Institut Fourier
Université Grenoble I

L3 Méthodes Numériques
$2^{\text{ème}}$ semestre 2009/2010

Feuille d'exercices n° 8

Equations différentielles ordinaires.

Intégration exacte

Exercice 1 : On considère la chaîne de désintégrations radioactives

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C \ ,$$

où k_1, k_2 sont des constantes strictement positives. En notant $a(t), b(t), c(t)$ les quantités d'éléments A, B, C présents dans la réaction au temps t, on obtient le système différentiel

$$a'(t) = -k_1 a(t) \ , \quad b'(t) = k_1 a(t) - k_2 b(t) \ , \quad c'(t) = k_2 b(t) \ . \tag{2}$$

Déterminer la solution du système (2) qui vérifie les conditions intiales $a(0) = 1$, $b(0) = 0$, $c(0) = 0$. A quel instant $t_* > 0$ la quantité $b(t)$ atteint-elle son maximum ?
Remarque : Les deux cas $k_1 \neq k_2$ et $k_1 = k_2$ pourront être traités séparément.

Exercice 2 : On considère deux pendules couplés. Dans l'approximation de faible amplitude des oscillations, les équations du mouvement sont données par

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\theta_1(t) + \theta_1(t) - \alpha(\theta_2(t) - \theta_1(t)) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\theta_2(t) + \theta_2(t) + \alpha(\theta_2(t) - \theta_1(t)) = 0 \end{cases}$$

On prend comme données initiales $\theta_1(0) = 1$, $\theta_2(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_1(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_2(0) = 0$. Intégrer les équations (indication : considérer $\theta_1 + \theta_2$ et $\theta_2 - \theta_1$).

Théorie des équations différentielles

Exercice 3 : Donner un exemple d'équation différentielle pour laquelle les solutions ne sont pas uniques. Donner une exemple d'équation différentielle qui admet une solution qui explose en temps fini.

Exercice 4 : Lemme de Gronwall.
Soit $y(t)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ solution de l'équation différentielle $y'(t) = F(t, y(t))$. On suppose que F vérifie l'estimation $|F(t, y(t))| \leq C(t)\,|y(t)|$, avec C une fonction continue. Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$|y(t)| \leq e^{\int_0^t C(s)\mathrm{d}s}\,|y(0)| \ .$$

Application : montrer que si $y'(t) = F(y(t))$ avec F $k-$Lipschitzienne, alors $y(t)$ ne peut pas exploser en temps fini (existence globale de solutions).

Intégration numérique

Rappel : Soit $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Un schéma numérique $y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n)$ est d'ordre p pour l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ si et seulement si Φ est de classe $\mathcal{C}^p$ et

$$\forall k = 0, \ldots, p-1, \quad \frac{\partial^k}{\partial h^k}\Phi(t, y, 0) = \frac{1}{k+1}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} f(t, y(t)) \ .$$

Un schéma est consistant s'il est d'ordre au moins 1.

Exercice 5 : Soit $f(t, y)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $k-$Lipschitzienne en y. On veut intégrer numériquement l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ à l'aide des méthodes de Runge-Kutta, c'est-à-dire les schémas donnés par

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^{q} b_i p_{n,i} \quad \text{avec} \quad \forall\ 1 \leq i \leq q \ \left\{ \begin{array}{l} t_{n,i} = t_n + c_i h_n \\ y_{n,i} = y_n + h_n \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} p_{n,k} \\ p_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i}) \end{array} \right.$$

On suppose que les méthodes d'intégrations utilisées sont au moins d'ordre 0, c'est-à-dire que $\sum_i b_i = 1$ et $\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} = c_i$.
1) A quelle condition les méthodes de Runge-Kutta sont stables ?
2) Sont-elles consistantes ? Convergentes ?
3) Trouver toutes les méthodes de Runge-Kutta à un point ($q = 1$).
4) Trouver toutes les méthodes de Runge-Kutta à deux points qui soient d'ordre au moins 2. Reconnaître entre autres la méthode du point milieu ainsi que celle de Heun

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left(\frac{1}{2} f(t_n, y_n) + \frac{1}{2} f(t_{n+1}, y_n + h_n f(t_n, y_n)) \right) \ .$$

Exercice 6 : On souhaite intégrer numériquement l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ grâce au schéma

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h) \ ,$$
$$\Phi(t, y, h) = \alpha f(t, y) + \beta f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right) + \gamma f\left(t + h, y + h f(t, y)\right) \ ,$$

avec α, β et γ dans $[0, 1]$.
1) Pour quelles valeurs de α, β et γ retrouvez-vous des méthodes classiques ?
On suppose que f est $\mathcal{C}^\infty$ et $k-$Lipschitzienne en y.
2) Pour quelles valeurs de α, β et γ le schéma est-il stable ?
3) Pour quelles valeurs de α, β et γ le schéma est-il consistant ? Convergent ? D'ordre au moins 1 ? D'ordre au moins 2 ?