Contrôle continu du 11 mars 2013, de 16h15 à 18h15.
Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables ("netbooks") déconnectés du réseau autorisés **uniquement pour la partie II**.

PARTIE I - DOCUMENTS INTERDITS

(1) Enoncer (sans démonstration) le théorème du point fixe contractant.

(2) On considère la fonction $g(x) = 10 + x^2/10$. Définit-elle une contraction de l'intervalle $[0,1]$? La fonction g a-t-elle un point fixe dans $[0,1]$?

(3) Rappeler brièvement le principe de la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

(4) Enoncer le résultat du cours qui utilise la convexité de f pour garantir la convergence des itérés de Newton.

Dans la suite de cette partie, on cherche une valeur approchée de $\sqrt{3}$ par la méthode de Newton, en résolvant l'équation

$$(*) \qquad f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+ \quad \text{où } f(x) = x^2 - 3$$

(5) Etudier la convexité de f.

(6) Donner une relation de récurrence que satisfont les itérés de Newton (u_n) pour la résolution de l'équation $(*)$.

(7) On prend $u_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $u_0^2 > 3$. Montrer que la suite (u_n) obtenue par méthode de Newton est bien définie et converge vers $\sqrt{3}$.

PARTIE II - DOCUMENTS ET ORDINATEUR AUTORISÉS

1. MÉTHODE DE NEWTON (SUITE)

On garde les notations des questions (3)-(5) de la partie I.

(1) Toujours en supposant $u_0^2 > 3$, déterminer le signe de $f(u_n)$.

(2) Calculez u_5 en prenant $u_0 = 3.0$ un flottant "machine" en précision normale (`Digits:=12` dans Xcas). Calculez la valeur exacte de u_5 en prenant $u_0 = 3$ (si vous faites le calcul au tableur, il sera prudent de limiter le nombre de lignes du tableur à 10).

(3) Déterminer $f(u_5)$ dans les deux cas.

(4) Quel est le nombre de décimales correctes de la valeur de $f(u_5)$ calculée en mode approché ? Pourquoi ?

(5) Donnez une majoration de l'erreur $|u_5 - \sqrt{3}|$.

2. SÉRIES ENTIÈRES

On rappelle la définition des fonctions sinus et cosinus hyperboliques :

$$\cosh\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Dans cet exercice, on souhaite approcher la fonction $f(x) = \sinh\, x$ sur l'intervalle $[0,1]$.

(1) Donner une formule pour la dérivée k-ème de $\sinh\, x$.

(2) Donner le polynôme de Taylor $T_{2n+1}(x)$ de degré $2n+1$ de $\sinh(x)$.

(3) Donner une formule pour l'erreur commise $R_{2n+1}(x) = \sinh\, x - T_{2n+1}(x)$.

(4) Donner une majoration de $R_{2n+1}(x)$ pour $x \in [0,1]$.

(5) Quel est le plus petit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $T_{2n+1}(x)$ donne une approximation de $\sinh\, x$ à 10^{-8} près pour tout $x \in [0,1]$?

(6) Donner un encadrement à 10^{-8} près de $\sinh\, 1$ par deux rationnels (décrits comme des fractions p/q, avec p, q entiers).

(7) Que pouvez-vous dire de l'erreur *relative* de votre approximation de $\sinh\, x$, toujours pour $x \in [0,1]$?

(8) Refaire le calcul de $\sinh\, x$, $x \in [0,1]$ en utilisant deux développements de Taylor, un pour e^x et un pour e^{-x} ? Combien de termes faut-il prendre dans chacun de ces développements pour obtenir une approximation à 10^{-8} près ?