 1)$, basées respectivement sur :

- les groupes de Coxeter engendrés par des réflexions complexes ;
- l'uniformisation de configurations de droites à la Hirzebruch ;
- l'uniformisation d'espaces de modules.

Jusqu'à ce jour, pour $n \geq 2$, tous les exemples de réseaux non-arithmétiques de $PU(n, 1)$ qui apparaissaient dans la littérature pouvaient être obtenus par la construction de Deligne-Mostow, c'est-à-dire qu'ils sont commensurables à l'un des 94 réseaux hypergéométriques (voir la liste donnée dans [99]). Comme annoncé dans [D7], dans un travail en commun avec J. Parker et J. Paupert, nous avons découvert une nouvelle famille de réseaux non-arithmétiques dans $PU(2, 1)$, dont aucun n'est commensurable à un réseau hypergéométrique.

Pour les dimensions $n \geq 3$, la construction hypergéométrique reste encore la seule à produire des réseaux non-arithmétiques de $PU(n, 1)$ (à commensurabilité près, on connaît un seul exemple, qui est un réseau non cocompact de $PU(3, 1)$). Nous rappellerons brièvement la théorie de Deligne-Mostow, et l'utiliserons pour construire des applications holomorphes entre certains quotients de la boule hypergéométriques, voir [D5]. La motivation initiale est ici d'expliquer la structure des applications holomorphes qui induisent des homomorphismes non-standard des groupes fondamentaux de quotients de la boule non-arithmétiques, mais nous présenterons aussi un résultat sur les applications d'oubli entre espaces de modules de Deligne-Mostow, qui permet d'obtenir des applications holomorphes entre quotients de la boule de dimensions différentes (au moins en petite dimension).

Les variétés qui admettent une métrique kählerienne à courbure sectionnelle négative, mais aucune métrique localement symétrique, font l'objet du chapitre 3. Ces variétés restent à l'heure actuelle extrêmement mystérieuses. Les seuls exemples dont on dispose à ce jour proviennent de variantes de la construction de Mostow-Siu, et sont liés à des variétés localement symétriques (elles admettent un revêtement ramifié vers un quotient de la boule, ou bien leur revêtement universel admet une application holomorphe vers la boule, qui est localement un revêtement ramifié simple).

Nous nous intéresserons tout d'abord aux constructions d'exemples présentes dans la littérature, et présenterons en particulier une généralisation de la construction des surfaces de Mostow-Siu qui permet d'obtenir des exemples non localement symétriques de dimension trois (voir [D3]). Nous rappellerons les grandes problèmes ouverts autour de la question générale de l'uniformisation des variétés kähleriennes à courbure négative. Nous donnerons enfin une estimation du pincement des métriques kähleriennes que l'on peut construire sur les surfaces de Mostow-Siu, ainsi que leurs analogue de dimensions trois (voir [D6]).

Publications

Publications issues de la thèse

- [D0] *On the universal cover of certain exotic Kähler surfaces of negative curvature*, Math. Ann. **329** (2004), no. 4, 653–683.

Autres publications

- [D1] *New constructions of fundamental polyhedra in complex hyperbolic space*, Acta Math. **194** (2005), 155–201 (avec E. Falbel et J. Paupert).
- [D2] *Dirichlet domains for the Mostow lattices*, Experiment. Math. **14** (2005), no. 4, 467–490.
- [D3] *A negatively curved Kähler threefold not covered by the ball*, Invent. Math. **160** (2005), 501–525.
- [D4] *Deforming the \mathbb{R} -Fuchsian $(4,4,4)$ -triangle group into a lattice*, Topology **45** (2006), 989–1020.
- [D5] *Forgetful maps between Deligne-Mostow ball quotients*, arXiv:0811.4286, à paraître dans Geom. Dedicata.
- [D6] *Almost quarter-pinched Kähler metrics and Chern numbers*, arXiv:0912.3726, à paraître dans Proc. Amer. Math. Soc. (avec H. Seshadri).

Prépublications

- [D7] *Census of the complex hyperbolic sporadic groups*, arXiv:1006.3437 (avec J. R. Parker et J. Paupert).

Notations, conventions

Sauf mention explicite du contraire, toutes nos variétés seront sans bord, et les variétés riemanniennes que l'on considèrera seront complètes. Dans la mesure où la plupart des variétés qui apparaissent dans ce mémoire sont des variétés complexes, par défaut la dimension n d'une variété complexe sera sa dimension complexe (il s'agit donc d'une variété réelle de dimension $2n$).

Les références bibliographiques sont de deux types : la liste des publications de l'auteur (référencées sous la forme [D0], [D1],...) apparaissent en page 7; les autres références bibliographiques (référencées sous la forme [1], [2],...) apparaissent en page 58.

Chapitre 2

Quotients de la boule, le cas localement symétrique

2.1 Espaces symétriques

Les espaces symétriques ont été classifiés par E. Cartan, voir [21]. On rappelle ici certains points de la classification, sans entrer dans les détails.

Nous prendrons en guise de classification grossière des espaces symétriques irréductibles celle donnée par le signe de la courbure, ce qui distingue les espaces symétriques de type compact (à courbure positive), ceux de type non-compact (à courbure négative), et enfin l'espace euclidien (à courbure nulle).

Rappelons ici qu'un espace symétrique est un espace homogène G/K où G est un groupe de Lie réel et K est un compact maximal. Dans la suite nous supposerons l'espace symétrique irréductible, ce qui revient à dire que G est simple.

De la symétrie ayant l'origine comme point fixe isolé, on déduit une involution de $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, dont $\mathfrak{k} = \text{Lie}(K)$ est le sous-espace de valeur propre 1, et dont on note \mathfrak{p} le sous-espace de valeur propre -1 . Ceci donne la décomposition de Cartan

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

qui satisfait

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}; \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}; \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}. \quad (2.1)$$

En fait ces conditions caractérisent les espaces symétriques parmi les espaces homogènes, et il est facile de voir que si $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ satisfait les conditions (2.1), alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ les satisfait aussi.

La correspondance entre les espaces symétriques associés à $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ et à $\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$ s'appelle *dualité de Cartan*. L'opérateur de courbure s'exprime de façon très concise en termes de crochets de Lie; il est donné (au signe près) par

$$R(X, Y)Z = \pm[[X, Y], Z] \quad (2.2)$$

sur $\mathfrak{p} \simeq T_{[e]}(G/K)$. D'après cette expression, il est clair que le passage de $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ à $\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$ change le signe de la courbure, et que le dual d'un espace symétrique de type compact est de type non-compact, et inversement.

Dans la suite, nous nous intéresserons presque exclusivement aux espaces symétriques de type non compact. Rappelons que le *rang* de $X = G/K$ est la dimension maximale d'un espace euclidien plongé dans X .

Les espaces symétriques de type non-compact de rang 1 sont

$$H_{\mathbb{R}}^n, H_{\mathbb{C}}^n, H_{\mathbb{H}}^n, H_{\mathbb{O}}^2$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$, où \mathbb{H} et \mathbb{O} désignent les quaternions et les octaves de Cayley, respectivement. Nous définirons $H_{\mathbb{C}}^n$ dans la section 2.2, et la définition des espaces hyperboliques réels et quaternioniens est essentiellement la même (voir aussi [27]). Pour le plan de Cayley, on pourra consulter par exemple [1]).

On notera que la plupart des exemples dans la liste ci-dessus sont deux à deux non-isométriques, les exceptions étant

$$H_{\mathbb{C}}^1 \simeq H_{\mathbb{R}}^2; \quad H_{\mathbb{H}}^1 \simeq H_{\mathbb{R}}^4.$$

Dans la liste ci-dessus, le seul espace symétrique *hermitien* (c'est-à-dire muni d'une forme de Kähler invariante, voir section 3.1 pour une définition de cette notion) est l'espace hyperbolique complexe $H_{\mathbb{C}}^n$.

Une conséquence importante du fait que les tenseurs de courbure de X et de son dual sont opposés est le *principe de proportionalité de Hirzebruch*, voir [45].

Théorème 2.1. (*Hirzebruch*) *Soit $X = G/K$ un domaine borné symétrique, et Γ un groupe sans torsion d'automorphismes de X , tel que $\Gamma \backslash X$ est compact. On note \check{X} le dual compact de X . Alors les nombres de Chern $c_I = c_{i_1, \dots, i_k}$ satisfont*

$$c_I(\Gamma \backslash X) = \chi(\Gamma \backslash X) \cdot c_I(\check{X}) \tag{2.3}$$

Ce résultat se généralise d'ailleurs au cas des quotients de volume fini (voir [67]), et au cas des groupes ayant de la torsion, à condition d'interpréter les classes de Chern au sens des orbifolds, voir section 2.5.5.

Exemple 2.2. Soit $X = \Gamma \backslash H_{\mathbb{C}}^2$ un quotient de la boule compact, où $\Gamma \subset PU(2,1)$ est sans torsion. Notons que $\check{X} = P_{\mathbb{C}}^2$ est le dual compact de l'espace symétrique $H_{\mathbb{C}}^2$, et que $c_1(\check{X}) = 3H$, où H est la classe hyperplane, $c_1^2(\check{X}) = 9H^2 = 9$, et $c_2(\check{X}) = \chi(\check{X}) = 3$. La formule (2.3) donne

$$c_1^2(X) = 3 c_2(X),$$

Pour un quotient compact de $H_{\mathbb{C}}^n$, on a plus généralement

$$c_1^n(X) = 2 \frac{n+1}{n} c_1^{n-2} c_2 = (n+1)^{n-1} c_n(X),$$

2.1.1 Sous-variétés totalement géodésiques

Notons qu'une sous-variété totalement géodésique (complète) d'un espace symétrique est un espace symétrique pour la restriction de la métrique de l'espace symétrique ambiant. Ceci se voit par exemple en observant qu'une variété riemannienne est localement symétrique si et seulement si son tenseur de courbure est parallèle pour la connexion de Levi-Civita, c'est-à-dire $\nabla R \equiv 0$.

La classification de toutes les inclusions d'espaces symétriques est alors un travail pénible mais pas particulièrement difficile. On se contentera de rappeler qu'en termes d'algèbres de Lie, il s'agit de chercher sous-espaces de l'espace tangent qui sont invariants par l'opérateur de courbure. Au vu de (2.2), on cherche un sous-espace $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$ telle que

$$[[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}], \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}. \quad (2.4)$$

Une telle sous-espace est appelée *triple système de Lie*.

Remarque 2.3. Les seuls espaces symétriques qui contiennent des hypersurfaces réelles totalement géodésiques sont les espaces à courbure constante, à savoir l'espace hyperbolique $H_{\mathbb{R}}^n$, l'espace euclidien \mathbb{E}^n , et la sphère \mathbb{S}^n munie de la métrique ronde standard.

2.2 L'espace hyperbolique complexe

Les notations de cette section seront constamment utilisées par la suite. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme hermitienne standard de signature $(n, 1)$ sur \mathbb{C}^{n+1} , que nous écrivons

$$\langle u, v \rangle = -u_0 \bar{v}_0 + u_1 \bar{v}_1 + \dots + u_n \bar{v}_n. \quad (2.5)$$

On note $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ l'application qui envoie un vecteur sur la droite vectorielle qui le contient. En tant qu'ensemble, $H_{\mathbb{C}}^n$ est défini comme l'ensemble des droites négatives pour la forme hermitienne ci-dessus, c'est-à-dire

$$H_{\mathbb{C}}^n = \{\pi(v) : \langle v, v \rangle < 0\}$$

Si l'on note (v_0, \dots, v_n) les coordonnées de \mathbb{C}^{n+1} , observons que $H_{\mathbb{C}}^n$ est contenu dans la carte affine $v_0 \neq 0$, et que pour les coordonnées inhomogènes

$$z_j = v_j/v_0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.6)$$

l'espace hyperbolique correspond simplement à la boule unité

$$\mathbb{B}_{\mathbb{C}}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1\}.$$

Il est clair que le groupe $U(n, 1)$ des transformations de \mathbb{C}^{n+1} qui préservent la forme hermitienne standard de signature $(n, 1)$ agit sur l'ensemble des vecteurs négatifs, et on vérifie facilement que l'action de ce groupe modulo son centre,

$$PU(n, 1) = U(n, 1)/\{\lambda \cdot \text{Id} : \lambda \in \mathbb{C}\}$$

est transitive sur les droites négatives, rendant $H_{\mathbb{C}}^n$ un espace homogène sous l'action de $PU(n, 1)$.

Le groupe d'isotropie de la droite $\mathbb{C}e_0$ engendrée par le vecteur de base standard $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$ est clairement isomorphe à $P(U(n) \times U(1))$, donc $H_{\mathbb{C}}^n$ est un quotient

$$PU(n, 1)/P(U(n) \times U(1)).$$

L'espace tangent à $H_{\mathbb{C}}^n$ en un point $\pi(w)$, $\langle w, w \rangle < 0$ s'identifie naturellement à

$$w^{\perp} = \{v \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle v, w \rangle = 0\},$$

sur lequel la forme Hermitienne se restreint à un produit scalaire Hermitien. Ceci donne une métrique riemannienne naturelle $g_{H_{\mathbb{C}}^n}$ sur $H_{\mathbb{C}}^n$ qui, à un facteur près, est l'unique métrique invariante sous l'action de $PU(n, 1)$.

La métrique s'écrit par exemple

$$g_{H_{\mathbb{C}}^n} = \frac{4}{(1 - \|z\|^2)^2} \left\{ \sum_{j,k=1}^n z_j \bar{z}_k d\bar{z}_j dz_k + (1 - \|z\|^2) \sum_{k=1}^n dz_k d\bar{z}_k \right\}, \quad (2.7)$$

voir [37], p.73. Ici et dans toute la suite de ce mémoire, on choisit la normalisation de la métrique de sorte que les droites complexes aient une courbure sectionnelle égale à -1 .

En effet, en restreignant la formule (2.7) à $z_2 = \dots = z_n = 0$, on obtient pour $z_1 = x_1 + iy_1$,

$$\frac{4dz_1 d\bar{z}_1}{(1 - |z_1|^2)^2} = \frac{4(dx_1^2 + dx_2^2)}{(1 - |z_1|^2)^2}.$$

Il peut être utile également de connaître la formule pour la distance entre deux points $z_1 = \pi(v_1)$ et $z_2 = \pi(v_2)$, donnée par

$$\cosh\left(\frac{1}{2}d(z_1, z_2)\right) = \frac{|\langle v_1, v_2 \rangle|}{\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle}}. \quad (2.8)$$

On se servira parfois de la formule suivante, que l'on peut voir comme une version de la formule de Gauss-Bonnet :

Théorème 2.4. *Soit $\Gamma \subset PU(n, 1)$ un réseau cocompact sans torsion et $M = \Gamma \backslash H_{\mathbb{C}}^n$. Alors*

$$Vol(M) = (-1)^n \frac{(4\pi)^n}{(n+1)!} \cdot \chi(M). \quad (2.9)$$

Ce résultat reste vrai pour les réseaux qui contiennent des éléments de torsion, à condition de remplacer $\chi(M)$ par la caractéristique d'Euler orbifold $\chi^{\text{orb}}(M)$ (voir section 2.5.5).

Dorénavant, $H_{\mathbb{C}}^n$ désignera l'ensemble des droites négatives de \mathbb{C}^{n+1} , muni de la métrique $g_{H_{\mathbb{C}}^n}$. On notera souvent \mathbb{B}^n ce même espace, utilisant de manière implicite l'identification décrite par (2.6).

Proposition 2.5. *$H_{\mathbb{C}}^n$ est un espace symétrique de rang un. Sa courbure sectionnelle est strictement négative, $\frac{1}{4}$ -pincée.*

Pour exhiber le caractère *symétrique* de cet espace homogène, on exhibe une isométrie ayant pour point fixe isolé $0 = \pi(e_0)$, à savoir

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (-z_1, \dots, -z_n).$$

Nous épargnerons au lecteur les calculs pénibles de courbure, notons simplement ici le fait suivant :

Proposition 2.6. *Les plans tangents aux droites complexes et aux plans totalement réels réalisent respectivement le minimum (-1) et le maximum $(-1/4)$ de la courbure.*

Ici, par *droite complexe* on entend l'intersection avec \mathbb{B}^n d'une droite affine dans \mathbb{C}^n (par exemple les points de coordonnées $(z_1, 0, \dots, 0)$, $|z_1| < 1$). Par *plan totalement réel*, on entend une sous-variété correspondant à un plongement totalement géodésique totalement réel de $H_{\mathbb{R}}^2$, dont le prototype est l'ensemble des $(x_1, x_2, 0, \dots, 0)$ pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1^2 + x_2^2 < 1$.

2.2.1 Classification des isométries

La description de $H_{\mathbb{C}}^n$ comme la boule unité de \mathbb{C}^n permet immédiatement de lui associer un bord $\partial H_{\mathbb{C}}^n$: en tant qu'ensemble il s'agit simplement de la sphère unité S^{2n-1} . En termes du modèle projectif, où l'on voit $H_{\mathbb{C}}^n$ comme l'ensemble des droites négatives pour la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ standard de signature $(n, 1)$, le bord correspond à l'ensemble des droites isotropes, c'est-à-dire les droites vectorielles $\mathbb{C}v$ engendrées par un vecteur v qui satisfait $\langle v, v \rangle = 0$.

Les isométries de $H_{\mathbb{C}}^n$ admettent clairement une extension à $\overline{H}_{\mathbb{C}}^n = H_{\mathbb{C}}^n \cup \partial H_{\mathbb{C}}^n$, et préservent $\partial H_{\mathbb{C}}^n$. Comme dans le contexte général des espaces à courbure négative, on fait la classification grossière des isométries en éléments elliptiques, paraboliques ou hyperboliques :

Définition 2.7. Soit $g \in PU(2, 1)$ une isométrie non-triviale. On dit que g est

- *elliptique* si g admet (au moins) un point fixe dans $H_{\mathbb{C}}^n$;
- *parabolique* si g admet un unique point fixe au bord de $\partial H_{\mathbb{C}}^n$;
- *hyperbolique* si g a exactement deux points fixes dans $\partial H_{\mathbb{C}}^n$.

Il est facile de voir que ces trois possibilités sont exhaustives, et mutuellement exclusives.

Dans le cas $n = 2$, un critère calculatoire simple permet de distinguer les trois cas en termes de la trace d'un représentant de matrices dans $SU(2, 1)$ (analogue au critère bien connu pour $PU(1, 1) \simeq PSL_2(\mathbb{R})$). Pour cela, on considère la fonction discriminant, qui détecte la présence de valeurs propres répétées, voir [37] p. 204. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction suivante :

$$f(z) = |z|^4 - 8\Re(z^3) + 18|z|^2 - 27.$$

Proposition 2.8. Soit A un élément de $SU(n, 1)$, et $\tau = \text{Tr}(A)$. On note $[A]$ la classe de A dans $PU(n, 1)$.

- $[A]$ est elliptique régulier si et seulement si $f(\tau) < 0$;
- $[A]$ est hyperbolique si et seulement si $f(\tau) > 0$.

Si $f(\tau) = 0$, $[A]$ est soit une réflexion complexe, soit parabolique, soit l'identité (voir [37] pour un énoncé plus détaillé). On rappelle ici que $[A]$ est dit *elliptique régulier* si A a des valeurs propres deux à deux distinctes.

2.2.2 Sous-variétés totalement géodésiques de $H_{\mathbb{C}}^n$

Notons $\frac{1}{4}H_{\mathbb{R}}^k$ la variété riemannienne obtenue à partir de l'espace hyperbolique réel en multipliant la métrique par $1/4$, de sorte que sa courbure soit identiquement égale à $-1/4$. Le résultat suivant est bien connu, voir par exemple [37], p. 82.

Proposition 2.9. Les seules sous-variétés totalement géodésiques de $H_{\mathbb{C}}^n$ sont isométriques à $H_{\mathbb{C}}^k$ ou $\frac{1}{4}H_{\mathbb{R}}^k$, pour $k \leq n$.

En particulier, pour $n \geq 2$, il n'y a pas d'hypersurface réelle totalement géodésique dans $H_{\mathbb{C}}^n$ (voir Remarque 2.3).

2.3 Espaces symétriques hermitiens

Les espaces symétriques irréductibles de type non-compact qui sont hermitiens (c'est-à-dire qui admettent une métrique kählerienne invariante) sont de la forme G/K avec $G =$

$SU(p, q)$, $Sp(2n, \mathbb{R})$, $SO^*(2n)$, $SO(2, n)$, $E_7(-25)$ or $E_6(-14)$. Les seuls espaces symétriques hermitiens de rang 1 sont les espaces hyperboliques complexes $H_{\mathbb{C}}^n$.

On s'attend généralement à des phénomènes très différents pour les espaces symétriques de rang 1 et ceux de rang supérieur (voir par exemple les résultats de Margulis, voir section 2.7.1). Dans le contexte des espaces symétriques hermitiens, nous n'illustrerons ces différences que par le résultat suivant (voir [60]) :

Théorème 2.10. *Soit Ω un espace symétrique hermitien irréductible de rang ≥ 2 , et $\Gamma \subset \text{Aut}(\Omega)$ un réseau sans torsion. Soit N, h une variété kählérienne à courbure négative. Alors toute application holomorphe $f : \Gamma \backslash \Omega \rightarrow N$ non-constante est une immersion totalement géodésique.*

On comparera avec les résultats des sections 2.7.3 et 2.7.4, qui montrent que ce résultat est faux sans l'hypothèse de rang supérieur à la source.

2.4 Réseaux, rigidité de Mostow

Définition 2.11. Soit G un groupe localement compact. Un sous-groupe discret $\Gamma \subset G$ est un *réseau* si $\Gamma \backslash G$ a une mesure de Haar finie.

Rappelons ici qu'une mesure de Haar est une mesure invariante par translations à gauche sur G (donc elle induit une mesure sur le quotient $\Gamma \backslash G$), et qu'une telle mesure est unique à multiplication par un réel positif près.

Dans le contexte de ce mémoire, on n'utilisera cette notion que dans le cas où G est un groupe semisimple, qui est le groupe d'isométries (ou plutôt sa composante connexe à l'identité) d'un espace symétrique $X = G/K$. La condition que $\Gamma \backslash G$ soit de volume fini est équivalente à demander que le quotient $\Gamma \backslash X$ soit de mesure finie pour la forme volume de la métrique symétrique.

Théorème 2.12. *(Mostow, Prasad) Soit G un groupe de Lie semisimple connexe, différent de $PSL_2(\mathbb{R})$. Soit $\Gamma \subset G$ un réseau irréductible, et soit $\rho : \Gamma \rightarrow G$ un homomorphisme injectif. Alors $\rho(\Gamma)$ est conjugué à Γ , c'est-à-dire il existe un $g \in G$ tel que $g\Gamma g^{-1} = \rho(\Gamma)$.*

2.5 Premières constructions de réseaux

Il existe des réseaux, et cela dans le groupe d'isométries de n'importe quel espace symétrique. Le point de départ est le fait que \mathbb{Z}^n est un réseau du groupe additif \mathbb{R}^n , et ceci suggère de considérer plus généralement les matrices à coefficients entiers dans certains groupes linéaires. Il est bien connu que $SL_n(\mathbb{Z})$ est un réseau de $SL_n(\mathbb{R})$, qui est non-cocompact. Plus généralement on a le résultat suivant (cf. [14]) :

Théorème 2.13. *(Borel, Harish-Chandra) Soit G un groupe algébrique linéaire défini sur \mathbb{Q} . Alors $G(\mathbb{Z})$ est un réseau dans $G(\mathbb{R})$.*

On dispose aussi d'un critère relativement simple pour déterminer quand ces réseaux sont cocompacts :

Théorème 2.14. *(Godement) Soit Γ un réseau dans $G(\mathbb{R})$. Alors Γ est cocompact si et seulement si Γ ne contient aucun élément non-trivial unipotent.*

On notera que $SL_n(\mathbb{R})$ est le groupe d'isométries de l'espace symétrique $SL_n(\mathbb{R})/SO(n)$, qui est de rang $n - 1$. En particulier c'est le groupe d'un espace de rang un seulement pour $n = 2$, et le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ est connu sous bien d'autres aspects, allant de la géométrie hyperbolique à la théorie des formes automorphes, en passant par la théorie géométrique des groupes.

Un cas particulier simple mais important est celui du groupe

$$U(n, 1, \mathbb{Z}[i]) = \{A \in GL_{n+1}(\mathbb{Z}[i]) : A^*HA = H\}$$

des matrices inversibles à coefficients dans les entiers de Gauss et qui préservent la forme hermitienne standard de signature $(n, 1)$. Ici H dénote la matrice (diagonale) de la forme (2.5) dans la base standard.

On voit le groupe

$$U(n, 1) = \{A \in GL_{n+1}(\mathbb{C}) : A^*HA = H\}$$

comme un groupe réel en plongeant $GL_n(\mathbb{C})$ dans $GL_{2n}(\mathbb{R})$, et en écrivant la condition $A^*HA = H$ comme des équations polynomiales (à coefficients entiers) en les parties réelle et imaginaire des coefficients de A . On notera encore $U(H)$ le \mathbb{Q} -groupe algébrique ainsi obtenu.

Les \mathbb{Z} -points de ce groupe correspondent alors précisément au groupe $U(n, 1, \mathbb{Z}[i])$, et le Théorème 2.13 affirme que ce sous-groupe est un réseau de $U(n, 1)$ (c'est un réseau non cocompact).

Pour $n = 2$, le groupe $PU(2, 1, \mathbb{Z}[i])$ est parfois appelé réseau de Gauss-Picard. On pourrait bien entendu prendre n'importe quel anneau d'entiers discret dans \mathbb{C} , par exemple les entiers d'Eisenstein $\mathbb{Z}[\omega]$, où $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Le groupe $PU(2, 1, \mathbb{Z}[\omega])$ est appelé réseau d'Eisenstein-Picard.

On connaît un domaine fondamental explicite pour l'action de ces deux groupes sur $H_{\mathbb{C}}^2$, voir [31] et [29].

2.5.1 Arithméticité, restriction des scalaires

On peut construire des exemples un peu plus généraux en prenant des matrices à coefficients dans l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ d'un corps de nombres $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$. Bien entendu, l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ n'est que très rarement discret dans \mathbb{C} , donc $GL_{n+1}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ est rarement discret dans $GL_{n+1}(\mathbb{C})$.

On supposera ici que $\mathbb{K} \supset \mathbb{L} \supset \mathbb{Q}$, où \mathbb{L} est un corps de nombres totalement réel, et $\mathbb{K} \supset \mathbb{L}$ est une extension quadratique purement imaginaire. On notera $\sigma_1, \tilde{\sigma}_1, \dots, \sigma_r, \tilde{\sigma}_r$ les plongements distincts de \mathbb{K} dans \mathbb{C} , en les regroupant de sorte que σ_j et $\tilde{\sigma}_j$ coïncident sur \mathbb{L} . On supposera aussi que \mathbb{K} est plongé dans \mathbb{C} de telle manière que σ_1 soit l'identité.

Il est facile de voir que l'image du plongement de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ dans \mathbb{C}^r donné par

$$x \mapsto (\sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x))$$

est d'image discrète. Dès qu'on se donne une forme hermitienne h définie sur \mathbb{K} , le groupe

$$U(H, \mathcal{O}_{\mathbb{K}}) = \{A \in GL_{n+1}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}) : A^*HA = H\}$$

peut donc être vu comme un sous-groupe discret

$$U(H, \mathcal{O}_{\mathbb{K}}) \subset \prod_{j=1}^r U(H^{\sigma_j}).$$

On notera ici que $GL_{n+1}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ est le groupe des matrices inversibles sur $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, on demande donc que leur déterminant soit un élément inversible de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.

On suppose maintenant que $H = H^{\sigma_1}$ est de signature $(n, 1)$, mais que pour tout $j \geq 2$, H^{σ_j} est une forme hermitienne définie, c'est-à-dire de signature $(n+1, 0)$ ou $(0, n+1)$. Ceci implique que les groupes $U(H^{\sigma_j})$, $j \geq 2$, sont compacts, et en particulier que la projection sur le premier facteur

$$\prod_{j=1}^r U(H^{\sigma_j}) \rightarrow U(H^{\sigma_1}) = U(h)$$

est de noyau compact. Cette projection envoie donc les ensemble discrets sur des ensembles discrets, donc $U(H, \mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ est un sous-groupe discret de $U(h)$.

Le contenu du Théorème 2.13 est que ce groupe discret est en fait un réseau. En effet, malgré que le groupe $U(H)$ ne soit a priori défini que sur \mathbb{L} , on vérifie que $\prod_{j=1}^r U(H^{\sigma_j})$ est défini sur \mathbb{Q} , dont les \mathbb{Z} -points correspondent à $U(H, \mathcal{O}_{\mathbb{K}})$.

On peut aussi vérifier que $U(H, \mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ est cocompact si et seulement si \mathbb{K} est une extension de degré > 2 de \mathbb{Q} , c'est-à-dire dans les notations ci-dessus si et seulement si $\mathbb{L} \neq \mathbb{Q}$.

Le procédé décrit ci-dessus, qui permet de passer d'un \mathbb{L} -groupe à un \mathbb{Q} -groupe, est un procédé général de la théorie des groupes algébriques sur les corps de nombres, et s'appelle *restriction des scalaires*.

Exemple 2.15. Soit $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$, $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\alpha)$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \omega)$, et h la forme hermitienne sur \mathbb{C}^3 dont la matrice dans la base standard est donnée par

$$H = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & \bar{\omega} \\ -1 & \alpha & -1 \\ \omega & -1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

On vérifie facilement que H est de signature $(2, 1)$, mais que l'automorphisme de \mathbb{K} qui envoie $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$ sur $(-\sqrt{5} - 1)/2$ transforme H en une matrice hermitienne de signature $(0, 3)$. Le groupe $U(H, \mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ est un réseau cocompact de $U(H) \simeq U(2, 1)$. Le contenu du théorème principal de [D4] (voir Théorème 2.39) est que le groupe de triangle $(4, 4, 4; 5)$ est commensurable à $U(H, \mathcal{O}_{\mathbb{K}})$.

En fait, pour un réseau préservant une forme hermitienne définie sur un corps de nombres, la condition que les conjugués de Galois non triviaux soient définis (positifs ou négatifs) est une condition nécessaire et suffisante d'arithméticité (voir le Lemme 4.1 de [62], par exemple).

En revanche, les réseaux qui proviennent d'une forme hermitienne sur un corps de nombres sont très spéciaux parmi les réseaux arithmétiques généraux :

Définition 2.16. Soit G un groupe de Lie semisimple, et Γ un réseau de G . Γ est dit *arithmétique* s'il existe un groupe algébrique S défini sur \mathbb{Q} et un homomorphisme

$$\varphi : S(\mathbb{R})^0 \rightarrow G$$

de noyau compact, tel que $\varphi(S(\mathbb{Z}) \cap S(\mathbb{R})^0)$ et Γ soient commensurables.

On voit donc que l'exemple ci-dessus, obtenu à partir du groupe des unités d'une forme hermitienne sur un corps de nombres (et dont les conjugués de Galois non triviaux sont définis), est bien un réseau arithmétique au sens de la définition 2.16.

2.5.2 Groupes provenant d'algèbres à division

Les sous-groupes *arithmétiques* des groupes d'isométries d'espaces symétriques sont en un sens complètement compris, grâce aux travaux de classifications dûs à Tits (voir [100], [107]).

Dans le cas particulier de $SU(n, 1)$, les réseaux arithmétiques généraux s'obtiennent à partir d'une forme hermitienne sur une algèbre à division (et non sur un corps de nombres comme dans la section 2.5). Nous expliquons maintenant plus précisément ce que l'on entend par "groupe provenant d'une forme hermitienne sur une algèbre à division", dans le contexte de $SU(n, 1)$, qui est un groupe de type 2A_n , dans la terminologie de [100].

On se donne, comme ci-dessus, un corps de nombres totalement réel \mathbb{L} et une extension quadratique imaginaire \mathbb{K} . On se donne également une algèbre à division E de centre \mathbb{K} , de degré d tel que $d|(n+1)$ (on écrit $n+1 = rd$ avec $r \in \mathbb{N}$), que l'on suppose munie d'une involution ε dont les points fixes dans \mathbb{K} sont précisément les éléments de \mathbb{L} .

On se donne enfin une forme ε -hermitienne non dégénérée h sur D^r , et on note $G = SU(h)$. On suppose que pour une place réelle v_0 de \mathbb{L} , $G(\mathbb{L}_{v_0}) \simeq SU(n, 1)$, mais que pour toute place archimédienne $v \neq v_0$, $G(\mathbb{L}_v) \simeq SU(n+1)$. On obtient alors un réseau en prenant le groupe $G(\mathcal{O}_{\mathbb{L}})$.

Définition 2.17. On appelle *réseau provenant d'une forme hermitienne sur une algèbre à division* un sous-groupe de $G(\mathbb{R})$ commensurable à $G(\mathcal{O}_{\mathbb{L}})$ comme dans le paragraphe précédent.

- Remarque 2.18.**
1. Dans le cas particulier où $d = 1$ (et donc $D = \mathbb{K}$), on se ramène aux groupes décrits dans la section 2.5.1, auquel cas on parlera de *réseau provenant d'une forme hermitienne sur un corps de nombres*.
 2. Dans le cas $n = 2$, comme $d|(n+1)$, il n'y a que deux possibilités pour le degré de D sur \mathbb{K} , à savoir $d = 3$ ou $d = 1$. Les réseaux correspondants sont parfois nommés réseaux de type I ou de type II, respectivement.

2.5.3 Faux plans projectifs

Une classe importante d'exemples de réseaux dans $PU(2, 1)$ est fournie par les groupes fondamentaux de *faux plans projectifs*, dont une classification complète a récemment été obtenue par Prasad et Yeung, voir [80].

Rappelons ici qu'un faux plan projectif est une surface complexe compacte qui a les mêmes nombres de Betti que $P_{\mathbb{C}}^2$, mais qui ne lui est pas biholomorphe (ni anti-biholomorphe). Il est bien connu, depuis la solution de la conjecture de Calabi par Aubin et Yau, que le revêtement universel d'une telle surface est biholomorphe à la boule unité \mathbb{B}^2 (voir section 3.1).

En particulier, pour tout faux plan projectif X , $\pi_1(X)$ se plonge comme un réseau Γ_X dans $PU(2, 1)$, dont on sait grâce à des travaux de Klingler [52] et Yeung [112] qu'il est arithmétique. Comme $\chi(X) = 3$, et que $\chi(X)$ doit forcément être un multiple de 3 (par la formule de Noether), les faux plans projectifs ont la caractéristique d'Euler minimale parmi toutes les surfaces hyperboliques complexes.

La formule de Gauss-Bonnet (Théorème 2.4) montre que les faux plans projectifs réalisent également le minimum du volume parmi les surfaces hyperboliques complexes, d'où leur importance dans l'étude générale des réseaux dans $PU(2, 1)$.

Comme on dispose d'une formule explicite pour le covolume d'un réseau arithmétique (due à Prasad), on peut faire la liste des groupes arithmétiques donnant des réseaux de $PU(2, 1)$ de petit volume, et essayer d'en extraire une classification des faux plans projectifs. C'est

essentiellement ce qui est fait dans [80], où les auteurs donnent dans une liste des faux plans projectifs de type I (voir Remarque 2.18), et conjecturent qu'il n'y en a aucun de type II.

On sait depuis peu qu'il n'y a aucun faux plan projectif de type II, grâce à des travaux de Cartwright et Steger (cf. section 2.5.4). Il serait intéressant néanmoins de démontrer que tous les faux plans projectifs doivent être de type I sans avoir recours à la classification.

On notera ici qu'un point important est que les réseaux de type II contiennent toujours des courbes complexes totalement géodésiques, que l'on peut supposer plongées quitte à passer à un revêtement fini.

Proposition 2.19. *Soit H une forme hermitienne définie sur un corps de nombres, comme dans la section 2.5.1, et notons $\Gamma = U(H, \mathcal{O}_{\mathbb{K}})$. Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ un sous-groupe normal sans torsion. Alors le quotient $\Gamma_0 \backslash \mathbb{B}^n$ contient une hypersurface complexe totalement géodésique plongée.*

Preuve: On choisit un vecteur v à coordonnées dans $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ tel que l'involution ι_v donnée par

$$\iota : x \mapsto x - 2 \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

est dans Γ (un tel v s'obtient en diagonalisant la forme H sur \mathbb{K}). Si v est de norme positive pour H , v^\perp donne une sous-boule \tilde{S} de \mathbb{B}^n .

Si $x, y \in \tilde{S}$ et $\gamma x = y$ pour un $\gamma \in \Gamma_0$, alors $\iota \gamma \iota = \gamma'$ pour un $\gamma' \in \Gamma_0$, et $\gamma' x = y$; comme l'élément $\gamma^{-1} \gamma'$ fixe x , il ne peut être que trivial (Γ_0 est supposé sans torsion). On a alors que γ et ι commutent, et donc γ est dans le stabilisateur de \tilde{S} . \square

Notons que si Γ est cocompact, la construction ci-dessus donne une hypersurface compacte; en effet, le stabilisateur dans Γ d'un vecteur v comme dans la preuve de la proposition est un groupe arithmétique de la même nature que Γ (remplacer H par sa restriction à v^\perp).

La proposition ci-dessus implique que le groupe fondamental d'un faux plan projectif ne peut pas se plonger comme un sous-groupe *normal* d'un réseau arithmétique de la forme $U(H, \mathcal{O}_{\mathbb{K}})$; en effet, si un faux plan projectif X contenait une courbe complexe plongée S , cette courbe définirait un diviseur ample (sa classe serait un multiple de K_X par l'hypothèse $b_2 = 1$). Ceci est impossible, puisque $S \cdot S = \frac{1}{2} \chi(S) < 0$ (le fibré normal d'une sous-boule $\mathbb{B}^1 \subset \mathbb{B}^2$ est une racine carrée de son fibré tangent).

Si le sous-groupe $\Gamma_0 \subset \Gamma$ n'est pas normal, l'existence d'une sous-variété plongée comme dans la proposition 2.19 n'est pas claire.

2.5.4 Les travaux de Cartwright/Steger

Les résultats de Cartwright et Steger annoncés dans [22] sont intéressants à plusieurs titres. D'abord ils donnent une réponse complètement satisfaisante à certains points laissés en suspens dans l'impressionnant article de Prasad et Yeung (ils permettent d'achever la classification, et de calculer le groupe fini $H^1(X, \mathbb{Z})$ pour tout faux plan projectif X).

Un autre aspect important est que Cartwright et Steger ont développé des outils d'investigation pour étudier certaines propriétés des réseaux arithmétiques de $PU(2, 1)$. Leurs méthodes sont suffisamment efficaces pour qu'ils puissent se permettre d'étudier un grand nombre de réseaux simultanément, ce qui dans le contexte de $PU(2, 1)$ semble être une avancée significative.

Pour se donner une idée de la complexité du problème, on notera le caractère abstrait de la définition des sous-groupes arithmétiques $PU(2, 1)$ obtenus à partir d'algèbres à division.

Il est en général assez difficile de produire des exemples concrets de matrices dans le groupe, sans parler de produire des *générateurs* pour le groupe arithmétique en question.

Pour démontrer qu'un certain ensemble fini est réellement une partie génératrice pour un réseau arithmétique donné, on peut profiter du fait que l'on connaît le volume de ce réseau (par la formule de Prasad). Cartwright et Steger utilisent alors la construction de Dirichlet (voir section 2.6.2), et estiment le volume du polyèdre correspondant numériquement.

Un autre point important est que Cartwright et Steger arrivent à obtenir des présentations pour les groupes arithmétiques *sans connaître de domaine fondamental pour l'action du groupe*.

Il leur suffit, étant donné un point $p_0 \in H_{\mathbb{C}}^2$ et un réel donné R (par exemple le diamètre du domaine de Dirichlet centré en p_0 , voir [22]), d'être capable de déterminer la liste de tous les éléments du groupe qui déplacent p_0 d'une distance $\leq R$.

On voit immédiatement que les deux points cruciaux ci-dessus dépendent de façon essentielle du fait que le réseau étudié soit arithmétique. L'étude des groupes sporadiques évoquée dans la section 2.6.4 est significativement plus compliquée.

2.5.5 Elements d'ordre fini, lemme de Selberg, orbifolds

Pour un réseau quelconque $\Gamma \subset G$ dans le groupe d'isométries d'un espace symétrique $X = G/K$ de type non compact, l'action de Γ sur X est propre, mais pas forcément discontinue. Comme le stabilisateur $\text{Stab}_G(x)$ d'un point $x \in X$ est compact (c'est un conjugué de K), il est clair que $\text{Stab}_\Gamma(x)$ est un groupe fini pour tout $x \in X$.

En particulier, le quotient $M = \Gamma \backslash X$ est localement homéomorphe au quotient de \mathbb{R}^n par un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$, c'est donc une *orbifold* (voir par exemple [26], §14 pour une définition détaillée). Dans ce cas Γ est le groupe fondamental de M au sens orbifold, que l'on notera $\pi_1^{\text{orb}}(M)$, et X est le revêtement universel de M au sens orbifold.

Les invariants orbifolds se calculent souvent simplement en passant à un revêtement fini qui soit une variété, ce qui existe par le résultat suivant :

Proposition 2.20. (*Lemme de Selberg*) *Soit Γ un sous-groupe finiment engendré de $SL_n(\mathbb{C})$. Alors il existe un sous-groupe sans torsion $\Gamma_0 \subset \Gamma$, avec $[\Gamma : \Gamma_0] < \infty$.*

Pour tout sous-groupe $\Gamma_0 \subset \Gamma$ d'incidence fini qui est *sans torsion*, les stabilisateurs $\text{Stab}_{\Gamma_0}(x)$ sont triviaux, et le quotient $\Gamma_0 \backslash X$ est une variété, qui admet bien entendu une application continue vers $\Gamma_0 \backslash X$, de degré égal à l'indice $[\Gamma : \Gamma_0]$.

La caractéristique d'Euler au sens orbifold se comportant bien par passage à revêtement ramifié fini, on a alors

$$\chi^{\text{orb}}(\Gamma \backslash X) = \frac{\chi(\Gamma_0 \backslash X)}{[\Gamma : \Gamma_0]}.$$

On peut aussi calculer $\chi^{\text{orb}}(\Gamma \backslash X)$ strate par strate, en regardant les strates ayant un groupe d'isotropie fixé (voir par exemple [D3]).

2.6 Constructions géométriques

2.6.1 Théorème de Poincaré

Un théorème central dans la recherche de groupes discrets est le théorème de Poincaré sur les polyèdres fondamentaux. Il donne des conditions relativement simples qui garantissent

qu'un groupe soit discret, à partir d'un polyèdre dont on montre qu'il est un domaine fondamental pour l'action du groupe; il faut prendre garde à certaines versions présentes dans la littérature. On pourra par exemple consulter [28], ou [62] pour une version spécifique dans le contexte de l'espace hyperbolique complexe.

On se donne un polyèdre P dans $H_{\mathbb{C}}^n$, et l'on supposera que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

HYPOTHÈSE 1 (RÉGULARITÉ): P a un nombre fini de faces, et chaque arête de P (une arête est par définition une face de codimension deux) est sur exactement deux faces de P . On notera \mathcal{F} l'ensemble des faces de P , et \mathcal{A} l'ensemble de ses arêtes.

HYPOTHÈSE 2 (IDENTIFICATION DE FACES): Pour chaque face F de P on se donne une isométrie α_F qui envoie F sur une face de P (on admet éventuellement que $\alpha_F(F) = F$), et telle que

$$P \cap \alpha_F(P) = \alpha_F(F).$$

On suppose par ailleurs que pour chaque arête, les images de P par les applications de faces ci-dessus pavent un voisinage de l'arête, dans le sens précis suivant. On considère les suites d'arêtes $a_n = F_n \cap G_n$ où F_n, G_n sont deux faces de P définies récursivement par

$$a_{n+1} = \alpha_{F_n}(a_n)$$

qui est par construction sur $G_{n+1} = \alpha_{F_n}(F_n)$ et sur une autre face que l'on note F_{n+1} .

Comme notre polyèdre est supposé fini, pour tout a_0 , il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n+1} = a_0$ et que la transformation de cycle

$$g_{a_0} = \alpha_{F_n} \alpha_{F_{n-1}} \cdots \alpha_{F_0}$$

est l'identité sur a_0 . Dans la suite de ce paragraphe, on choisit n minimal avec cette propriété.

HYPOTHÈSE 3 (CONDITIONS DE CYCLES): pour chaque arête a_0 comme ci-dessus, les polyèdres $P, \alpha_{F_0}^{-1}(P), \alpha_{F_0}^{-1} \alpha_{F_1}^{-1}(P), \dots, \alpha_{F_0}^{-1} \cdots \alpha_{F_n}^{-1}(P)$ pavent un secteur S_0 s'appuyant sur a_0 , la transformation g_{a_0} est d'ordre k_{a_0} et les images

$$S_0, g_{a_0}(S_0), g_{a_0}^2(S_0), \dots, g_{a_0}^{k_{a_0}-1}(S_0)$$

pavent un voisinage de l'arête a_0 .

Théorème 2.21. *Sous les hypothèses 1-3, l'ensemble $A = \{\alpha_f : f \text{ face de } P\}$ engendre un sous-groupe discret de $PU(n, 1)$, et P est un domaine fondamental pour l'action de $\langle A \rangle$ sur $H_{\mathbb{C}}^n$. De plus, le groupe $\langle A \rangle$ admet une présentation de la forme*

$$\langle \alpha_f, f \in \mathcal{F} \mid g_a^{k_a} = Id, a \in \mathcal{A} \rangle$$

Remarque 2.22. Dans le cas où $\alpha_F(F) = F$ pour une certaine faces F , on prendra soin de découper la face en deux, de sorte qu'il y ait une relation de cycle de la forme $\alpha_F^2 = Id$.

2.6.2 Domaines de Dirichlet

On utilisera souvent la construction suivante, due à Dirichlet, pour étudier l'action d'un groupe Γ sur un espace métrique X, d (en particulier sur l'espace hyperbolique complexe $H_{\mathbb{C}}^n$, muni de la métrique de Bergman).

On se donne un point $p_0 \in X$, et on pose pour tout sous-ensemble $W \subset \Gamma$

$$P_W = \{x \in X : \forall \gamma \in W, d(x, p_0) \leq d(x, \gamma p_0)\} \quad (2.10)$$

Γ est clairement discret si et seulement si P_{Γ} est d'intérieur non vide, mais cette dernière condition est en général extrêmement difficile à vérifier.

Il semble que le domaine obtenu par cette construction puisse être inutilement compliqué combinatoirement (voir [D2] et la simplification proposée dans [D1]), mais il a l'avantage d'être essentiellement canonique (il ne dépend que du choix de p_0), et de se prêter relativement facilement à l'expérimentation. Notons aussi que le domaine obtenu dépend en général du point p_0 choisi, de façon drastique dans certains cas (voir [78], et aussi [70]).

L'espoir est de trouver un sous-ensemble $W \subset \Gamma$ fini (ou tout au moins beaucoup plus petit que Γ) tel que l'on ait

$$P_W = P_{\Gamma}. \quad (2.11)$$

Dans ce cas de figure, il est facile de voir que l'ensemble W engendre Γ . En fait :

Proposition 2.23. *Si $P_W = P_{\Gamma}$, alors Γ est discret, engendré par W , et P_W est un domaine fondamental pour l'action de Γ modulo le stabilisateur de p_0 dans Γ .*

Cependant, pour un ensemble donné W , il est une fois de plus extrêmement difficile de vérifier si la condition (2.11) est satisfaite. On dispose de méthodes expérimentales pour deviner s'il existe un ensemble fini W qui fait l'affaire, et pour produire un candidat à un tel ensemble (voir la procédure de Giraud décrite dans [D4] et [D2], voir section 2.6.3).

Une fois qu'on dispose d'un bon candidat pour l'ensemble W , on peut déterminer si le polyèdre P_W , muni des identifications de faces naturelles, satisfait les hypothèses du théorème de Poincaré, voir section 2.6.1. Une telle démarche a été menée avec un certain succès dans [62] et aussi dans [D7] (voir néanmoins les difficultés rencontrées pour rendre rigoureuses les preuves obtenues avec l'aide d'un ordinateur, cf. [D2], [D1]).

2.6.3 Procédure de Giraud

Rappelons que l'on ne dispose d'aucun algorithme général pour déterminer si un sous-groupe d'un groupe de Lie est discret ; pour $PU(1, 1) \simeq PSL_2(\mathbb{R})$, on dispose de méthodes assez abouties, voir par exemple [34] et [83]. Déjà pour $PSL_2(\mathbb{C})$ (qui est le groupe d'isométries de $H_{\mathbb{R}}^3$, donc un espace symétrique à courbure *constante*), la situation est compliquée par l'existence de groupes géométriquement infinis, et on ne dispose pas d'algorithme pour déterminer la discrétude (voir néanmoins [82], et surtout SnapPea, programmé par Jeff Weeks).

On s'attend donc à une situation au moins aussi compliquée dans $H_{\mathbb{C}}^2$. Comme dans [82], on se base sur l'utilisation des domaines de Dirichlet. On supposera donné un ensemble fini S de matrices de $SU(2, 1)$, tel que $S = S^{-1}$, et l'on note

$$\Gamma = \langle S \rangle,$$

le groupe engendré par les éléments de S . On suppose que l'on peut calculer les composantes des matrices dans S avec une précision arbitraire ; en pratique, on travaillera dans un corps de

nombres, ce qui permet assez facilement de calculer avec une précision arbitraire la matrice correspondant à un mot quelconque en les éléments de S .

Dans la suite de cette section, on conserve les notations de la section 2.6.2. Etant donné $\gamma \in PU(2, 1)$ tel que $\gamma p_0 \neq p_0$, on notera par ailleurs

$$\hat{\gamma} = \{x \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 : d(x, p_0) = d(x, \gamma p_0)\}$$

l'hypersurface équidistante de p_0 et γp_0 .

Définition 2.24. Soit $w \in W$. On dit que w découpe une face de P_W si $w p_0 \neq p_0$ et $\hat{w} \cap P_W$ contient une composante de dimension trois.

Définition 2.25. Soient $w_1, w_2 \in W$ découpant des faces de P_W .

1. On dit que w_1 et w_2 *découpent une 2-face* de P_W si

$$\hat{w}_1 \cap \hat{w}_2 \cap P_W$$

contient une composante de dimension 2.

2. On dit que w_1 et w_2 *découpent une 2-face générique* de P_W si elles découpent une 2-face dans P_W , et que de plus $\hat{w}_1 \cap \hat{w}_2$ n'est pas une droite complexe.

Notons que w_1 et w_2 découpent un 2-face **non** générique dans P_W précisément quand $p_0, w_1 p_0$ et $w_2 p_0$ sont \mathbb{C} -colinéaires, c'est-à-dire contenus dans une même droite complexe (voir [D2]).

Par le théorème de Giraud (voir [35] ou [37]), si w_1 et w_2 découpent un 2-face générique, alors il y a précisément trois hypersurfaces équidistantes qui contiennent $\hat{w}_1 \cap \hat{w}_2$, dont seulement deux sont équidistantes de p_0 (la troisième est équidistante de $w_1 p_0$ et $w_2 p_0$).

En particulier, si $P_W = P_{\Gamma}$ et que $w_1, w_2 \in W$ découpent une 2-face générique de P_W , alors w_1^{-1} et $w_1^{-1} w_2$ découpent également une 2-face générique. Ceci suggère naturellement la procédure suivante, baptisée *procédure de Giraud* dans [D2].

On part d'une partie génératrice $S = W_0$, et on définit inductivement

$$W_{n+1} = G(W_n) \tag{2.12}$$

en posant $G(W) = W \cup \{w_1^{-1} w_2 : w_1, w_2 \text{ découpent une 2-face générique de } W\}$. Noter que si W est symétrique, alors $G(W)$ l'est aussi.

Définition 2.26. On dit que W est Giraud-fermé si $G(W) = W$.

L'espoir est que la suite W_n se stabilise après un nombre fini d'étapes en un ensemble Giraud-fermé. Ce sera le cas par exemple si le groupe engendré par S est un réseau, mais on ne dispose d'aucune borne sur le nombre d'étapes, ni sur le nombre de faces du domaine P_{Γ} . Notons cependant que les expériences décrites dans [D7] semblent montrer que pour certaines classes de groupes, la procédure de Giraud donne un test extrêmement efficace pour trier les réseaux et ceux qui ne sont pas discrets.

Si l'on obtient un ensemble Giraud-fermé W , on vérifie en détail si le polytope P_W satisfait les hypothèses du Théorème 2.21. On notera ici que ceci dépend bien entendu de la détermination précise de la combinatoire de P_W , ce qui est un problème calculatoire relativement pénible.

La difficulté de base est que le squelette (même de petite dimension) du polytope n'est pas totalement géodésique. Il est facile de voir que le 2-squelette ne peut être constitué exclusivement de 2-faces géodésiques ; même le 1-squelette contient souvent des digones, c'est-à-dire deux segments distincts joignant la même paire de sommets.

2.6.4 Groupes de réflexions

Groupes de réflexions réelles

Le point de départ de cette section est l'existence de polyèdres de Coxeter dans l'espace hyperbolique réel de petite dimension.

Définition 2.27. Un polyèdre de Coxeter est un polyèdre de volume fini bordé par des hyperplans qui ont des angles dièdres de la forme π/k , avec $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

Ici par des "hyperplans", on entend des sous-variétés totalement géodésiques de $H_{\mathbb{R}}^n$ de codimension un. De telles variétés sont isométriques à $H_{\mathbb{R}}^{n-1}$, et elles s'obtiennent facilement dans le modèle de Klein, puisqu'elles correspondent à la projectivisation des hyperplans linéaires de $\mathbb{R}^{n,1}$.

Les hyperplans sont paramétrés par les vecteurs $v \in \mathbb{R}^{n,1}$ de norme positive pour la forme standard, c'est-à-dire $\langle v, v \rangle > 0$. On notera v^\perp la sous-variété correspondante de $H_{\mathbb{R}}^n$ (il s'agit de la projectivisation de l'intersection avec le cône négatif de l'ensemble de vecteurs orthogonaux à v par rapport à la forme Lorentzienne standard).

Pour rappel, si v et w sont deux vecteurs positifs, v^\perp et w^\perp se rencontrent si et seulement si $|\langle v, w \rangle| / \sqrt{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle} < 1$, auquel cas leur angle θ est donné par

$$\cos \theta = \frac{|\langle v, w \rangle|}{\sqrt{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle}}.$$

Pour un vecteur positif v donné, on note R_v la réflexion de miroir v^\perp , décrite en coordonnées homogènes par

$$R_v(x) = x - 2 \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v.$$

Si v^\perp et w^\perp font un angle $2\pi/p$ pour un $p \in \mathbb{N}^*$, alors le produit $R_v R_w$ est d'ordre p .

Etant donné un polyèdre P dans $H_{\mathbb{R}}^n$, on note Γ_P le groupe engendré par les réflexions le long des faces de P .

Théorème 2.28. *Soit P un polyèdre de Coxeter de volume fini. Alors Γ_P est un réseau de $SO_0(n, 1)$.*

Ceci est une conséquence du théorème de Poincaré sur les polyèdres fondamentaux, voir section 2.6.1.

Remarque 2.29. On notera que la condition d'intégralité ci-dessus est naturelle, mais pas nécessaire pour avoir la discrétude du groupe engendré par les réflexions sur les faces du polyèdre. Il s'agit en fait d'une condition nécessaire et suffisante pour que le polyèdre soit un domaine fondamental pour l'action du groupe engendré par les réflexions sur ses faces.

Les polyèdres de Coxeter n'existent dans $H_{\mathbb{R}}^n$ que pour n relativement petit, voir [105] et [81] :

Théorème 2.30. *(Vinberg, Prokhorov) Pour $n \geq 30$, il n'existe pas de polyèdre de Coxeter compact dans $H_{\mathbb{R}}^n$. Pour $n \geq 996$, il n'existe pas de polyèdre de Coxeter de volume fini dans $H_{\mathbb{R}}^n$.*

On sait par contre que pour n fixé assez petit ($n \leq 6$ dans le cas compact, et $n \leq 19$ dans le cas de volume fini), il existe une infinité de polyèdres de Coxeter dans $H_{\mathbb{R}}^n$ (voir [3]).

Groupes de triangles

Dans $H_{\mathbb{R}}^2$, l'existence de polygones de Coxeter est évidente. Par exemple, rappelons qu'un triangle hyperbolique est déterminé à isométries près par ses angles. Plus précisément, on a :

Lemme 2.31. *Soient $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ des réels tels que $\alpha + \beta + \gamma < \pi$. Alors il existe un triangle dans $H_{\mathbb{R}}^2$ d'angles α, β, γ , unique à isométrie près.*

En particulier, quand les angles sont des parties entières de π , on obtient un exemple (très simple) de groupe de Coxeter :

Exemple 2.32. Pour tout triplet $p, q, r \in \mathbb{N}^*$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$, il existe un triangle dans $H_{\mathbb{R}}^2$ d'angles $\pi/p, \pi/q, \pi/r$, unique à isométrie près. Le groupe de Coxeter correspondant est communément appelé *groupe de triangle* hyperbolique, et il admet une présentation de la forme

$$\langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, (ab)^p, (bc)^q, (ca)^r \rangle \quad (2.13)$$

Les générateurs a, b et c correspondent aux réflexions fixant chaque côté du triangle. Le pavage de $H_{\mathbb{R}}^2$ obtenu pour $(p, q, r) = (2, 3, 7)$ est dessiné sur la Figure 2.1.

Noter qu'on pourrait aussi admettre des angles de la forme $\pi/\infty = 0$, les côtés correspondants du triangle étant alors parallèles, c'est-à-dire qu'ils sont asymptotiques en un même point à l'infini. On omet alors de la présentation les relations correspondant à des exposants infinis dans (2.13)

Revenons à la Remarque 2.29; il est naturel de considérer les triangles dont les angles sont des multiples rationnels de π , disons $k\pi/p, l\pi/q$ et $m\pi/r$.

Théorème 2.33. *Soit T un triangle d'angles α, β et γ dans $H_{\mathbb{R}}^2$. Le groupe Γ_T engendré par les réflexions fixant les côtés de T est discret si et seulement si (α, β, γ) est (à permutation près) dans la liste suivante :*

$$(0) \left(\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}\right) \quad (i) \left(\frac{2\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{q}\right) \quad (ii) \left(\frac{2\pi}{p}, \frac{2\pi}{p}, \frac{2\pi}{p}\right) \quad (iii) \left(\frac{2\pi}{p}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{p}\right) \\ (iv) \left(\frac{3\pi}{p}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{p}\right) \quad (v) \left(\frac{4\pi}{p}, \frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{p}\right) \quad (vi) \left(\frac{2\pi}{7}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}\right)$$

pour un certain choix de $p, q, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Ce résultat est essentiellement dû à Knapp, cf. [53]. Pour l'énoncé ci-dessus, voir le Lemme 2.1 de [49], ou le Théorème 7.1 de [D0].

Remarque 2.34. La plupart des groupes de triangles sont non-arithmétiques, la liste de ceux qui sont arithmétiques est donnée dans [97].

Groupes de réflexions complexes

Dans l'espace hyperbolique complexe, on n'a pas de bon analogue de la notion de polyèdre de Coxeter. La notion même de face est déjà problématique, dans la mesure où aucune hypersurface réelle de $H_{\mathbb{C}}^n$ n'est totalement géodésique (voir section 2.2.2). En particulier, quelles que soient les faces que l'on choisit pour border un polyèdre, elles ne seront jamais l'ensemble des points fixes d'une isométrie.

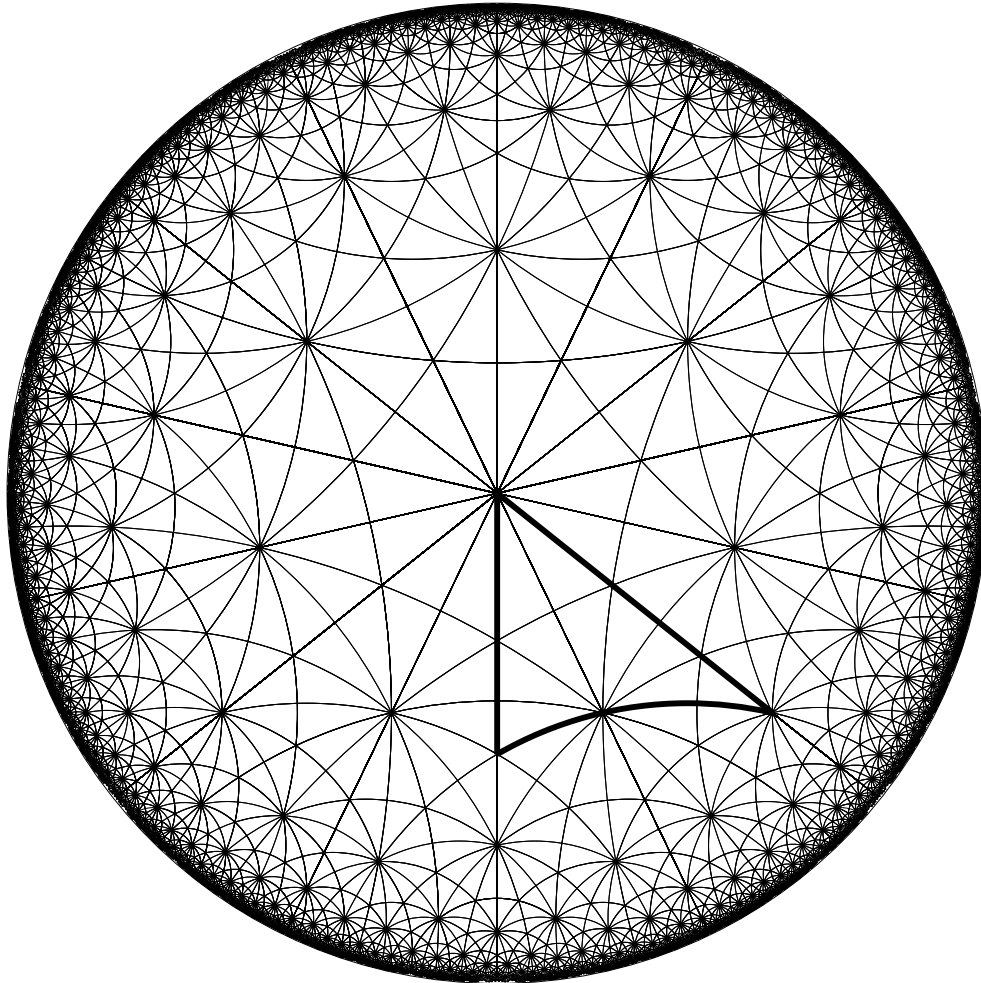


FIG. 2.1 – Pavage de $H_{\mathbb{R}}^2$ par des triangles $(2, 3, 7)$. On obtient le même groupe de réflexions en partant d'un triangle d'angles $\pi/3, \pi/7, 2\pi/7$ (en gras sur le dessin).

De la même façon qu'il y a deux types de sous-variétés totalement géodésiques très différents dans $H_{\mathbb{C}}^n$, il y a deux types de réflexions.

Rappelons que tous les automorphismes holomorphes et anti-holomorphes de la boule induisent des isométries de $H_{\mathbb{C}}^n$. Les isométries qui fixent l'hyperplan complexe $z_1 = 0$ ont la forme

$$z_1 \mapsto \zeta z_1$$

pour un nombre complexe ζ avec $|\zeta| = 1$. Plus généralement, on obtient les isométries qui fixent l'hyperplan correspondant à v^\perp , $\langle v, v \rangle > 0$ à partir de l'élément suivant de $U(n, 1)$:

$$R_{v, \zeta} : w \mapsto w + (\zeta - 1) \frac{\langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

toujours avec $|\zeta| = 1$.

Définition 2.35. L'isométrie induite par $R_{v, \zeta}$ est appelée *réflexion complexe* de multiplicateur ζ .

Etant donné un Lagrangien $L \subset H_{\mathbb{C}}^n$ (c'est-à-dire une sous-variété totalement réelle totalement géodésique de dimension maximale), il y a une et une seule isométrie non-triviale ι_L qui fixe L . Le prototype d'une telle sous-variété est $H_{\mathbb{R}}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$, qui est fixé par la réflexion réelle standard

$$\iota_0 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n).$$

Définition 2.36. On appelle *réflexion réelle* une isométrie non-triviale qui fixe un Lagrangien de $H_{\mathbb{C}}^n$.

Noter que toute réflexion réelle est un conjugué

$$g \iota_0 g^{-1}$$

de la réflexion standard par un élément $g \in PU(n, 1)$.

Il est naturel de considérer les sous-groupes de $PU(n, 1)$ engendrés par un ensemble fini de réflexions (complexes ou réelles), et de comparer les résultats avec ceux de la théorie des groupes de Coxeter dans $SO_0(n, 1)$. Nous ne nous intéresserons ici qu'au cas de réflexions complexes (l'étude des groupes engendrés par des réflexions réelles a une saveur assez différente de l'esprit de ce mémoire, voir par exemple [30], [108]).

Les premiers exemples connus semblent être les groupes étudiés par Picard à la fin du dix-neuvième siècle, voir [79], dans l'étude de la monodromie de certaines fonctions hypergéométriques. Le fait qu'ils soient engendrés par des réflexions complexes semblent être resté anecdotique à l'époque, mais ces mêmes groupes ont été redécouverts par Mostow, voir [62], puis généralisés dans [98], [25], et [63] (voir aussi [99]).

Définition 2.37. On appelle *réseau hypergéométrique* un des groupes qui apparaît dans les listes de Terada [98], Deligne-Mostow [25]/Mostow [63] ou Thurston [99].

L'importance de ces constructions est qu'elles permettent de reconstruire tous les exemples connus de réseaux non-arithmétiques dans $PU(n, 1)$ (au moins avant les résultats de [D7]).

On présentera ici l'approche "groupes de Coxeter", qui semble prometteuse pour construire de nouveaux réseaux non-arithmétiques dans $PU(2, 1)$. Ainsi on s'attachera à étudier des

groupes engendrés par des réflexions (d'ordre supérieur ou égal à deux, voir Définition 2.35), en imposant par exemples certaines relations de tresse au produit.

L'objectif est ici d'obtenir des réseaux non-arithmétiques, on connaît aussi un certain nombre de réseaux arithmétiques engendrés par des réflexions, voir par exemple les travaux d'Allcock, [2]. Une des grandes questions ouvertes est l'existence ou non d'une borne sur la dimension des espaces hyperboliques complexes dont le groupe d'isométries contient un réseau engendré par des réflexions (dans la veine des travaux de Vinberg et Prokhorov dans le cas hyperbolique réel, voir Théorème 2.30).

Dans les deux sections suivantes, nous retraçons les grandes étapes des progrès dans les constructions géométriques de groupes discrets engendrés par des réflexions complexes, depuis les résultats pionniers [62] de Mostow.

Groupes de triangles hyperboliques complexes

L'étude du cas particulier des représentations de groupes de triangles a pris son essor depuis le papier de Goldman/Parker [38], repris ensuite par Schwartz [85]. On regarde ici des représentations du groupe des réflexions réelles d'un triangle hyperbolique (p, q, r) , c'est-à-dire le groupe engendré par les involutions de $H_{\mathbb{R}}^2$ qui fixent chacun des trois côtés d'un triangle d'angles $\pi/p, \pi/q, \pi/r$, avec $p, q, r \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$. Rappelons que ce groupe a une présentation de la forme

$$T_{(p,q,r)} = \langle \iota_1, \iota_2, \iota_3 \mid \iota_1^2 = \iota_2^2 = \iota_3^2 = \text{id}, (\iota_1 \iota_2)^p = (\iota_2 \iota_3)^q = (\iota_3 \iota_1)^r = \text{id} \rangle$$

où l'on omet les relations faisant intervenir des puissances infinies. Schwartz s'est intéressé aux représentations

$$\rho : T_{(p,q,r)} \rightarrow PU(2, 1)$$

telles que $\rho(\iota_j)$ est une réflexion complexe pour tout $j = 1, 2, 3$. On appellera l'image d'une telle représentation un *groupe de triangle complexe*.

On dira que le groupe de triangle complexe est *non-dégénéré* si l'image de la représentation correspondante n'a pas de point fixe dans l'espace projectif, c'est-à-dire qu'elle ne fixe pas de point dans $H_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial H_{\mathbb{C}}^2$, et ne préserve pas de droite complexe dans $H_{\mathbb{C}}^2$.

L'hypothèse de non-dégérescence est importante au vu du résultat suivant, conséquence immédiate du théorème de rigidité de Toledo :

Théorème 2.38. *Soit S une surface compacte sans bord, et $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PU(2, 1)$ une représentation qui préserve une droite complexe. Alors toute déformation de ρ préserve une droite complexe.*

En effet, l'invariant de Toledo étant un invariant de déformation, il suffit de montrer qu'une représentation préserve une droite complexe si et seulement si elle a un invariant de Toledo maximal, ce qui est le contenu du théorème principal de [101].

On note $v_j, j = 1, 2, 3$ la polaire du miroir de $\rho(\iota_j)$, choisie telle que $\langle v_j, v_j \rangle = 1$. La réflexion $\rho(\iota_j)$ s'écrit alors

$$v \mapsto v - 2\langle v, v_j \rangle v_j,$$

et on voit facilement que, pour (p, q, r) fixé, l'espace de modules des classes de conjugaison dans $PU(2, 1)$ de groupes de triangles complexes non-dégénérés de type (p, q, r) est un intervalle,

paramétré par l'argument du produit hermitien triple

$$\langle v_1, v_2 \rangle \langle v_2, v_3 \rangle \langle v_3, v_1 \rangle.$$

En particulier, quand ce produit triple est réel, on obtient un groupe qui préserve une copie totalement géodésique de $H_{\mathbb{R}}^2$ contenue dans $H_{\mathbb{C}}^2$ et y agit de façon standard comme le groupe de triangle de départ. Une telle représentation est parfois appelée \mathbb{R} -Fuchsienne (on notera que l'image de la représentation est dans ce cas de covolume infini).

Dans le cas $p = q = r = \infty$, on connaît dans l'espace de modules des groupes de triangles idéaux tous les groupes discrets, et ils sont tous de covolume infini, voir [85]. Quand p, q, r sont suffisamment grands, Schwartz récupère une partie des résultats sur les triangles idéaux par un analogue hyperbolique complexe de la chirurgie de Dehn, voir [88].

Pour les triplets (p, q, r) généraux, on ne dispose essentiellement que des conjectures de Schwartz énoncées par exemple dans [86], dont certains aspects ont été infirmées par Parker. On sait que la représentation \mathbb{R} -Fuchsienne standard admet un voisinage de représentations fidèles discrètes (voir [43], [75]), mais on ne dispose d'aucune estimation explicite de la taille de cet intervalle.

Pour la famille des groupes de triangles de type $(4, 4, 4)$, on connaît des représentations discrètes *non-fidèles* intéressantes. D'une part le groupe $(4, 4, 4; 7)$ étudié dans [87] a permis de construire le premier exemple de structure CR sphérique (c'est-à-dire modelée sur $\partial H_{\mathbb{C}}^2$) sur une variété de dimension trois hyperbolique.

Le groupe de triangle $(4, 4, 4; 5)$ étudié dans [D4]. Ce dernier s'avère être un réseau arithmétique, de façon peut-être surprenante puisqu'on peut l'obtenir par déformation à partir d'un groupe de triangle \mathbb{R} -Fuchsien (donc de covolume infini).

Théorème 2.39. *Il existe un sous-groupe Γ de $SU(2, 1)$ engendré par trois réflexions complexes I_1, I_2 et I_3 dont les miroirs se coupent deux à deux avec un angle $\pi/4$, tel que la trace de $I_1 I_2 I_3 I_2$ est donnée par $(1 + \sqrt{5})/2$. Un tel groupe est unique à conjugaison près, et il s'agit d'un réseau arithmétique cocompact.*

La partie difficile est la compacité du quotient. On montre facilement que le groupe Γ est contenu dans un groupe arithmétique, mais il est loin d'être trivial de déterminer l'indice de Γ dans le groupe arithmétique en question.

On montre que Γ est d'indice fini en construisant une boule compacte explicite qui contient un domaine fondamental pour l'action de Γ , à l'aide de la construction des domaines de Dirichlet (voir section 2.6.2).

Réflexions d'ordre supérieur, groupes sporadiques

Les groupes étudiés dans [62] sont engendrés par une réflexion complexe R_1 d'ordre p et par un élément elliptique régulier d'ordre trois, que l'on note J . Par commodité on note

$$R_2 = J R_1 J^{-1}, \quad R_3 = J R_2 J^{-1}.$$

Les groupes de [62] sont ceux pour lesquels $p = 3, 4$ ou 5 , et pour lesquels pour tout $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$,

$$R_i R_j R_i = R_j R_i R_j. \tag{2.14}$$

Si l'on garde la même relation de tresse (2.14), mais que l'on autorise n'importe quel $p \geq 3$, on trouve certains des réseaux hypergéométriques (voir [64], [73]).

On notera aussi que, sous l'hypothèse que R_1 et R_2 satisfont la relation de tresse (2.14), la condition $p \leq 5$ est équivalente à demander que R_1R_2 soit elliptique. On vérifie aussi facilement que pour tous les groupes de Mostow (quel que soit $p \geq 3$), $R_1R_2R_3$ est elliptique.

Ceci conduit à une généralisation naturelle des groupes de Mostow : on demande seulement que R_1R_2 et $R_1R_2R_3$ soient elliptiques, sans imposer la relation de tresse (2.14). Parker et Paupert se sont intéressés à cette famille de groupes dans une série d'articles, voir [72], [74] et [76]. En utilisant le résultat de Conway-Jones [23] sur les relations entre cosinus rationnels, ils parviennent à trouver la liste de tous les groupes $\langle J, R_1 \rangle$ pour lesquels R_1R_2 et $R_1R_2R_3$ sont tous deux d'ordre fini.

Pour énoncer leurs résultats, il est utile de rappeler que la classe de conjugaison d'un élément de $PU(2, 1)$ est essentiellement déterminée par la trace d'un représentant dans $SU(2, 1)$, voir Proposition 2.8. Comme dans [74], on choisit donc les matrices des réflexions R_j dans $SU(2, 1)$, et on utilise comme paramètres l'ordre p des réflexions R_j , et le nombre complexe

$$\tau = \text{Tr}(R_1J).$$

Pour un $p \geq 2$ donné et $\tau \in \mathbb{C}$, il existe des R_1 comme ci-dessus (c'est-à-dire J elliptique régulier d'ordre 3, R_1 réflexion complexe d'ordre p , et $\text{trace}(R_1J) = \tau$), si et seulement si la matrice hermitienne

$$\begin{bmatrix} 2 \sin \frac{\pi}{2} & -ie^{-i\pi/3}\tau & ie^{i\pi/3}\bar{\tau} \\ ie^{i\pi/3}\bar{\tau} & 2 \sin \frac{\pi}{2} & -ie^{-i\pi/3}\tau \\ -ie^{-i\pi/3}\tau & ie^{i\pi/3}\bar{\tau} & 2 \sin \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

est de signature $(2, 1)$ (on pourrait admettre une forme de signature $(1, 2)$ également, mais les réflexions R_j que l'on obtient fixent alors des points isolés plutôt que des droites complexes de $H_{\mathbb{C}}^2$).

Si tel est le cas, le groupe est déterminé à conjugaison près par p et τ , et suivant les notations de [74] on le note

$$\Gamma\left(\frac{2\pi}{p}, \tau\right).$$

Théorème 2.40. *Si R_1R_2 et $R_1R_2R_3$ sont tous deux d'ordre fini, alors soit le groupe $\Gamma\left(\frac{2\pi}{p}, \tau\right)$ est un sous-groupe d'un réseau hypergéométrique, soit τ est l'une des valeurs σ_j , $j = 1, \dots, 9$ de la Table 2.1.*

Suivant la terminologie de [74], nous appellerons *groupes sporadiques hyperboliques complexes*, ou simplement *groupes sporadiques*, les groupes pour lesquels τ est égal à l'une des valeurs de la Table 2.1. On appellera aussi les valeurs $\sigma_j, \bar{\sigma}_j$ les valeurs sporadiques de τ .

En utilisant le théorème de Knapp (Théorème 2.33), Parker et Paupert ont montré que certaines valeurs sporadiques de τ ne produisaient aucun groupe discret :

Théorème 2.41. *Pour tout $p \geq 2$, les groupes $\Gamma(p, \tau)$ avec $\tau = \sigma_3, \bar{\sigma}_3, \tau = \sigma_8, \bar{\sigma}_8, \sigma_9, \bar{\sigma}_9$ sont non-discrets.*

Pour $p \neq 3, 5$, les groupes $\Gamma(p, \tau)$ avec $\tau = \sigma_6$ ou $\bar{\sigma}_6$ ne sont pas discrets.

À l'aide d'une version raffinée du programme utilisé pour étudier les domaines de Dirichlet de sous-groupes de $PU(2, 1)$ (voir les techniques décrites dans [D2] et [D4]), on peut se convaincre assez rapidement qu'il ne semble y avoir qu'un nombre fini de groupes discrets dans la liste, et que les groupes discrets que l'on obtient sont presque tous des réseaux.

À titre d'exemple de la complexité des domaines obtenus (mais aussi de leur caractère esthétique), on pourra regarder la Figure 2.2.

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \bar{\omega}(\sqrt{2}i - 1); & \sigma_2 &= \bar{\omega}(-1 + i\frac{\sqrt{5}+1}{2}); & \sigma_3 &= \bar{\omega}(-1 + i\frac{\sqrt{5}-1}{2}) \\
\sigma_4 &= \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}; & \sigma_5 &= e^{-\pi i/9}(-\bar{\omega} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}); & \sigma_6 &= e^{-\pi i/9}(-\bar{\omega} + \frac{\sqrt{5}+1}{2}); \\
\sigma_7 &= e^{-\pi i/9}(-\bar{\omega} + 2\cos(\frac{2\pi}{7})); & \sigma_8 &= e^{-\pi i/9}(-\bar{\omega} + 2\cos(\frac{4\pi}{7})); & \sigma_9 &= e^{-\pi i/9}(-\bar{\omega} + 2\cos(\frac{6\pi}{7}))
\end{aligned}$$

TAB. 2.1 – Les valeurs de $\tau = \text{trace}(R_1 J)$ pour lesquelles $R_1 R_2$ et $R_1 R_2 R_3$ sont d'ordre fini, mais le groupe $\Gamma(\frac{2\pi}{p}, \tau)$ n'est pas de manière évidente un sous-groupe d'un réseau hypergéométrique. On note $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

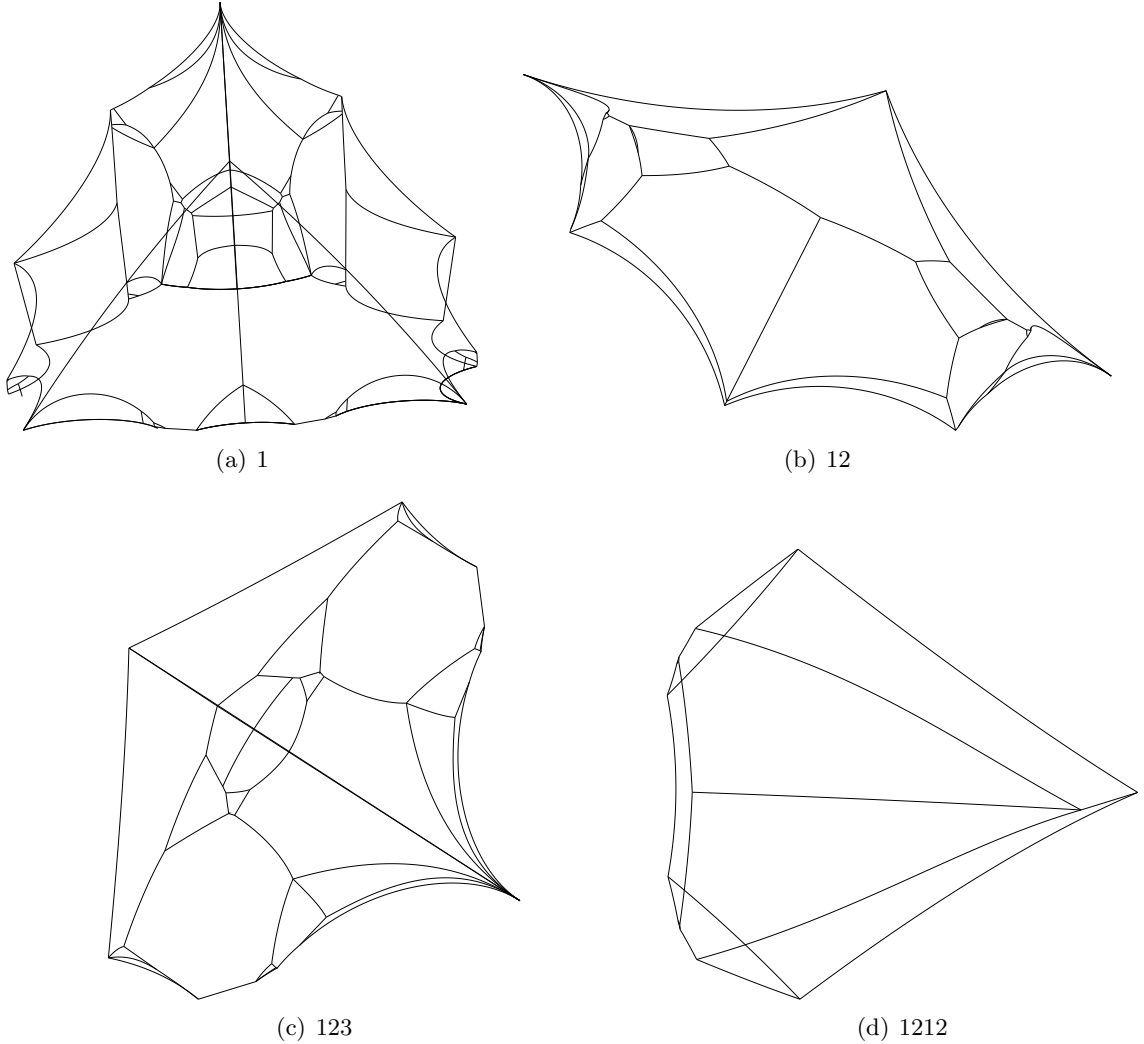


FIG. 2.2 – Quelques faces du domaine de Dirichlet pour le groupe $\Gamma(\frac{2\pi}{4}, \sigma_1)$. Le domaine a 6 cusps, tous équivalents sous l'action du groupe.

Conjecture 2.42. *Les seuls réseaux parmi les $\Gamma(\frac{2\pi}{p}, \tau)$ hyperboliques sont ceux ayant pour paramètres $(p, \tau) =$*

$$\begin{aligned} & (3, \sigma_1); \quad (4, \sigma_1); \quad (6, \sigma_1); \\ & (3, \bar{\sigma}_4); \quad (4, \bar{\sigma}_4); \quad (5, \bar{\sigma}_4); \quad (6, \bar{\sigma}_4); \quad (8, \bar{\sigma}_4); \quad (12, \bar{\sigma}_4); \\ & (2, \sigma_5); \quad (3, \sigma_5); \quad (4, \sigma_5); \\ & (2, \bar{\sigma}_5); \end{aligned}$$

Les seuls groupes discrets de covolume infini sont ceux ayant pour paramètres $(p, \tau) =$

$$(2, \sigma_7); \quad (2, \bar{\sigma}_7); \quad (3, \sigma_7);$$

A posteriori, on observe que les générateurs naturels des groupes qui apparaissent dans la conjecture satisfont des relations de tresse du même type que (2.14), mais d'ordre supérieur. Pour $\tau = \bar{\sigma}_4$ et σ_5 , on a

$$(R_1 R_2)^2 = (R_2 R_1)^2, \quad (2.15)$$

alors que pour $\tau = \sigma_1$ on a

$$(R_1 R_2)^3 = (R_2 R_1)^3. \quad (2.16)$$

A l'aide de l'ordinateur, qui fournit des domaines de Dirichlet conjecturaux, on obtient assez facilement une présentation conjecturale (que l'on peut simplifier par exemple à l'aide du logiciel GAP), voir [D7].

L'observation expérimentale qu'il ne semble y avoir qu'un nombre fini de groupes discrets dans la liste est confirmée par un théorème, voir 2.43, dont une version plus précise (et conjecturalement presque optimale) est donnée dans [D7].

Théorème 2.43. *Il n'y a qu'un nombre fini de paires (p, j) , $p \geq 2$, $j = 1, \dots, 9$ telles que le groupe sporadique $\Gamma(\frac{2\pi}{p}, \sigma_j)$ ou $\Gamma(\frac{2\pi}{p}, \bar{\sigma}_j)$ soit discret.*

Ceci est une conséquence du corollaire suivant du théorème de Knapp (et que l'on peut interpréter également en termes de l'inégalité de Jørgensen, voir [D7]) :

Lemme 2.44. *Soient A_1 et A_2 deux rotations de $H_{\mathbb{C}}^1$ d'angles α , et notons 2δ la distance entre les centres respectifs de A_1 et A_2 . Si le groupe engendré par A_1 et A_2 est discret, alors*

$$|\cosh \delta \sin \alpha| \geq \frac{1}{2}.$$

Preuve (du Théorème 2.43): L'hypothèse que $R_1 R_2$ soit d'ordre fini se traduit en termes $\tau = \text{tr}(R_1 J)$ par le fait que

$$|\tau|^2 = 2 + 2 \cos \frac{r\pi}{s}$$

pour $r, s \in \mathbb{N}^*$, que l'on suppose premiers entre eux.

On vérifie par facilement que $(R_1 R_2)^s$ est une réflexion complexe d'angle $(r-1)\pi + 2s\pi/p$, et dont le miroir correspond à \mathbf{p}_{12}^\perp pour

$$\mathbf{p}_{12} = \begin{bmatrix} e^{-2i\pi/3p\tau^2} + e^{4i\pi/3p\bar{\tau}} - e^{-2i\pi/3p\bar{\tau}} \\ e^{2i\pi/3p\bar{\tau}^2} + e^{-4i\pi/3p\tau} - e^{2i\pi/3p\tau} \\ 2 \cos(2\pi/p) + 2 \cos(2r\pi/s) \end{bmatrix}.$$

Strictement parlant, il ne s'agit d'une réflexion complexe que pour les valeurs de p telles que $\langle \mathbf{p}_{12}, \mathbf{p}_{12} \rangle > 0$ (dans les autres cas on obtient une transformation qui fixe un point isolé de $H_{\mathbb{C}}^2$).

On souhaite alors appliquer le Lemme 2.44 aux deux éléments $A_1 = (R_1 R_2)^s$ et $A_2 = J A_1 J^{-1} = (R_2 R_3)^s$. Notons 2δ la distance entre les miroirs de A_1 et A_2 , et supposons que cette distance est strictement positive. Un calcul pénible montre que si $\mathbf{p}_{23} = J \mathbf{p}_{12}$ (de sorte que le miroir de A_2 est donné par \mathbf{p}_{23}^{\perp}), alors

$$\cosh^2(\delta) = \frac{\langle \mathbf{p}_{12}, \mathbf{p}_{23} \rangle \langle \mathbf{p}_{23}, \mathbf{p}_{12} \rangle}{\langle \mathbf{p}_{12}, \mathbf{p}_{12} \rangle \langle \mathbf{p}_{23}, \mathbf{p}_{23} \rangle} = \frac{|\bar{\tau}^2 + e^{-2i\pi/p} \tau - \tau|^2}{(2 \cos(2\pi/p) + 2 \cos(r\pi/s))^2}. \quad (2.17)$$

Le Lemme 2.44 donne comme condition nécessaire de discrétude

$$\left| \cosh(\delta) \sin(2s\pi/p) \right| = \frac{|\bar{\tau}^2 + e^{-2i\pi/p} \tau - \tau| |\sin(2s\pi/p)|}{|2 \cos(2\pi/p) + 2 \cos(2r\pi/s)|} \geq \frac{1}{2}. \quad (2.18)$$

Comme pour toute valeur de $\tau = \sigma_j$ ou $\bar{\sigma}_j$ ($j = 1, \dots, 9$), on a $\cos(2r\pi/s) \neq 0$, il est clair que pour τ (et donc r et s) fixés, le membre de gauche tend vers 0 quand p tend vers l'infini. L'inégalité (2.18) est forcément violée pour p suffisamment grand. \square

Pour les groupes qui apparaissent dans l'énoncé de la Conjecture 2.42, on sait grâce aux résultats de [76] que presque tous sont non-arithmétiques, et qu'ils ne sont commensurables à aucun exemple hypergéométrique (de plus ces nouveaux exemples sont dans au moins neuf nouvelles classes de commensurabilité).

Pour montrer cela, on utilise la description explicite des générateurs dans $SU(2, 1)$, et on utilise l'invariant de commensurabilité des réseaux donné par le corps engendré par les traces dans la représentation adjointe (voir par exemple (12.2.1) dans [25]).

Proposition 2.45. *Soit G un groupe de Lie semi-simple, et Γ, Γ' deux réseaux commensurables. Alors*

$$\mathbb{Q}(\text{Tr}(\text{Ad } \Gamma)) = \mathbb{Q}(\text{Tr}(\text{Ad } \Gamma')).$$

Notons que pour un sous-groupe d'un groupe unitaire de signature quelconque (en particulier dans $SU(n, 1)$), pour tout élément $\gamma \in \Gamma$,

$$\text{Tr}(\text{Ad}(\gamma)) = |\text{Tr}(\gamma)|^2.$$

Le point principal de la conjecture est de montrer que les groupes qui apparaissent dans la liste sont réellement des réseaux, et il y a deux approches possibles pour cela, sans doute tout aussi importantes.

D'une part, on peut essayer de construire des domaines fondamentaux à la main, sans utiliser l'ordinateur, et utiliser le théorème de Poincaré sur les polyèdres fondamentaux. Ceci fait l'objet d'un travail en cours, en commun avec Parker et Paupert.

D'autre part, il serait naturel d'essayer de vérifier que l'ordinateur ne se trompe pas, et de certifier de façon rigoureuse la combinatoire des domaines de Dirichlet obtenus par des calculs numériques en virgule flottante. Ceci est un projet à long terme, qui ne pourra être mené à bien qu'en faisant intervenir des spécialistes de mathématiques du calcul. Nous avons évoqué certaines des difficultés d'une telle démarche dans la section 2.6.3.

2.6.5 Uniformisation

Configurations de droites

Une façon de construire des quotients de la boule, explorée systématiquement par Hirzebruch, est d'étudier certains revêtements ramifiés de configuration de droites dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Nous nous contenterons ici de décrire un exemple, dans la veine de [92]; on trouvera dans [7] une description détaillée de tous les exemples connus (voir aussi [46] pour une analyse de la situation en dimension trois).

Partons de 4 points en position générale dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, et considérons les six droites par chaque paire de points. On assigne des poids entiers égaux à 2 ou 6 à chacune de ces droites, comme sur le dessin de la Figure 2.3 (gauche). On construit alors un revêtement ramifié Y de $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$,

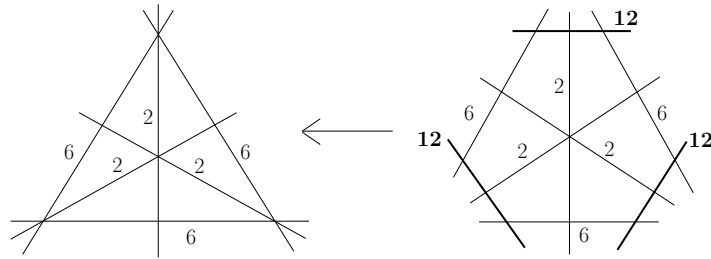


FIG. 2.3 – Eclatement de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ en trois des points triples de la configuration.

ramifié précisément le long de ces six droites, et avec ramification d'ordre prescrit par les poids entiers. Un tel revêtement ne peut jamais être lisse, à cause des trois points d'intersections de triplets de droites de poids respectifs 2, 6, 6; en effet, le triangle d'angles $\pi/2$, $\pi/6$, $\pi/6$ est hyperbolique, et non sphérique (voir le lemme (10.3) de [25]).

Cette difficulté se résout par éclatement; notons \hat{X} l'éclatement de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ en les trois points problématiques mentionnés ci-dessus, et assignons aux trois droites exceptionnelles le poids 12 (le poids m est obtenu en résolvant $1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}) = \frac{2}{m}$). Il existe alors un revêtement ramifié lisse \hat{Y} de \hat{X} , avec ordre de ramification 2, 6 ou 12 selon les composantes du lieu de ramification (comme indiqué dans la partie droite de la Figure 2.3).

On notera que la structure locale du revêtement au dessus du point d'intersection des trois droites de poids 2 est celle donnée par le quotient de \mathbb{C}^2 par un groupe fini engendré par des réflexions complexes, en vertu d'un théorème de Chevalley; les groupes de réflexions complexes en dimension 2 sont bien compris, il s'agit d'extensions centrales de groupes de triangles sphériques. Dans ce cas précis, le groupe du triangle sphérique d'angles $\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/2$ est d'ordre 4, et le groupe d'isotropie local est une extension centrale de ce groupe de triangles, avec centre d'ordre 4.

Les nombres de Chern orbifold $c_1^2(\hat{X})$ et $c_2(\hat{X})$ se calculent assez facilement (voir la section 17 de [26]). $c_2(\hat{X})$ est la caractéristique d'Euler au sens orbifold, qui se calcule strate par strate comme suit (les termes entre accolades correspondent aux strates de dimension 1 et 0, respectivement) :

$$c_2(\hat{X}) = 2 + \left\{ 3 \frac{-1}{2} + 3 \frac{-1}{6} + 3 \frac{-1}{12} \right\} + \left\{ \frac{1}{16} + 3 \frac{1}{2 \cdot 6} + 3 \frac{1}{2 \cdot 12} + 6 \frac{1}{6 \cdot 12} \right\} = \frac{13}{48}$$

Pour $c_1^2(\hat{X})$, on a une formule du type

$$c_1(\hat{X}) = \pi^* K_X + \sum (1 - \frac{1}{w(D)})D, \quad (2.19)$$

voir [26]. Plus spécifiquement, dans la formule (2.19), $\pi : \hat{X} \rightarrow C$ désigne l'éclatement, K_X est le diviseur canonique de $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$; la somme se fait sur toutes les composantes irréductibles du diviseur singulier de \hat{X} , et $w(D)$ désigne le poids de D .

On vérifie que $c_1^2(\hat{X}) = 13/16$, c'est-à-dire qu'on a $c_1^2(\hat{X}) = 3c_2(\hat{X})$. Les nombres de Chern au sens orbifold se comportant bien par passage au revêtement ramifié $\hat{Y} \rightarrow \hat{X}$, on a

$$c_1^2(\hat{Y}) = 3c_2(\hat{Y}),$$

ce qui implique que \hat{Y} est un quotient de la boule (voir les résultats de la section 3.1, en particulier le Théorème 3.9). Il existe donc un réseau cocompact sans torsion $\hat{\Gamma}$ de $PU(2, 1)$ tel que $\hat{Y} = \hat{\Gamma} \backslash \mathbb{B}^2$.

On notera que $\hat{\Gamma}$ est contenu dans un réseau Γ avec torsion tel que $\hat{X} = \Gamma \backslash \mathbb{B}^2$; Γ contient des réflexions complexes d'ordre 2, 6, et 12, dont les miroirs s'envoient sur les droites de poids 2, 6, et 12 respectivement de la Figure 2.3.

On vérifie enfin que le stabilisateur dans Γ du miroir d'une des réflexions d'ordre 2 est un groupe de triangle (4, 6, 12), qui n'est pas arithmétique (voir [97]). Ceci implique que Γ n'est pas arithmétique (voir [92]).

Notons que le groupe Γ' est un des réseaux hypergéométriques qui apparaissent dans [25], correspondant au choix de poids $\mu = (3, 3, 3, 7, 8)/12$ (dans les notations de la section suivante).

Espaces de modules de Deligne-Mostow

Il est bien connu que les groupes de triangles qui apparaissent dans la section 2.6.4 ont une interprétation hypergéométrique, ce qui conduit naturellement à une généralisation en dimension supérieure (explorée initialement par Picard, puis par Terada, Deligne-Mostow et d'autres).

Rappelons ici que les réseaux hypergéométriques de Deligne-Mostow peuvent être vus comme un outil pour l'uniformisation des espaces de modules de points à poids sur \mathbb{P}^1 . La théorie exposée dans [25] permet en effet d'associer à chaque N -uplet $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N) \in]0, 1[^N$ (normalisé de sorte que l'on normalise de sorte que $\sum \mu_j = 2$), un sous-groupe $\Gamma_\mu \subset PU(n, 1)$, où $n = N - 3$. On supposera bien entendu toujours $N \geq 4$.

La condition suivante apparaissait déjà dans les travaux de Picard, et est centrale dans le travail de Deligne-Mostow :

$$(1 - (\mu_i + \mu_j))^{-1} \in \mathbb{N} \quad (\text{INT})$$

pour toute paire (i, j) telle que $i \neq j$ et $\mu_i + \mu_j < 1$.

Le théorème principal de [25] (voir aussi [79] pour le cas $N = 5$, et [98]) s'énonce alors :

Théorème 2.46. *Si la condition INT est satisfaite, alors Γ_μ est un réseau de $PU(n, 1)$. Le quotient $\Gamma_\mu \backslash H_{\mathbb{C}}^n$ est en bijection naturelle avec l'ensemble des points stables de la compactification GIT de l'espace de modules de N points à poids (μ_1, \dots, μ_N) .*

On peut relâcher la condition INT, à condition d'exploiter certaines symétries des N -uplets de poids, et en regardant les espaces de modules de points partiellement ordonnés (ou encore un quotient de l'espace de modules de N points par un groupe symétrique), voir [63].

Plus précisément, on suppose que μ est invariant par un sous-groupe Σ du groupe symétrique S_N (ou S_N agit de manière évidente sur $]0, 1[^N$ par permutation des facteurs). On suppose alors que

$$(1 - (\mu_i + \mu_j))^{-1} \in \begin{cases} \mathbb{N} & \text{si } i \in \Sigma j; \\ \frac{1}{2}\mathbb{N} & \text{si } i \notin \Sigma j. \end{cases} \quad (\Sigma\text{-INT})$$

pour toute paire (i, j) telle que $i \neq j$ et $\mu_i + \mu_j < 1$. Le résultat principal de [63] (voir aussi [99]) affirme alors que

Théorème 2.47. *Si la condition Σ -INT est satisfaite, alors Γ_μ est un réseau de $PU(n, 1)$; c'est un sous-groupe d'indice k dans un réseau $\Gamma_{\mu, \Sigma}$, où k divise $|\Sigma|$. Le quotient $\Gamma_{\mu, \Sigma} \backslash H_{\mathbb{C}}^n$ est en bijection naturelle avec l'ensemble des points stables de la compactification GIT des N -uplets de points à poids donnés par μ , modulo l'action de Σ .*

Le fait suivant apparaîtra peut-être comme décevant :

Proposition 2.48. *Pour $N \geq 5$, il n'y a qu'un nombre fini de N -uplets satisfaisant la condition Σ -INT.*

A permutation des poids près, il n'y a que 94 N -uplets qui satisfont la condition Σ -INT. Notons néanmoins que cette construction a permis de trouver l'unique réseau non-arithmétique connu à ce jour dans $PU(3, 1)$.

La structure arithmétique des groupes Γ_μ s'exprime de façon assez simple. Rappelons que si l'on note $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(e^{2\pi i \mu_1}, \dots, e^{2\pi i \mu_N}) = \mathbb{Q}(\zeta_d)$, le lemme (12.5) de [25] affirme que $\mathbb{Q}(\text{Tr } \Gamma_\mu) = \mathbb{F}$ et

$$\mathbb{Q}(\text{Tr Ad } \Gamma_\mu) = \mathbb{F} \cap \mathbb{R}.$$

Le groupe Γ_μ préserve une forme hermitienne H définie sur $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$, dont on calcule les conjugués de Galois de façon mécanique.

Explicitement, le conjugué de Galois obtenu en appliquant l'automorphisme de \mathbb{F} induit par $\sigma : \zeta_d \mapsto \zeta_d^k$ (avec $\gcd(k, d) = 1$) est un groupe de monodromie hypergéométrique, qui correspond à un autre N -uplet μ^σ , obtenu comme suit. On écrit $(e^{2\pi i \mu_j})^k = e^{2\pi i \mu_j^\sigma}$ avec $\mu_j^\sigma \in]0, 1[$ (en d'autres termes, $\mu_j^\sigma \equiv k\mu_j \pmod{\mathbb{Z}}$). Le N -uplet ne satisfait pas forcément la normalisation $\sum \mu_j^\sigma = 2$, et dans ce cas le groupe Γ_{μ^σ} s'avère préserver une forme hermitienne de signature non nécessairement hyperbolique.

Plus précisément, on a d'après la section 12 de [25] :

Lemme 2.49. *Soit $p = \sum \mu_j^\sigma$. Alors Γ_{μ^σ} préserve une forme hermitienne de signature $(p - 1, n - p + 2)$.*

Ceci fournit un critère simple pour l'arithméticité des groupes Γ_μ (voir définition 2.16).

Proposition 2.50. *Γ_μ est arithmétique si et seulement si pour tout entier k avec $\gcd(k, d) = 1$ et $1 < k < d - 1$,*

$$\sum \mu_j^\sigma = 1 \text{ ou } N - 1.$$

Notons une fois de plus que la construction de Deligne-Mostow ne produit de réseaux non-arithmétiques que pour $N \leq 6$.

Exemple 2.51. Le sextuplet $\mu = (3, 3, 3, 3, 5, 7)/12$ satisfait la condition INT. Pour $k = 5$, on trouve $\mu^\sigma = (15, 15, 15, 15, 25, 35)/12 \equiv (3, 3, 3, 3, 1, 11)/12$, ce qui donne une forme hermitienne de signature $(3, 1)$. Ceci montre que Γ_μ est un réseau *non-arithmétique*.

On remarque enfin qu'on peut également interpréter la théorie de Deligne-Mostow en termes d'espaces de modules de métriques plates sur S^2 avec un nombre fixé de singularités coniques d'angles prescrits. Cette version, due à Thurston [99], paraîtra sans doute plus naturelle au géomètre riemannien ou au topologue.

Autres espaces de modules

La structure de l'espace des modules des courbes elliptiques est bien connue, et on sait qu'elle est liée naturellement au groupe $PSL_2(\mathbb{Z})$, que l'on peut voir également comme $PU(1, 1, \mathbb{Z}[\omega])$, où $\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2$.

Il est naturel de se demander ce qu'il advient des surfaces ou des hypersurfaces complexes cubiques dans l'espace projectif. On trouvera dans [4] une description de l'espace des modules des surfaces cubiques (stables au sens de la théorie géométrique des invariants) comme $\Gamma \backslash \mathbb{B}^4$, où $\Gamma = PU(4, 1, \mathbb{Z}[\omega])$.

Un résultat similaire reste vrai pour l'espace de modules des cubiques dans \mathbb{P}^4 , mais il est plus difficile à énoncer. En revanche, on ne s'attend plus à une telle description hyperbolique complexe en dimension supérieure (du moins le point de départ de la construction de [4], basé sur l'utilisation de la cohomologie de revêtements ramifiés sur les cubiques en question, n'est plus valable tel quel).

De manière générale, on ne connaît que très peu d'espaces de modules qui admettent une uniformisation hyperbolique complexe.

2.7 Arithméticité

2.7.1 Théorèmes de Margulis, Corlette, Gromov-Schoen

L'arithméticité des réseaux est liée à la propriété de superrigidité, que nous expliquons brièvement. Dans toute la suite, \mathbf{G} désignera un groupe algébrique linéaire simple défini sur \mathbb{Q} , et l'on notera $G = \mathbf{G}(\mathbb{R})$ (on pourra penser au groupe d'isométries d'un espace symétrique G/K).

Définition 2.52. Un réseau $\Gamma \subset G$ est dit *superrigide* si pour tout corps local \mathbb{K} de caractéristique nulle et pour toute représentation

$$\rho : \Gamma \rightarrow H_{\mathbb{K}},$$

d'image Zariski-dense, avec H un groupe algébrique simple de centre trivial défini sur \mathbb{K} , soit ρ s'étend en un homomorphisme rationnel $\mathbf{G} \rightarrow H$, soit $\rho(\Gamma)$ est relativement compact pour la topologie de Hausdorff.

Rappelons ici que les corps locaux de caractéristique nulle sont \mathbb{R} , \mathbb{C} , et les corps p -adiques \mathbb{Q}_p et leurs extensions algébriques. Les deux premiers sont archimédiens, alors que les autres ne le sont pas.

Un principe général bien connu est que la superrigidité des réseaux implique leur arithméticité (voir par exemple [115] ou [69]). D'une part, grâce à la rigidité de Weil, on peut supposer que la représentation prend ses valeurs dans un groupe de matrices à coefficients dans un corps de nombres (totalement réel), et par restriction des scalaires (voir 2.5.1) on obtient un plongement α dans les \mathbb{Q} -points d'un groupe H , avec une application naturelle $p : H \rightarrow G$.

Grossièrement, la superrigidité non-archimédienne permet de borner les dénominateurs qui apparaissent dans $\alpha(\Gamma)$, et de montrer que $\alpha(\Gamma) \cap H_{\mathbb{Z}}$ est d'indice fini dans $\alpha(\Gamma)$. Grâce à la superrigidité archimédienne, on obtient que le noyau de $p : H \rightarrow G$ est compact, ce dont on déduit le fait que $\alpha(\Gamma) \cap H_{\mathbb{Z}}$ est aussi d'indice fini dans $H_{\mathbb{Z}}$.

Le théorème de superrigidité de Margulis [58] affirme que tous les réseaux dans les groupes de rang ≥ 2 sont superrigides, ce qui donne en particulier :

Théorème 2.53. (*Margulis*) *Soit G/K un espace symétrique de rang ≥ 2 . Alors tout réseau irréductible $\Gamma \subset G$ est arithmétique.*

Pour les espaces symétriques de rang 1, on a le résultat suivant :

Théorème 2.54. (*Corlette, Gromov-Schoen*) *Soit $X = H_{\mathbb{H}}^n$ ou $H_{\mathbb{O}}^2$ (de sorte que $X = G/K$ avec $G = Sp(n, 1)$ ou F_4^{-20}). Alors tout réseau de $G = \text{Isom}_0(X)$ est arithmétique.*

La partie archimédienne de la superrigidité est due à Corlette [24] ; la partie non-archimédienne est due à Gromov et Schoen [41].

Les seuls espaces symétriques qui ne sont pas traités dans ces deux résultats sont donc $H_{\mathbb{R}}^n$ et $H_{\mathbb{C}}^n$. On sait en fait qu'il y a des réseaux non-arithmétiques dans $SO_0(n, 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et dans $PU(n, 1)$ pour $n \leq 3$ (voir section 2.7.2).

2.7.2 Réseaux non-arithmétiques

Le cas hyperbolique réel, Gromov-Piatetski Shapiro

Il est clair que la plupart des surfaces hyperboliques réelles sont non-arithmétiques, dans la mesure où il y a un espace de modules non-dénombrable de telles surfaces, alors qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de groupe arithmétiques.

Cet argument ne donne évidemment rien pour les variétés hyperboliques de dimension $n \geq 3$, à cause du théorème de rigidité de Mostow (voir Théorème 2.12). A condition de disposer d'un critère efficace pour déterminer l'arithméticité d'un réseau (par exemple la Proposition 2.50 et ses variantes, voir [62]), il est facile de construire quelques exemples de réseaux non-arithmétiques en petite dimension, à l'aide de groupes de Coxeter ([57], [104]). Rappelons ici que les groupes de Coxeter ne donnent des réseaux qu'en petite dimension (voir Théorème 2.30), mais certains sont en effet non-arithmétiques.

On sait qu'il existe des réseaux non-arithmétiques dans $SO_0(n, 1)$ pour tout n , grâce à une construction due à Gromov et Piatetski-Shapiro (voir [40]). La base de leur construction est le recollement de deux variétés arithmétiques M_1, M_2 à bord totalement géodésique, dont les bords sont isométriques, mais qui sont très différentes l'une de l'autre (on demande que les groupes fondamentaux de M_1 et M_2 soient non-commensurables dans $SO_0(n, 1)$).

Le cas hyperbolique complexe

On voit tout de suite pourquoi la construction de Gromov-Piatetski Shapiro ne se transpose pas au monde hyperbolique *complexe*, dans lequel il n'y a pas d'hypersurface réelle totalement géodésique. On peut bien entendu trouver des paires de variétés arithmétiques non commensurables qui possèdent une sous-variété totalement géodésique isométrique, mais cette sous-variété ne borde rien, dans aucune d'entre elles.

La construction de groupes de réflexions/groupes de Coxeter garde un sens dans $H_{\mathbb{C}}^n$, mais elle est beaucoup plus difficile à étudier, et on n'a réussi à la mener à bien (c'est-à-dire à montrer que certains groupes de Coxeter étaient effectivement des réseaux de $PU(2, 1)$) qu'en dimension deux.

A ce jour, on ne connaît de réseaux non-arithmétiques que dans $PU(n, 1)$ que pour $n \leq 3$. L'unique exemple dont on dispose pour $n = 3$ sera décrit dans la section 2.6.5.

2.7.3 Homomorphismes non standards

Les réseaux non arithmétiques exhibés par Mostow ne peuvent pas être superrigides (cf. Zimmer), ils admettent donc des homomorphismes non standards. Déjà dans l'article de Mostow [62] qui contient la première construction de réseaux non-arithmétiques dans $PU(2, 1)$, le lecteur attentif pourra trouver un exemple d'homomorphisme non-standard d'un réseau de $PU(2, 1)$ (voir la section 22 de [62]).

Mostow exhibe une surjection $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ de noyau infini, où Γ_1 et Γ_2 sont deux réseaux de $PU(2, 1)$; un tel homomorphisme ne peut pas s'étendre en un homomorphisme rationnel.

On trouvera une extension de cette construction dans [103], qui donne un nombre fini d'homomorphismes non-standards entre réseaux hypergéométriques de $PU(2, 1)$.

2.7.4 Applications holomorphes entre quotients de la boule

On s'intéresse ici à la construction d'applications holomorphes entre quotients de la boule, de dimensions éventuellement différentes. On se donne $n_1, n_2 \geq 1$, et on cherche des réseaux sans torsion $\Gamma_1 \subset PU(n_1, 1)$, $\Gamma_2 \subset PU(n_2, 1)$ tels qu'il existe une application holomorphe surjective

$$f : X_1 \rightarrow X_2$$

entre les quotients $X_1 = \Gamma_1 \backslash \mathbb{B}^{n_1}$ et $X_2 = \Gamma_2 \backslash \mathbb{B}^{n_2}$.

La question de l'existence d'applications comme ci-dessus avec $n_1 > n_2 \geq 2$ a été posée par Siu dans [94], mais l'on disposait à l'époque de très peu d'exemples.

Dans cette direction, le seul résultat général connu à ce jour est le résultat principal de [55]. Dans cet article, Koziarz et Mok démontrent que les *submersions* holomorphes entre quotients de la boule sont forcément des revêtements totalement géodésiques. Il est alors naturel de se demander s'il existe des applications holomorphes intéressantes qui ne soient pas des submersions.

Bien entendu, si $n_1 = n_2$, on peut toujours prendre pour Γ_2 un réseau quelconque, et pour Γ_1 n'importe quel sous-groupe d'indice fini de Γ_2 . Ceci donne un revêtement totalement géodésique $X_1 \rightarrow X_2$, que l'on considère ici comme inintéressant. Il s'agira dans la suite de trouver des exemples autres que des revêtements non ramifiés.

Quand $n_1 = n_2 = 1$, il s'agit de trouver des applications holomorphes entre surfaces de Riemann, et on sait qu'il existe beaucoup de revêtements *ramifiés*.

Quand $n_1 = 2$ et $n_2 = 1$, une famille importante d'exemples a été étudiée dans la thèse de Livné [56], et les applications correspondantes apparaissent à plusieurs endroits dans la littérature, notamment dans le livre [26] où l'interprétation de la construction de Livné en termes hypergéométriques est explicitée.

L'interprétation des fibrations de Livné en termes d'applications d'oubli entre espaces de modules de points était déjà présente (dans un contexte un peu différent) dans [D0], notons simplement ici que cette construction donne un certain nombre d'exemples d'applications holomorphes comme ci-dessus, avec $n_1 = 2$, $n_2 = 1$.

Pour $n_1 = n_2 = 2$, on peut obtenir quelques exemples grâce à l'existence d'homomorphismes non-standard, voir la construction évoquée dans la section 2.7.3. Il n'est peut-être pas surprenant que les homomorphismes non-standard entre certains réseaux de $PU(2, 1)$ sont induits par des applications holomorphes entre boules de dimension 2. En effet, un fait classique de la théorie des applications harmoniques affirme qu'étant donné homomorphisme

$$\rho : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$$

il existe une application harmonique ρ -équivariante $\tilde{f} : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$, et sous des hypothèses assez faibles, on peut montrer qu'une telle application est en fait pluri-sous-harmonique (théorème de Sampson), puis qu'elle est holomorphe. Il faudrait néanmoins exclure le fait que \tilde{f} puisse se factoriser par une surface de Riemann, ce qui n'est pas complètement évident.

Il résulte néanmoins des travaux de [103] que l'homomorphisme non-standard construit dans [62] est en effet induit par une application holomorphe, et que cette construction peut se généraliser à quelques autres réseaux hypergéométriques de $PU(2, 1)$.

Les deux types d'exemples précédents peuvent tous deux être interprétés dans le cadre commun des applications d'oubli entre espace de modules de points à poids sur \mathbb{P}^1 . Il est alors naturel de se demander si les applications d'oubli ne donnent pas d'autres exemples d'applications holomorphes entre quotients de la boule, ce qui fait l'objet de [D5].

On rappelle ici (voir section 2.6.5) que les espaces de modules X_μ de $n + 3$ points à poids $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n+3})$, admettent une structure hyperbolique complexe quand $0 < \mu_j < 1$ pour tout $j = 1, \dots, n + 3$, $\sum_{j=0}^{n+3} \mu_j = 2$, et

$$(1 - (\mu_i + \mu_j))^{-1} \in \mathbb{N} \tag{2.20}$$

pour toute paire (i, j) telle que $i \neq j$ et $\mu_i + \mu_j < 1$.

Plus précisément, sous ces hypothèses, le théorème principal de [25] affirme que les X_μ sont des orbifolds hyperboliques complexes, c'est-à-dire qu'il existe des réseaux $\Gamma_\mu \subset PU(n, 1)$ tels que

$$X_\mu = \Gamma_\mu \backslash \mathbb{B}^n.$$

On cherche alors des applications $X_\mu \rightarrow X_\nu$ qui se relèvent en des applications holomorphes entre les revêtements universels orbifolds (qui sont tous deux des boules). Cette dernière condition correspond à demander que l'application d'oubli soit une application d'orbifold, ce qui se vérifie au niveau des strates singulières de codimension un par une condition de divisibilité des poids orbifolds. Le résultat principal de [D5] s'énonce :

Théorème 2.55. *Il existe des applications d'oubli $X^{n_1} \rightarrow X^{n_2}$ entre espaces de modules de points à poids de Deligne-Mostow de dimensions respectives n_1 et n_2 qui induisent des applications d'orbifolds si et seulement si (n_1, n_2) est égal à $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$ ou $(2, 2)$.*

Ce résultat est donc compatible avec l'énoncé de la conjecture/question de Siu [94], selon laquelle il n'existe pas d'application holomorphe surjective entre quotients compacts de boules de dimensions respectives n_1, n_2 si $n_1 > n_2 \geq 2$. Il est loin cependant de suggérer une approche pour s'attaquer à la preuve d'un tel résultat. Les applications obtenues dans ce théorème sont d'un type très particulier (applications d'oubli), entre un type très particulier de quotients de la boule.

Remarque 2.56. Dans l'énoncé du Théorème 2.55, il n'apporterait pas énormément d'assouplir l'hypothèse d'intégralité INT en l'hypothèse plus générale Σ -INT discutée dans [63] (et aussi [99]). On obtiendrait en tout cas des applications holomorphes entre quotients de la boule de mêmes dimensions respectives (mais un peu plus d'exemples).

Remarque 2.57. Certaines des applications d'oubli $X^n \rightarrow X^1$ avec $n > 1$ qui donnent des applications d'orbifolds (ceci n'arrive que pour $n = 2$ ou 3 , voir théorème 2.55) ont la propriété supplémentaire que X^1 est une sous-orbifold totalement géodésique dans X^n . On a en fait une rétraction de X^n sur une de ses sous-variétés totalement géodésiques. Un tel phénomène s'observe aussi dans le contexte des variétés hyperboliques réelles, voir [13].

Chapitre 3

Le cas non localement symétrique

3.1 Uniformisation des variétés kählériennes

Variétés kählériennes

Rappelons une définition possible de la notion de variété kählérienne, on trouvera des formulations équivalentes et un énoncé des premières conséquences de la définition dans [54] (voir aussi [106], [114]).

Définition 3.1. Une variété kählérienne est une variété riemannienne M, g munie d'une structure complexe $J : TM \rightarrow TM$, $J^2 = -\text{Id}$, qui est compatible avec la métrique, c'est-à-dire que

- (i) $g(JX, JY) = g(X, Y)$ pour tout $X, Y \in TM$;
- (ii) $\nabla J \equiv 0$.

Ici par ∇ on désigne la dérivée covariante déduite de la connexion de Levi-Civita de g . La condition (i) exprime le fait que M, g, J est une variété hermitienne (on dira aussi qu'elle exprime que J est orthogonale).

Une autre façon, plus classique, de formuler la condition de parallélisme de J est d'utiliser la *forme de Kähler*

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y)$$

ce qui définit une 2-forme sur M (grâce à la condition d'orthogonalité de J). On peut alors remplacer (ii) par la condition

$$d\omega = 0.$$

L'exemple de base de variété kählérienne est l'espace projectif complexe $P_{\mathbb{C}}^n$ muni de la métrique de Fubini-Study, décrite dans une carte affine par

$$g_{P_{\mathbb{C}}^n} = \frac{4}{(1 + \|z\|^2)^2} \left\{ \sum_{j,k=1}^n z_j \bar{z}_k d\bar{z}_j dz_k + (1 + \|z\|^2) \sum_{k=1}^n dz_k d\bar{z}_k \right\}. \quad (3.1)$$

On comparera cette expression avec (2.7), le lien étant une manifestation de la dualité de Cartan, $H_{\mathbb{C}}^n$ étant le dual non-compact de $P_{\mathbb{C}}^n$; on passe d'une métrique à l'autre par un simple changement de signe.

Toutes les sous-variétés complexes lisses de $P_{\mathbb{C}}^n$, munies de la métrique induite par la métrique de Fubini-Study, donnent des exemples de variétés kähleriennes, puisque le caractère kählerien est héréditaire par passage à une sous-variété complexe. Le fait pour une variété M d'admettre une métrique kählerienne est une condition forte. Par un résultat élémentaire de théorie de Hodge, la condition de Kähler implique que $b_1(M)$ est pair. Cette dernière condition se lit bien entendu sur le groupe fondamental $\pi_1(M)$, puisque $b_1(M)$ est le rang de l'abélianisé du groupe fondamental. En fait, si Γ est un groupe de Kähler, alors tout sous-groupe d'indice fini $\Gamma' \subset \Gamma$ satisfait $b_1(\Gamma') \equiv 0 \pmod{2}$.

Un sujet de recherche important est la caractérisation des *groupes de Kähler* (un groupe est dit groupe de Kähler s'il est le groupe fondamental d'une variété kählerienne compacte, voir [5]).

Dans le cas où M est une surface complexe compacte, un théorème de Kodaira implique que si $b_1(M)$ est pair, alors M se déforme en une surface projective lisse, donc $\pi_1(M)$ est de Kähler. En dimension supérieure, la situation est beaucoup plus compliquée (voir loc. cit. pour un survol relativement récent des techniques et résultats connus).

On sait que certains groupes de Kähler ne sont pas résiduellement finis (voir [102] et [5]). Autrement dit, pour certaines variétés kähleriennes, leur revêtement universel est mal approché par les revêtements d'indice fini. Plus précisément, rappelons la définition suivante :

Définition 3.2. Un groupe Γ est dit résiduellement fini si l'intersection de tous les sous-groupes d'indice fini de Γ est triviale.

Il est facile de voir qu'on peut demander de façon équivalente que l'intersection de tous les sous-groupes *normaux* d'indice fini de Γ soit triviale. En particulier, un groupe est résiduellement fini si et seulement si tout élément non-trivial de Γ survit dans un certain quotient fini de Γ .

Un théorème de Mal'cev affirme que tout groupe linéaire finiment engendré est résiduellement fini, donc les exemples peut-être un peu pathologiques de Toledo ont un groupe fondamental non-linéaire. Une question importante de théorie géométrique des groupes est de savoir s'il existe un groupe hyperbolique au sens de Gromov qui ne soit pas non-résiduellement fini ; il est naturel d'explorer cette question dans la classe des variétés kähleriennes compactes à courbure négative (dont le groupe fondamental est bien entendu hyperbolique au sens de Gromov).

Notions de courbure des variétés kähleriennes

Sauf mention explicite du contraire, nous entendrons par "courbure" d'une variété kählerienne la courbure sectionnelle de la métrique riemannienne sous-jacente. On calculera la **courbure sectionnelle** dans la direction d'un 2-plan P comme

$$K(X, Y) = R(X, Y, X, Y)$$

où X et Y forment une base orthonormée de P .

Il y a bien entendu d'autres notions de courbure. Mentionnons parmi elles la **courbure sectionnelle holomorphe**, qui est un cas particulier de courbure sectionnelle où l'on prend des 2-plans tangents à une courbe complexe. Explicitement, la courbure sectionnelle holomorphe dans la direction du vecteur unitaire X est donnée par

$$K(X, JX) = R(X, JX, X, JX).$$

Noter que X et JX sont automatiquement orthogonaux, et JX est de longueur 1 par la condition d'orthogonalité de J , cf. Définition 3.1.

La **courbure bisectionnelle** est une généralisation de la courbure sectionnelle holomorphe, associée à deux directions complexes tangentes (voir [36]). Elle s'exprime comme

$$B(X, Y) = R(X, JX, Y, JY) \quad (3.2)$$

où X et Y sont des vecteurs tangents norme 1 qui engendrent les directions tangentes. Les courbures sectionnelles holomorphes sont donc des cas particuliers de courbures bisectionnelles (prendre $X = Y$ dans (3.2)).

Notons que les notions ci-dessus gardent un sens dans le cadre général des métriques hermitiennes (pour lesquelles on ne demande que la condition (i) la Définition 3.1). Dans ce mémoire, nous ne les utiliserons cependant que pour des variétés kähleriennes.

Pour une variété kählerienne, le signe de la courbure sectionnelle détermine celui de la courbure bisectionnelle : si K est positive (resp. nulle, resp. négative), alors B est positive (resp. nulle, resp. négative) ; voir [36] et aussi [D6].

Nous considérerons occasionnellement l'**opérateur de courbure complexe**, que nous noterons Q . Celui-ci s'obtient à partir de l'opérateur de courbure (qui est une forme symétrique sur $\wedge^2 TM$) par complexification. Plus précisément, on considère son extension \mathbb{C} -linéaire à $\wedge^2 T_{\mathbb{C}}M$, que l'on décompose comme

$$\wedge^2 T^{1,0}M \oplus (T^{1,0}M \otimes T^{0,1}M) \oplus \wedge^2 T^{0,1}M.$$

L'extension est non-triviale uniquement sur le facteur $T^{1,0}M \otimes T^{0,1}M$, et l'on désigne par Q la restriction de l'opérateur de courbure complexifié, restreint à $T^{1,0}M \otimes T^{0,1}M$.

Uniformisation

Une conséquence du théorème d'uniformisation de Riemann est qu'en dimension un, les trois modèles naturels \mathbb{B}^1 , \mathbb{C}^1 et \mathbb{P}^1 décrivent à biholomorphisme près toutes les variétés complexes simplement connexes. Toute variété complexe compacte de dimension un a donc pour revêtement universel l'un de ces trois modèles, et l'on peut distinguer les trois cas par l'existence de métriques à courbure négative, nulle ou positive.

Le théorème d'uniformisation est violemment faux en dimension supérieure, voir par exemple [19] : les petites déformations génériques de la boule donnent lieu à une infinité non-dénombrable de domaines homéomorphes mais deux à deux non biholomorphes (on pourra consulter aussi les références données dans l'introduction de loc. cit.) On ne s'attend donc pas à un analogue simple de la classification ci-dessus, et on imagine assez naturellement que les variétés qui admettent une métrique kählerienne à courbure sectionnelle de signe constant sont assez rares.

Dans le cas des variétés kähleriennes à courbure positive, la solution de la conjecture de Frankel par Siu et Yau (voir [95]) donne un théorème d'uniformisation tout à fait satisfaisant :

Théorème 3.3. *Soit X^n une variété compacte kählerienne à courbure bisectionnelle strictement positive. Alors X est biholomorphe (ou anti-biholomorphe) à $P_{\mathbb{C}}^n$.*

Rappelons ici que l'hypothèse est plus faible que de demander que la courbure sectionnelle soit strictement positive (voir la section ci-dessus sur les différentes notions de courbure).

Le résultat de Siu-Yau est basé sur la construction de courbes rationnelles par le biais d'applications harmoniques. A condition d'être prêt à utiliser des méthodes de caractéristique positive, on peut affaiblir l'hypothèse et demander seulement que le fibré tangent T_X soit ample (voir [61]).

On peut aussi généraliser ce résultat au cadre de la courbure bisectionnelle positive, voir [59]. Dans ce cas, on obtient comme revêtement universel un produit dont chaque facteur est soit un espace euclidien \mathbb{C}^k , soit un espace projectif $P_{\mathbb{C}}^n$, soit un espace symétrique irréductible compact de rang ≥ 2 .

Il est alors naturel de se demander si l'on peut uniformiser toutes les variétés kähleriennes par des espaces symétriques, ou au moins s'il y a un analogue du résultat de Mok [59] dans le contexte de la courbure négative. Les exemples évoqués dans la section 3.4 montrent qu'il n'est rien, même en se restreignant à la classe des variétés kähleriennes à courbure *strictement* négative.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéresserons à l'uniformisation des variétés kähleriennes compactes à courbure strictement négative. Si X est une telle variété, notons que ces conditions impliquent que $c_1(X) < 0$, puisque T_X admet une métrique à courbure négative ; il s'agit donc de variétés projectives lisses, de type général (leur fibré canonique est ample).

3.2 Revêtement universel des variétés à courbure négative

Le résultat suivant est un fait général bien connu de géométrie riemannienne :

Théorème 3.4 (Cartan-Hadamard). *Soit M^n, g une variété riemannienne simplement connexe, à courbure sectionnelle négative. Alors M est difféomorphe à \mathbb{R}^n .*

La question analogue dans le monde kählerien est beaucoup plus compliquée. On retiendra la conjecture folklore suivante :

Conjecture 3.5. *Soit M^n une variété complexe compacte sur laquelle il existe une métrique kählerienne à courbure sectionnelle strictement négative. Alors le revêtement universel \tilde{M} est biholomorphe à un domaine borné dans \mathbb{C}^n .*

Le cas particulier de la conjecture correspondant à $n = 1$ est bien entendu un cas particulier du théorème d'uniformisation. On notera que pour $n \geq 2$, il est assez difficile de construire des exemples de variétés qui ne soient pas des quotients de la boule unité \mathbb{B}^n , mais qui satisfont les hypothèses de la conjecture.

En effet, si l'on suppose soit un tant soit peu de régularité pour le bord du domaine borné, le théorème de Wong-Rosay (voir [109] and [84]) affirme que tout domaine avec un quotient compact est biholomorphe à la boule unité. Plus précisément, on a

Théorème 3.6. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné de classe C^2 , et $K \subset \Omega$ un compact dont l'orbite sous $\text{Aut}(\Omega)$ est égale à tout Ω . Alors Ω est biholomorphe à \mathbb{B}^n .*

Par ailleurs, si l'on sait que le domaine est convexe, un théorème de Frankel [33] affirme également que s'il admet un quotient compact, alors le domaine en question doit être biholomorphe à la boule.

Théorème 3.7. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine convexe hyperbolique au sens de Kobayashi. Soit Γ un sous-groupe discret de $\text{Aut}(\Omega)$ agissant proprement sur Ω , tel que $\Gamma \backslash \Omega$ est compact. Alors Ω est biholomorphe à un domaine symétrique borné.*

L'hypothèse d'hyperbolicité au sens de Kobayashi signifie que la pseudo-distance de Kobayashi (construite à partir d'applications holomorphes du disque de Poincaré dans Ω) est une distance ; pour une discussion de différentes caractérisations de l'hyperbolicité au sens de Kobayashi pour les domaines convexes, voir [16].

On notera que dans la terminologie du Chapitre 2, un *domaine symétrique borné* est la même chose qu'un *espace symétrique hermitien de type non-compact*. Noter que dans le contexte de l'uniformisation de variétés kähleriennes à courbure strictement négative, seuls les domaines de rang 1 peuvent apparaître, à savoir \mathbb{B}^n .

Au vu des deux théorèmes ci-dessus, il pourrait être tentant d'énoncer une conjecture plus forte que la Conjecture 3.5, en remplaçant "domaine borné" par "boule unité" ; un tel énoncé renforcé serait faux, comme nous le verrons dans la section 3.4.

Notons que le seul résultat un tant soit peu encourageant dans la direction de la Conjecture 3.5 est le résultat suivant, qui implique l'existence de beaucoup de fonctions holomorphes (pas nécessairement bornées) sur le revêtement universel des variétés compactes kähleriennes à courbure strictement négative.

Théorème 3.8. *(Wu) Soit M une variété kählerienne simplement connexe à courbure sectionnelle négative. Alors M est Stein (i.e. c'est une sous-variété fermée de \mathbb{C}^n).*

Le point est ici de montrer que la fonction distance à un point fixé est une fonction d'exhaustion strictement pluri-sousharmonique, voir [39].

Plusieurs cas particuliers du théorème suivant ont déjà été utilisés dans le texte de ce mémoire (en particulier, le cas $n = 2$). La caractérisation des quotients de la boule donnée par le cas d'égalité sera utile pour montrer que les variétés de Mostow-Siu ne sont pas localement symétriques (voir section 3.4).

Théorème 3.9. *Soit X une variété compacte Kähler de dimension $n \geq 2$, avec $c_1(X) < 0$. Alors*

$$(-1)^n c_1^n \leq (-1)^n 2 \frac{n+1}{n} c_1^{n-2} c_2,$$

avec égalité si et seulement si X est un quotient de la boule.

Pour $n = 2$, il s'agit de l'inégalité de Miyaoka, qui se lit simplement $c_1^2 \leq 3c_2$. Le cas d'égalité est plus difficile, et repose sur la solution de la conjecture de Calabi par Aubin et Yau (voir [6], [110], et aussi [15]); la clé est de montrer l'existence d'une métrique de Kähler-Einstein sur X , en résolvant une équation de type Monge-Ampère.

3.3 Théorème de rigidité de Siu

Soit M, g une variété kählerienne. On dit que M, g est à *courbure fortement négative* lorsque son opérateur de courbure complexe Q , vu comme une forme hermitienne sur $T_M^{1,0} \otimes T_M^{0,1}$, est strictement 2-négatif (voir section 3.1).

Cette dernière condition signifie que $Q(\sigma, \sigma) < 0$ pour tout élément $\sigma \neq 0$ de longueur au plus 2 (on dit qu'un élément est de longueur au plus 2 s'il s'écrit $x \otimes \bar{y} + u \otimes \bar{v}$).

On notera que, comme son nom l'indique, cette condition est plus forte que de demander que la courbure sectionnelle de g soit strictement négative (auquel cas on demanderait que σ soit de longueur 1). Le théorème suivant est dû à Siu, voir [93] :

Théorème 3.10. *Soit M une variété kählérienne compacte, à courbure fortement négative. Alors toute variété kählérienne compacte N qui a le type d'homotopie de M lui est soit biholomorphe soit anti-biholomorphe.*

3.4 Les variétés de Mostow-Siu

Les premiers exemples de variétés admettant une métrique à courbure sectionnelle négative mais qui ne sont pas localement symétriques sont les surfaces de Mostow-Siu, voir [66].

Au départ il s'agit d'un sous-produit de la construction de réseaux engendrés par des réflexions complexes dans [62], ou plus précisément de la construction de polyèdres fondamentaux pour ces groupes. Mostow exhibe une famille de polyèdres avec des applications d'identification (il s'agit dans les cas discrets de domaines de Dirichlet), et donne une condition suffisante simple pour que ces polyèdres soient un domaine fondamental pour l'action d'un réseau, qui consiste à demander que les angles entre certaines faces soient de la forme π/k pour un $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Ces conditions d'intégralité ressemblent aux conditions sur les polyèdres de Coxeter (voir section 2.6.4), mais on notera qu'en général l'angle entre deux faces d'un domaine de Dirichlet n'est pas constant (la condition de Mostow porte en fait sur certaines paires de faces *co-spinales*, c'est-à-dire qui ont le même spine complexe, ce qui implique que l'angle entre les faces est constant).

Quand les conditions d'intégralité ne sont que "presque" satisfaites, c'est-à-dire que l'on autorise sur certaines 2-faces (d'adhérence disjointe) un angle qui est un multiple rationnel $m\pi/k$ de π (avec $\gcd(m, k) = 1$ et $m > 1$), le groupe de réflexions Γ que l'on obtient n'est en général pas discret. Mostow explique que, dans certains cas, on peut néanmoins construire une variété complexe \tilde{X} munie d'une application holomorphe $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{B}^2$ qui est localement un revêtement ramifié le long de droites complexes (l'ordre de ramification étant donné par les numérateurs des fractions m/k qui apparaissent ci-dessus), et d'une action du groupe de réflexions Γ sur \tilde{X} qui rend \tilde{f} équivariante.

Par le lemme de Selberg, on peut trouver un sous-groupe d'indice fini sans torsion $\Gamma_0 \subset \Gamma$, et obtenir une variété quotient

$$X_0 = \Gamma_0 \backslash \tilde{X}.$$

On trouvera dans l'article de Mostow et Siu [66] la construction d'une métrique kählérienne à courbure sectionnelle strictement négative sur X_0 (la métrique obtenue est en fait à courbure fortement négative dans le sens de Siu, voir section 3.3).

Dans de rares cas, Γ est discret dans $PU(2, 1)$, auquel cas l'application \tilde{f} passe au quotient en un revêtement ramifié

$$f : \Gamma_0 \backslash \tilde{X} \rightarrow \Gamma_0 \backslash \mathbb{B}^2$$

avec ramification simple, ce qui exhibe X_0 comme un revêtement ramifié d'une surface hyperbolique complexe.

Un calcul élémentaire de classes caractéristiques, basé sur un analogue dimension supérieure de la formule de Riemann-Hurwitz, montre que dans une telle situation,

$$c_1^2(X_0)/c_2(X_0) < 3,$$

donc X_0 ne peut pas être un quotient de la boule. Le même argument peut s'adapter aux cas où $\Gamma \subset PU(2, 1)$ n'est pas discret (voir [D0]).

Un X_0 comme ci-dessus ne peut être un quotient d'aucun espace symétrique. En effet, si c'était le cas, l'espace symétrique en question devrait être de rang 1, à cause du théorème de superrigidité de Margulis (voir section 2.7.1). En particulier, il ne pourrait s'agir que de $H_{\mathbb{C}}^2$ ou de $H_{\mathbb{R}}^4$. Ce dernier est exclu, par exemple par le résultat de Carlson-Toledo [20] qui affirme qu'un réseau cocompact de $SO_0(n, 1)$, $n \geq 3$, ne peut jamais être le groupe fondamental d'une variété kählérienne.

Une grande partie de la discussion ci-dessus semble s'adapter facilement aux dimensions supérieures. En particulier, l'existence d'une métrique kählérienne à courbure strictement négative sur les revêtements ramifiés simples de variétés hyperboliques complexes de dimension $n \geq 3$ a été montrée dans [113].

Le calcul de classes caractéristiques qui exclut que de tels revêtements ramifiés de quotients de la boule ne soient eux-même des quotients de la boule n'est pas beaucoup plus difficile en dimension quelconque.

En revanche, on ne sait pas comment construire des revêtements ramifiés simples de quotients de la boule. Les seuls exemples que l'on connaît de variétés de type Mostow-Siu en dimension supérieure sont de dimension trois [D3], et ne sont pas décrits comme des revêtements ramifiés globaux de quotients de la boule (ils s'écrivent seulement localement comme de tels revêtements ramifiés).

Pour énoncer le résultat de [D3], rappelons d'abord que la construction de Mostow [62] évoquée au début de cette section peut s'interpréter en termes de groupes de monodromie de fonctions hypergéométriques, ce qui a permis de la généraliser pour construire des réseaux engendrés par des réflexions complexes dans $PU(n, 1)$, $n \leq 9$.

De la même manière, l'interprétation des travaux de Mostow-Siu en termes de groupes de monodromie hypergéométriques *non nécessairement discrets*, permet de construire les exemples donnés dans [D3], qui sont des analogues tridimensionnels des surfaces de Mostow-Siu.

Pour un bref rappel de la théorie de Deligne-Mostow, le lecteur pourra consulter la section 2.6.5 ou [D5] pour plus de détails. On aura besoin ici de l'extension donnée dans [63] du formalisme développé dans [25]. On part d'un groupe de monodromie $\Gamma_{\mu, \Sigma}$, pour un sextuplet $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_6)$ dans la liste suivante :

$$\begin{aligned}\mu^{(1)} &= (9, 9, 9, 11, 11, 11)/30, & \Sigma &= S_3; \\ \mu^{(2)} &= (9, 9, 9, 9, 11, 13)/30, & \Sigma &= S_4; \\ \mu^{(3)} &= (5, 5, 5, 5, 19, 21)/30, & \Sigma &= S_4.\end{aligned}$$

Notons tout d'abord que la condition Σ -INT n'est satisfaite pour aucun d'entre eux, et il résulte des résultats de [65] qu'aucun d'entre eux n'est discret dans $PU(3, 1)$.

Théorème 3.11. *Soit μ, Σ dans la liste ci-dessus. Alors il existe une variété complexe \tilde{X} sur lequel $\Gamma_{\mu, \Sigma}$ agit proprement, et une application holomorphe équivariante*

$$\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{B}^3$$

qui est localement un revêtement ramifié simple. Pour tout sous-groupe d'indice fini sans torsion $\Gamma_0 \subset \Gamma_{\mu, \Sigma}$, le quotient $X_0 = \Gamma_0 \backslash \tilde{X}$ est une variété, qui admet une métrique kählérienne à courbure fortement négative. X_0 n'a le type d'homotopie d'aucune variété compacte localement symétrique.

L'idée de la preuve du théorème est d'imiter la preuve du résultat de [63]; on construit le revêtement \tilde{X} comme un *revêtement de monodromie* de l'espace de modules X de points dont les poids sont donnés par μ , en exploitant le groupe de symétrie Σ (voir section 2.6.5).

Plus spécifiquement, on note $Q^{(\mu)}$ l'espace de $N = 6$ points distincts sur \mathbb{P}^1 , on note $Q_{st}^{(\mu)}$ l'ensemble des points stables de la compactification GIT de l'espace de modules (qui dépend du sextuplet de poids μ). Les trois espaces $Q_{st}^{(\mu)}$ ont une description assez simple dans les trois choix de μ qui apparaissent dans le Théorème 3.11.

Rappelons que l'ensemble des points stables ne dépend des poids que de façon grossière, dans la mesure où seule la combinatoire des sous-ensembles de poids dont la somme vaut moins que 1 a de l'importance. Une description détaillée de $Q_{st}^{(\mu)}$ quand la condition INT est satisfaite est donnée dans le Théorème 4.1 de [48].

Pour $\mu^{(1)}$, on trouve la même combinatoire que pour $(3, 3, 3, 5, 5, 5)/12$, qui satisfait la condition INT; en particulier l'espace $Q_{st}^{(\mu^{(1)})}$ est décrit dans [48] comme $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ éclaté en trois points sur la diagonale; un dessin de la combinatoire des composantes de compactification (avant éclatement) est donné dans la partie gauche de la Figure 3.1.

Pour $\mu^{(2)}$, on trouve la même combinatoire que pour $(3, 3, 3, 3, 3, 5)/10$, pour lequel $Q_{st}^{(\mu)}$ est donné par \mathbb{P}^3 éclaté en 5 points (en position générale).

Pour $\mu^{(3)}$, on voit facilement que $Q_{st}^{(\mu^{(3)})}$ s'obtient à partir de $Q_{st}^{(\mu^{(2)})}$ en contractant la composante de compactification correspondant à $x_5 = x_6$ (voire la partie droite de la Figure 3.1).

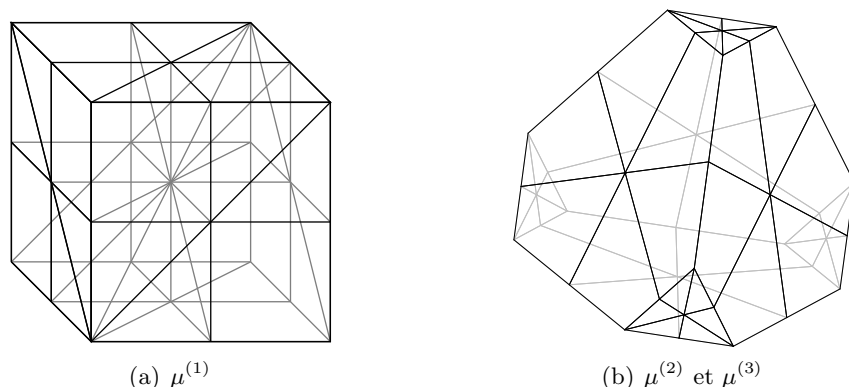


FIG. 3.1 – Dessin schématique de $Q_{st}^{(\mu)}$ dans les trois cas du Théorème 3.11. Pour $\mu^{(1)}$, il faut éclater $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ en trois points de la diagonale. Pour $\mu^{(2)}$ (resp. $\mu^{(3)}$) on éclate \mathbb{P}^3 en 5 (resp. 4) points en position générale.

L'espace de modules de points partiellement ordonnés correspondant à μ, Σ est donné par le quotient

$$Q_{st}^{(\mu)}/\Sigma.$$

Nous esquissons une description du revêtement \tilde{X} (pour plus de détail, on pourra consulter [D3]). Considérons l'ouvert $Q' \subset Q_{st}^{(\mu)}$ sur lequel l'action de Σ se fait sans points fixes, ce qui permet d'étudier la représentation de monodromie

$$\rho_{\mu, \Sigma} : \pi_1(Q'/\Sigma) \rightarrow PU(3, 1)$$

ainsi que le revêtement de monodromie

$$\widetilde{Q'/\Sigma} \rightarrow Q'/\Sigma$$

des fonctions hypergéométriques d'exposants donnés par μ . On rappelle ici que les fonctions hypergéométriques sont données par des intégrales du type

$$\int_{x_j}^{x_k} \frac{dz}{\prod_i (z - x_i)^{\mu_i}}, \quad (3.3)$$

qui définissent des fonctions *multivaluées* sur Q'/Σ , puisque les μ_i sont des nombres rationnels ; pour obtenir un difféomorphisme local à valeurs dans $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, il faut faire un bon choix de $n + 1$ intégrales comme en (3.3), voir [25] ou bien sûr [D3].

Définition 3.12. Le groupe de monodromie $\Gamma_{\mu,\Sigma}$ est l'image de la représentation de monodromie $\rho_{\mu,\Sigma}$.

Le revêtement $\widetilde{Q'/\Sigma}$ est un revêtement non-ramifié de Q'/Σ , caractérisé par le fait que $\pi_1(\widetilde{Q'/\Sigma}) = \text{Ker}(\rho_{\mu,\Sigma})$. C'est aussi le plus petit revêtement de Q'/Σ sur lequel les fonctions hypergéométriques (3.3) deviennent univaluées.

Remarque 3.13. Le noyau $\text{Ker}(\rho_{\mu,\Sigma})$ admet une description explicite quand la condition Σ -INT est satisfaite, voir le Lemme 8.6.1 de [26]. Dans le cas des variétés de Mostow-Siu c'est un objet assez mystérieux ; un résultat de [D0] montre par exemple que pour certains choix des poids, la représentation de monodromie n'est pas injective (donc le groupe fondamental des surfaces de Mostow-Siu n'est en général pas un sous-groupe du groupe non-discret $\Gamma_{\mu,\Sigma} \subset PU(2, 1)$).

L'espace \tilde{X} est donné topologiquement par la *complétion de Fox* de l'application $\widetilde{Q'/\Sigma} \rightarrow Q_{st}^{(\mu)}/\Sigma$ (voir [32], [25] ou [D3]). Pour μ quelconque, la structure locale de l'espace \tilde{X} est compliquée, mais elle est décrite de façon assez explicite dans [25]. Elle dépend clairement de la *représentation de monodromie locale*, restriction de $\rho_{\mu,\Sigma}$ à un voisinage suffisamment petit du point que l'on considère dans la complétion.

Une condition naturelle s'impose à nous ; si l'on veut que \tilde{X} soit localement compact, il faut que les revêtements de monodromie locale soient finis, donc on est naturellement conduit à imposer que la monodromie locale soit finie en chaque point de $Q_{st}^{(\mu)}/\Sigma$.

Une traduction simple de la condition de *monodromie locale finie*, basée sur la classification par Schwarz des groupes finis parmi les groupes de monodromie hypergéométriques en dimension un [89], est énoncée dans [D3]. Ceci permet de sélectionner les N -uplets μ qui ont une chance raisonnable de produire des variétés du type Mostow-Siu.

Parmi les 5-uplets de poids qui donnent une monodromie locale finie mais ne satisfont pas la condition Σ -INT, on retrouve les exemples originaux de Mostow-Siu (cf. section 2 de [D3]). Pour $N \geq 6$, on obtient le résultat suivant :

Proposition 3.14. *Soit μ un N -uplet qui ne satisfait pas la condition Σ -INT, avec $N \geq 6$. Si les groupes de monodromie locale sont finis, alors à permutation près μ est dans la liste de 9 sextuplets donnés en page 516 de [D3].*

La complétion de Fox \tilde{X} est lisse si et seulement si μ est à permutation près l'un des sextuplets $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$ et $\mu^{(3)}$.

Insistons sur le fait que le théorème est optimal pour la construction que nous considérons ; en particulier, en dimension supérieure à trois, les complétions de Fox ne sont localement compactes que quand la condition Σ -INT est satisfaite.

L'application holomorphe équivariante

$$\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{B}^3$$

s'obtient, au moins au niveau de $\widetilde{Q'/\Sigma} \subset \tilde{X}$, comme une application de périodes (voir aussi l'expression donnée en (3.3)). On l'étend ensuite à tout \tilde{X} , en utilisant les propriétés universelles du procédé de complétion de Fox, ou le théorème de Hartogs.

La structure locale de revêtement ramifié de \tilde{f} est expliquée dans [25], p.48-49. Un peu plus explicitement, son degré local de ramification le long des composantes de compactifications correspondant à une coïncidence $x_i = x_j$ de points (où $\mu_i + \mu_j < 1$), est décrite par le numérateur de la fraction réduite

$$1 - \mu_i - \mu_j.$$

L'image dans la boule de chaque composante du lieu de ramification est une sous-variété complexe totalement géodésique.

Pour les exemples de dimension 2 (obtenus pour $N = 5$), il y a un tri à faire parmi les 5-uplets de poids à monodromie locale finie, pour sélectionner ceux qui donnent un lieu de ramification lisse à la source de l'application de périodes. Ceci permet néanmoins de construire un *nombre infini* de surfaces de type Mostow-Siu.

Définition 3.15. On appelle *surface de Mostow-Siu* toute surface lisse obtenue à partir d'un revêtement de monodromie hypergéométrique comme ci-dessus, pour laquelle le lieu de ramification de l'application des périodes $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{B}^2$ est lisse dans \tilde{X} .

En dimension 3, on ne dispose que des trois exemples du Théorème 3.11, et ils se comportent bien pour ce qui est du lieu de ramification de l'application des périodes.

Proposition 3.16. *Le lieu de ramification de $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{B}^3$ est lisse dans \tilde{X} pour chacun des $\mu^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$.*

Par exemple pour $\mu^{(1)}$, les seuls paires d'indices $\{i, j\}$ pour lesquelles la condition Σ -INT n'est pas satisfaite sont ceux pour lesquels $i, j \in \{4, 5, 6\}$. On a $1 - \mu_4 - \mu_5 = 4/15$, donc l'application \tilde{f} ramifie à l'ordre 4 au dessus (de l'image dans $Q_{st}^{(\mu^{(1)})}/\Sigma$) des composantes D_{45} , D_{46} et D_{56} . Noter que ces trois composantes sont deux à deux disjointes, parce que $\mu_4 + \mu_5 + \mu_6 > 1$.

Corollaire 3.17. *Pour les surfaces de Mostow-Siu, ainsi que pour les trois exemples du Théorème 3.11, le revêtement de monodromie \tilde{X} admet une structure de variété complexe, telle que l'application de périodes $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{B}^n$ est holomorphe et $\rho_{\mu, \Sigma}$ -équivariante.*

Il existe une métrique kählérienne $\Gamma_{\mu, \Sigma}$ -invariante sur \tilde{X} , qui est à courbure fortement négative, et pour laquelle le lieu de ramification est une sous-variété complexe totalement géodésique.

Remarque 3.18. Le lieu de ramification dans \tilde{X} est lisse, mais son image dans la boule est en général une collection *dense* de sous-variétés totalement géodésiques complexes ; ceci reflète le fait que pour la plupart des choix de μ , le groupe de monodromie $\Gamma_{\mu, \Sigma}$ est *non-discret*.

La construction de la métrique utilise fortement le fait que l'image des composantes de ramification sont des sous-boules totalement géodésiques dans la boule ; l'idée est de tirer en arrière la métrique hyperbolique complexe, ce qui donne lieu à une métrique sur \tilde{X} qui est *singulière* le long du lieu de ramification.

Il y a lieu de corriger cette métrique près du lieu de ramification, ce que Mostow et Siu font à l'aide de la métrique de Bergman du domaine

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^{2k} + |w|^2 < 1\}$$

qui s'envoie sur la boule par le revêtement ramifié

$$(z, w) \mapsto (z^{2k}, w).$$

La construction est assez technique et calculatoire, nous renvoyons le lecteur à [66] (et à [113] pour le cas de la dimension trois).

On calcule facilement le rapport de classes de Chern c_1^2/c_2 pour chaque exemple de surface de Mostow-Siu (dont on connaît un quotient orbifold explicite, homéomorphe à $Q_{st}^{(\mu)}/\Sigma$).

Proposition 3.19. *Parmi la famille infinie des surfaces de Mostow-Siu, les rapports c_1^2/c_2 ne s'accumulent que sur la valeur $8/3$. En particulier, il existe un $r < 3$ tel que $c_1^2/c_2 < r$ pour toute surface de Mostow-Siu.*

Pour les exemples de dimension trois, on vérifie que $c_1^3/c_3 < 16$ pour chacun des trois exemples, voir [D3].

Remarque 3.20. Il est intéressant d'observer que les variétés de dimension trois décrites ci-dessus contiennent en fait des sous-variétés complexes totalement géodésiques qui sont des surfaces de Mostow-Siu (voir la section 4 de [D3]).

3.5 Pincement des métriques

3.5.1 Courbure positive

Rappelons ici le théorème de la sphère, voir [10] et [50].

Théorème 3.21. *(Berger-Klingenberg) Soit X, g une variété complète, simplement connexe, à courbure strictement positive. Si la courbure sectionnelle de g est δ -pincée avec $\delta > 1/4$, alors X est homéomorphe à la sphère.*

Ce résultat peut être raffiné pour montrer qu'avec les mêmes hypothèses, X est en fait *difféomorphe* à la sphère (voir [18]) ; le passage de "homéomorphe" à "difféomorphe" n'est pas complètement évident à cause de l'existence de sphères exotiques.

On notera que le résultat serait faux (pour les variétés de dimension paire) si l'on demandait seulement $\delta \geq 1/4$, puisque la courbure sectionnelle de la métrique de Fubini-Study sur $P_{\mathbb{C}}^n$ est $1/4$ -pincée. Berger et Klingenberg montrent qu'à homéomorphisme près, seuls les espaces symétriques compacts de rang un admettent une métrique $1/4$ -pincée. La version différentielle du résultat est obtenue dans [17] (voir aussi le raffinement donné dans [90]).

Il est alors naturel de se demander ce qu'il advient des variétés qui admettent un pincement légèrement moins bon que $1/4$. Un résultat de Berger [12] affirme que pour tout n , il existe un $\delta_n < 1/4$ tel que toute variété de dimension $2n$ admettant une métrique δ_n -pincée est homéomorphe à la sphère, ou difféomorphe à un espace symétrique compact de rang un.

La version différentielle de ce résultat a été récemment obtenue dans [77] :

Théorème 3.22. (*Petersen-Tao*) *Pour tout n , il existe un $\delta_n < 1/4$ tel que toute variété de dimension n qui admet une métrique riemannienne à courbure strictement positive δ_n -pincée est difféomorphe à un espace symétrique compact de rang un.*

Dans la section 3.5.2, nous verrons que la situation est drastiquement différente dans le cas de la courbure négative.

3.5.2 Courbure négative

Il est naturel de se demander s'il y a un analogue en courbure négative du théorème de la sphère (voir section 3.5.1). En particulier, on pourrait espérer remplacer S^n par $H_{\mathbb{R}}^n$ (l'unique variété riemannienne complète simplement connexe de courbure constante -1), ou plutôt par la classe des variétés hyperboliques compactes. Un tel espoir est mis à plat par le résultat suivant de [42] (voir aussi [68]).

Théorème 3.23. (*Gromov-Thurston*) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, et pour tout $0 < \delta < 1$, il existe des variétés de dimension n qui admettent une métrique à courbure strictement négative δ -pincée, mais qui ne sont difféomorphes à aucun espace localement symétrique.*

En d'autres termes, il existe des variétés riemanniennes à courbure sectionnelle négative et arbitrairement proche de -1 , mais qui n'admettent pas de métrique hyperbolique. On ne s'attend donc pas à trouver des théorèmes analogues de ceux de la section 3.5.1 ; en fait certains résultats survivent de façon presque inchangée en courbure négative. Par exemple, le résultat suivant est une conséquence des estimations de Berger, voir [11].

Proposition 3.24. *Soit R un tenseur de courbure de Kähler, à courbure sectionnelle négative et $1/4$ pincée. Alors, à une constante multiplicative près, R est le tenseur de courbure R_0 de $H_{\mathbb{C}}^n$ en un point (voir (3.4)).*

Reppelons ici ce qu'on entend par un tenseur de courbure *de Kähler*. Soit V un espace vectoriel (on pensera à l'espace tangent en un point d'une variété riemannienne).

Définition 3.25. Un tenseur de courbure sur V est un élément $R \in \otimes^4 V^*$, qui satisfait pour tout choix de $x, y, z, w \in V$:

1. $R(x, y, z, w) = -R(y, x, z, w) = -R(x, y, w, z)$;
2. $R(x, y, z, w) = R(z, w, x, y)$;
3. $R(x, y, z, w) + R(x, z, w, y) + R(x, w, y, z) = 0$ (Jacobi).

On suppose maintenant donnée une structure complexe $J : V \rightarrow V$ (donc V est de dimension paire), et on suppose V muni d'un produit scalaire J -invariant, c'est-à-dire que $\langle Ju, Jv \rangle = \langle u, v \rangle$ pour tout $u, v \in V$ (penser ici à l'espace tangent en un point d'une variété kählerienne).

Définition 3.26. Un tenseur de courbure sur V est dit *de Kähler* s'il satisfait

$$R(Jx, Jy, z, w) = R(x, y, Jz, Jw) = R(x, y, z, w)$$

pour tout choix de $x, y, z, w \in V$.

Rappelons enfin que le tenseur de courbure R_0 de $H_{\mathbb{C}}^n$ en un point est l'unique tenseur de Kähler dont la courbure sectionnelle holomorphe est constante, égale à -1 . On peut écrire $R_0(x, y, z, w)$ explicitement comme

$$-\frac{1}{4} \left(\langle x, z \rangle \langle y, w \rangle - \langle x, w \rangle \langle y, z \rangle + \langle x, Jz \rangle \langle y, Jw \rangle - \langle x, Jw \rangle \langle y, Jz \rangle + 2 \langle x, Jy \rangle \langle z, Jw \rangle \right) \quad (3.4)$$

L'énoncé de [11] est donné dans le cas de la courbure positive, mais la preuve est la même dans le cas de la courbure négative. En utilisant la théorie des applications harmoniques (plus spécifiquement le théorème de Siu-Sampson), on déduit des estimés de Berger le résultat suivant, voir [44] et [111].

Théorème 3.27. (*Hernandez, Yau-Zheng*) *Soit M une variété kählérienne qui admet une métrique riemannienne $1/4$ -pincée. Alors M est biholomorphe à un quotient de la boule.*

L'étape suivante est alors d'étudier l'existence de métriques avec des estimations de pincement similaires à celles du théorème 3.23 pour les analogues kähleriens des variétés de Gromov-Thurston (à savoir les surfaces de Mostow-Siu et leurs analogues de dimension trois construits dans [D3], voir section 3.4).

On ne peut bien entendu pas espérer des métriques avec un pincement meilleur que $1/4$, mais il serait naturel d'essayer d'obtenir des métriques avec un pincement arbitrairement proche de $1/4$ (la question de l'existence de telles métriques est d'ailleurs posée dans [68]).

Dans un travail en commun avec H. Seshadri, nous montrons que, au moins dans le monde des métriques kähleriennes, un tel analogue n'existe pas.

Proposition 3.28. *Soit $\epsilon > 0$. Il existe un δ avec $0 < \delta < 1/4$ tel que pour toute surface compacte X qui admet une métrique kählérienne à courbure sectionnelle négative δ -pincée, les rapports de classes de Chern satisfont*

$$\frac{c_1^2(X)}{c_2(X)} > 3 - \epsilon.$$

Dans [D6], nous donnons un résultat un peu plus général, qui s'applique aux variétés de dimension n fixée (et affirme que, s'il existe une métrique kählérienne suffisamment proche d' $1/4$ -pincée, alors les rapports de classes de Chern sont proches des rapports correspondant d'un quotient de la boule de dimension n).

L'idée de la preuve de la Proposition 3.28 est inspirée par la Proposition 3.24 ; un pincement proche d' $1/4$ devrait impliquer que le tenseur de courbure en chaque point soit proche de R_0 (ce qui permettrait de contrôler les nombres de Chern). Dans loc. cit. nous donnons une version quantitative de cette affirmation.

Une conséquence immédiate de la Proposition 3.28 est le théorème suivant :

Théorème 3.29. *Il existe un $\delta < 1/4$ tel qu'aucune surface de Mostow-Siu (ni aucune des variétés construites dans [D3]) n'admet de métrique kählérienne à courbure sectionnelle δ -pincée.*

En effet on sait que pour les exemples construits dans [66] (ainsi que pour les surfaces qui apparaissent dans [D0]), le rapport des classes de Chern c_1^2/c_2 reste loin de 3 (voir Proposition 3.19).

Remarque 3.30. Notre argument ne permet pas d'exclure l'existence de métriques *riemanniennes* presque 1/4-pincée sur les variétés de Mostow-Siu.

On ne sait pas non plus s'il existe des variétés kähleriennes à courbure négative (autres que celles de Mostow-Siu) dont les rapports des classes de Chern tendrait vers ceux des quotients de la boule. Si l'on s'affranchit de l'hypothèse de négativité de la courbure, on peut construire de telles variétés, voir par exemple les travaux de Sommese (voir [96]).

3.5.3 Gromov-Thurston VS Mostow-Siu

Les variétés de Gromov-Thurston sont obtenues comme des revêtements ramifiés de variétés hyperboliques réelles, et elles sont en ce sens un analogue riemannien des variétés de Mostow-Siu, mais il y a des différences importantes entre ces deux constructions.

Tout d'abord, dans la construction de Gromov-Thurston, le lieu de ramification est une sous variété totalement géodésique dont la classe d'homologie dans la variété d'arrivée est triviale. Ceci n'est pas le cas pour les variétés de Mostow-Siu. Pour simplifier, supposons que X est une surface complexe qui admet un revêtement ramifié simple sur un quotient compact de la boule $Y = \Gamma \backslash H_{\mathbb{C}}^n$, de lieu de ramification $S \subset Y$ totalement géodésique, complexe et lisse. Alors il résulte par exemple des calculs de [D0] (voir aussi [66]) que $c_1(N_{S/Y}) = \frac{1}{2}c_1(T_S)$, et en particulier que $S \cdot S = \frac{1}{2}\chi(S) < 0$, ce qui exclut que le fibré normal de S soit trivial. En particulier, la construction d'une métrique, même seulement riemannienne, sur les revêtements ramifiés \tilde{X} de X est plus compliquée pour les variétés de Mostow-Siu que dans le cas des variétés de Gromov-Thurston. Une autre façon de sentir cette difficulté est de noter que la métrique hyperbolique complexe en coordonnées cylindriques autour d'une sous variété totalement géodésique de codimension deux réelle a une expression plus compliquée que dans le cas hyperbolique réel (on pourra comparer [9] et [8]).

Un autre point important est que la plupart des exemples de Mostow-Siu sont seulement *localement* décrits comme des revêtements ramifiés de variétés hyperboliques complexes (voir section 3.4).

On notera enfin qu'il ne peut pas y avoir d'analogue des résultats de [47] pour les surfaces de Mostow-Siu (voir la classification des structures projectives complexes sur les surfaces par Klingler [51]).

Chapitre 4

Perspectives et projets de recherche

4.1 Domaines de Dirichlet

4.1.1 Certification de la combinatoire des polyèdres de Dirichlet

Le programme implémentant la procédure de Giraud utilisé pour obtenir les résultats de [D7] a été écrit de façon à permettre une expérimentation massive sur une grande famille de groupes ; en particulier, on a systématiquement privilégié les calculs numériques, par opposition au calcul formel.

Dans la mesure où les groupes que l'on considère peuvent être conjugués à des matrices dans $GL(\mathcal{O})$ pour un certain anneau d'entiers algébriques \mathcal{O} , on pourrait calculer les produits de matrices avec une précision arbitraire.

Etant donné un ensemble Giraud-fermé $W \subset \Gamma$ (voir les notations de la section 2.6.3), on peut aussi espérer trouver la combinatoire du polyèdre P_W de façon exacte. Par exemple, les sommets s'obtiennent en résolvant des systèmes de 4 équations quadratiques en 4 variables, ce qu'on peut ramener à la résolution d'équations polynomiales à une seule variable (quitte à augmenter le degré des équations). On peut alors utiliser des méthodes du type algorithme de Sturm pour localiser toutes les racines de ces équations, et donc établir avec certitude la liste des sommets.

Les 1-faces ne sont pas déterminées de manière univoque par le 0-squelette (voir section 2.6.3), mais on peut les décrire assez simplement comme joignant deux sommets, et contenues dans l'intersection de trois bissecteurs. De proche en proche, on peut espérer remonter jusqu'à la combinatoire précise, ce qui est le point de départ de l'utilisation du théorème de Poincaré sur les polyèdres fondamentaux.

Ce projet de certification des résultats expérimentaux de la procédure de Giraud ferait intervenir un mélange de techniques géométriques spécifiques à la géométrie hyperbolique complexe, et des techniques de calcul formel et numérique ; à terme, on espère bien entendu disposer d'un logiciel général qui permette d'éviter les constructions ad-hoc pénibles comme dans [D1].

4.1.2 Utilisation du théorème de Giraud

La philosophie énoncée dans [D2] (voir aussi la section 2.6.3) est que les seules conditions de cycles du théorème de Poincaré qu'il faut vérifier dans le cas d'un domaine de Dirichlet partiel Giraud-fermé sont celles correspondant aux cycles d'arêtes totalement géodésiques.

Ceci reviendrait en quelque sorte à rendre justice à Picard (voir l'introduction à [25], qui fait état d'un trou dans la preuve de Picard).

Un tel résultat permettrait bien évidemment une exploration beaucoup plus rapide des réseaux potentiels, et donnerait en particulier une façon efficace de transformer en théorèmes les conjectures du type de celle qui apparaît dans [D7].

4.1.3 Calcul du volume

Il serait utile de disposer d'une formule simple pour le volume d'un polytope de $H_{\mathbb{C}}^2$, sans savoir a priori qu'il est un domaine fondamental pour groupe. Ceci permettrait par exemple de montrer de manière efficace qu'un domaine de Dirichlet partiel P_W est réellement égal à P_{Γ} (voir les notations de la section 2.6.2).

Les calculs utilisés dans [66] semblent indiquer qu'il pourrait y avoir une formule générale pour un polytope de Dirichlet partiel qui est Giraud-fermé. On espère alors obtenir une formule en termes d'aires de 2-faces complexes, et d'angles de rotations d'applications de cycles.

4.2 Réseaux en dimension supérieure

4.2.1 Groupes de Coxeter

Il n'est peut-être pas impossible d'obtenir de nouveaux réseaux, éventuellement non-arithmétiques, dans $PU(n, 1)$, pour de petites valeurs de $n \geq 3$. Une idée serait de revenir à la construction de [62], et de spécifier une partie génératrice, par exemple un ensemble de réflexions complexes satisfaisant certaines relations de tresses; on pourra penser ici à étendre les réseaux non-arithmétiques de $PU(2, 1)$ en réseaux de $PU(n, 1)$, $n > 2$, en les voyant comme stabilisateurs de sous-variétés complexes totalement géodésiques.

4.2.2 Domaines fondamentaux, domaines de Dirichlet

On ne connaît à l'heure actuelle aucun domaine fondamental explicite pour l'action d'un réseau de $PU(n, 1)$ sur $H_{\mathbb{C}}^n$, $n \geq 3$. Les travaux effectués à l'ordinateur pour le cas $n = 2$ (voir [D2] ou [D7]) sont envisageables au moins en dimension trois. On pourrait aussi essayer d'explicitier la description des domaines fondamentaux pour les réseaux hypergéométriques donnée dans [99] (ceci a été fait dans [71] pour certains réseaux en dimension 2 par Parker, mais la complexité des calculs semble décourager une généralisation directe aux dimensions supérieures).

4.2.3 Structure des réseaux non-arithmétiques

Dans l'idée de trouver une construction analogue à la construction de Gromov-Piatetski Shapiro dans $PU(n, 1)$, il serait utile de développer une meilleure compréhension des exemples obtenus pour $n = 2$ et 3, dans l'espoir d'obtenir des résultats de structure généraux. Notons par exemple que tous les exemples connus contiennent des sous-variétés complexes de codimension 1 qui sont elles-mêmes non-arithmétiques. En retournant cette observation, il paraît naturel de plonger les exemples de dimension 2 par le biais de représentations \mathbb{C} -Fuchsienues, et d'essayer de les étendre à des réseaux en dimension supérieure.

4.3 Variétés de Mostow-Siu

4.3.1 Existence/construction en dimension supérieure

La construction dans [D3] ne peut pas donner d'exemples non localement symétriques de variétés kähleriennes à courbure négative, à cause de la structure hiérarchique de groupes de monodromies hypergéométriques et de la classification des groupes finis engendrés par des réflexions complexes (voir [91]).

On souhaiterait bien entendu construire des exemples en dimension supérieure. Il suffirait par exemple d'obtenir des revêtements ramifiés de quotients de la boule compacts, avec comme lieu de ramification une hypersurface complexe lisse totalement géodésique (voir la discussion dans [D3]).

4.3.2 Pincement des métriques riemanniennes

Comme mentionné dans la remarque 3.30, l'argument donné dans [D6] ne permet d'exclure que les métriques *kähleriennes* avec pincement proche de $1/4$ sur les variétés de Mostow-Siu. On s'attend à ce que le résultat reste valable pour les métriques riemanniennes, mais cela ne ressort de façon immédiate ni de l'argument de [D6], ni du travail de [44].

On ne dispose pas non plus à l'heure actuelle de méthodes permettant d'exclure l'existence de variétés (même kähleriennes) à courbure négative arbitrairement proche de $1/4$ -pincée. Dans une direction transverse, il paraît naturel d'essayer de contruire des métriques à courbure négative sur les surfaces construites par Sommese, qui ont des rapports de classes de Chern c_1^2/c_2 denses dans l'intervalle $[2, 3]$ (voir [96]).

4.3.3 Revêtement universel

Le revêtement universel des surfaces de Mostow-Siu (ou de leurs analogues de dimension trois, voir [D3]) reste un objet extrêmement mystérieux du point de vue de la géométrie et de l'analyse complexe.

Il paraît raisonnable d'essayer de montrer que les revêtements universels de surfaces ayant des rapports de classes de Chern c_1^2/c_2 différents ne peuvent pas être biholomorphes ; on se demande également si les rapports de classes de Chern peuvent s'accumuler vers une valeur de c_1^2/c_2 d'une surface à courbure (fortement) négative (voir section 3.3 et le théorème de rigidité de Siu).

4.3.4 Groupe fondamental

Les groupes fondamentaux de variétés de Mostow-Siu restent assez mystérieux ; ils possèdent par construction une représentation dans $PU(n, 1)$ ($n = 2$ ou 3), dont l'image est la plupart du temps non discrète. Un résultat de [D0] montre que cette représentation est en général non-injective, mais on est assez loin de contrôler son noyau explicitement.

On ne sait toujours pas si les groupes fondamentaux des variétés de Mostow-Siu sont résiduellement finis (voir 3.1).

Bibliographie

- [1] D. Allcock, *Reflection groups on the octave hyperbolic plane*, J. Alg. **213** (1999), 467–498.
- [2] ———, *The Leech lattice and complex hyperbolic reflections*, Invent. Math. **140** (2000), 283–301.
- [3] ———, *Infinitely many hyperbolic Coxeter groups through dimension 19*, Geom. Topol. **10** (2006), 737–758.
- [4] D. Allcock, J. A. Carlson, and D. Toledo, *The complex hyperbolic geometry of the moduli space of cubic surfaces*, J. Algebraic Geom. **11** (2002), no. 4, 659–724.
- [5] J. Amorós, M. Burger, K. Corlette, D. Kotschick, and D. Toledo, *Fundamental groups of compact Kähler manifolds*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 44, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [6] T. Aubin, *Équations du type Monge-Ampère sur les variétés kähleriennes compactes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **283** (1976), no. 3, Aiii, A119–A121.
- [7] G. Barthel, F. Hirzebruch, and T. Höfer, *Geradenkonfigurationen und Algebraische Flächen*, Aspects of Mathematics, D4, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1987.
- [8] I. Belegradek, *Complex hyperbolic hyperplane complements*, arXiv:0711:5001.
- [9] ———, *Rigidity and relative hyperbolicity of real hyperbolic hyperplane complements*, arXiv:0711:2324.
- [10] M. Berger, *Sur les groupes d’holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes*, Bull. Soc. Math. France **83** (1955), 279–330.
- [11] ———, *Sur quelques variétés riemanniennes suffisamment pincées*, Bull. Soc. Math. France **88** (1960), 57–71.
- [12] ———, *Sur les variétés riemanniennes pincées juste au-dessous de $1/4$* , Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **33** (1983), no. 2, 135–150 (loose errata).
- [13] N. Bergeron, F. Haglund, and D. Wise, *Hyperplane sections in hyperbolic manifolds*, Preprint, 2010.
- [14] A. Borel and Harish-Chandra, *Arithmetic subgroups of algebraic groups*, Ann. of Math. **75** (1962), 485–535.
- [15] J.-P. Bourguignon, *Premières formes de Chern des variétés kählériennes compactes [d’après E. Calabi, T. Aubin et S. T. Yau]*, Séminaire Bourbaki, 30e année (1977/78), Lecture Notes in Math., vol. 710, Exp. No. 507, Springer, Berlin, 1979, pp. 1–21.
- [16] F. Bracci and A. Saracco, *Hyperbolicity in unbounded convex domains*, Forum Math. **21** (2009), no. 5, 815–825.

- [17] S. Brendle and R. Schoen, *Classification of manifolds with weakly 1/4-pinched curvatures*, Acta Math. **200** (2008), no. 1, 1–13.
- [18] ———, *Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), no. 1, 287–307.
- [19] D. Burns, Jr., S. Shnider, and R. O. Wells, Jr., *Deformations of strictly pseudoconvex domains*, Invent. Math. **46** (1978), no. 3, 237–253.
- [20] J. A. Carlson and D. Toledo, *Harmonic mappings of Kähler manifolds to locally symmetric spaces*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1989), no. 69, 173–201.
- [21] E. Cartan, *Les espaces riemanniens symétriques.*, Verh. Internat. Math.-Kongr. 1, 152–161 (1932)., 1932.
- [22] D. I. Cartwright and T. Steger, *Enumeration of the 50 fake projective planes*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **348** (2010), no. 1-2, 11–13.
- [23] J. H. Conway and A. J. Jones, *Trigonometric diophantine equations (on vanishing sums of roots of unity)*, Acta. Arithmetica **30** (1976), 229–240.
- [24] K. Corlette, *Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry*, Ann. of Math. (2) **135** (1992), no. 1, 165–182.
- [25] P. Deligne and G. D. Mostow, *Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **63** (1986), 5–89.
- [26] ———, *Commensurabilities among lattices in $PU(1, n)$* , Annals of Mathematics Studies, vol. 132, Princeton Univ. Press, Princeton, 1993.
- [27] D. B. A. Epstein, *Complex hyperbolic geometry*, Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space, London Math. Soc. Lecture Notes, vol. 111, Cambridge University Press, Cambridge, 1987, pp. 93–111.
- [28] D. B. A. Epstein and C. Petronio, *An exposition of Poincaré’s polyhedron theorem*, Enseign. Math. **40** (1994), 113–170.
- [29] E. Falbel, G. Francsics, and J. R. Parker, *The geometry of the Gauss-Picard modular group*, Preprint, 2010.
- [30] E. Falbel and P.-V. Koseleff, *Rigidity and flexibility of triangle groups in complex hyperbolic geometry*, Topology **41** (2002), no. 4, 767–786.
- [31] E. Falbel and J. Parker, *The geometry of the Eisenstein-Picard modular group*, Duke Math. J. **131** (2006), 249–289.
- [32] R. H. Fox, *Covering spaces with singularities*, A symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1957, pp. 243–257.
- [33] S. Frankel, *Complex geometry of convex domains that cover varieties*, Acta Math. **163** (1989), 109–149.
- [34] J. Gilman, *Algorithms, complexity and discreteness criteria in $PSL(2, \mathbf{C})$* , J. Anal. Math. **73** (1997), 91–114.
- [35] G. Giraud, *Sur certaines fonctions automorphes de deux variables*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **38** (1921), 43–164.
- [36] S. I. Goldberg and S. Kobayashi, *Holomorphic bisectonal curvature*, J. Differential Geometry **1** (1967), 225–233.

- [37] W. M. Goldman, *Complex Hyperbolic Geometry*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1999.
- [38] W. M. Goldman and J. R. Parker, *Complex hyperbolic triangle groups*, *J. Reine Angew. Math.* **425** (1992), 71–86.
- [39] R. E. Greene and H. Wu, *Function theory on manifolds which possess a pole*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 699, Springer, Berlin, 1979.
- [40] M. Gromov and I. Piatetski-Shapiro, *Nonarithmetic groups in Lobachevsky spaces*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **66** (1988), 93–103.
- [41] M. Gromov and R. Schoen, *Harmonic maps into singular spaces and p -adic superrigidity for lattices in groups of rank one*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1992), no. 76, 165–246.
- [42] M. Gromov and W. Thurston, *Pinching constants for hyperbolic manifolds*, *Invent. Math.* **89** (1987), no. 1, 1–12.
- [43] O. Guichard, *Groupes plongés quasi isométriquement dans un groupe de Lie*, *Math. Ann.* **330** (2004), 331–351.
- [44] L. Hernández, *Kähler manifolds and $\frac{1}{4}$ -pinching*, *Duke Math. J.* **62** (1991), 601–611.
- [45] F. Hirzebruch, *Automorphe Formen und der Satz von Riemann-Roch*, Symposium internacional de topología algebraica International symposium on algebraic topology, Universidad Nacional Autónoma de México and UNESCO, Mexico City, 1958, pp. 129–144.
- [46] B. Hunt, *Coverings and ball quotients with special emphasis on the 3-dimensional case*, *Bonner Mathematische Schriften*, 174, Universität Bonn Mathematisches Institut, 1986.
- [47] M. Kapovich, *Convex projective structures on Gromov-Thurston manifolds*, *Geom. Topol.* **11** (2007), 1777–1830.
- [48] F. C. Kirwan, R. Lee, and S. H. Weintraub, *Quotients of the complex ball by discrete groups*, *Pacific J. Math.* **130** (1987), no. 1, 115–141.
- [49] E. Klimenko and M. Sakuma, *Two-generator discrete subgroups of $\text{Isom}(\mathbf{H}^2)$ containing orientation-reversing elements*, *Geom. Dedicata* **72** (1998), 247–282.
- [50] W. Klingenberg, *Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit nach oben beschränkter Krümmung*, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **60** (1962), 49–59.
- [51] B. Klingler, *Structures affines et projectives sur les surfaces complexes*, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **48** (1998), no. 2, 441–477.
- [52] ———, *Sur la rigidité de certains groupes fondamentaux, l’arithméticité des réseaux hyperboliques complexes, et les “faux plans projectifs”*, *Invent. Math.* **153** (2003), no. 1, 105–143.
- [53] A. W. Knap, *Doubly generated Fuchsian groups*, *Michigan Math. J.* **15** (1969), 289–304.
- [54] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry. Vol. II*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1996.
- [55] V. Koziarz and N. Mok, *Nonexistence of holomorphic submersions between complex unit balls equivariant with respect to a lattice and their generalizations*, à paraître dans *Amer. J. Math.*

- [56] R. A. Livné, *On certain covers of the universal elliptic curve*, Ph.D. thesis, Harvard University, 1981.
- [57] V. S. Makarov, *On a certain class of discrete groups of Lobačevskii space having an infinite fundamental region of finite measure*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **167** (1966), 30–33.
- [58] G. A. Margulis, *Discrete groups of motions of manifolds of nonpositive curvature*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B.C., 1974), Vol. 2, Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975, pp. 21–34.
- [59] N. Mok, *The uniformization theorem for compact Kähler manifolds of nonnegative holomorphic bisectional curvature*, J. Differential Geom. **27** (1988), 179–214.
- [60] ———, *Metric rigidity theorems on Hermitian locally symmetric manifolds*, Series in Pure Mathematics, vol. 6, World Scientific Publishing Co. Inc., Teaneck, NJ, 1989.
- [61] S. Mori, *Projective manifolds with ample tangent bundles*, Ann. of Math. **110** (1979), 593–606.
- [62] G. D. Mostow, *On a remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space*, Pacific J. Math. **86** (1980), 171–276.
- [63] ———, *Generalized Picard lattices arising from half-integral conditions*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **63** (1986), 91–106.
- [64] ———, *Braids, hypergeometric functions, and lattices*, Bull. Amer. Math. Soc. **16** (1987), 225–246.
- [65] ———, *On discontinuous action of monodromy groups on the complex n -ball*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 555–586.
- [66] G. D. Mostow and Y. T. Siu, *A compact Kähler surface of negative curvature not covered by the ball*, Ann. of Math. **112** (1980), 321–360.
- [67] D. Mumford, *Hirzebruch’s proportionality theorem in the noncompact case*, Invent. Math. **42** (1977), 239–272.
- [68] P. Pansu, *Pincement des variétés à courbure négative d’après M. Gromov et W. Thurston*, Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie **4** (1985-86), 101–113.
- [69] ———, *Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité*, Astérisque (1995), no. 227, Exp. No. 778, 3, 69–105, Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94.
- [70] J. R. Parker, *Dirichlet polyhedra for parabolic cyclic groups in complex hyperbolic space*, Geom. Dedicata **57** (1995), 223–234.
- [71] ———, *Cone metrics on the sphere and Livne’s lattices*, Acta Math. **196** (2006), 1–64.
- [72] ———, *Unfaithful complex hyperbolic triangle groups*, Pacific J. Math. **238** (2008), 145–169.
- [73] ———, *Complex hyperbolic lattices*, Discrete Groups and Geometric Structures (AMS, ed.), Contemporary Mathematics, vol. 501, 2009, pp. 1–42.
- [74] J. R. Parker and J. Paupert, *Unfaithful complex hyperbolic triangle groups II : Higher order reflections*, Pacific J. Math. **239** (2009), 357–389.
- [75] J. R. Parker and I. D. Platis, *Open sets of maximal dimension in complex hyperbolic quasi-Fuchsian space*, J. Differential Geom. **73** (2006), no. 2, 319–350.

- [76] J. Paupert, *Unfaithful complex hyperbolic triangle groups III : arithmeticity and commensurability*, Pacific J. Math. **245** (2010), 359–372.
- [77] P. Petersen and T. Tao, *Classification of almost quarter-pinched manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 7, 2437–2440.
- [78] M. Phillips, *Dirichlet polyhedra for cyclic groups in complex hyperbolic space*, Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), 221–228.
- [79] E. Picard, *Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (2) **10** (1881), 305–322.
- [80] G. Prasad and S.-K. Yeung, *Fake projective planes*, Invent. Math. **168** (2007), no. 2, 321–370.
- [81] M. Prokhorov, *Absence of discrete reflection groups with a non-compact polyhedron of finite volume in Lobachevsky spaces of large dimension*, Math. USSR-Izv. **28** (1987), 401–411.
- [82] R. Riley, *Applications of a computer implementation of Poincaré’s theorem on fundamental polyhedra*, Math. Comp. **40** (1983), no. 162, 607–632.
- [83] ———, *Nielsen’s algorithm to decide whether a group is Fuchsian*, In the tradition of Ahlfors and Bers, Contemporary Mathematics, vol. 256, 2000, pp. 255–270.
- [84] J.-P. Rosay, *Sur une caractérisation de la boule parmi les domaines de C^n par son groupe d’automorphismes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **29** (1979), 91–97.
- [85] R. E. Schwartz, *Ideal triangle groups, dented tori, and numerical analysis*, Ann. of Math. **153** (2001), 533–598.
- [86] ———, *Complex hyperbolic triangle groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002) (Beijing), Higher Ed. Press, 2002, pp. 339–349.
- [87] ———, *Real hyperbolic on the outside, complex hyperbolic on the inside*, Inv. Math. **151** (2003), no. 2, 221–295.
- [88] ———, *Spherical CR geometry and Dehn surgery*, Annals of Mathematics Studies, vol. 165, Princeton University Press, 2007.
- [89] H. A. Schwarz, *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gauss’sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt*, J. Reine Angew. Math. **75** (1873), 292–335.
- [90] H. Seshadri, *Manifolds with nonnegative isotropic curvature*, arXiv:0707.3894v3.
- [91] G. C. Shephard and J. A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, Canadian J. Math. **6** (1954), 274–304.
- [92] O. V. Shvartsman, *An example of a nonarithmetic discrete group in the complex ball*, Lie groups, their discrete subgroups, and invariant theory, Adv. Soviet Math., vol. 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 191–196.
- [93] Y. T. Siu, *The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds*, Ann. of Math. (2) **112** (1980), no. 1, 73–111.
- [94] ———, *Some recent results in complex manifold theory related to vanishing theorems for the semipositive case*, Arbeitstagung Bonn 1984 (J. Schwermer F. Hirzebruch and S. Suter, eds.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1111, Springer Verlag, 1985, pp. 169–192.

- [95] Y. T. Siu and S. T. Yau, *Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature*, Invent. Math. **59** (1980), 189–204.
- [96] A. J. Sommese, *On the density of ratios of Chern numbers of algebraic surfaces*, Math. Ann. **268** (1984), no. 2, 207–221.
- [97] K. Takeuchi, *Arithmetic triangle groups*, J. Math. Soc. Japan **29** (1977), 91–106.
- [98] T. Terada, *Problème de Riemann et fonctions automorphes provenant des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables*, J. Math. Kyoto Univ. **13** (1973), 557–578.
- [99] W. P. Thurston, *Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere*, Geometry and Topology Monographs **1** (1998), 511–549.
- [100] J. Tits, *Classification of algebraic semisimple groups*, Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966, pp. 33–62.
- [101] D. Toledo, *Representations of surface groups in complex hyperbolic space*, J. Diff. Geom. **29** (1989), 125–133.
- [102] ———, *Projective varieties with non-residually finite fundamental group*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1993), no. 77, 103–119.
- [103] ———, *Maps between complex hyperbolic surfaces*, Geom. Dedicata **97** (2003), 115–128.
- [104] E. B. Vinberg, *Discrete groups generated by reflections in Lobachevskii spaces*, Mat. Sb. (N.S.) **72** (114) (1967), 471–488 ; correction, ibid. 73 (115) (1967), 303.
- [105] ———, *The nonexistence of crystallographic reflection groups in lobachevskii spaces of large dimension*, Funct. Anal. Appl. **15** (1981), 207–216.
- [106] A. Weil, *Introduction à l'étude des variétés kählériennes*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, VI. Actualités Sci. Ind. no. 1267, Hermann, Paris, 1958.
- [107] ———, *Algebras with involutions and the classical groups*, J. Indian Math. Soc. **24** (1960), 589–623 (1961).
- [108] P. Will, *The punctured torus and Lagrangian triangle groups in $PU(2, 1)$* , J. Reine Angew. Math. **602** (2007), 95–121.
- [109] B. Wong, *Characterization of the unit ball in C^n by its automorphism group*, Invent. Math. **41** (1977), 253–257.
- [110] S. T. Yau, *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **74** (1977), no. 5, 1798–1799.
- [111] S.-T. Yau and F. Zheng, *Negatively $\frac{1}{4}$ -pinched Riemannian metric on a compact Kähler manifold*, Invent. Math. **103** (1991), 527–535.
- [112] S.-K. Yeung, *Integrality and arithmeticity of co-compact lattice corresponding to certain complex two-ball quotients of Picard number one*, Asian J. Math. **8** (2004), no. 1, 107–129.
- [113] F. Zheng, *Examples of non-positively curved Kähler manifolds*, Comm. Anal. Geom. **4** (1996), no. 1-2, 129–160.
- [114] ———, *Complex Differential Geometry*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 18, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [115] R. J. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Monographs in Mathematics, vol. 81, Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.