Contrôle continu du 19 mars 2014, de 8h00 à 10h00.
Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables ("netbooks") déconnectés du réseau autorisés. Téléphones interdits.

1. Itérations et propagation des erreurs

1.1. (a) Donner le polynôme de Taylor d'ordre n de la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ en $x = 0$ (on note $T_n(x)$ ce polynôme), ainsi qu'une formule pour le reste $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

(b) Etant donné $\varepsilon > 0$, donner une valeur de n qui garantit que $T_n(0.1)$ soit une approximation de $\ln(1.1)$ à ε près.

(c) Quel n faut-il prendre pour calculer $\ln(1.1)$ avec une erreur *relative* inférieure à 10^{-12} ?

1.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{10+x}\,dx.$$

On notera que $I_0 = \ln \frac{11}{10}$ (faire le lien avec l'exercice 1.1).

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{11(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{10(n+1)} \qquad (*)$$

Indication : on pourra utiliser le fait que $10 \leq 10+x \leq 11$ *pour* x *dans le domaine d'intégration*.

(b) Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a

$$I_{n+1} = \frac{1}{n+1} - 10 I_n. \qquad (**)$$

Indication : calculer $I_{n+1} + 10 I_n$.

(c) Déduire de ce qui précède une valeur approchée de I_{20}, obtenue à partir de la valeur de $\ln(1.1)$ en utilisant $(**)$ pour calculer successivement I_1, puis $I_2, \ldots$. On utilisera la précision standard dans Xcas, c'est-à-dire avec 12 chiffres significatifs ; la valeur obtenue est-elle cohérente avec l'estimation $(*)$?

(d) Expliquer le phénomène précédent, et proposer une solution qui permette de calculer I_{20}.

(e) Donner une estimation grossière de I_{30} (on pourra utiliser $(*)$).

(f) En utilisant l'équation $(**)$, donner une expression pour I_n en fonction de I_{n+1}. Utiliser cette expression pour calculer successivement I_{29}, I_{28}, $I_{27}, \ldots$ à partir d'une valeur approchée de I_{30}.

(g) Cette dernière méthode vous paraît-elle plus ou moins efficace ? Justifiez votre réponse !

T.S.V.P

2. Méthode de Newton

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + e^{x^2-1}$.

(1) Montrer que $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(2) Montrer que f' s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$.

(3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions ; on note α la solution qui n'est pas un entier.

(4) Décrire les suites des itérés $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la méthode de Newton pour résoudre $f(x) = 0$. Montrer que si $u_0 = 0$, la suite est bien définie, et converge vers α.

(5) Toujours avec $u_0 = 0$, calculer u_3, et donner une estimation théorique de $|u_3 - \alpha|$. En déduire un encadrement de α.

(6) A partir de quel n a-t-on $|u_n - \alpha| < 10^{-12}$? Donner une valeur approchée de α à 10^{-12} près.

3. Séries entières

On considère la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n}},$$

et on veut approcher

$$I = \int_0^{3/4} f(x)dx.$$

(1) Montrer que f est bien définie.

(2) Montrer que

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}\sqrt{n}(n+1)}$$

(3) Donner une majoration de l'erreur commise en remplaçant cette série par la somme finie

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}\sqrt{n}(n+1)}$$

(4) En déduire une estimation de I à 10^{-12} près.