Thèse de l'Université Joseph Fourier (Grenoble I)

Fibrés en droites numériquement effectifs et variétés kählériennes compactes à courbure de Ricci nef

Mihai Păun

Université de Grenoble I, Institut Fourier

Mémoire achevé en novembre 1997

Thèse soutenue à Grenoble le mercredi 21 janvier 1998

Jury :

Gérard BESSON (CNRS, UJF)
Frédéric CAMPANA (Nancy 1) (rapporteur)
Jean-Pierre DEMAILLY (UJF) (directeur)
Paul GAUDUCHON (CNRS, École Polytechnique) (rapporteur)
Christiaan PETERS (UJF) (Président)

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier Jean-Pierre Demailly; ses conseils et sa bonne humeur mathématique m'ont été précieux pendant la préparation de cette thèse. J'ai particulièrement apprécié la façon dont il a guidé mes premiers essais dans la recherche et surtout l'infinie patience avec laquelle il a rendu lisibles mes textes.

Frédéric Campana et Paul Gauduchon m'ont fait le grand honneur de rapporter sur cette thèse ; j'aimerais qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je suis également ravi de la présence de Chris Peters dans mon jury et tout particulièrement de celle de Gérard Besson, avec lequel j'ai eu de nombreuses et enrichissantes discussions mathématiques.

Pendant ces derniers années, j'ai eu la chance de rencontrer des gens dont les capacités mathématiques m'ont beaucoup apporté. Ainsi je voudrais remercier Pierre Bérard, Louis Funar, Emmanuel Giroux, Siegmund Kosarew et Vlad Sergiescu.

Je dois de vifs remerciements à Sylvestre Gallot et à Mikhael Gromov; leurs remarques et idées ont eu des conséquences importantes dans mon travail. À l'Institut Fourier j'ai été chaleureusement accueilli par le tout jeune "noyau complexe" constitué par Laurent Bonavero, Thierry Bouche, Laurent Manivel et Christophe Mourougane. Je tiens à les remercier en exprimant mon amicale admiration.

Enfin, j'ai le plaisir de remercier Arlette Guttin-Lombard pour ses compétents conseils en matière de TeX et ses voeux de "bonne chance". Il y a quelques années, j'ai rencontré Ioana. Depuis, tout est beaucoup plus beau autour de moi.

Table des Matières

Introduction

L'objet principal de cette thèse est d'étudier les fibrés en droites numériquement effectifs sur les variétés complexes compactes et les propriétés des variétés kählériennes à classe de Ricci numériquement effective.

Le premier chapitre commence par une analyse des diverses formulations de la notion d'effectivité numérique dans le cadre des variétés complexes compactes quelconques.

En géométrie algébrique, on dispose d'une notion bien connue de fibré en droites numériquement effectif ("nef" en abrégé) sur une variété projective complexe : un fibré en droites L sur une variété projective X est dit nef si $L \cdot C \geq 0$ pour toute courbe fermée $C \subset X$. Cette définition n'est plus pertinente dans le cas d'une variété complexe compacte quelconque, car une telle variété peut ne pas avoir de courbes. Le critère d'amplitude de Seshadri permet de reformuler la notion d'effectivité numérique sur les variétés projectives en termes de métriques hermitiennes. Dans cette perspective, la notion d'effectivité numérique généralement acceptée est la suivante:

Définition. *Soit X une variété complexe compacte et (L, h) un fibré hermitien en droites sur X. On dit que L est nef si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $\phi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(X)$ telle que:*

$$\Theta_h(L) + i\partial\overline{\partial}\phi_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega$$

où ω est une métrique hermitienne fixée sur X.

Autrement dit, on demande l'existence d'une suite de métriques $h_\varepsilon = \exp(-\phi_\varepsilon)h$ sur L dont la partie négative de la forme de courbure est arbitrairement petite.

Cette notion étant ainsi formulée, on peut se demander si les propriétés des fibrés nefs démontrées par les méthodes de la géométrie algébrique restent valables en géométrie analytique.

D'après une observation de Fujita ([Fu]), on a l'invariance de la propriété d'effectivité numérique par les morphismes surjectifs entre variétés projectives. Le premier théorème du chapitre 1 généralise ce résultat dans le cas des variétés holomorphes compactes quelconques.

Théorème 1.B.1′. *Soit $f : Y \to X$ une application holomorphe surjective, X et Y étant des variétés complexes compactes, et soit $L \to X$ un fibré en droites. Alors $L \to X$ est nef si et seulement si $f^*L \to Y$ est nef.*

On a une application intéressante de ce théorème dans le cadre des variétés de Moishezon. En effet, une telle variété possède "assez de courbes" pour que la définition algébrique d'un fibré nef soit légitime, donc on peut se poser la question de l'equivalence des deux notions d'effectivité numérique, au sens algébriques et respectivement au sens métrique. La réponse est donnée par le corollaire suivant:

Corollaire 1.B.7. *Soit X une variété de Moishezon, $L \to X$ un fibré en droites. Alors L est nef au sens algébrique si et seulement si L est nef au sens métrique.*

Afin d'énoncer le résultat suivant, nous aurons besoin de la notion de classe de cohomologie pseudo-effective, dans le groupe de "cohomologie"

$$H^{1,1}_{\partial\overline{\partial}}(X) = \{\alpha \in \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{1,1}T^*_X)/\partial\alpha = \overline{\partial}\alpha = 0\}/\partial\overline{\partial}\mathcal{C}^\infty(X).$$

Définition 1.A.1.4. *On dit qu'une classe de cohomologie $\{\alpha\} \in H^{1,1}_{\partial\overline{\partial}}(X)$ est pseudo-effective si elle contient un courant positif fermé.*

Dans la troisième partie de ce premier chapitre on démontre deux résultats qui sont des caractérisations de la notion d'effectivité numérique pour les classes de cohomologie pseudo-effectives et en particulier, dans la situation algébrique, pour les classes de diviseurs effectifs.

Theorème 1.C.2. *Soit T un $(1,1)$–courant positif fermé sur une variété X compacte complexe. Alors $\{T\}$ est nef si et seulement si $\{T\}_{|Z}$ est nef, pour chaque sous-ensemble analytique irréductible $Z \subset \bigcup_{c>0} E_c(T)$ (où $E_c(T)$ désigne l'ensemble des points de X tel que le nombre de Lelong de T en ce point est supérieur où égal à c).*

Théorème 1.C.3. *Soit $\{\alpha\} \in H^{1,1}_{\partial\overline{\partial}}(X)$ une classe de cohomologie. Alors $\{\alpha\}$ est nef si et seulement si pour tout ensemble analytique irréductible $Z \subseteq X$ la classe $\{\alpha\}_{|Z}$ est pseudo-effective.*

(une classe de cohomologie est nef si elle admet de répresentants de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont la partie négative est arbitrairement petite). Comme conséquence des résultats ci-dessus, on observe que sur les surfaces complexes compactes on a un critère numérique de caractérisation des classes nef:

Proposition 1.C.5. *Soit X une surface complexe compacte et T un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$. Si pour chaque courbe $C \subset X$ on a $\{T\} \cdot C \geq 0$, alors $\{T\}$ est nef.*

Les derniers résultats du premier chapitre portent sur des propriétés "qualitatives" des classes de cohomologie nef (une motivation des notions et résultats de cette partie réside dans l'étude du groupe fondamental des variétés kählériennes compactes à classe de Ricci nef, étude qui sera poursuivie dans le deuxième chapitre).

Soit $\{\alpha\}$ une classe de cohomologie nef. On montre que l'existence d'un courant positif fermé $T \in \{\alpha\}$ dont le potentiel φ est tel que $\exp(-\varphi)$ soit intégrable (on appellera INT cette propriété) entraîne l'existence de représentants

$\alpha_\varepsilon \in \{\alpha\}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, presque positifs avec un contrôle uniforme de l'intégrale $\int_X \exp(-\varphi_\varepsilon)$ associée à leurs potentiels. De façon précise, on a:

Proposition 1.D.1. *Soit $\{\alpha\}$ une classe de cohomologie nef qui a la propriété INT. Alors il existe une suite $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X telle que:*
i) $\max_X \varphi_\varepsilon \leq 0$,
ii) $\alpha + i\partial\overline{\partial}\varphi_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega$,
iii) $\int_X \exp(-\varphi_\varepsilon) dV_\omega \leq C$,
où C est une constante indépendante de ε.

Le deuxième chapitre de cette thèse est consacré à l'étude des propriétés du groupe fondamental des variétés kählériennes compactes à classe de Ricci nef. La structure des 1–formes holomorphes et du morphisme d'Albanese y jouera un grand rôle. Ce chapitre est structuré en quatre parties, la première (le paragraphe 2.A) étant consacré à des rappels de géométrie kählérienne et riemannienne.

Le groupe fondamental des variétés kählériennes compactes dont la classe anticanonique vérifie des propriétés de positivité a intéressé beaucoup d'auteurs. Mentionnons quelques résultats connus dans cette direction. Si X est une variété projective telle que $c_1(X)$ est positive, alors X est simplement connexe d'après un théorème de Kobayashi, voir [Ko]. Si $c_1(X)$ est semi-positive, le théorème d'Aubin-Calabi-Yau montre que X possède une métrique kählérienne à courbure de Ricci semi-positive, et on peut dans ce cas en déduire que $\pi_1(X)$ est presque-abélien, i.e. contient un sous-groupe abélien d'indice fini (voir Cheeger-Gromoll [GhG] et Demailly-Peternell-Schneider [DPS3]). En ce qui concerne l'étude des variétés kählériennes dont la classe anticanonique est nef, les travaux de Demailly-Peternell-Schneider montrent que $\pi_1(X)$ est un groupe à croissance sous-exponentielle (voir [DPS2]). Toujours dans ce cadre, il a été conjecturé que le groupe fondamental est à croissance polynomiale. Dans le paragraphe 2.B, nous obtenons une preuve de cette conjecture, en nous appuyant sur la technique de [DPS2] ainsi que sur quelques résultats récents de la géométrie des variétés à courbure de Ricci minorée (théorème 2.A.2.9). On a ainsi:

Théorème 2.B.1.1. *Soit X une variété kählérienne compacte de dimension n, avec $c_1(X)$ nef. Alors $\pi_1(X)$ est un groupe presque-nilpotent, i.e. $\pi_1(X)$ admet un sous-groupe d'indice fini qui est nilpotent.*

Pour se faire une idée de la façon dont la géométrie riemannienne intervient dans la preuve, signalons que l'hypothèse d'effectivité numérique de la classe anticanonique de X est équivalente à l'existence d'une suite de métriques kählériennes $(\omega_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ appartenant à une classe de cohomologie fixée $\{\omega\}$, et dont la courbure de Ricci est minorée par $-\varepsilon$.

Le théorème 2.B.1.1 ne donne aucun renseignement concernant la longueur de nilpotence d'un sous-groupe d'indice fini du $\pi_1(X)$. Nous avons donc recherché une preuve beaucoup plus simple d'un cas particulier de ce théorème, qui a au moins le mérite de n'utiliser que des résultats et arguments presque élémentaires, et de donner des bornes effectives pour le degré de croissance du groupe fondamental (et donc pour la longueur de nilpotence de ce groupe). Plus précisément, le cadre dans lequel on se place est le suivant:

Hypothèse PCM. *On dit qu'une classe de cohomologie $\{\alpha\}$ a la propriété (PCM) (i.e. "potentiels contrôlés en moyenne") s'il existe des constantes $C_0 > 0$, $C_1 > 0$ et une suite $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que:*

i) $\alpha + i\partial\overline{\partial}\phi_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega$.

ii) $\max_X \phi_\varepsilon \leq 0$.

iii) $\displaystyle\int_X \exp(-\phi_\varepsilon)dV_\omega \leq C_1 \frac{1}{\varepsilon^{C_0}}$.

Sous cette hypothèse, on a la version suivante du théorème 2.B.1.1:

Théorème 2.B.2.3 *Soit X une variété kählérienne compacte de dimension n telle que $c_1(X)$ a la propriété (PCM). Alors $\pi_1(X)$ est un groupe à croissance polynômiale et le degré de croissance est inférieur à $2(n + C_0)$.*

Remarque. Dans tous les exemples connus, si $c_1(X)$ est nef, elle a automatiquement la propriété (PCM).

Dans le paragraphe 2.C, on montre que pour certaines variétés kählériennes compactes à classe de Ricci nef on peut nettement améliorer le résultat du théorème 2.B.1.1 et démontrer que le groupe fondamental est presque abélien. Dans cette catégorie entrent les variétés projectives à classe de Ricci nef. L'utilisation d'un résultat de Qi Zhang sur la surjectivité du morphisme d'Albanese nous permet ainsi d'obtenir le:

Théorème 2.C.1.1. *Soit X une variété projective de dimension n, avec $c_1(X)$ nef. Alors $\pi_1(X)$ est un groupe presque abélien.*

Un résultat similaire sera également obtenu moyennant une hypothèse géométrique convenable sur la suite de métriques donnée par la condition $c_1(X)$ nef. Notamment, nous montrons le

Théorème 2.C.2.1. *Soit X une variété complexe compacte munie d'une suite des métriques kählériennes $(\omega_k)_k$ telles que:*

a) Chaque métrique ω_k appartient à la classe de cohomologie $\{\omega_1\}$.

b) Pour chaque $k > 0$ on a: $\mathrm{Ricci}_{\omega_k} \geq -\frac{1}{k}\omega_k$

c) Il existe une constante $D > 0$ telle que $\mathrm{diam}(X, \omega_k) \leq D$ *pour tout entier k.*

Alors le groupe fondamental de X est presque abélien, et les sous-groupes abéliens libres maximaux sont de rang inférieur à la dimension réelle de X.

La condition analytique (INT) d'intégrabilité de la classe $c_1(X)$ est une condition suffisante pour que les hypothèses du théorème 2.C.2.1 soit vérifiées.

Théorème 2.C.2.2. *Soit X une variété kählérienne compacte dont la première classe de Chern est nef et a la propriété (INT). Alors il existe une suite de métriques kählériennes sur X qui ont les propriétés $a), b)$ et $c)$ ci-dessus (et donc en particulier $\pi_1(X)$ est presque-abélien).*

Dans la partie 2.C.3, on développe une un approche géométrique d'un exemple de Demailly, Peternell et Schneider et on montre à cette occasion que la propriété (INT) n'est cependant pas nécessaire pour avoir une telle suite de métriques.

Enfin, le paragraphe 2.D porte sur les propriétés quantitatives et qualitatives des 1–formes holomorphes sur les variétés kählériennes compactes à classe de Ricci nef. Dans une première partie on démontre l'inégalité suivante:

Théorème 2.D.1.1. *Soit X une variété kählérienne compacte de dimension n, avec K_X^{-1} nef. Alors $h^1(X, \mathcal{O}_X) \leq n$.*

Une conséquence intéressante du théorème 2.D.1.1 et du théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg est le corollaire suivant:

Corollaire 2.D.1.4. *Soit X une variété projective de dimension n dont le fibré anticanonique est nef et de dimension numérique supérieure ou égale à $n-1$. Alors le morphisme d'Albanese de X est soit trivial, soit une fibration surjective sur une courbe elliptique.*

Nous avons également obtenu quelques résultats lorsque, contrairement à l'hypothèse 2.C.2.1 c), le diamètre ne reste pas borné. Si la suite de diamètres $d_k = \mathrm{diam}(X, \omega_k)$ tend vers l'infini, alors on observe (voir lemme 2.C.2.7) que la dimension de l'espace limite au sens de Gromov-Hausdorff de la suite $(X, \omega_k)_k$ ne peut pas être maximale. Si on suppose de plus qu'on peut mesurer uniformément les éléments de $H_1(X, \mathbb{Z})$ par rapport à la suite de métriques, on montre que l'irrégularité $q(X)$ est strictement inférieure à la dimension de X. L'énoncé précis est:

Théorème 2.D.2.1 *Soit X une variété complexe compacte munie d'une suite de métriques kählériennes $(\omega_k)_k$ telles que:*

i) Chaque métrique ω_k appartient à une classe de cohomologie fixée, et $\mathrm{Ricci}_{\omega_k} \geq -1/k\omega_k$.

ii) Il existe une constante $C > 0$ et une suite $(C_k)_k$ de nombres positifs tels que $\lim_{k\to\infty} C_k/\sqrt{k} = 0$ et pour tout γ appartenant à la partie libre du $H_1(X, \mathbb{Z})$ on a:

$$C \leq |\gamma|_{k,p} \leq C_k l_{\mathrm{alg}}(\gamma)$$

pour tout $p \in X$.

Alors si $d_k := \mathrm{diam}(X, \omega_k)$ tend vers l'infini, l'irrégularité de X est majorée par $n-1$.

Finalement, si la suite de diamètres est majorée, on démontre une formule d'estimation en moyenne “à la Colding” pour les fonctions de type $x \to |\beta|^2_{\omega_k,x}$, où β est une 1–forme holomorphe globale. Comme conséquence on obtient le théorème suivant:

Théorème 2.D.3.1. *Soit X une variété complexe compacte munie d'une suite de métriques kählériennes $(\omega_k)_k$ telles que la métrique ω_k appartient à une classe de cohomologie fixée $\{\omega_1\}$, la courbure de Ricci étant minorée par $-1/k$ et le diamètre*

$D_k := \mathrm{diam}(X, \omega_k)$ *étant majoré par une constante qui ne dépend pas de* k*. Alors le morphisme d'Albanese de* X *est surjectif.*

CHAPITRE 1.

1.A. Préliminaires.

1.A.1. Effectivité numérique au sens métrique.

Dans cette partie préliminaire du premier chapitre, on indique comment formuler la notion de fibré numériquement effectif sur une variété complexe compacte d'après Demailly-Peternell-Schneider et on donne quelques propriétés et exemples concernant cette notion.

En géométrie algébrique, on dispose d'une notion bien connue de fibré en droites numériquement effectif (nef en abrégé) sur une variété projective complexe : un fibré en droites L sur une variété projective X est dit nef si $L \cdot C \geq 0$ pour toute courbe fermée $C \subset X$. Cette définition n'est plus pertinente dans le cas d'une variété complexe compacte quelconque, car une telle variété peut ne pas avoir assez de courbes. Le critère d'amplitude de Seshadri suggère la possibilité de formuler une définition satisfaisante en termes de métriques hermitiennes. En effet, par ce critère on a la caractérisation suivante des fibrés nef de rang 1:

Lemme 1.A.1.1 [DPS1]. *Soit X une variété projective et $A \to X$ un fibré en droites ample. Alors le fibré L est nef si et seulement si pour tout $k \geq 0$ le fibré $L^{\otimes k} \otimes A$ est ample.*

Preuve. Par le critère de Seshadri, un fibré holomorphe en droites A est ample si et seulement s'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $A \cdot C \geq \varepsilon m(C)$ pour chaque courbe C de X, où $m(C)$ est le maximum de la multiplicité des points singulièrs de la courbe C. Alors comme A est ample, il existe un tel $\varepsilon(A)$ et maintenant si $L \to X$ est nef, on a

$$\big(L^{\otimes k} \otimes A\big) \cdot C = kL \cdot C + A \cdot C \geq \varepsilon(A) m(C)$$

et donc $L^{\otimes k} \otimes A$ est ample.

Inversement, si pour tout $k \geq 0$ le fibré $L^k \otimes A$ est ample, alors pour chaque courbe $C \subset X$ on a $(L^{\otimes k} \otimes A) \cdot C > 0$ i.e.

$$L \cdot C \geq -\frac{1}{k} A \cdot C$$

et ceci montre que L est nef.

Pour les fibrés en droites amples, on a la caractérisation suivante en termes de métriques:

Théorème (Kodaira). *Soit X une variété complexe compacte et L un fibré holomorphe en droites sur X. Alors L est ample si et seulement s'il peut être muni d'une métrique hermitienne h de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont la forme de courbure soit strictement positive dans chaque point de la variété X.*

Alors on en déduit facilement l'existence d'une suite $(h_k)_{k>0}$ de métriques hermitiennes sur L telles que

$$\Theta_{h_k}(L) > -\frac{1}{k}\Theta_h(A)$$

où h est une métrique fixée sur A dont la forme de courbure est strictement positive définie. En conclusion, sur une variété projective un fibré en droites est nef s'il a des métriques de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont la partie négative de la courbure est arbitrairement petite. C'est exactement cette propriété qu'on prend comme définition dans le cas général:

Définition 1.A.1.2. ([DPS1]). *Soit (X, ω) une variété complexe compacte hermitienne et (L, h) un fibré hermitien en droites. Alors on dit que L est nef si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $\phi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(X)$ telle que*

$$\Theta_h(L) + i\partial\overline{\partial}\phi_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega$$

Par compacité de X, on voit facilement que cette notion ne dépend pas des métriques de référence choisies ω et h respectivement.

Par ailleurs, on observe que pour formuler la propriété d'effectivité numérique on n'a pas besoin de l'intégralité de la classe de Chern du fibré en question. On peut alors formuler cette notion dans le cadre plus général des (1,1)-classes de cohomologie: comme dans [De92], on introduit le groupe de cohomologie $H^{p,q}_{\partial\overline{\partial}}(X)$ des (p, q)-formes ∂ et $\overline{\partial}$ fermées modulo l'image de $\partial\overline{\partial}$ et on pose la définition suivante.

Définition 1.A.1.3. *On dit qu'une classe de cohomologie $\{\alpha\} \in H^{1,1}_{\partial\overline{\partial}}(X)$ est nef si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un représentant $\alpha_\varepsilon \in \{\alpha\}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, tel que*

$$\alpha_\varepsilon \geq -\varepsilon\,\omega \quad \textit{sur } X.$$

Une autre propriété de positivité d'une classe de cohomologie est donnée dans la définition suivante:

Définition 1.A.1.4. *On dit qu'une classe de cohomologie $\{\alpha\} \in H^{1,1}_{\partial\overline{\partial}}(X)$ est pseudo-effective si elle contient un courant positif fermé.*

Présentons maintenant quelques propriétés et exemples concernant ces notions qui seront utilisées dans la suite.

Proposition 1.A.1.5 ([DPS1])**.** *Soit $\{\alpha\}$ une (1,1)–classe de cohomologie nef. Alors elle est pseudo-effective.*

Preuve. On commence par le lemme standard suivant:

Lemme 1.A.1.6. *Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^2(X)$ dont la forme hessienne est minorée par une (1,1)–forme fermée γ et telle que $\max_X(u) = 0$. Alors il existe une constante $c > 0$ qui dépend seulement de X, ω, γ telle que $\int_X |u(z)| dV_\omega \leq c$.*

La démonstration de ce lemme est immédiate, en utilisant l'inégalité de la moyenne pour les fonctions plurisousharmoniques et la formule de Green (une fonction supérieurement semi-continue $\phi : X \to [-\infty, \infty[$ s'appelle plurisousharmonique (psh en abrégé) si sa forme hessienne est positive au sens des distributions).

Si on fixe donc une métrique ω sur X, l'hypothèse d'effectivité numérique de la classe $\{\alpha\}$ implique l'existence d'une suite $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(X)$ telles que

$$\alpha + i\partial\overline{\partial}\phi_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega \tag{1}$$

et en ajoutant des constantes, on peut normaliser les composantes de la suite de façon que $\max_X(\phi_\varepsilon) = 0$. D'autre part, la condition (1) montre que

$$i\partial\overline{\partial}\phi_\varepsilon \geq -\omega - \alpha$$

si ε est inférieur à 1. Par le lemme 1.A.6, la suite $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est bornée en norme L^1 et donc relativement compacte pour la topologie faible de L^1. Alors quitte à extraire une sous-suite, on peut passer à la limite au sens des courants dans (1), en obtenant ainsi un représentant $T := \alpha + i\partial\overline{\partial}\psi$ qui est positif fermé.

En termes de fibrés, la proposition ci-dessus s'énonce comme suit:

Proposition 1.A.1.5′. *Soit $L \to X$ un fibré nef. Alors il existe une métrique singulière h sur L dont les fonctions poids sont psh.*

Observation 1.A.1.7. Parmi les fonctions psh sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$, il existe une classe "type", notamment celles qui ont des pôles logarithmiques. Une fonction ϕ est à pôles logarithmiques si localement elle s'écrit de la façon suivante

$$\phi = \log\big(\sum_{j=1}^{N} |f_j|^2\big) + \rho$$

où les fonctions f_j sont holomorphes et ρ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Une question intéressante est la suivante:

Question. *Comment peut-on caractériser les classes de cohomologie nef qui contiennent des courants positifs fermés à pôles logarithmiques?*

Exemple 1.A.1.8([DPS1])**.** On présente maintenant un exemple dû à Demailly-Peternell-Schneider qui montre qu'en général la classe de Chern d'un fibré nef n'admet pas de réprésentant semi-positif de classe $\mathcal{C}^\infty$. On donnera une approche plus géométrique de cet exemple dans le deuxième chapitre de cette thèse.

Soit $\Gamma = \mathbb{C}/\big(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}\big)$ une courbe elliptique et $E \to \Gamma$ le fibré de rang deux défini par

$$E := \mathbb{C}\times\mathbb{C}^2/\big(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}\big)$$

où l'action de $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ est donnée par les automorphismes suivants

$$\begin{aligned} g_1(z; z_1, z_2) =& (z+1; z_1, z_2),\\ g_2(z; z_1, z_2) =& (z+i; z_1+z_2, z_2). \end{aligned}$$

Le morphisme $E \to \Gamma$ est donné par la projection sur le premier facteur; remarquons aussi que $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\{0\}/\big(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}\big) \mapsto E$ est un sous-fibré trivial de rang 1 de E dont le quotient est également trivial. Alors par des considérations générales (voir [DPS1]) le fibré $L := \mathcal{O}_E(1)$ sur la surface $\mathbb{P}(E)$ est nef (on donnera une preuve "à la main" de cette assertion dans le deuxième chapitre). Pour montrer qu'il n'est pas hermitien semi-positif on détermine toutes les métriques dont la courbure est positive au sens des courants.

Soit h une métrique telle que $\Theta_h(L) \geq 0$. On considère alors la fonction suivante associée à h

$$\psi(\xi) := \log|\xi|^2_{h^{-1}}$$

définie sur l'espace total du fibré L^{-1}. La hessienne de cette fonction est la somme du courant d'intégration sur la section nulle de L^{-1} et de l'image inverse de la forme de courbure de L par rapport à h, donc ψ est une fonction psh. Par construction, la fonction ψ vérifie la condition suivante

$$\psi(\lambda\xi) = \log|\lambda|^2 + \psi(\xi). \tag{2}$$

L'espace total du fibré L^{-1} est l'éclatement du E^* le long de la section nulle, donc par image directe on en déduit l'existence d'une fonction ϕ, psh sur E^* qui satisfait la condition (2). En résumé, on a une fonction $\widetilde{\phi}$ sur $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^2$, psh, invariante par les automorphismes

$$\begin{aligned} g_1^*(z; w_1, w_2) =& (z+1; w_1, w_2)\\ g_2^*(z; z_1, z_2) =& (z+i; w_1, w_1+w_2) \end{aligned}$$

qui de plus vérifie la condition d'homogénéité logarithmique (2). Une première observation est qu'une telle fonction doit être indépendante de z. En effet, soit $f_{w_1,w_2}(z) := \widetilde{\phi}(z, w_1, w_2)$. Alors par l'invariance de $\widetilde{\phi}$ on a

$$\begin{aligned} f_{w_1,w_2}(z+im) =& \log|m|^2 + \tilde{\phi}\big(z, \frac{w_1}{m}, w_1+\frac{w_2}{m}\big)\\ f_{w_1,w_2}(z+1) =& f_{w_1,w_2}(z) \end{aligned}$$

Donc f est sous-harmonique, 1-périodique et à croissance logarithmique à l'infini; il est élémentaire de voir qu'une telle fonction est constante. Ensuite, la fonction

$$w_2 \mapsto \tilde{\phi}(w_1, w_2)$$

est périodique pour $w_1 \neq 0$ et par les mêmes arguments, constante. Finalement, la condition (2) implique

$$\tilde{\phi}(z, w_1, w_2) = \log |w_1|^2 + c$$

où c est une constante. Alors la courbure de L par rapport à h est le courant d'intégration sur la courbe $C := (z_2 = 0)$ et toutes les métriques dont la forme de courbure est semi-positive ont des pôles logarithmiques le long de cette courbe.

1.A.2. Résultats concernant la régularisation des courants positifs fermés.

On indique maintenant quelques résultats concernant la régularisation des courants positifs fermés qui seront amplement utilisées dans les paragraphes 1.C et 1.D. On commence par le théorème suivant (voir [Ri]):

Théorème 1.A.2.1 (Richberg). *Soit X une variété complexe compacte et $\varphi : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que pour une (1,1)-forme γ sur X on a: $i\partial\overline{\partial}\varphi \geq \gamma$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe une fonction φ_ε de classe $\mathcal{C}^\infty(X)$ telle que:*

i) $\varphi - \delta_\varepsilon \leq \varphi_\varepsilon \leq \varphi + \delta_\varepsilon$

ii) $i\partial\overline{\partial}\varphi\varepsilon \geq \gamma - \varepsilon\omega$

où ω est une métrique hermitienne fixée sur X et δ_ε est une suite qui tend vers zéro .

En fait, les fonctions φ_ε s'obtiennent de la façon suivante. Localement dans une carte on peut régulariser φ par convolution. La suite cherchée s'obtient en recollant ces convolutions locales par la fonction maximum régularisée (c'est dans l'utilisation de la fonction maximum qu'intervient la continuité de φ).

La situation est beaucoup plus subtile si on veut régulariser des fonctions psh quelconques. Il faut remarquer d'abord qu'en général il n'est pas possible d'avoir des approximations de classe $\mathcal{C}^\infty(X)$ de φ telles que la partie négative de la hessienne de ces approximations soit arbitrairement petite. Sinon, pour toute classe de cohomologie pseudo-effective $\{\alpha\}$ on devrait avoir $\int_C \{\alpha\} \geq 0$ pour toute courbe $C \subset X$ et des exemples simples montrent que ce n'est pas le cas. Comme le théorème suivant le montre, on peut approximer les fonctions quasi-psh avec une perte petite de positivité quitte à admettre des singularités le long d'un ensemble analytique. On donne d'abord la définition suivante (voir [Le]):

Définition-proposition 1.A.2.2. *Soit X une variété complexe compacte de dimension n et T un courant positif fermé de type (1, 1) sur X. Alors pour tout $x \in X$, la fonction $\nu(T, r, x)$ donnée par*

$$r \to \frac{1}{(2\pi r^2)^{n-1}} \int_{B(x,r)} T \wedge \left(i\partial\overline{\partial}|z|^2\right)^{n-1}.$$

est croissante. Le nombre de Lelong de T en x est défini par

$$\nu(T, x) := \lim_{r \to 0+} \nu(T, r, x).$$

Si on note par $E_c(T)$ l'ensemble de points de X où le nombre de Lelong de T est supérieur à c, par un résultat de Y. T. Siu (voir [Si]) cet ensemble est analytique fermé, pour tout $c > 0$. Avec ces notations, on a le théorème suivant, dû à J. P. Demailly (cf. [De3]).

Théorème 1.A.2.3 (Demailly). *Soit $T = \alpha + i\partial\overline{\partial}\phi$ un courant de type (1, 1) positif fermé sur une variété complexe compacte X, où α est un représentant lisse de sa classe de cohomologie. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un courant $T_\varepsilon := \alpha + i\partial\overline{\partial}\phi_\varepsilon$ tel que:*

i) La fonction ϕ_ε est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $X \setminus E_\varepsilon(T)$.

ii) Au sens des courants sur X on a $T_\varepsilon \geq -\varepsilon C\omega$, où C est une constante qui dépend seulement de la positivité du fibré tangent de X et ω est une (1, 1)–forme définie positive sur X.

Dans le paragraphe 1.D, on aura besoin de la version du théorème 1.A.2.3 suivante:

Théorème 1.A.2.4 (Demailly). *Soit φ une fonction quasi-psh sur X tel que $i\partial\overline{\partial}\varphi \geq \gamma$ où γ est une (1,1)-forme sur X de classe $\mathcal{C}^\infty$. Alors il existe une suite de fonctions $(\varphi_m)_{m>0}$ à pôles logarithmiques sur X telles que*

1) $\varphi \leq \varphi_m \leq \varphi + C$ *où C est une constante qui ne dépend pas de m.*

2) $i\partial\overline{\partial}\varphi_m \geq \gamma - \delta_m\omega$ *où $(\delta_m)_{m>0}$ est une suite de réels positifs qui tend vers 0.*

1.B. Images inverses des fibrés nef.

Dans ce paragraphe, notre but principal est de démontrer l'assertion suivante :

Théorème 1.B.1. *Soit $f : Y \to X$ une application holomorphe surjective, X et Y étant des variétés complexes compactes, et soit $\{\alpha\}$ une classe de cohomologie dans $H^{1,1}_{\partial\overline{\partial}}(X)$. Alors $\{\alpha\}$ est nef si et seulement si $f^*\{\alpha\}$ est nef.*

Ce résultat est bien connu et d'ailleurs pas très difficile à démontrer, si la variété X est projective (voir Fujita, [Fu]). Le cas général a été énoncé et démontré dans [DPS1] pour les morphismes f à fibres équidimensionnelles (en fait, dans [DPS1], les auteurs travaillent plutôt avec des fibrés qu'avec des classes de cohomologie, mais les arguments donnés dans la démonstration n'utilisent pas la propriété d'intégralité de la classe de Chern). On commence ici par résoudre un autre cas particulier, celui d'un éclatement. À l'aide du théorème de platification d'Hironaka, on obtient ensuite une preuve du théorème 1.B.1.

Démonstration du théorème 1.B.1. Supposons d'abord que la classe $\{\alpha\}$ soit nef, et soit ω, resp. ω', une métrique sur X, resp. Y. Alors par la compacité de Y et la positivité de ω' il existe $a > 0$ tel que

$$f^*\omega \leq a\,\omega'.$$

Comme $\{\alpha\}$ est nef, par définition nous pouvons trouver $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que

$$\alpha + i\partial\overline{\partial}\varphi_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega.$$

En prenant l'image inverse on trouve

$$f^*\alpha + i\partial\overline{\partial}\varphi_\varepsilon \circ f \geq -\varepsilon f^*\omega \geq -\varepsilon a\omega'.$$

Donc

$$f^*\{\alpha\} \text{ est nef.}$$

Pour l'autre implication on va commencer par quelques réductions. Le théorème de platification d'Hironaka (cf. [Hi]) montre l'existence d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\pi_2} & \widetilde{X} \\ \pi_1\downarrow & & \downarrow\sigma \\ Y & \xrightarrow[f]{} & X \end{array} \tag{3}$$

où Z est un espace complexe compact; π_2 un morphisme plat (i.e., à fibres équidimensionnelles) et $\widetilde{X} \xrightarrow{\sigma} X$ une suite d'éclatements de centres lisses. Ce diagramme, compte tenu de la démonstration ci-dessus de la première implication, permet de diviser notre problème en deux parties:

(B′) *Soit $f : Y \to X$ un morphisme holomorphe surjectif à fibres équidimensionnelles, où Y est un espace complexe compact et X une variété complexe compacte. Soit $\{\alpha\}$ une classe de cohomologie dans $H^{1,1}_{\partial\overline{\partial}}(X)$ tel que $f^*\{\alpha\}$ est nef. Alors $\{\alpha\}$ est nef.*

(B″) *Si $f : Y \to X$ est un éclatement de centre lisse et si $f^*\{\alpha\}$ est nef, alors $\{\alpha\}$ est nef.*

Preuve du B′. La preuve du B′ est connue lorsque X et Y sont lisses (cf. [DPS1] proposition 1.8). Pour la commodité du lecteur on va adapter la démonstration mentionnée ci-dessus dans notre situation (ici Y peut avoir des singularités).

Comme $f^*\{\alpha\}$ est nef, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe ψ_ε fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Y telle que

$$f^*\alpha + \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\psi_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega' \quad \text{sur } Y. \tag{4}$$

où ω' est une $(1,1)$-forme positive fixée sur Y.

Si p est la dimension des fibres de f, alors pour chaque $y \in Y$ on peut trouver des fonctions holomorphes $w_1, \ldots, w_p$ dans un voisinage de y, telles que

l'application $z \to \Big(f(z), w_1(z), \ldots, w_p(z)\Big)$ est propre et finie dans un voisinage U de y dans Y.

Alors on peut trouver des coordonnées locales au voisinage de $f(y)$ dans X telles que :

$$|F(z) - F(y)|^2 + \sum_{j=1}^{p} |w_j|^2 > 0 \quad \text{sur} \quad \partial U$$

(on passe éventuellement à un U plus petit), où $F = (F_1, \ldots, F_n)$ est l'expression de f dans les coordonnées locales choisies.

Comme Y est compact, on peut trouver un nombre fini de points $y_k \in Y$, des fonctions $(w_1^{(k)}, \ldots w_p^{(k)})$ holomorphes dans $\overline{U}_k$ telles que, si les $F^{(k)}$ sont les composantes de f, nous ayons :

i) $\quad 2\delta_k := \inf_{\partial U_k} \Big(|F^{(k)}(z) - F^{(k)}(y_k)|^2 + \sum_{j=1}^p |w_j^{(k)}|^2 \Big) > 0.$

ii) $\quad V_k := \{ z \in U_k / |F^{(k)}(z) - F(k)(y_k)|^2 + \sum_{j=1}^p |w_j^k|^2 < \delta_k \}$

soit un recouvrement de Y. On plonge chaque U_k comme ensemble analytique dans un ouvert de $\mathbb{C}^{N_k}$ où les $w_j^{(k)}$ se prolonge localement en des fonctions holomorphes et on complète les fonctions $w_1^{(k)}, \ldots, w_p^{(k)}$ en un système de coordonnées locales dans $\mathbb{C}^{N_k}$. (c'est-à-dire, les w_j peut-être ne sont pas indépendantes mais on ajoute $w_{p+1}^{(k)}, \ldots, w_{m_{y_k}}^{(k)}$ en sorte qu'un sous-ensemble de

$$w^{(k)} = (w_1^{(k)}, \ldots, w_{m_{y_k}}^{(k)})$$

donne des coordonnées locales dans $\mathbb{C}^{N_k}$).
Pour $z \in \overline{U}_k$, et $x \in X$ on prend

$$\lambda_\varepsilon^{(k)}(z) := \varepsilon^3 |w^{(k)}(z)|^2 - \varepsilon^2 \Big(|F^{(k)}(z) - F^{(k)}(y_k)|^2 + \sum_{j=1}^p |w_j^{(k)}(z)|^2 - \delta_k \Big)$$

$$\varphi_\varepsilon(x) = \sup_{y \in f^{-1}(x) \cap \overline{U}_k} \Big(\psi_{\varepsilon^4}(y) + \lambda_\varepsilon^{(k)}(y) \Big) \tag{5}$$

Le choix de $\lambda_\varepsilon^{(k)}$ implique que φ_ε est continue si ε est convenablement choisi. En effet si $\varepsilon < \varepsilon_0$ est assez petit on a $\lambda_\varepsilon^{(k)} < 0$ sur le bord de U_k et par ailleurs $\lambda_\varepsilon^{(k)} \geq 0$ dans les points de l'ensemble V_k; il s'ensuit donc que le sup ci-dessus n'est jamais atteint en un point du bord de U_k et alors φ_ε est continue.
Maintenant si on prend $\varepsilon < \varepsilon_1$, on obtient

$$\frac{i}{2\pi} \partial\overline{\partial}(\varepsilon^3 |w^{(k)}|^2) \geq \varepsilon^4 \omega'$$

sur U_k (par le choix de $w^{(k)}$, car c'est vrai sur un ouvert de $\mathbb{C}^{N_k}$, donc sur un ensemble analytique de l'ouvert aussi) et de même

$$\frac{i}{2\pi} \partial\overline{\partial}\Big(\varepsilon^2 |F^{(k)} - F^{(k)}(y_k)|^2 \Big) \leq \frac{\varepsilon}{2} f^* \omega,$$

où ω est une métrique sur X. La définition de ψ_ε implique

$$f^*\alpha + \frac{i}{2\pi} \partial\overline{\partial}(\psi_{\varepsilon^4} + \lambda_\varepsilon^{(k)}) \geq -\frac{\varepsilon}{2} f^*\omega - \varepsilon^2 \partial\overline{\partial} \sum_{j=1}^p |w_j^{(k)}|^2 \tag{6}$$

On va montrer que cela implique

$$\alpha + \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi_\varepsilon \geq -\frac{\varepsilon}{2}\omega \tag{7}$$

sur X, et par le théorème de régularisation de Richberg 1.A.2.1, on peut supposer que $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\widetilde{X})$; donc on aura bien que $L \to X$ est nef.

Voyons maintenant (6) $\Rightarrow$ (7). Soit $x_0 \in X$; on prend $y_0 \in U_k$, tel que

$$\varphi_\varepsilon(x_0) = \psi_{\varepsilon^4}(y_0) + \lambda_\varepsilon^{(k)}(y_0).$$

Soit q une fonction quadratique dans un voisinage de x_0 telle que

$$\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}q \geq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}\omega \quad \text{en } x_0.$$

Alors si $\Psi := \psi_{\varepsilon^4} + \lambda_\varepsilon^{(k)} + q \circ f + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^p |w_j^{(k)}|^2$, l'inégalité (5) implique que Ψ est psh sur une voisinage de y_0 ; f donne une application finie de

$$S := \{z \in U_k \,;\, w_j^{(k)}(z) = w_j^{(k)}(y_0), j = 1, \ldots, p\}$$

dans un voisinage de x_0 donc $\Phi(x) := \sup\limits_{y \in S \cap \pi_2^{-1}(x)} \Psi(y)$ est bien définie , et

$$\Phi(x) \leq \varphi_\varepsilon(x) + q(x) + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^p \mid w_j^{(k)} \mid^2$$

avec égalité dans x_0. Comme Φ est plurisousharmonique, $\varphi_\varepsilon + q$ satisfait l'inégalité de la moyenne dans x_0, et cela reste vrai tant que $\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}q \geq \sigma^*\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\widetilde{\omega}$. Donc $\varphi_\varepsilon + q$ est psh dans un voisinage de x_0, ce qui démontre (7). Intuitivement, on veut prendre une “section transversale“ de la fonction ψ_ε dans la direction des fibres de f en posant $\phi_\varepsilon(x) = \sup\limits_{y \in f^{-1}(x)} \psi_\varepsilon(y)$ mais de toute évidence cette idée simple ne marche pas lorsque f n'est pas un morphisme lisse.

Preuve du B$''$. Soit donc $f : Y \to X$ un éclatement de centre lisse X_0. On peut supposer $\dim X_0 < \dim X - 1$, car sinon f est un isomorphisme et il n'y a pas grand chose à dire.

On observe que $f_{|f^{-1}(X_0)} : f^{-1}(X_0) \to X_0$ est un morphisme surjectif dont les fibres sont équidimensionnelles, car pour $x_0 \in X_0$, $f^{-1}(x_0) \simeq P(N_{X_0|X})_{x_0}$. Le cas a) étant démontré, la classe $\{\alpha\}_{|X_0}$ est nef, et donc pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\phi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(X_0)$ telle que

$$\alpha_{|X_0} + \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\phi_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega_{|X_0}.$$

Pour montrer que la classe $\{\alpha\}$ est nef on va recoller les ϕ_ε avec les fonctions images directes des fonctions qu'on a par hypothèse sur Y. Dans ce but nous allons d'abord améliorer la suite ϕ_ε, car nous avons besoin d'une suite de fonctions convenable du point de vue hessienne non seulement dans les directions tangentes à X_0, mais sur tout l'espace tangent à X; une telle suite est fabriquée au moyen du lemme suivant.

Lemme 1.B.2. *Soit X_0 une sous-variété compacte lisse de X et ω une métrique hermitienne sur X. Si $\phi \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{1,1}T_X^*)$ sont telles que*

$$\alpha_{|X_0} + i\partial\overline{\partial}\phi \geq -\omega_{|X_0} \qquad \textit{sur } X_0,$$

alors il existe U_0 un voisinage de X_0 dans X et $\widetilde{\phi} \in \mathcal{C}^\infty(U_0)$ telle que

$$\alpha + i\partial\overline{\partial}\widetilde{\phi} \geq -2\,\omega \qquad \textit{dans } U_0.$$

Preuve du lemme. Soit $U'_j \Subset U_j$ des ouverts de cartes pour X centrés en des points de X_0 tel que $\bigcup_{j=1}^N U'_j \supset X_0$. Pour chaque U_j, on prend un système de coordonnées locales (z) tel que X_0 soit donné par les équations $z_{k+1} = 0, \ldots, z_n = 0$.

Soit $(\theta_j)_{j\geq 1}$ une partition de l'unité, telle que $\operatorname{supp}\theta_j \subset U_j$. Dans un voisinage tubulaire V de X_0 dans X tel que $V \subset \bigcup U'_j$, on prolonge ϕ par projection sur X_0; on notera encore ϕ la fonction obtenue. Soit

$$\widetilde{\phi}(x) = \phi(x) + \sum_j \theta_j(x)\,\varepsilon_j^3 \log\left[1 + \varepsilon_j^{-4}\big(|z_{k+1}|^2 + \ldots + |z_n|^2\big)\right]$$

Alors quitte à restreindre V et à bien choisir ε_j, $\widetilde{\phi}$ est la fonction cherchée. En gros, la hessienne du premier terme de $\widetilde{\phi}$ convient dans les directions tangentes à X_0 — c'est l'hypothèse — . Quant à la hessienne du deuxième on observe qu'en tout point de X_0, on a

$$i\partial\overline{\partial}\Big(\sum \theta_j(x)\,\varepsilon_j^3 \log\big(1 + \varepsilon_j^{-4}(|z_{k+1}|^2 + \ldots + |z_n|^2)\big)\Big) \geq \sum_j \theta_j \varepsilon_j^{-1} i\partial\overline{\partial}|z|^2$$

et alors le second terme corrige $\widetilde{\phi}$ dans les directions normales à X_0. En prenant les ε_j assez petits on peut compenser la négativité de α le long de $N_{X_0|X}$. Une variante beaucoup plus générale de ce lemme se trouve dans [De2], page 285.

D'après le lemme, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V_ε de X_0 dans X et $\phi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(V_\varepsilon)$, tels que

$$\alpha + i\partial\overline{\partial}\phi_\varepsilon \geq -\varepsilon\,\omega \qquad \text{dans } V_\varepsilon.$$

Maintenant, si ω est une métrique sur X et si $E = f^{-1}(X_0)$ est le diviseur exceptionnel de l'éclatement, pour une constante $c > 0$ assez grande, $cf^*\omega + \Theta\big(\mathcal{O}(-E)\big)$ est une métrique sur X. Comme $f^*\{\alpha\}$ est nef, nous avons par ailleurs une suite de fonctions $\psi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\widetilde{X})$ telle que

$$f^*\alpha + i\partial\overline{\partial}\psi_\varepsilon \geq -\varepsilon\Big(cf^*\omega + \Theta\big(\mathcal{O}(-E)\big)\Big). \tag{8}$$

Mais les classes de cohomologie de $\Theta\big(\mathcal{O}(-E)\big)$ et de $-[E]$ sont les mêmes (on note $[E]$ le courant d'intégration sur E) et on a $\Theta\big(\mathcal{O}(-E)\big) = -[E] + i\partial\overline{\partial}\mu_1$ avec $\mu_1 \in \mathcal{C}^\infty(\widetilde{X} \smallsetminus E)$. On sait que $[E]$ est un courant positif et fermé, donc son image directe par f aussi. De plus $f_*[E]$ est supporté dans X_0 et $\mathrm{codim}(X_0, X)$ est supérieure ou égale à 2. Le théorème du support implique $f_*[E] = 0$. Alors au sens des courants sur X nous avons $f_*\big(\Theta(\mathcal{O}(-E))\big) = i\partial\overline{\partial}\mu$ où $\mu = f_*\mu_1$. L'hypoellipticité du $\overline{\partial}$ montre que μ est lisse en dehors de X_0. Si on prend l'image directe de (8) par f nous obtenons

$$\alpha + i\partial\overline{\partial}(\varepsilon\mu + f_*\psi_\varepsilon) \geq -\varepsilon c\,\omega$$

car f est une modification. Soit $\tau_\varepsilon = \varepsilon\mu + f_*\psi_\varepsilon$; c'est une fonction lisse en dehors de X_0 et cette fonction est localement bornée supérieurement au voisinage de X_0 en raison de la condition de plurisousharmonicité précédente et du fait que $\mathrm{codim}\, X_0 \geq 2$ $\big($en fait, si dans un ouvert U la variété X_0 est définie par $z_1 = \ldots = z_s = 0$, alors la fonction μ a le même type de singularitées que $\log(|z_1|^2 + \ldots + |z_s|^2)\big)$.

En récapitulant, on dispose des données suivantes:

1) Pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une fonction τ_ε de classe $\mathcal{C}^\infty(X \setminus X_0)$ localement bornée supérieurement au voisinage de X_0 telle qu'au sens des courants sur X on ait
$$i\partial\overline{\partial}\tau_\varepsilon \geq -\alpha - \varepsilon\omega.$$
2) Pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une fonction ϕ_ε définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage V_ε de X_0 telle que
$$i\partial\overline{\partial}\phi_\varepsilon \geq -\alpha - \varepsilon\omega$$
dans V_ε.

Alors on recolle les fonctions τ_ε et ϕ_ε au moyen du lemme suivant, dû pour l'essentiel à J. P. Demailly:

Lemme 1.B.3. *Soit Y un sous-ensemble analytique de X et ϕ_1 une fonction quasi-psh sur X de classe $\mathcal{C}^\infty(X \setminus Y)$. Soit ϕ_2 une fonction quasi-psh définie et de classe $\mathcal{C}^\infty(U)$ où U est un voisinage de Y dans X. Supposons qu'il existe une (1,1)–forme γ telle que*

i) $i\partial\overline{\partial}\phi_1 \geq \gamma$ au sens des courants sur X.

ii) $i\partial\overline{\partial}\phi_2 \geq \gamma$ sur U.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit il existe une fonction ϕ_ε de classe $\mathcal{C}^\infty(X)$ dont la forme hessienne est minoré par $\gamma - \varepsilon\omega$ où ω est une métrique hermitienne fixée sur X.

Preuve. Dans la démonstration de ce lemme on a besoin d'un autre résultat, dû toujours à J.- P. Demailly, qui montre l'existence d'une fonction quasi-psh sur X, lisse sur $X \setminus Y$, à pôles logarithmiques le long de Y.

Lemme 1.B.4 ([De2]). *Soit Y un sous-ensemble analytique de X; alors il existe une fonction ψ de classe $\mathcal{C}^\infty(X \setminus Y)$ quasi-psh, qui a des pôles logarithmiques sur Y; en particulier, ψ vaut $-\infty$ sur Y.*

Preuve du lemme 1.B.4. Considérons l'idéal $\mathcal{I}_Y \subset \mathcal{O}_X$ défini par l'ensemble Y. Alors on peut trouver un recouvrement de la variété X par des ouverts A_λ biholomorphes à des boules de rayons r_λ dans des espaces $\mathbb{C}^{N_\lambda}$ tels que dans A_λ l'idéal $\mathcal{I}_Y$ admet un système de générateurs $(g_\lambda) = (g_{\lambda,j})$. Pour chaque λ on prend la fonction

$$\psi_\lambda(z) = \log |g_\lambda(z)|^2 - \frac{1}{r_\lambda^2 - |z - z_\lambda|^2}$$

si $z \in A_\lambda$ et on observe que ψ_λ est une version locale de la fonction cherchée. Pour recoller les différents ψ_λ on utilise une fonction maximum regularisée $\max_{reg}$ qu'on définit de la façon suivante. Prenons $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive, de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $[-1/2, 1/2]$ et telle que: $\int_{\mathbb{R}} \rho(u)du = 1$ et $\int_{\mathbb{R}} u\rho(u)du = 0$ et soit

$$\max_{\text{reg}}(t_1, .., t_p) := \int_{\mathbb{R}^p} \max\{t_1 + u_1, .., t_p + u_p\} \Pi_{j=1}^p \rho(u_j) du_j.$$

On définit

$$\psi(z) = \max_{\text{reg}}(..v_\lambda(z)..).$$

pour les indices λ tels que $z \in A_\lambda$. Le fait que ψ_λ tend vers $-\infty$ sur le bord de A_λ montre que ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $X \setminus Y$; par ailleurs la fonction $\max_{reg}$ est convexe et croissante en toutes les variables, donc ψ est quasi-psh.

Par 1.B.4, il existe une (1,1)-forme β telle que $i\partial\overline{\partial}\psi \geq \beta$; alors quitte à multiplier la fonction ψ par une constante positive suffisamment petite, on obtient une fonction ψ_ε du même type que ψ, mais sa hessienne est de plus minorée par $\frac{\varepsilon}{2}\omega$.

Considérons alors un ouvert V relativement compact de U qui contient Y et les nombres

$$c_{1,\varepsilon} := \inf_{\overline{X \setminus V}} \big(\phi_1 + \psi_\varepsilon\big)$$

$$c_2 := \sup_{\overline{U}} \big(\phi_2\big).$$

La fonction $\tau_\varepsilon(z) := \max\big(\phi_2(z) - c_2, \phi_1(z) + \psi_\varepsilon(z) - c_{1,\varepsilon}\big)$ est continue par le choix des constantes $c_{1,\varepsilon}, c_2$ et des arguments standard montrent que sa hessienne est minorée par $\gamma - \frac{\varepsilon}{2}\omega$ au sens des distributions sur X. Maintenant le théorème de régularisation de Richberg 1.A.9 montre qu'une fois qu'on a une fonction continue quasi-psh, on peut la rendre $\mathcal{C}^\infty$ quitte à perdre un peu de positivité. Ceci achève la preuve du lemme 1.B.3.

Il ne nous reste qu'à appliquer le lemme 1.B.3 pour recoller les fonctions τ_ε et ϕ_ε; on obtient ainsi des représentants dans $\mathcal{C}^\infty(X)$ de la classe de cohomologie de α qui sont presque positifs donc $\{\alpha\}$ est nef.

Observation. Le caractère local de la preuve du B$''$ implique le lemme suivant, qui sera utile dans la suite:

Lemme 1.B.5. *Soit* $\pi : \widetilde{X} \to X$ *une modification de la variété compacte* X, *et* $\widetilde{\omega}$, *respectivement* ω, *des métriques sur* $\widetilde{X}$ *et* X. *Supposons qu'on ait un ouvert* $\widetilde{U}$ *de* $\widetilde{X}$ *qui contienne l'ensemble analytique* $\widetilde{Y}$ *et une fonction* $\widetilde{\phi} \in \mathcal{C}^\infty(\widetilde{U})$ *telle que*

$$i\partial\overline{\partial}\widetilde{\phi} \geq \pi^*\gamma - a\widetilde{\omega}$$

sur $\widetilde{U}$, *où* γ *est une* $(1,1)$*-forme sur* X *et* a *un réel positif. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un voisinage* U_ε *de* $Y := \pi(\widetilde{Y})$ *et une fonction* $\phi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(U_\varepsilon)$ *tels qu'en tous les points de* U_ε *on ait*

$$i\partial\overline{\partial}\phi_\varepsilon \geq \gamma - (\varepsilon + a)\omega.$$

Remarque 1.B.6. Il est évident qu'en général une classe pseudo-effective n'est pas nécessairement nef (considérons par exemple le courant d'intégration sur le diviseur exceptionnel d'un éclatement). Cependant, comme le corollaire 6.4 du [De3] le montre, ces deux notions sont equivalentes dans le cas des courbes. En effet, soit $\{\alpha\}$ une classe pseudo-effective sur la courbe C. Par définition, cette classe contient un courant positif fermé T et soit $T_\varepsilon = \alpha + i\partial\overline{\partial}\phi_\varepsilon$ la suite de régularisations donnée par le théorème 1.A.2.3. Pour chaque $\varepsilon > 0$, la fonction ϕ_ε est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur la courbe C privée éventuellement d'un nombre fini de points. Par ailleurs, localement un point $p \in C$ on peut toujours trouver une fonction τ telle que $\alpha + i\partial\overline{\partial}\tau \geq 0$, et par le lemme 1.B.3 on peut s'en débarraser des singularités de ϕ_ε quitte à perdre un peu de positivité. La classe $\{\alpha\}$ est donc nef.

Applications du théorème 1.B.1. Nous allons maintenant indiquer quelques corollaires de notre résultat principal.

Théorème 1.B.1′. *Soit* $f : Y \to X$ *une application holomorphe surjective,* X *et* Y *étant des variétés complexes compactes, et soit* $L \to X$ *un fibré en droites. Alors* $L \to X$ *est nef si et seulement si* $f^*L \to Y$ *est nef.*

Comme on voit facilement, un fibré en droites $L \to X$ est nef au sens de la définition 1.A.1.2 si et seulement si sa classe de Chern est nef au sens de la définition 1.A.1.3; par conséquent le théorème 1.B.1 implique l'énoncé ci-dessus.

Dans la première partie de ce chapitre on a rappellé que pour une variété projective les deux notions d'effectivité numérique (au sens des courbes et respectivement au sens des métriques) sont équivalentes. On peut alors se poser la question de savoir si cela reste vrai dans le cas de variétés plus générales. Un réponse partielle à cette question est donnée par le corollaire suivant, qui nous a été gentilement suggéré par Laurent Bonavero:

Corollaire 1.B.7. *Soit* X *une variété de Moishezon et* $L \to X$ *un fibré en droites. Alors* L *est nef au sens de la géométrie algébrique si et seulement si* L *est nef au sens des métriques.*

Preuve. On rappelle d'abord que si X est une variété de Moishezon, il existe $X_1 \overset{\pi}{\to} X$ une modification telle que X_1 soit projective. L'implication qui nous reste à démontrer est la suivante: si $L \to X$ est nef au sens des courbes, alors L est nef au sens des métriques. Pour cela, on observe que si $L \to X$ est nef au sens des courbes, alors $\pi^* L \to X_1$ l'est aussi, car on peut répartir les courbes de X_1 en deux classes : soit elles sont des revêtements ramifiés de courbes de X, soit elles sont contractées par π. Dans tous les cas l'indice d'intersection avec $\pi^* L$ est positif ou nul. Maintenant, comme X_1 est une variété projective, et que l'équivalence des deux notions est démontrée dans ce cas, il nous reste seulement à appliquer le théorème $1.B.1'$ pour conclure.

Observations.

1. Pour toute variété complexe compacte X, si un fibré L est nef au sens des métriques, alors il est nef au sens des courbes, car

$$c_1(L)\cdot C = \int_C c_1(L) \geq -\varepsilon\omega$$

pour toute courbe $C \subset X$ et tout $\varepsilon > 0$, et alors on a $L\cdot C \geq 0$.

2. Par ailleurs, on a l'exemple suivant, dû à [DPS1] qui montre qu'en général les deux notions ne sont pas équivalentes.

Soit $X = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\Gamma$ la surface de Hopf associée au groupe $\Gamma = \{2^p; p \in \mathbb{Z}\}$. Alors X est homéomorphe à $S^3 \times S^1$ et on a $b_2(X) = 0$ (où $b_2(X)$ désigne le second nombre de Betti de X). Donc pour tout fibré L on a $L.C = 0$, car $c_1(L) = 0$. D'autre part, on a la projection naturelle $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ et le fibré $L := \pi^*\mathcal{O}(-1)$ n'est pas nef au sens des métriques, car $\mathcal{O}(-1)$ n'est pas nef sur $\mathbb{P}^1$.

1.C. Caractérisation de l'effectivité numérique en termes de courants.

Dans cette partie on s'intéressent au problème de caractériser les classes de cohomologie nef sur les variétés compactes quelconques. Pour formuler les résultats, donnons encore une définition.

Définition 1.C.1. *Si $Z \subset X$ est un sous-espace complexe compact irréductible et si $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{1,1}T_X^*)$ est une forme ∂ et $\overline{\partial}$ fermée alors on dit que $\{\alpha\}_{|Z}$ est nef si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\phi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(Z)$ telle que*

$$\alpha_{|Z} + i\partial\overline{\partial}\phi_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega_{|Z}$$

au sens des courants sur Z.

Alors les critères qu'on a sont les suivants:

Théorème 1.C.2. *Soit T un $(1,1)$ -courant positif fermé sur une variété X compacte complexe. Alors $\{T\}$ est nef si et seulement si $\{T\}_{|Z}$ est nef, pour chaque sous-ensemble analytique irréductible $Z \subset \bigcup_{c>0} E_c(T)$.*

Théorème 1.C.3. *Soit $\{\alpha\} \in H^{1,1}_{\partial\overline{\partial}}(X)$ une classe de cohomologie sur la variété complexe compacte X. Alors $\{\alpha\}$ est nef si et seulement si pour tout ensemble analytique irréductible $Z \subseteq X$ la classe $\{\alpha\}_{|Z}$ est pseudo-effective.*

Preuve du 1.C.2. L'une des implications est immédiate: si $\{T\}$ est nef, on peut restreindre les φ_ε de la définition 1.A.1.2 à tout ensemble analytique irréductible Z, donc la restriction de la classe $\{T\}$ à Z est nef. L'autre implication est plus intéressante.

Choisissons une forme lisse α dans la classe de cohomologie de T; comme on travaille avec la $\partial\overline{\partial}$–cohomologie, il existe une fonction réelle φ sur X, telle que

$$T = \alpha + \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi.$$

Le théorème de régularisation des courants (cf. 1.A.2.3) donne pour chaque $\varepsilon > 0$ une fonction Φ_ε sur X, réelle, lisse en dehors de $E_\varepsilon(T)$, telle que

$$T_\varepsilon := \alpha + \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\Phi_\varepsilon \geq -\varepsilon\, C\omega,$$

C étant une constante assez grande pour compenser la partie négative de la courbure du fibré tangent de X. Donc T_ε est un courant lisse sur X sauf sur $E_\varepsilon(T)$, et T_ε est dans la classe de cohomologie de T. Maintenant, en utilisant l'hypothèse $Z \subset \bigcup E_c(T)$, on va éliminer les singularités sur $E_\varepsilon(T)$ en construisant un courant lisse sur X, avec une perte de positivité de taille ε.

Soit $E_\varepsilon(T) = \bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} Z_{\varepsilon,k}$ la décomposition de l'ensemble analytique $E_\varepsilon(T)$ en ses composantes irréductibles. Comme $\{T\}_{|Z_{\varepsilon,k}}$ est nef par hypothèse, le lemme démontré dans la première partie donne pour chaque $k = 1, \ldots, N_\varepsilon$ un voisinage $V_{\varepsilon,k}$ de $Z_{\varepsilon,k}$ dans X et $\rho_{\varepsilon,k} \in \mathcal{C}^\infty(V_{\varepsilon,k})$ tels que

$$\alpha + \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\rho_{\varepsilon,k} \geq -\varepsilon\,\omega$$

dans $V_{\varepsilon,k}$. Pour avoir une fonction qui convienne dans un voisinage de $E_\varepsilon(T)$ tout entier, on démontre le :

Lemme de recollement 1.C.4. *Soit X une variété complexe compacte, et ω une métrique hermitienne sur X. Soit A un ensemble analytique de X et $\bigcup_{k=1}^{N} Z_k$ la décomposition de A en ses composantes irréductibles globales. Pour chaque $k = 1, \ldots, N$ on se donne V_k voisinage de Z_k dans X et une fonction réelle et lisse sur V_k, soit φ_k , telle que*

$$i\partial\overline{\partial}\varphi_k \geq \beta \qquad \textit{dans} \quad V_k$$

β étant une forme lisse sur X. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $\widetilde{V}_\varepsilon$ de A et une fonction réelle lisse $\widetilde{\varphi}_\varepsilon$ sur V_ε tels que

$$i\partial\overline{\partial}\widetilde{\varphi}_\varepsilon \geq \beta - \varepsilon\,\omega \qquad \textit{sur} \quad \widetilde{V}_\varepsilon.$$

Preuve. Par récurrence sur N, si $N = 1$, l'hypothèse suffit pour conclure. Maintenant on décompose $A = A' \cup Z_N$ où $A' = \bigcup_{k=1}^{N-1} Z_k$. Par l'hypothèse de récurrence, sur A' nous pouvons trouver φ'_ε dans un voisinage V'_ε de A', tel que

$$i\partial\overline{\partial}\varphi'_\varepsilon \geq \beta - \frac{\varepsilon}{2}\omega \qquad \text{dans} \quad V'.$$

Soit $Z = Z_N \cap A'$; grâce au lemme 1.B.4, on peut trouver une famille de fonctions (μ_ε) sur X telle que $\mu_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(X \setminus Z)$, $\mu_\varepsilon \equiv -\infty$ sur Z et

$$i\partial\overline{\partial}\mu_\varepsilon \geq -\frac{\varepsilon}{2}\,\omega \qquad \text{au sens des courants sur } X.$$

Alors pour des constantes C_ε assez grandes:

$$\begin{aligned} i\partial\overline{\partial}(\varphi'_\varepsilon + \mu_\varepsilon) &\geq \beta - \varepsilon\,\omega \\ i\partial\overline{\partial}(\varphi_N - C_\varepsilon) &\geq \beta - \varepsilon\,\omega. \end{aligned}$$

Si on prend $\widetilde{\varphi}_\varepsilon = \max_{\mathrm{reg}}(\varphi_N - C_\varepsilon, \varphi'_\varepsilon + \mu_\varepsilon)$, alors les arguments déjà donnés montrent que (φ_ε) est la fonction cherchée.

Ce lemme achève de manière évidente la preuve du deuxième théorème car on applique le lemme 1.B.5 pour recoller les fonctions Φ_ε avec celles obtenues au moyen du lemme précédent.

Remarque. Le théorème 1.C.2 montre qu'au moins dans le cas d'une surface complexe nous avons un critère numérique pour caractériser les classes de cohomologie nef. Plus précisément, on a la proposition suivante (voir la remarque 1.B.6).

Proposition 1.C.5. *Soit X une surface complexe compacte et T un courant positif fermé. Si pour chaque courbe $C \subset X$ on a $\{T\} \cdot C \geq 0$, alors $\{T\}$ est nef.*

En général, on peut espérer avoir un critère de type Nakai-Moishezon, mais jusqu'à présent seuls des cas particuliers sont connus (voir [C-P]).

Preuve du 1.C.3. Soit $\{\alpha\}$ une classe nef et Z un sous-ensemble analytique irréductible de X. Comme Z peut avoir des singularités, prenons une composée d'éclatements de centres lisses $\pi : \widetilde{X} \to X$ telle que la transformée stricte $\widetilde{Z}$ de Z soit une sous-variété lisse de $\widetilde{X}$ (une telle modification π existe d'après le théorème de Hironaka). La classe $\pi^*_{|\widetilde{Z}}\{\alpha\}_{|Z}$ est nef, donc par des résultats standard (voir 1.A.1.5) elle est aussi pseudo-effective. Par image directe, la restriction $\{\alpha\}_{|Z}$ de $\{\alpha\}$ à Z est pseudo-effective; l'implication directe est donc démontrée.

Pour l'autre implication, on va procéder par récurrence sur la dimension de X. Si X est une courbe, alors une classe pseudo-effective est déjà nef (voir 1.B.6). Soit donc X une variété complexe compacte de dimension n. On suppose l'implication démontrée pour les variétés de dimension inférieure à n. Soit α une forme lisse sur X et $\partial\overline{\partial}$-fermée, telle que la classe de cohomologie $\{\alpha\}$ ait les propriétés de pseudo-effectivité de l'énoncé. Il existe alors un courant T positif fermé sur X de la forme:

$$T = \alpha + i\partial\overline{\partial}\varphi$$

où φ est une fonction dans $L^1(X)$. D'après le théorème 1.C.2, pour montrer que la classe de T est nef, il suffit de montrer que $\{T\}_{|Z}$ est nef pour tout ensemble analytique Z irréductible contenu dans $\bigcup_{c>0} E_c(T)$. Soit Z un tel ensemble, et $\pi : \widetilde{X} \to X$ une composée d'éclatements de centres lisses telle que la transformée stricte $\widetilde{Z}$ de Z soit une sous-variété lisse de $\widetilde{X}$. On va alors montrer que $(\pi_{|\widetilde{Z}})^*\{\alpha\}_{|Z}$ est nef, ce qui montrera que $\{\alpha\}_{|Z}$ est nef d'après le lemme 1.B.5.

On montre d'abord que $\pi^*_{|\widetilde{Z}}\{\alpha\}_{|Z}$ vérifie les hypothèses qu'on a faites sur $\{\alpha\}$. Soit en effet $\widetilde{Y}$ un sous-ensemble analytique irréductible de $\widetilde{X}$. Par le théorème de l'image directe de Grauert (voir [??]), $Y := \pi(\widetilde{Y})$ est un sous-ensemble analytique irréductible de X et par hypothèse, il existe un courant positif fermé T_Y sur Y tel que

$$T_Y = \alpha_{|Y} + i\partial\overline{\partial}\phi_Y.$$

On prend alors sur $\widetilde{Y}$ le courant image inverse

$$\widetilde{T}_{\widetilde{Y}} := \pi^*_{|\widetilde{Y}}(\alpha_{|Y}) + i\partial\overline{\partial}(\phi_Y \circ \pi_{|\widetilde{Y}}).$$

Comme on le voit facilement, $\widetilde{T}_{\widetilde{Y}}$ est un courant positif fermé appartenant à la classe de cohomologie de $\pi^*_{|\widetilde{Y}}\{\alpha\}_{|Y}$. Par l'hypothèse de récurrence appliquée à l'espace lisse $\widetilde{Z}$, la restriction de la classe $\pi^*\{\alpha\}$ à $\widetilde{Z}$ est nef. Par le lemme 1.B.2, on a donc pour tout $\varepsilon > 0$ un voisinage $\widetilde{U}_\varepsilon$ de la variété $\widetilde{Z}$ et une fonction $\widetilde{\phi}_\varepsilon$ définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\widetilde{U}_\varepsilon$, tels que

$$\pi^*\alpha + i\partial\overline{\partial}\widetilde{\phi}_\varepsilon \geq -\varepsilon\widetilde{\omega}$$

soit vrai en tous les points de $\widetilde{U}_\varepsilon$ où $\widetilde{\omega}$ est une métrique hermitienne sur $\widetilde{X}$. Par le lemme 1.B.5 on convertit les fonctions $\widetilde{\phi}_\varepsilon$ en des fonctions ϕ_ε sur un voisinage de Z, et ceci montre que la restriction de $\{\alpha\}$ à Z est nef. Il nous reste donc seulement à appliquer le théorème 1.C.2 pour conclure.

1.D. L'hypothèse (INT).

Soit $\{\alpha\}$ une $(1,1)$–classe de cohomologie numériquement effective. Alors par définition elle admet des représentants $\alpha+i\partial\overline{\partial}f_\varepsilon$ minorés ponctuellement sur X par $-\varepsilon\omega$, tels que $\max_X(f_\varepsilon) = 0$. Pour des raisons qui seront claires dans le deuxième chapitre, il est très utile de connaître le comportement de la norme L^1 des fonctions $\exp(-f_\varepsilon)$ en fonction de ε. Bien qu'en général il semble difficile d'avoir de telles informations, on a des cas particuliers pour lesquels ceci est possible.

Voici donc le genre d'hypothèse qu'on considère ici:

Hypothèse (INT). *On dit qu'une classe $\{\alpha\}$ vérifie* (INT) *(i.e. "intégrable") si elle contient un courant positif fermé T de la forme*

$$T = \alpha + i\partial\overline{\partial}\varphi$$

avec $\int_X \exp(-\varphi)dV < \infty$.

Alors on a le résultat suivant:

Proposition 1.D.1. *Si $\{\alpha\}$ est une (1, 1) classe de cohomologie sur X nef qui a la propriété (INT), alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(X)$ telle que*

i) $f_\varepsilon(x) \leq 0$ *pour tout* $x \in X$.

ii) $\alpha + i\partial\overline{\partial} f_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega$.

iii) $\int_X \exp(-f_\varepsilon) dV \leq C$.

On donne maintenant quelques exemples de classes de cohomologie qui ont la propriété (INT):

Exemples.

1) Toutes les classes semi-positives vérifient de manière évidente (INT).

2) Plus généralement, (INT) est vérifiée pour toutes les classes $\{\alpha\}$ qui contiennent des courants positifs fermés tels que $\max_X \nu(T, x) < 2$. En fait, ceci résulte du lemme suivant dû à H. Skoda [Sk]):

Lemme (Skoda). *Soit ϕ une fonction psh sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Si $\nu(\phi, x) < 1$ alors la fonction* $\exp(-2\phi)$ *est intégrable dans un voisinage de x.*

Ainsi, un exemple non-trivial est fourni par le fibré L présenté dans 1.B. La classe de Chern de ce fibré est nef, et tous les courants positifs fermés qu'elle contient sont singuliers le long d'une courbe; malgré cela elle vérifie (INT). Bien-sûr, la classe de Chern de $L^{\otimes 2}$ n'a pas la propriété (INT).

3) Soit X une variété projective et $L \to X$ un fibré en droites nef. On dira que L est abondant ("good" dans la terminologie de Viehweg [Es-Vi], page 47) si $k(L) = \nu(L)$; on a le lemme suivant (cf. [Ka]) qui donne une caractérisation de ces fibrés.

Lemme (Kawamata)**.** *Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *L est nef et abondant.*

ii) *Il existe une modification $\tau : Z \to X$, un entier positif n_0 et un diviseur effectif D sur Z tel que*
$$L_{(k)} := \tau^* L^k \otimes \mathcal{O}_Z(-D)$$
est semi-ample pour tout k positif et divisible par n_0.

Alors la classe de Chern de tout fibré nef et abondant vérifie (INT) (pour d'autres propriétés concernant les fibrés nef et abondants, voir [Mou]). En effet, le lemme de Kawamata implique la semi-positivité de $L_{(k)}$, donc pour tout k divisible par n_0 il existe une fonction quasi-psh ϕ_k sur X telle que

$$k\tau^*\Theta_h(L) + i\partial\overline{\partial}\phi_k - [D] = \Theta_{h_k}(L_{(k)}) \geq 0 \tag{8}$$

Le membre droit de cette égalité est une $(1, 1)$-forme lisse, donc la partie singulière de ϕ_k ne dépend pas de k (c'est seulement la partie $\mathcal{C}^\infty$ de ϕ_k qui varie par rapport à k, comme on le voit en faisant la restriction de (8) à un ouvert contractile de X).

Donc il existe $k_0 \gg 0$ tel que $\frac{1}{k_0} \max_Z \nu(\phi_{k_0}, x) < 2$. On note $\phi := \frac{1}{k_0}\phi_{k_0}$, et alors par (8) on a

$$\tau^*\Theta_h(L) + i\partial\overline{\partial}\phi \geq 0 \tag{9}$$

sur Z, et donc au sens des courants sur X on a

$$\Theta_h(L) + i\partial\overline{\partial}\tau_*\phi \geq 0.$$

De plus $\exp(-\tau_*\phi)$ est intégrable sur X, comme on le voit par un changement de variable (c'est ici qu'on utilise le fait que les nombres de Lelong de ϕ sont petites).

Preuve de la proposition 1.D.1. La démonstration est entièrement basée sur le théorème 1.A.2.4, concernant la régularisation des courants positifs fermés.

L'hypothèse (INT) fournit un courant positif fermé $T = \alpha + i\partial\overline{\partial}\varphi$ avec $\exp(-\varphi)$ intégrable sur X et par le théorème 1.A.2.4 on obtient une suite des courants $T_m := \alpha + i\partial\overline{\partial}\varphi_m$ telle que $T_m \geq -\delta_m\omega$ pour une certaine suite de réels positifs $(\delta_m)_m$ qui tend vers zéro. La fonction φ est bornée supérieurement, donc on peut renormaliser φ_m telle que $\varphi_m \leq 0$ et de plus $\int_X \exp(-\varphi_m)dV \leq C$ (indépendant de m).

Soit $\varepsilon > 0$. On peut supposer la suite (δ_m) décroissante (en passant éventuellement à une sous-suite) et alors il existe un unique $m > 0$ tel que $\delta_{m+1} \leq \varepsilon < \delta_m$. On prend par définition $f_{\varepsilon,1} := \varphi_m$. Les fonctions $f_{\varepsilon,1}$ sont lisses en dehors d'un ensemble analytique et ont les propriétés i), ii) et iii) de la proposition 1.D.1. Maintenant la classe $\{\alpha\}$ est nef, et par conséquent il existe une suite $(f_{\varepsilon,2})_{\varepsilon>0}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X, telle que $\alpha + i\partial\overline{\partial}f_{\varepsilon,2} \geq -\varepsilon\omega$ et $\max_X(f_{\varepsilon,2}) = 0$. Avec cette normalisation, pour tout $\varepsilon > 0$ on définit

$$f_\varepsilon := \max_{\text{reg}}(f_{\varepsilon,1}, f_{\varepsilon,2}).$$

Alors par les propriétés de la fonction maximum régularisée, les fonctions f_ε sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X, leur hessienne est minorée par $-\alpha - \varepsilon\omega$ et $\max_X(f_\varepsilon) = 0$. Comme $-\max(f, g) \leq -f$, la suite $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ a toutes les propriétés demandées par la proposition 1.D.1.

C.Q.F.D.

Références:

[C-P] Campana, F., Peternell, Th. — *Algebraicity of the ample cone of projective varieties*, J. reine angew. Math. **407** (1990), 160–166

[De1] Demailly, J.-P. — *Singular hermitian metrics on positive line bundles*, Proceedings of the Bayreuth Conference "Complex algebraic varieties, April 2–6, 1990, edited by K. Hulek, Th. Peternell, M. Schneider, F. Schreyer, Lecture Notes in Math. n° 1507, Springer-Verlag (1992)

[De2] Demailly, J.-P. — *Cohomology of q-convex spaces in top degrees*, Math. Z. **204** (1990), 283–295

[De3] Demailly, J.P. — *Regularization of closed positive currents and intersection theory*, J. Algebraic Geometry, **1** (1992), 361–409

[DPS1] Demailly, J.-P., Peternell, Th., Schneider, M. — *Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles*, Journal of Algebraic Geometry, **3** (1994), 295–345.

[DPS2] Demailly, J.-P., Peternell, Th., Schneider, M. — *Kähler manifolds with numerically effective Ricci class*, Comp. Math. **89** (1993), 217–240.

[Es-Vi] Esnault, H., Viehweg, E. — *Lectures on vanishing theorems*, DMV Seminar (1992) Band 20.

[Hi] Hironaka, H. — *Flattening theorem in complex analytic geometry*, Amer. J. Math., **97** (1975), 503–547.

[Ka] Kawamata, Y. — *Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties*, Invent. Math. **79** (1985).

[Mou] Mourougane C. — *Thèse, Université de Grenoble 1, Janvier 1997.*

[Si] Siu Y.T. —*Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents*, Invent. Math. **27** (1974).

[Sk] Skoda, H. — *Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans* $\mathbb{C}^n$, Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 353–408

CHAPITRE 2.

2.A. Préliminaires.

2.A.1. Quelques rappels de géométrie kählérienne

Nous allons présenter ici quelques résultats concernant l'équation de Monge–Ampère et l'application d'Albanese d'une variété kählérienne compacte.

Soit (X, ω) une variété complexe compacte de dimension n, munie d'une métrique kählérienne. D'aprés la terminologie d'Aubin (voir [Au]), une fonction $\varphi : X \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty(X)$ sera dite *admissible* si la forme différentielle $\omega + i\partial\overline{\partial}\varphi$ est strictement positive définie (étant ainsi une forme kählérienne dans la même classe de cohomologie que ω). Considérons le quotient

$$M(\varphi) = \frac{(\omega + i\partial\overline{\partial}\varphi)^n}{\omega^n}.$$

On a alors le théorème suivant:

Théorème 2.A.1.1 (Aubin–Calabi–Yau)**.** *Soit (X, ω) une variété kählérienne compacte et f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty(X)$. Alors pour tout $\lambda > 0$ l'équation*

$$M(\varphi) = \exp(\lambda\varphi + f) \tag{1}$$

a une unique solution admissible φ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty(X)$.

La courbure de Ricci de la métrique kählérienne ω notée Ricci_ω est par définition la courbure de Chern du fibré anticanonique $-K_X := \Lambda^n T_X^*$, muni de la métrique déterminant $\det(\omega)$. En vue des applications futures, remarquons que la connexion de Chern de la métrique ω coïncide avec la connexion de Levi–Civita et par conséquent Ricci_ω est la même chose que le tenseur de Ricci riemannienn.

Soit f une fonction réelle lisse sur X et notons φ_λ l'unique solution de l'équation (1). Si on applique l'opérateur $-i\partial\overline{\partial}\log$ à cette équation on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{Ricci}_{\omega_\lambda} &= \mathrm{Ricci}_\omega - i\partial\overline{\partial}(\lambda\varphi + f)\\ &= \mathrm{Ricci}_\omega - i\partial\overline{\partial}f + \lambda(\omega - \omega_\lambda)\end{aligned}$$

où $\omega_\lambda := \omega + i\partial\overline{\partial}\varphi_\lambda$. Donc si f est choisie telle que $\mathrm{Ricci}_\omega + \lambda\omega \geq i\partial\overline{\partial}f$, on a

$$\mathrm{Ricci}_{\omega_\lambda} \geq -\lambda\omega_\lambda.$$

Dans l'étude du groupe fondamental des variétés kählériennes compactes l'application d'Albanese joue un rôle très important. Soit $q(X) = h^1(X, \mathcal{O}_X)$ l'irrégularité de X et $\alpha_1, ..., \alpha_q$ une base des 1–formes holomorphes. Les α_j étant fermées, on peut considérer l'application

$$\widetilde{X} \to \mathbb{C}^q, \quad x \mapsto \Big(\int_{x_0}^x \alpha_1, .., \int_{x_0}^x \alpha_q\Big)$$

où $\widetilde{X}$ désigne le révêtement universel de X et x_0 un point quelconque. Si on note Λ l'orbite du point x_0 par $\pi_1(X)$, la théorie de Hodge implique que Λ est un réseau dans $\mathbb{C}^q$ et alors l'application ci-dessus définit par passage au quotient une application

$$\alpha_X : X \to \mathrm{Alb}(X) := \mathbb{C}^q/\Lambda$$

qui est par définition l'application d'Albanese de X.

Pour indiquer le lien entre ce morphisme et le groupe fondamental de X on va suivre l'approche de F. Campana (voir [Ca1]).

On observe d'abord que, par construction de α_X, le morphisme

$$\alpha_{X,*} : H_1(X, \mathbb{Q}) \to H_1\big(\mathrm{Alb}(X), \mathbb{Q}\big)$$

induit au niveau des premiers groupes d'homologie est un isomorphisme. Soit $Y_0 = \alpha_X(X)$ et $\delta : Y_1 \to Y_0$ une désingularisation de cet espace. Alors quitte à passer à une modification X_1 de X, on obtient un morphisme $\alpha_1 : X_1 \to Y_1$ au-dessus de α_X. D'après le théorème de Van Kampen on voit facilement que $\pi_1(X) \equiv \pi_1(X_1)$ et alors le morphisme $\alpha_{X,*}$ admet la factorisation suivante:

$$H_1(X, \mathbb{Q}) \to H_1(Y, \mathbb{Q}) \to H_1(\mathrm{Alb}(X), \mathbb{Q})$$

où la première flèche est α_{1*}. Mais $\alpha_{X,*}$ est un isomorphisme, et donc α_{1*} est injective. En fait, ce morphisme est aussi surjectif, d'après le lemme suivant (voir [Fu]):

Lemme 2.A.1.2 (Fujiki). *Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif entre deux variétés käklériennes compactes. Alors l'application $f^* : H^k(Y, \mathbb{R}) \to H^k(X, \mathbb{R})$ induite au niveau des groupes de cohomologie est injective.*

Preuve du lemme. Soit ω une forme kählérienne sur X et m la dimension de Y; on pose $p := \dim_{\mathbb{C}}(X) - \dim_{\mathbb{C}}(Y)$. Si on a $u \in H^k(Y, \mathbb{R})$ telle que $f^* u = 0$, alors par la formule d'intègration le long des fibres, pour toute $v \in H^{2m-j}(Y, \mathbb{R})$ on a

$$0 = \int_X f^*(u \wedge v) \wedge \omega^p = \int_F \omega^p \int_Y u \wedge v$$

où F est la fibre générique de f; par dualité de Poincaré il résulte que $u = 0$ et donc le lemme est démontré.

En conclusion, l'application α_1 induit un morphisme $\alpha_{1,*} : H_j(X, \mathbb{Q}) \to H_j(Y, \mathbb{Q})$ qui est isomorphisme pour $j = 1$ et surjectif pour $j = 2$. Par ailleurs, comme il a été observé par F. Campana (voir [Ca2]) on a la proposition suivante:

Proposition 2.A.1.3 (Campana). *Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe surjective entre deux variétés complexes compactes. Alors l'image du morphisme $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ est un sous-groupe d'indice fini.*

La preuve résulte facilement du fait que $f : X \setminus f^{-1}(S) \to Y \setminus S$ est une submersion propre pour un certain ensemble analytique $S \subset Y$, et du fait que $\pi_1(Y \setminus S) \to \pi_1(Y)$ est surjective.

Afin de donner l'énoncé d'un théorème de J. Stallings (voir [S]), précisons encore quelques notations. Soit Γ un groupe engendré par un nombre fini d'éléments. On définit la série centrale de Γ comme suit: $\Gamma_1 := \Gamma$ et pour $m \geq 1$ on pose $\Gamma_{m+1} := [\Gamma, \Gamma_m]$. Soit également

$$\Gamma'_\infty = \bigcap_{m \geq 0} \Gamma'_m$$

où pour chaque $m \geq 0$ le groupe Γ'_m est le radical de Γ_m, i.e. l'ensemble des éléments de Γ dont une certaine puissance appartient à Γ_m. Alors la limite nilpotente de Γ est par définition le quotient $\Gamma'^{\text{nilp}} := \Gamma / \Gamma'_\infty$. On vérifie sans aucune difficulté que cette construction est fonctorielle. Avec ces notations, on a:

Théorème 2.A.1.4 (Stallings). *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux variétés compactes, dont les groupes d'homotopie sont notés Γ et respectivement Δ. Supposons que $f_* : H_j(X, \mathbb{R}) \to H_j(Y, \mathbb{R})$ est un isomorphisme pour $j = 1$ et une surjection pour $j = 2$. Alors le morphisme*

$$\Phi'^{\text{nilp}} : \Gamma'^{\text{nilp}} \to \Delta'^{\text{nilp}}$$

est injectif, où $\Phi : \Gamma \to \Delta$ est induit par f. De plus, si l'image de Φ est un sous-groupe d'indice fini de Δ, alors $\mathrm{Im}(\Phi'^{\text{nilp}})$ *est un sous-groupe d'indice fini dans* Δ'^{nilp}.

Compte tenu de ces résultats, on a:

Théorème 2.A.1.5 (Campana). *Soit X une variété kählérienne compacte ; on note par Y une desingularisation de l'image d'Albanese de X. Alors l'application d'Albanese de X induit un morphisme injectif de groupes*

$$\alpha_*^{\prime\text{nilp}} : \pi_1(X)^{\prime\text{nilp}} \to \pi_1(Y)^{\prime\text{nilp}}$$

dont l'image est un sous-groupe d'indice fini.

(pour une démonstration de ce théorème utilisant la théorie des modèles minimaux voir [Am]). En conclusion, la limite nilpotente du groupe fondamental d'une variété kählérienne est déterminée par le morphisme d'Albanese de la variété X.

2.A.2. Rappels de géométrie riemannienne.

Dans ce qui suit on présente quelques résultats concernant la norme géométrique d'une classe d'homotopie, les variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée et la théorie de la convergence au sens de Gromov–Hausdorff.

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte et $\pi_1(M, m_0)$ son groupe fondamental basé en un point quelconque $m_0 \in M$. Sur le revêtement universel $\pi : \widetilde{M} \to M$ de la variété M considérons la métrique image inverse $\tilde{g}$. On fixe le point $\tilde{m}_0$ dans $\pi^{-1}(m_0)$, correspondant à la classe d'homotopie nulle en m_0. Le groupe $\pi_1(M, m_0)$ agit isométriquement sur $(\widetilde{M}, \tilde{g})$.

Définition 2.A.2.1. *Soit $\gamma \in \pi_1(M)$ une classe d'homotopie non-triviale. On note $|\gamma|_{m_0}$ la norme géométrique de la classe γ, donnée par $d_{\tilde{g}}(\tilde{m}_0, \gamma\tilde{m}_0)$.*

La distance qui donne la norme géométrique d'une classe d'homotopie est réalisée par une géodésique dans $\widetilde{M}$, connectant les points $\tilde{m}_0$ et $\gamma\tilde{m}_0$. En projetant par π cette géodésique dans M, on obtient un lacet géodésique dans la classe γ, qui n'est pas nécessairement lisse au point base m_0. Donc la quantité $|\gamma|_{m_0}$ est la longueur d'un lacet géodésique minimisant dans la classe d'homotopie γ, basé en m_0 (classiquement, on a une géodésique fermée –de classe $\mathcal{C}^\infty$– représentant la classe d'homotopie libre associée à γ qui est obtenue par passage à la limite; si on fixe le point base m_0 le même raisonnement montre que le lacet limite est lisse sauf peut-être en m_0, car c'est le seul point où on ne peut pas "arrondir le coin") .

Le fait que $\pi_1(M)$ agit proprement discontinûment sur $\widetilde{M}$ implique le lemme suivant:

Lemme 2.A.2.2. *Soit $r > 0$ un nombre réel. Alors il n'existe qu'un nombre fini de classes d'homotopie $\gamma \in \pi_1(M, m_0)$ telles que $|\gamma|_{m_0} < r$.*

Dans l'étude des variétés riemanniennes, les théorèmes dits de comparaison jouent un rôle important. En gros, l'idée est la suivante: si on a des bornes (par exemple) pour le tenseur de courbure de (M, g), alors on peut comparer certaines quantités géométriques (i.e. volume, rayon d'injectivité) de M avec celles des espaces standard à courbure constante, égale à la borne comme pour la courbure de M.

Ainsi, supposons que la courbure de Ricci de la variété (M, g) soit minorée par $-r$, où r est un réel positif ou nul. En un point arbitraire $p \in M$ considérons l'application exponentielle $\exp_p : T_pM \to M$. Si v est un vecteur de norme égal à 1 dans T_pM notons $\theta(t,v)/t^{m-1}$ le jacobien de l'exponentielle en tv. La borne inférieure dont on dispose pour la courbure de Ricci implique (voir par exemple [ChE])

$$\theta(t,v) \leq s_r^{m-1}(t) \tag{2}$$

où $s_r(t) := \sinh(\sqrt{r}t)/\sqrt{r}$. Alors si $f : B_g(p,R) \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue, on a

$$\int_{x\in B_g(p,R)} f(x)dV_g(x) \leq \int_{|v|=1}\int_0^R f\big(\exp_p(tv)\big)\theta(t,v)dt\,d\sigma(v) \leq$$
$$\leq C(r,R)\int_{|v|=1}\int_0^R f\big(\exp_p(tv)\big)dt\,d\sigma(v)$$

où $C(r,R)$ tend vers R^{m-1} si r tend vers zéro.

Une application de l'inégalité (2) est le théorème suivant, dû à Bishop–Gromov:

Théorème 2.A.2.3 (Bishop–Gromov)**.** *Soit M une variété riemannienne de dimension n et vérifiant $\mathrm{Ricci}_g \geq -(n-1)r\cdot g$, où g est la métrique et r un réel positif. Soient m un point de M et deux réels $R \leq R'$. Alors*

$$\frac{\mathrm{Vol}_g\big(B(m,R)\big)}{\mathrm{Vol}_g\big(B(m,R')\big)} \geq \frac{\int_0^R (\sinh\sqrt{r}t)^{n-1}dt}{\int_0^{R'}(\sinh\sqrt{r}t)^{n-1}dt}$$

(pour une démonstration du lemme, voir [GLP]). Le membre de droite de l'inégalité ci-dessus est le quotient du volume des boules respectives dans une variété à courbure sectionelle égale à $-r$.

Dans l'article "Groups of polynomial growth and expanding maps", M. Gromov introduit une distance sur la classe des espaces métriques pointés et étudie la convergence des espaces, les propriétés de compacité et le comportement des invariants métriques par rapport à cette distance. On rappelle maintenant certaines définitions et résultats dans le cadre de cette théorie qui serviront dans 2.C.2.

Soit X, Y deux sous-ensembles d'un espace métrique compact (Z, d). Alors la distance de Hausdorff entre X et Y est donnée par

$$d_H(X,Y) := \max\{\sup_{x\in X} d(x,Y), \sup_{y\in Y} d(y,X)\}.$$

Pour deux espaces métriques arbitraires X et Y, Gromov introduit leur distance comme suit

$$d_{GH}(X,Y) := \inf\{d_H\big(f(X), g(Y)\big)\}$$

où $f : X \to Z$ et $g : Y \to Z$ sont des plongements isométriques. Un autre façon de définir cette distance est la suivante : sur la réunion disjointe $X \amalg Y$ on considère les métriques *admissibles*, où par définition une métrique est dite admissible si les inclusions de X respectivement de Y dans $X \amalg Y$ sont des isométries (i.e. preserve la distance). Alors on observe facilement que

$$d_{GH}(X,Y) := \inf\{d_H^\delta\big(X,Y\big); \delta \text{ distance admissible sur } X \amalg Y\}$$

et que d_{GH} est une distance sur les classes des isométries des espaces métriques compacts.

Comme on travaille aussi avec des espaces non-compacts, il est naturel de considérer la distance de Gromov-Hausdorff pointée. Soit (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces métriques pointés. On note $\overline{B}_r(p; X) := \{x \in X; d(x,p) \leq r\}$ la boule métrique fermée de rayon r centrée en p. Alors la distance de Gromov-Hausdorff pointée est par définition

$$\begin{aligned} d_{p,GH}\big((X,x_0),(Y,y_0)\big) := \inf\{\varepsilon > 0;\ & \text{il existe une métrique admissible} \\ & \delta \text{ sur } X \amalg Y \text{ telle que } \delta(x_0,y_0) < \varepsilon \\ & \overline{B}_{1/\varepsilon}(x_0;X) \subset \overline{B}_\varepsilon\big(Y;(X \amalg Y,\delta)\big) \text{ et} \\ & B_{1/\varepsilon}(y_0;Y) \subset \overline{B}_\varepsilon\big(X;(X \amalg Y,\delta)\big)\} \end{aligned}$$

À partir de ce moment, tous les espaces métriques considérés seront supposés “propres” dans le sens que l'adhérence de leurs boules métriques sont des ensembles compacts.

On définit la convergence des espaces et des applications par rapport à la métrique $d_{p,GH}$:

Définition 2.A.2.4. *Une suite d'espaces métriques pointés $(X_j, x_j)_{j\geq 1}$ est convergente vers (Y, y) si*

$$d_{p,GH}\big((X_j,x_j),(Y,y)\big) \mapsto 0$$

quand j tend vers l'infini.

Exemple. Soit (M, g) une variété riemannienne et d la distance géodésique associée à g. Alors pour tout point $p \in M$, la suite $(M, kg, p)_k$ tend vers l'espace tangent à M en p, muni de la métrique g_p. Maintenant si (Y, d_Y, y) est un espace métrique pointé, on appelle *cône tangent* en y la limite d'une (sous-) suite du $(Y, r_k d_Y, y)_k$ où la suite r_k tend vers l'infini. Le cône tangent existe en tout point de Y, mais en général il dépend du choix de la suite (voir [Co]).

Pour définir la convergence des applications, considérons une suite $(X_j, x_j)_{j\geq 1}$ supposée convergente vers l'espace pointé (Y, y). Par définition, il existe une suite de métriques δ_j sur la réunion disjointe $X_j \amalg Y$ telle que pour tout $r \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ on ait (à partir d'un certain rang): $\delta_j(x_j, y) \leq \varepsilon$, la boule $B_r(x_j; X_j)$ est contenue dans un ε–voisinage de Y, et la boule $B_r(y; Y)$ est contenue dans un ε–voisinage de X_j. Chaque fois que l'on parle de convergence d'une suite d'espaces, on sous-entend la donnée d'une suite de métriques δ_j. Considérons une suite d'applications $f_j : X_j \to X_j$. On pose alors:

Définition 2.A.2.5. *On dit que la suite $(f_j)_j$ tend vers une application $f : Y \to Y$ si pour tout $r > 0$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\mu = \mu(r,\varepsilon) > 0$ et un entier positif $N = N(r,\varepsilon)$ tel que pour tout $j \geq N$ on ait: si les points $x' \in B_r(x_j; X_j)$ et $y' \in B_r(y, Y)$ vérifient $\delta_j(x', y') \leq \mu$, alors $\delta_j\big(f_j(x'), f(y')\big) \leq \varepsilon$.*

Alors dans ce cadre on a les résultats suivants:

Théorème 2.A.2.6 ("Isometry lemma" de Gromov)**.** *Soit f_j une isométrie de (X_j, d_j) telle que pour une constante C indépendante de j on ait $d_j\big(x_j, f_j(x_j)\big) \leq C$. Alors une sous-suite de la suite $(f_j)_j$ converge vers une isométrie de Y.*

Théorème 2.A.2.7 (Critère de précompacité de Gromov)**.** *Les variétés riemanniennes complètes pointées de dimension n qui satisfont à l'inégalité $\mathrm{Ricci}_g \geq -(n-1)rg$ (où $r \in \mathbb{R}$) forment une partie precompacte pour la distance de Gromov–Hausdorff pointée.*

En plus de ces résultats généraux, on utilisera les théorèmes suivants, dus à Cheeger–Colding (voir [CCo]).

Théorème 2.A.2.8 ("Splitting theorem")**.** *Soit Y un espace métrique propre et connexe qui est la limite au sens de Gromov–Hausdorff pointé de variétés riemanniennes complètes (M_j, g_j, m_j) de dimension n, et telles qu'il existe une suite $\varepsilon_j > 0$ qui tend vers zéro, avec la propriété que $\mathrm{Ricci}_{g_j} \geq -(n-1)\varepsilon_j g_j$. Si Y contient une droite, alors Y est isométrique à un produit $\mathbb{R} \times Y_1$.*

(le mot "droite" désigne ici une application $l : \mathbb{R} \to Y$ telle que $d\big(l(a), l(b)\big) = |a-b|$). Finalement, on a la version suivante du lemme de Margulis:

Théorème 2.A.2.9 ("Margulis lemma")**.** *Il existe $\delta(n) > 0$ tel que si (M^n, g) est une variété complète avec $\mathrm{Ricci}_g \geq -(n-1)$, alors pour tout $r < \delta(n)$ et tout $p \in M$, l'image du morphisme*

$$i_*\pi_1(B_g(p,r)) \to \pi_1(M^n),$$

induite par l'inclusion de la boule géodésique $B_g(p,r)$ dans M^n, est un groupe presque-nilpotent.

2.B.

Dans la première partie de ce paragraphe on démontre que le groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte X à classe de Ricci nef est presque-nilpotent. Ensuite on indique la façon dont on peut majorer la longueur de la série dérivée d'un tel groupe, si en plus de l'hypothèse d'effectivité numérique, la première classe de Chern de X vérifie une certaine condition (PCM) (voir 2.B.2).

2.B.1. Presque–nilpotence du groupe fondamental des variétés kählériennes compactes à classe de Ricci nef.

La structure des variétés kählériennes dont le fibré anticanonique possède certaines propriétés de positivité a été étudiée par beaucoup d'auteurs (en fonction du principe qu'une variété est d'autant plus "spéciale" que son fibré anticanonique est positif). Nous nous intéresserons ici plus particulièrement à l'étude du groupe fondamental. Si X est une variété projective telle que $-K_X$ soit positif, alors elle est simplement connexe d'après un théorème de Kobayashi, voir [Ko]. Si $-K_X$ est semi-positif, le théorème d'Aubin-Calabi-Yau montre que X possède une métrique kählérienne à courbure de Ricci semi-positive, et on peut dans ce cas en déduire que $\pi_1(X)$ est presque-abélien, i.e. contient un sous-groupe abélien d'indice fini (voir Cheeger-Gromoll [GhG] et Demailly-Peternell-Schneider [DPS3]). En ce qui concerne l'étude des variétés kählériennes dont le fibré anticanonique est nef, les travaux de Demailly-Peternell-Schneider montrent que $\pi_1(X)$ est un groupe à croissance sous-exponentielle (voir [DPS2]). Toujours dans ce cadre, il a été conjecturé que le groupe fondamental est à croissance polynomiale. Le but de cette partie est d'indiquer une preuve de cette conjecture, en s'appuyant sur la technique de [DPS2] ainsi que sur quelques résultats récents de la géométrie des variétés à courbure de Ricci minorée (théorème 2.A.2.9). On a ainsi:

Théorème 2.B.1.1. *Soit X une variété kählérienne compacte de dimension n, avec K_X^{-1} nef. Alors $\pi_1(X)$ est un groupe presque-nilpotent.*

Avant de passer à la démonstration proprement dite, fixons quelques notations. $\pi_1(X, x_0)$ désigne le groupe fondamental de X, basé en un point x_0 de X; $\pi : \tilde{X} \to X$ est le revêtement universel de X. Si ω est une métrique hermitienne sur X, elle induit une métrique $\tilde{\omega} = \pi^*\omega$ sur $\tilde{X}$, et on note $d_{\tilde{\omega}}$ la distance géodésique induite par $\tilde{\omega}$. La notion d'effectivité numérique est celle formulé dans le cadre des variétés complexes compactes générales (voir 1.A). La démonstration du théorème 2.B.1.1 est constituée de trois arguments principaux, présentés aux paragraphes 1, 2, 3.

1. Existence de métriques kählériennes à courbure de Ricci presque semi-positive

Une première étape consiste en la construction de métriques kählériennes convenables sur X, à l'aide du théorème d'Aubin-Calabi-Yau 2.B.1.

Sur le fibré K_X^{-1} on prend comme métrique de référence le déterminant $\det(\omega)$ de la métrique kählérienne ω. Ce fibré étant nef, il existe (par définition) une suite des fonctions $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ de classe $\mathcal{C}^\infty(X)$ telle que:

$$\mathrm{Ricci}_\omega + i\partial\overline{\partial} f_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega$$

Mais d'après les remarques qui ont été faites dans le paragraphe 2.A, on a le corollaire suivant du théorème d'Aubin-Calabi-Yau:

Corollaire 2.B.1.2. *Soit (X, ω) une variété kählérienne compacte et f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty(X)$ telle que pour un $\lambda > 0$ on ait*

$$\mathrm{Ricci}_\omega + i\partial\overline{\partial} f \geq -\lambda\omega.$$

Alors il existe une fonction admissible φ_λ telle que la métrique $\omega_\lambda := \omega + i\partial\overline{\partial}\varphi_\lambda$ satisfait à l'inégalité:

$$\mathrm{Ricci}_{\omega_\lambda} \geq -\lambda\omega_\lambda.$$

En conclusion, l'hypothèse qu'on fait sur la classe anticanonique se traduit par l'existence d'une suite $(\omega_\varepsilon)_\varepsilon$ de métriques kählériennes sur X, appartenant toutes à la classe de cohomologie $\{\omega\}$ et telles que $\mathrm{Ricci}_{\omega_\varepsilon} \geq -\varepsilon\omega_\varepsilon$.

2. Résultats de géométrie riemannienne concernant la croissance du groupe fondamental

En termes de nos données (à savoir la suite $(\omega_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$) le théorème de Cheeger-Colding 2.A.2.9 implique par un simple argument de changement d'échelle le corollaire suivant:

Corollaire 2.B.1.3 *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout point $p \in X$, l'image du morphisme d'inclusion*

$$i_{\varepsilon,*} : \pi_1\Big(B_{\omega_\varepsilon}\Big(p, \frac{C_0}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)\Big) \to \pi_1(X)$$

est presque-nilpotent.

En effet, on remarque que $g_\varepsilon := \varepsilon\omega_\varepsilon$ satisfait $\mathrm{Ricci}_{g_\varepsilon} = \mathrm{Ricci}_{\omega_\varepsilon}$ car la courbure de Ricci est invariante par changement d'échelle. D'autre part, on a: $B_{\omega_\varepsilon}\Big(p, \frac{C_0}{\sqrt{\varepsilon}}\Big) = B_{g_\varepsilon}\Big(p, C_0\Big)$ et le théorème 2.A.2.9 appliqué à (X, g_ε) implique le corollaire 2.B.1.3.

3. Majoration de la longueur des lacets générateurs

Pour terminer la preuve, on va montrer que $i_{\varepsilon,*}$ est surjectif si ε est assez petit et si *p est bien choisi* (c'est l'élément-clé!). Il s'agit de démontrer qu'on peut engendrer le groupe fondamental de X par des lacets dont la longueur est contrôlable. Le lemme qui suit nous donnera un contrôle de ces longueurs, lorsque le point base est bien choisi.

Lemme 2.B.1.4 ([DPS2]). *Soit U un ensemble compact de $\tilde{X}$. Alors pour chaque $\delta > 0$, il existe un ensemble fermé $U_{\varepsilon,\delta} \subset U$, tel que $\mathrm{Vol}_\omega(U \setminus U_{\varepsilon,\delta}) < \delta$ et pour tout $x_1, x_2 \in U_{\varepsilon,\delta}$ il existe un chemin qui les connecte de longueur par rapport à ω_ε inférieure à $C\delta^{-\frac{1}{2}}$, où C est une constante indépendante de δ, ε.*

Démonstration du lemme. La preuve présentée ci-dessous est une reformulation plus globale des arguments donnés dans [DPS2].

Dans la suite, on note $d\lambda_\omega$ la mesure de Liouville induite par $\widetilde{\omega}$ sur le fibré unitaire de la variété $\widetilde{X}$ noté $S\widetilde{X}$ et SU la restriction $S\widetilde{X}|_U$.

Soit $t \geq 0$ et $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction localement intégrable quelconque; on note toujours par f l'application $f\pi : \widetilde{X} \to \mathbb{R}_+$. Compte tenu de l'invariance de la mesure de Liouville par le flot géodésique de la métrique $\widetilde{\omega}$, on a les inégalités suivantes

$$\int_{(p,v)\in SU} f\big(\exp_p(tv)\big)d\lambda_\omega(p,v) \leq \int_{(x,w)\in SK_t} f(x)d\lambda_\omega(x,w) =$$
$$= \alpha_{2n}\int_{x\in K_t} f(x)dV_\omega(x) \leq \alpha_{2n}C(K_t)\|f\|_{L^1}$$

où α_{2n} désigne le volume de la sphère unité d'un espace euclidien de dimension $2n$, K_t est la projection sur $\widetilde{X}$ de l'image de SU par le flot géodésique et $C(K_t)$ est une constante uniforme si t varie dans un intervalle compact.

Soit $D := \mathrm{diam}(U, \widetilde{\omega})$. Alors d'après les considérations précédentes, on obtient

$$\int_0^D \int_{(p,v)\in SU} f\big(\exp_p(tv)\big)d\lambda_\omega(p,v)\, dt \leq C\|f\|_{L^1}$$

pour une certaine constante C qui dépend seulement de la géométrie du compact U. En intervertissant l'ordre d'intégration, ceci implique

$$\int_{(p,v)\in SU}\int_0^D f\big(\exp_p(tv)dt\, d\lambda_\omega \leq C\|f\|_{L^1}. \tag{3}$$

Alors pour tout $\delta > 0$, l'inégalité (3) implique l'existence d'un ouvert $\Lambda(f,\delta) \subset SU$ tel que:

1) $\mathrm{Vol}\big(\Lambda_\delta(f,\delta)\big) \geq \mathrm{Vol}(SU) - \delta$.
2) Pour tout $(p,v) \in \Lambda(f,\delta)$ on a $\displaystyle\int_0^D f\big(\exp_p(tv)\big)dt \leq \frac{C}{\delta}\|f\|_{L^1}$.

Pour chaque point $p \in U$ on note $V_p(1)$ le sous-ensemble des vecteurs v de la sphère unité de l'espace tangent en p tels que $(p,v) \in \Lambda(f,\delta)$. Alors d'après la propriété 1), il existe un point $p \in U$ tel que $\mathrm{Vol}\big(V_p(1)\big) \geq \alpha_{2n} - \dfrac{\delta}{\mathrm{Vol}(U)}$. On associe à ce point p l'ensemble

$$U(f,\delta) := \{z \in U/z = \exp_p(tv), v \in V_p(1), t \in [0,D]\}.$$

Alors pour une constante $C > 0$ qui dépend seulement de la géométrie de (X,ω) et du compact U, on a $\mathrm{Vol}_\omega\big(U(f,\delta)\big) \geq \mathrm{Vol}_\omega(U) - C\delta$.

Revenons maintenant à la suite $(\omega_\varepsilon)_\varepsilon$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on considère la fonction

$$f_\varepsilon(x) = \frac{\omega_{\varepsilon,x} \wedge \omega_x^{n-1}}{\omega_x^n}$$

Le fait que toutes les 2–formes ω_ε sont cohomologues implique

$$\|f_\varepsilon\|_{L^1(X)} = \int_X \omega_\varepsilon \wedge \omega = \mathrm{Vol}(X)$$

et donc cette norme est indépendante de ε. Alors il existe un ensemble $U_{\varepsilon,\delta} \subset U$ égal à $U(f_\varepsilon, \delta)$, tel que $\mathrm{Vol}_\omega\big(U(\varepsilon,\delta)\big) \geq \mathrm{Vol}_\omega(U) - C\delta$. Par la propriété 2), pour tout point $x \in U_{\varepsilon,\delta}$ on a $\displaystyle\int_0^{t_x} f_\varepsilon\big(\exp_{p_\varepsilon}(tv)\big)dt \leq C/\delta$, où $\exp_{p_\varepsilon}(t_x v) = x$. Mais la distance par rapport à ω_ε entre p_ε et x est majorée par la racine carrée de l'intégrale précédente (car en fait la quantité $f_\varepsilon(x)$ est la somme des valeurs propres de ω_ε par rapport à ω). Donc la distance par rapport à ω_ε de deux points arbitraires de $U_{\varepsilon,\delta}$ est majorée par $C\delta^{-1/2}$ et ceci achève la démonstration du lemme.

Remarque. Ce lemme (appliqué à X à la place de $\widetilde{X}$) montre qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour *certains* points p_ε le volume (par rapport à ω) des boules géodésiques $B_{\omega_\varepsilon}(p_\varepsilon, C)$ est supérieur à la moitié du volume de X.

4. Fin de la preuve du théorème 2.B.1.1

On fixe un système $\{\gamma_j\}$ de générateurs de $\pi_1(X)$, et on prend pour U un ensemble compact qui contient un domaine fondamental E de l'action de $\pi_1(X)$ sur $\tilde{X}$, assez grand pour que $U \cap \gamma_j U \neq \emptyset$ pour tout j. Pour $\delta > 0$ tel que $\delta < \frac{1}{4}\mathrm{Vol}_\omega(U \cap \gamma_j U)$ et $\delta < \frac{1}{2}\mathrm{Vol}_\omega E$, le lemme ci-dessus implique l'existence d'une partie $U_{\varepsilon,\delta} \subset U$, compacte, telle que $\mathrm{diam}_{\omega_\varepsilon}(U_{\varepsilon,\delta}) < C_1\delta^{-\frac{1}{2}} := C$ et $\mathrm{Vol}_\omega(U \setminus U_{\varepsilon,\delta}) \leq \delta$. De plus, par le choix de δ et le fait que γ_j agit isométriquement sur $\tilde{X}$, on a $U_{\varepsilon,\delta} \cap \gamma_j U_{\varepsilon,\delta} \neq \emptyset$ pour chaque j.

Soit $\tilde{p}_\varepsilon \in U_{\varepsilon,\delta} \cap E$ un point arbitraire. Notons $|\gamma_j|_{\tilde{p}_\varepsilon}$ la norme géométrique de la classe du lacet γ_j basé en $\tilde{p}_\varepsilon$, mesurée à l'aide de la métrique ω_ε. Les propriétés de $U_{\varepsilon,\delta}$ impliquent: $|\gamma_j|_{p_\varepsilon} \leq 2C$ (car la norme en question est inférieure à $2\mathrm{diam}_{\omega_\varepsilon}(U_{\varepsilon,\delta})$). Il existe donc une géodésique minimisante (par rapport à ω_ε) qui réprésente la classe γ_j, basée en $p_\varepsilon := \pi(\tilde{p}_\varepsilon)$, telle que sa longueur est inférieure à $2C$. Donc elle est contenue dans la boule de centre p_ε et rayon $C_0/\sqrt{\varepsilon}$ si ε est assez petit. En conclusion, pour ε convenablement choisi, $B_{\omega_\varepsilon}(p_\varepsilon, C_0/\sqrt{\varepsilon})$ contient une famille de géodésiques fermées dont les classes d'homotopie engendrent $\pi_1(X)$, et par conséquent $i_{\varepsilon,*}$ est surjectif. Pour finir, on applique le corollaire avec les données ε et p_ε et on en déduit que $\pi_1(X)$ est presque-nilpotent. Ceci achève la preuve du théorème 2.B.1.1.

2.B.2. Potentiels contrôlées en moyenne.

Le théorème 2.B.1.1 ne donne aucun renseignement concernant la longueur de la série nilpotente du $\pi_1(X)$. Dans ce paragraphe on veut indiquer comment on peut obtenir de telles informations pour une famille spéciale de variétés à classe de Ricci nef.

Remarquons d'abord qu'un groupe presque-nilpotent Γ est à croissance polynômiale, dans le sens suivant. Si G est un groupe engendré par un nombre fini d'éléments $g_1, ..., g_m$, on note $B(k)$ le nombre d'éléments de G qui s'écrivent au moyen d'un mot comprenant au plus k éléments égaux aux générateurs ou à leurs inverses.

Définition 2.B.2.1. *On dit que G est à croissance polynomiale (d'ordre p) s'il existe des constantes C et p telles que $B(k) \leq Ck^p$.*

Par ailleurs, pour avoir une estimation de la longueur de la série dérivée de Γ il suffit de connaître son ordre de croissance.

Le genre d'hypothèse qu'on va considérer ici est le suivant:

Définition 2.B.2.2. *Soit $\{\alpha\} \in H^{1,1}_{\partial\overline{\partial}}(X)$ une classe de cohomologie. On dit que $\{\alpha\}$ a la propriété (PCM) (i.e. "potentiels controlées en moyenne") s'il existe des constantes C_0, C_1 positives et une suite de fonctions $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X telles que*

i) $\varphi_\varepsilon(x) \leq 0$ *pour tout* $x \in X$.

ii) $\alpha + i\partial\overline{\partial}\varphi_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega$.

iii) $\displaystyle\int_X \exp(-\varphi_\varepsilon)dV \leq C_1\varepsilon^{-C_0}$.

Dans ce contexte on a le théorème suivant (qui est en fait une variante plus générale de la remarque (1.7) de [DPS2], dans le sens qu'on est moins exigeant au niveau des hypothèses qualitatives concernant la classe anticanonique):

Théorème 2.B.2.3. *Soit X une variété kählérienne compacte de dimension n dont la première classe de Chern possède la propriété (PCM). Alors le groupe fondamental de X est à croissance polynômiale et son degré de croissance est borné par $2(n + C_0)$.*

Par le théorème 1.D.1, si une classe de cohomologie $\{\alpha\}$ a la propriété (INT), alors elle a la propriété (PCM) avec la constante de croissance $C_0 = 0$. Donc le théorème ci-dessus implique le corollaire suivant:

Corollaire 2.B.2.4. *Soit X une variété kählérienne de dimension n compacte dont la première classe de Chern possède la propriété (INT). Alors le groupe fondamental de X est à croissance polynômiale et le degré de croissance est borné par $2n$.*

Preuve du théorème 2.B.2.3. On commence par observer qu'une classe de cohomologie de type $(1,1)$ qui possède la propriété (PCM) est nef, mais de plus on a une suite de métriques très spéciales, notamment celle donnée par la définition. L'idée est d'utiliser ces métriques dans le théorème d'Aubin-Calabi-Yau afin d'obtenir une famille des métriques kählériennes sur X, pour lesquelles on a un contrôle uniforme des volumes et des diamètres des ensembles qu'on va utiliser pour mesurer $\pi_1(X)$.

Dans la suite on note ω une métrique kählériene fixée sur X et comme d'habitude on utilisera la même notation C pour toutes les constantes successives qui vont intervenir dans les calculs.

Comme par hypothèse la première classe de Chern de la variété X a la propriété (PCM), on a une suite des métriques $h_\varepsilon := \exp(-f_\varepsilon)h_0$, où f_ε sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X tel que pour tout $\varepsilon > 0$ on ait

1) $\sup_X f_\varepsilon \leq 0$
2) $\int_X \exp(-f_\varepsilon) dV_\omega < C_1 \varepsilon^{-C_0}$.
3) $\mathrm{Ricci}_\omega + i\partial\overline{\partial} f_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega$ sur X.

On applique maintenant le théorème d'Aubin-Calabi-Yau (voir le corollaire 2.B.1.2) pour résoudre l'équation

$$\omega_\varepsilon^n = \exp(\varepsilon\phi_\varepsilon - f_\varepsilon)\omega^n \tag{4}$$

où $\omega_\varepsilon := \omega + i\partial\overline{\partial}\phi_\varepsilon$ et alors on a

$$\mathrm{Ricci}_{\omega_\varepsilon} \geq -\varepsilon\omega_\varepsilon$$

D'après le théorème d'Aubin-Calabi-Yau, la fonction ϕ_ε qui vérifie (4) est unique (car le membre droite est strictement croissant en ϕ_ε). On renormalise ces fonctions de manière que $\int_X \phi_\varepsilon dV_\omega = 0$. L'équation (4) devient alors

$$\omega_\varepsilon^n = \lambda_\varepsilon \exp(\varepsilon\phi_\varepsilon - f_\varepsilon)\omega^n \tag{5}$$

où λ_ε est la constante de normalisation. L'intérêt de cette renormalisation est expliqué par le lemme (standard) suivant:

Lemme 2.B.2.5. *Il existe une constante $C_1 > 0$ (ne dépendant que de (X, ω)) telle que pour toute fonction admissible $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X)$ qui vérifie $\int_X \varphi dV_\omega = 0$ on ait $\sup_X \varphi \leq C_1$.*

(on démontre ce lemme à la fin du paragraphe).

Alors les nouvelles fonctions ϕ_ε sont uniformément bornées supérieurement par une constante C_1. En intégrant sur X l'égalité (5) on obtient

$$\lambda_\varepsilon = \frac{\mathrm{Vol}_\omega(X)}{\int_X \exp(\varepsilon\phi_\varepsilon - f_\varepsilon)dV_\omega} \geq \frac{\mathrm{Vol}_\omega(X)}{C\int_X \exp(-f_\varepsilon)dV_\omega} \geq C_1\varepsilon^{C_0}. \tag{6}$$

En conclusion, $\lambda_\varepsilon \geq C_1\varepsilon^{C_0}$, où les constantes en question sont indépendantes de ε. Pour calculer la taille du groupe fondamental de X, on doit travailler avec des sous-ensembles de $\widetilde{X}$ qui ont une géométrie contrôlée uniformément par rapport à la suite de métriques ω_ε. Des tels ensembles sont fournis par le lemme 2.B.1.6. En effet, si on fixe un ensemble de générateurs $(\gamma_j)_j$ du groupe fondamental de X, par ce lemme on obtient une famille (U_ε) qui a les propriétés suivantes:

a) Pour chaque γ_j on a: $U_\varepsilon \cap \gamma_j U_\varepsilon \neq \emptyset$.

b) $\mathrm{Vol}_\omega(E \cap U_\varepsilon) \geq 1/2\,\mathrm{Vol}(X)$

c) La distance géodésique par rapport à $\widetilde{\omega}_\varepsilon$ entre deux points quelconque de U_ε est bornée par une constante C_1 indépendante de ε.

Le seul défaut des ensembles U_ε est l'absence d'un contrôle de leur volume par rapport à ω_ε; mais on va voir dans la suite comment on peut gagner un tel contrôle grâce à l'hypothèse (PCM).

Une conséquence de la normalisation des φ_ε et du lemme 2.B.2.5 est l'inégalité suivante

$$\int_{U_\varepsilon \cap E} |\varphi_\varepsilon(x)| dV_\omega \leq \int_X |\varphi_\varepsilon - C_1| dV_\omega + C_1 \,\mathrm{Vol}(X),$$

et on a donc $\int_{U_\varepsilon \cap E} |\varphi_\varepsilon| dV_\omega \leq 2C_1$. Un calcul standard montre que l'ensemble

$$V_{\varepsilon,\delta} := \{x \in U_{\varepsilon,\delta} \cap E / |\varphi_\varepsilon(x)| < 2C_1\delta^{-1}\}$$

a un volume par rapport à ω supérieur à $\mathrm{Vol}(U_\varepsilon \cap E) - \delta$, et donc d'après l'inégalité *b)* le volume de $V_{\varepsilon,\delta}$ est supérieur à $1/2\,\mathrm{Vol}_\omega(X) - \delta$. Fixons δ tel que cette dernière quantité soit égale à $1/3\,\mathrm{Vol}_\omega(X)$ et notons V_ε l'ensemble $V_{\varepsilon,\delta}$ correspondant. Alors en tout point de V_ε on a

$$\omega_\varepsilon^n \geq C_1 \varepsilon^{C_0} \omega^n.$$

On obtient donc

$$\mathrm{Vol}_{\omega_\varepsilon}(U_\varepsilon \cap E) \geq \mathrm{Vol}_{\omega_\varepsilon}(V_\varepsilon) \geq C_1 \varepsilon^{C_0}\,\mathrm{Vol}_\omega(V_\varepsilon) \geq C_1 \varepsilon^{C_0}. \tag{7}$$

Pour finir la démonstration, considérons l'ensemble

$$W_{\varepsilon,k} := \bigcup_{\gamma \in \pi_1(X), l(\gamma) \leq k} \gamma(U_{\varepsilon,\delta})$$

où pour un élément γ du $\pi_1(X)$ on a $l(\gamma) := \min\{p; \gamma = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots g_{i_p}^{\varepsilon_p}\}$, avec ε_j dans l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$. Alors si on note $N(k)$ le nombre d'éléments γ de $\pi_1(X)$ tels que $l(\gamma) \leq k$, par l'inégalité (7) on obtient

$$\mathrm{Vol}_{\omega_\varepsilon}(W_{\varepsilon,k}) \geq N(k)\,\mathrm{Vol}_{\omega_\varepsilon}(U_{\varepsilon,\delta} \cap E) \geq C\varepsilon^{C_0} N(k).$$

Rappelons-nous la propriété (c) des ensembles U_ε: si on fixe un point p_ε dans U_ε, cet ouvert est contenu dans une boule géodesique (par rapport à ω_ε) de rayon C_1. Donc l'ensemble $W_{\varepsilon,k}$ est contenu dans la boule de centre p_ε et rayon $C_1 k$ et alors par l'inégalité de Bishop 2.A.2.3 on a

$$\mathrm{Vol}_{\omega_\varepsilon}(W_{\varepsilon,k}) \leq \mathrm{Vol}_{\omega_\varepsilon}(B_{\omega_\varepsilon}(a_\varepsilon, kC_1)) \leq Ck^{2n} \exp(\sqrt{(2n-1)\varepsilon} kC_1).$$

En combinant les deux dernières relations et en prenant $\varepsilon = \frac{1}{k^2}$, on obtient

$$N(k) \leq C_1 k^{2n+2C_0},$$

donc $\pi_1(X)$ est un groupe à croissance polynomiale, de degré inférieur à $2(n+C)$.

Preuve du lemme 2.B.2.5. On commence par remarquer que pour une fonction admissible φ on a: $\Delta\varphi < n$ où n est la dimension de la variété X et le laplacien dont on parle est à valeurs propres négatives. En effet, si on considère la forme $\omega_\varphi := \omega + i\partial\overline{\partial}\varphi$, alors elle est strictement positive définie, et donc sa trace par rapport à ω est strictement positive dans chaque point de X. Par ailleurs, cette trace vaut exactement $n - \Delta\varphi$, car ω est kählérienne et donc on a

$$Tr_\omega(i\partial\overline{\partial}\varphi) = -\Delta\varphi.$$

Soit H l'opérateur de projection de $L^2(X)$ sur les fonctions harmoniques (i.e. constantes). Alors on a (voir [Au]) un opérateur de Green noté G qui vérifie $\Delta G(f) = f - H(f)$ et qui commute avec Δ. Une propriété du noyau de cet opérateur qui sera utile dans la suite est la suivante: le noyau de G noté $\mathcal{G}$ défini sur $X \times X$ est $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de la diagonale de ce produit et a une singularité en d_ω^{2-2n} sur la diagonale, si l'on note d_ω la distance géodésique associée à ω.

Compte tenu de ces propriétés du G et de son noyau on a

$$\varphi(x) - H(\varphi) = \int_X \mathcal{G}(x,y)\Delta\varphi(y)\omega_y^n.$$

La normalisation $\int_X \varphi dV_\omega = 0$ implique $H(\varphi) = 0$ et alors pour toute constante K on obtient

$$\varphi(x) = \int_X \big(\mathcal{G}(x,y) + K\big)\Delta\varphi(y)\omega_y^n$$

La forme de la singularité du noyau $\mathcal{G}$ le long de la diagonale implique qu'il est borné inférieurement sur $X \times X$ par une constante $-K$ et qu'il est intégrable sur $X \times X$. En conclusion on a:

$$\varphi(x) \leq n\int_X \big(\mathcal{G}(x,y) + K\big)\omega_y^n := C_1.$$

Le lemme est démontré.

2.C. Presque-abélianité du groupe fondamental de certaines variétés kählériennes compactes à classe de Ricci numériquement effective.

Dans cette partie on montre que le groupe fondamental des variétés kählériennes compactes à classe de Ricci nef est presque-abélien dans deux cas particuliers: celui des variétés projectives et celui des variétés kählériennes dont la suite des diamètres $D_\varepsilon := \operatorname{diam}(X, \omega_\varepsilon)$ est borné.

La preuve dans le cas projectif est basée sur le théorème 2.B.1.1 et sur deux résultats dus respectivement à Campana et à Zhang, concernant le morphisme d'Albanese. Le cas où la suite des diamètres est borné découle d'une estimation systolique de M. Anderson et de la théorie de convergence au sens de Gromov-Hausdorff.

2.C.1. Le cas projectif.

Dans le cas d'une variété *projective* dont la classe anticanonique est numériquement effective, on obtient l'information suivante concernant la structure du groupe fondamental de X.

Théorème 2.C.1.1. *Soit X une variété projective de dimension n, avec K_X^{-1} nef. Alors $\pi_1(X)$ est l'extension d'un groupe fini par un groupe abélien libre (de rang égal au premier nombre de Betti d'un revêtement fini adéquat de X).*

Preuve. La preuve du théorème 2.C.1.1 requiert deux propriétés remarquables du morphismes d'Albanese, dues respectivement à Campana [Ca] et Zhang [Zh].

Les travaux de F. Campana (cf. 2.A.1) montrent que pour toute variété kählérienne X, la limite nilpotente de $\pi_1(X)$ est complètement déterminée par la variété image du morphisme d'Albanese de X. D'autre part, dans le cas d'une variété projective, si $\alpha_X : X \to \mathrm{Alb}(X)$ est le morphisme d'Albanese associé à X, on a le résultat suivant, qui répond à une conjecture de Demailly, Peternell et Schneider (cf. [DPS2]):

Théorème (Zhang). *Soit X une variété projective de dimension n, avec K_X^{-1} nef. Alors α_X est une application surjective.*

(voir [Zh] pour une démonstration de ce résultat). Par le théorème 2.C.1 il existe un sous-groupe nilpotent Γ d'indice fini dans $\pi_1(X)$. Comme $\pi_1(X)$ est de type fini, il en est de même pour Γ. Par [Hirs] ses éléments de torsion forment un sous-groupe distingué fini; soit $\Gamma' := \Gamma/\operatorname{Tors}(\Gamma)$. Donc quitte à passer à un revêtement fini de X, noté X', le groupe $\Gamma = \pi_1(X')$ est nilpotent, et dans ce cas la limite nilpotente de Γ est précisement Γ'. Maintenant la preuve du théorème 2.C.1.1 s'obtient en appliquant le résultat de Zhang à X' et le corollaire suivant du théorème de F. Campana 2.A.1:

Corollaire(Campana). *Si le morphisme α_X est surjectif, alors la limite nilpotente du groupe fondamental de X est isomorphe au groupe abélien libre de rang $b_1(X)$, premier nombre de Betti de X.*

2.C.2. Le cas du diamètre fini.

Les résultats principaux de ce paragraphe sont les suivants:

Théorème 2.C.2.1. *Soit X une variété complexe compacte munie d'une suite de métriques kählériennes $(\omega_k)_k$ telles que:*

a) La classe de cohomologie de la métrique ω_k est égale à une classe fixée.

b) Pour chaque $\varepsilon > 0$ on a: $\mathrm{Ricci}_{\omega_k} \geq -\frac{1}{k}\omega_k$.

c) Il existe une constante $D > 0$ telle que $\mathrm{diam}(X, \omega_k) \leq D$ *pour tout entier k.*

Alors le groupe fondamental de X est presque-abélien.

Ensuite on montre qu'une variété kählérienne dont $c_1(X)$ est nef et a la propriété (INT) possède une suite de métriques satisfaisant aux hypothèses du théorème 2.C.2.1. Plus précisement on a:

Théorème 2.C.2.2. *Soit X une variété kählérienne compacte dont la première classe de Chern est nef et a la propriété (INT). Alors il existe une suite de métriques kählériennes sur X qui ont les propriétés $a), b)$ et $c)$ ci-dessus (et donc en particulier $\pi_1(X)$ est presque-abélien).*

Finalement on reprend l'exemple de Demailly, Peternell et Schneider présenté au 1.C et on montre que la propriété (INT) n'est pas nécessaire pour avoir une telle suite de métriques.

Remarque 1. En fait le théorème 2.C.2.1 est une conséquence du résultat général suivant:

Théorème (Yun) *Il existe une constante $\varepsilon = \varepsilon(n, D, v)$ tel que si la variété compacte (M, g) de dimension n vérifie*

$$\mathrm{diam}_g(M) \leq D,\ \mathrm{Vol}_g(M) \geq v \text{ et } \mathrm{Ricci}_g \geq -\varepsilon g$$

alors $\pi_1(M)$ est presque-abélien.

On donne cependant le preuve complète du théorème 2.C.2.1, car le cadre dans lequel on travaille permet de simplifier le démonstration de Yun (voir [Y]).

Remarque 2. On démontre dans le paragraphe 2.D.3 que dans les hypothèses du théorème 2.C.2.1, le morphisme d'Albanese de X est surjectif; donc la presque-abélianité du groupe fondamental de X peut s'en déduire comme dans le cas où X etait projective.

Preuve du théorème 2.C.2.1. On commence par quelques réductions. Grâce aux hypothèses *a*) et *b*) la première classe de Chern de X est nef, et donc par 2.B.1.1, le groupe fondamental de X est presque-nilpotent. Par passage à un revêtement fini la classe anticanonique conserve les mêmes propriétés que $c_1(X)$, donc on peut supposer que $\pi_1(X)$ est un groupe nilpotent. Comme on l'a déja remarqué, les éléments de torsion de ce groupe sont en nombre fini; par ailleurs un groupe nilpotent engendré par un nombre fini d'éléments est résiduellement fini. En conclusion, quitte à passer à un revêtement fini de X on peut supposer que $\pi_1(X)$ est nilpotent sans torsion.

Comme on l'a montré dans 2.B.1, il existe un ensemble de générateurs $(\gamma_j)_j$ du $\pi_1(X)$ et une famille de points $(p_k)_k$ de X telle que pour une certaine constante $C > 0$ indépendante de k on ait $|\gamma_j|_{p_k} \leq C$. Une borne *inférieure* pour tous les éléments non-triviaux du groupe fondamental de X s'obtient par l'estimation systolique suivante, dûe à M. Anderson:

Théorème 2.C.2.3 (Anderson). *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte telle que:*

$$\mathrm{Ricci}_g \geq -(m-1)\delta^2, \mathrm{Vol}_g(M) = v \text{ et } \mathrm{diam}(M,g) \leq D.$$

Soit γ un élément qui n'est pas de torsion dans le groupe fondamental et $m_0 \in M$ un point quelconque. Alors

$$|\gamma|_{m_0} \geq \frac{2Dv}{v + v_\delta(2D)}$$

où $v_\delta(r)$ est le volume d'une boule géodésique de rayon r dans un espace à courbure constante, égale à $-\delta^2$.

Preuve. On présente ici la preuve de J. Cheeger (voir [An]), dont l'idée est la suivante: on considère le groupe cyclique engendré par γ, qui est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Pour ce groupe on sait bien quelle est sa fonction de croissance; par ailleurs cette fonction est majorée par des quantités comportant la norme géométrique de γ.

Soit $\Gamma \subset \pi_1(M)$ le sous-groupe (isomorphe à $\mathbb{Z}$) engendré par γ. Considérons le point $\tilde{m}_0$ du revêtement universel $\widetilde{M}$ de M correspondant à la classe d'homotopie nulle en m_0. On choisit le domaine fondamental F de l'action de $\pi_1(M)$ sur $\widetilde{M}$ comme suit

$$F := \bigcap_{\tau \in \pi_1(M)} \{x \in \widetilde{M} / d_{\tilde{g}}(x, \tilde{m}_0) \leq d_{\tilde{g}}(x, \tau\tilde{m}_0)\}$$

(un tel domaine s'appelle domaine de Dirichlet). Si on note π la projection de $\widetilde{M}$ sur M, on a

$$\pi\big(B_{\tilde{g}}(\tilde{m}_0, r) \cap F\big) = B_g(m_0, r)$$

modulo un ensemble de mesure nulle; donc on a:

$$\mathrm{Vol}_{\tilde{g}}\big(B_{\tilde{g}}(\tilde{m}_0, r) \cap F\big) = \mathrm{Vol}_g\big(B_g(m_0, r)\big).$$

Par la définition de la norme géométrique, on a $d_{\tilde{g}}(m_0, \gamma\tilde{m}_0) = |\gamma|_{m_0}$ et donc pour chaque entier positif k on obtient

$$\bigcup_{|p| \leq k} \gamma^p\big(B_{\tilde{g}}(\tilde{m}_0, D) \cap F\big) \subset B_{\tilde{g}}(\tilde{m}_0, k|\gamma|_{m_0} + D)$$

En prenant les volumes des ensembles figurant dans l'inclusion ci-dessus on obtient

$$(2k+1)v \leq v_\delta(k|\gamma|_{m_0} + D)$$

pour tout k entier positif. Prenons pour k_0 le plus petit entier tel que $2k_0+1 \geq \frac{v_\delta(2D)}{v}$. Alors par l'inégalité ci-dessus on a

$$v_\delta(2D) \leq v_\delta(D + k_0|\gamma|_{m_0}).$$

Ceci implique $k_0|\gamma|_{m_0} \geq D$. Par le choix de k_0 on obtient

$$k_0 < \frac{v_\delta(2D)+v}{2v}$$

et ainsi on obtient l'estimation cherchée.

Remarque 1. En fait, le théorème d'Anderson est plus général que l'énoncé ci-dessus. À part l'estimation inférieure de la norme géométrique des éléments qui sont suffisamment non-triviaux (i.e. dont le cardinal du groupe cyclique engendré est supérieur à une constante qui dépend seulement de δ, D et v) il démontre qu'on a au plus un nombre $N = N(\delta, D, v)$ d'éléments d'ordre petit. Donc dans les hypothèses du théorème 2.C.2.1, la croissance polynomiale du $\pi_1(X)$ est une conséquence du théorème de Bishop 2.A.2.3 (voir la démonstration de Milnor dans la cas Ricci semi-positif cf. [Mi]).

Remarque 2. Grâce à la démonstration ci-dessus on peut obtenir (avec de légers changements) l'estimation $|\gamma|_{x_0} \geq C(n,v)\,\mathrm{Vol}_{\omega_\varepsilon}\big(B_{\omega_\varepsilon}(x_0,1)\big)$; mais si on impose une borne inférieure uniforme au membre droite, cela revient –par le lemme 2.C.2.7– à imposer une borne supérieure à la suite des diamètres, qui est précisément notre contexte de travail.

En résumé, on a une constante $C > 0$, un ensemble des générateurs $(\gamma_j)_{j=1\ldots N}$ du groupe fondamental de X et une suite de points $(p_k)_k$ tels que

1) Pour tout $j = 1\ldots N$ et k entier positif on a $|\gamma_j|_{p_k} \leq C$.
2) La norme géométrique par rapport à ω_k et un point arbitraire $p \in X$, de chaque élément non-trivial $\gamma \in \pi_1(X)$ est supérieure à C^{-1}.

Considérons la suite de variétés riemanniennes complètes $(\widetilde{X}, \widetilde{\omega}_k, \widetilde{p}_k)_k$. Pour chaque $k > 0$ la courbure de Ricci de ω_k est minorée par -1; donc par le critère de précompacité de Gromov, on peut extraire une sous-suite (qu'on notera avec les mêmes indices) tel qu'il existe un espace métrique propre pointé (Y, d_∞, p_∞) pour lequel

$$\lim_{k\to\infty}(\widetilde{X}, \widetilde{\omega}_k, \widetilde{p}_k) = (Y, d_\infty, p_\infty)$$

L'abélianité du groupe fondamental de X sera une conséquence des propriétés de l'espace Y que l'on va montre dans la suite. Les arguments utilisés dans ce qui suit se retrouvent dans beaucoup d'articles de géométrie riemannienne (cf. [FY], [Co]).

On construit d'abord une représentation $\pi_1(X) \to \mathrm{Isom}(Y)$. Soit $\gamma \in \pi_1(X)$ une classe d'homotopie non-triviale. Notons d_k la distance géodésique associée à la métrique $\widetilde{\omega}_k$. Alors par 1) on a

$$d_k(\widetilde{p}_k, \rho\widetilde{p}_k) \leq Cl_{\mathrm{alg}}(\rho) := C(\rho)$$

où l_{alg} désigne la norme algébrique par rapport aux générateues γ_j. Si on note ρ_k l'isométrie $\rho : (\widetilde{X}, d_k) \to (\widetilde{X}, d_k)$ la relation ci-dessus et le lemme d'isométrie de Gromov 2.A.2.6 montrent l'existence d'une isométrie ρ_∞ de l'espace Y telle que quitte à passer à une sous–suite on ait $\lim_{k\to\infty} \rho_k = \rho_\infty$ au sens de la définition 2.A.2.5. On établit ainsi une correspondance

$$\Psi : \pi_1(X) \to \mathrm{Isom}(Y)$$

et on montre que cette correspondance a les propriétés suivantes:

i) L'application Ψ est un monomorphisme de groupes.

ii) L'action Ψ est discontinue.

Preuve de i). Soit ρ_1, ρ_2 deux éléments quelconques du groupe fondamental de X. On note $C := d_\infty(\widetilde{p}_\infty, \rho_{2,\infty}\widetilde{p}_\infty)$. Alors pour tout k assez grand on a $d_k(\widetilde{p}_k, \rho_2\widetilde{p}_k) \leq 2C$. Soit δ_k la suite de métriques admissibles sur la réunion disjointe de $(\widetilde{X}, d_k)$ avec (Y, d_∞) données par la définition de la convergence des applications et soit $r \geq 0$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\mu_1 > 0$ tel que si $x' \in B_k(\widetilde{p}_k, r + 2C)$ et $y' \in B_\infty(\widetilde{p}_\infty, r + 2C)$ tels que $\delta_k(x', y') \leq \mu_1$, alors $\delta_k(\rho_1 x', \rho_{1,\infty} y') \leq \varepsilon$. D'autre part il existe $\mu_2 > 0$ avec la propriété suivante: si $x' \in B_k(\widetilde{p}_k, r)$ et $y' \in B_\infty(\widetilde{p}_\infty, r)$ tels que $\delta_k(x', y') \leq \mu_2$, alors $\delta_k(\rho_2 x', \rho_{2,\infty} y') \leq \mu_1$.

Soit $x' \in B_k(\widetilde{p}_k, r)$ et $y' \in B_\infty(\widetilde{p}_\infty, r)$; alors $d_k(\widetilde{p}_k, \rho_2 x') \leq 2C + r$ et de même pour $\rho_{2,\infty}$ et par les relations ci-dessus on obtient $\delta_k(\rho_1\rho_2 x', \rho_{1,\infty}\rho_{2,\infty} y') \leq \varepsilon$; ceci montre que Ψ est un morphisme de groupes.

Pour vérifier l'injectivité de Ψ, supposons que pour un certain γ on ait $\Psi(\gamma) = \mathrm{Id}(Y)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\mu > 0$ tel que $\delta_k(x', y') \leq \mu$ implique $\delta_k(\gamma', y') \leq \varepsilon$. Prenons $x' = \widetilde{p}_k$ et $y' = \widetilde{p}_\infty$. Comme $\widetilde{p}_k$ tend vers $\widetilde{p}_\infty$ on obtient $\delta_k(\gamma\widetilde{p}_k, \widetilde{p}_\infty) \leq \varepsilon$ pour tout k assez grand. Mais ceci montre que la norme géométrique de γ par rapport à ω_k est inférieure à 2ε, contradiction.

Preuve de ii) Soit $\widetilde{q}_\infty \in Y$ et $\rho_\infty = \Psi(\rho)$. Soit $(\widetilde{q}_k)_k$ une suite dont la limite est $\widetilde{q}_\infty$. Alors on a

$$d_\infty(\widetilde{q}_\infty, \rho_\infty\widetilde{q}_\infty) \geq d_k(\widetilde{q}_k, \rho\widetilde{q}_k) - \delta_k(\widetilde{q}_k, \widetilde{q}_\infty) - \delta_k(\rho\widetilde{q}_k, \rho_\infty\widetilde{q}_\infty) \geq C/2$$

si k est assez grand, donc Ψ est discontinue.

Observons ensuite qu'il existe un groupe $\mathcal{G}$ d'isométries de Y tel que $Y/\mathcal{G}$ soit un espace métrique compact. En effet, il suffit de considérer les isométries de Y qui sont de la forme $\gamma_\infty = \lim_k \gamma_k$ (au sens de la définition 2.A.2.5) où $(\gamma_k)_k$ sont des éléments du $\pi_1(X)$ considérés comme des isométries de $(X, \omega_k)_k$ et tels qu'il existe une constante positive C pour laquelle $d_k(\widetilde{p}_k, \gamma_k\widetilde{p}_k) \leq C$. Pour vérifier la compacité de l'espace $Y/\mathcal{G}$, prenons un point $\widetilde{q}_\infty \in Y$; alors ce point est la limite d'une suite $\widetilde{q}_k \in \widetilde{X}$ telle que $d_k(\widetilde{p}_k, \widetilde{q}_k) \leq C$ pour une certaine constante $C \gg 0$. Par ailleurs on a $\widetilde{q}_k = \rho_k\widetilde{z}_k$ pour $\widetilde{z}_k \in \widetilde{X}$ tel que $d_k(\widetilde{p}_k, \widetilde{z}_k) \leq D$. Mais observons que quitte à passer à une sous-suite on peut supposer que $(\rho_k)_k$ est convergente, car $d_k(\widetilde{p}_k, \rho_k\widetilde{p}_k) \leq C + D := C_1$ et on applique le lemme de Gromov 2.D.2.6. Alors

$$d_\infty(\widetilde{p}_\infty, \rho_\infty^{-1}\widetilde{q}_\infty) \leq 2D$$

où ρ_∞ est la limite des ρ_k, et donc $\mathcal{G}$ a une action cocompacte.

Remarque. En fait, par le théorème de convergence équivariante de Fukaya-Yamaguchi le quotient de Y par $\mathcal{G}$ est exactement la limite de la suite des variétés $(X, \omega_k)_k$.

Pour finir la démonstration de 2.C.2.1, on observe que l'espace Y est isométrique à $\mathbb{R}^m \times Y_1$, où Y_1 est un espace métrique compact. En effet, la courbure de Ricci de ω_k est minorée par $1/k$ et alors par des application itérées du "splitting theorem" de Cheeger-Colding l'espace Y est isométrique à $\mathbb{R}^m \times Y_1$ où l'espace Y_1 n'a pas de droites. Maintenant le groupe $\mathcal{G}$ est isomorphe à $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ où Γ_1 agit trivialement sur Y_1 et Γ_2 agit trivialement sur $\mathbb{R}^m$ (la vérification de cette affirmation se fait exactement comme dans le cas standard où à la place des espaces métriques on a des variétés). Donc Y_1 est un espace métrique qui n'a pas de droites et qui admet un quotient compact par un groupe d'isométries; par conséquent il est compact. Dans ce cas, le groupe Γ_2 est trivial, car il agit discontinûment sur un espace compact. On a donc le corollaire suivant:

Corollaire 2.C.2.6 *Le groupe fondamental $\pi_1(X)$ est isomorphe à un groupe discontinu d'isométries de $\mathbb{R}^m$ pour un certain $m \leq 2n$.*

Maintenant la presque-abélianité de $\pi_1(X)$ est une conséquence du théorème de Bieberbach (voir par exemple [FY]).

Preuve du théorème 2.C.2.2. Le schéma de la preuve est le suivant: on démontre d'abord que si la première classe de Chern de X est nef et a la propriété (INT), alors le volume de certaines boules géodésiques de rayon 1 de (X, ω_ε) est borné inférieurement indépendamment de ε. Par ailleurs, on obtient (voir le lemme 2.C.2.7) une borne supérieure du volume de ces boules en fonction du diamètre, du volume total et d'une borne pour la courbure de Ricci. Comme le volume de (X, ω_ε) est constant, on obtient ainsi une borne supérieure pour la suite des diamètres.

Par hypothèse la première classe de Chern de X est nef et a la propriété (INT), et donc on va lui appliquer la proposition 1.D.1. Ainsi on obtient une suite $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que

i) $\max_X f_\varepsilon \leq 0$.

ii) $\int_X \exp(-f_\varepsilon) dV_\omega \leq C$.

iii) $\mathrm{Ricci}_\omega + i\partial\overline{\partial} f_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega$ sur X.

Ensuite on reprend les arguments qu'on a utilisés dans 2.B.2 et on résout une équation de Monge-Ampère avec les f_ε ci-dessus pour en tirer des métriques kählériennes sur X qui ont les propriétés $i)$ et $ii)$ du théorème 2.C.2.1, pour lesquelles le volume des boules géodésiques ne tend pas vers zéro.

On applique donc le corollaire 2.B.1.2 pour résoudre l'équation

$$\omega_\varepsilon^n = \exp(\varepsilon\phi_\varepsilon - f_\varepsilon)\omega^n \tag{8}$$

où $\omega_\varepsilon := \omega + i\partial\overline{\partial}\phi_\varepsilon$. Grâce au théorème d'Aubin-Calabi-Yau, la fonction ϕ_ε qui vérifie l'équation (8) est unique. Alors on la renormalise de manière que

$$\int_X \phi_\varepsilon dV_\omega = 0$$

et l'égalité (8) devient

$$\omega_\varepsilon^n = \lambda_\varepsilon \exp(\varepsilon\phi_\varepsilon - f_\varepsilon)\omega^n \tag{9}$$

où λ_ε est la constante de normalisation. Exactement comme dans 2.B.2, la suite $(\lambda_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est minorée par une constante strictement positive C, car ici la constante de croissance $C_0 = 0$. On démontre maintenant que cette relation a comme conséquence le fait que le volume des boules géodésiques ne tend pas vers zéro.

Pour ceci on applique le lemme 2.B.1.6 à $U = X$. Pour tout $\delta > 0$ on obtient une famille de sous-ensembles ouverts $U_{\varepsilon,\delta} \subset X$ tels que

1) $\mathrm{Vol}_\omega(U_{\varepsilon,\delta}) \geq \mathrm{Vol}_\omega(X) - \delta$,
2) $\mathrm{diam}_{\omega_\varepsilon}(U_{\varepsilon,\delta}) \leq C\delta^{-1/2}$.

Alors pour δ assez petit, qu'on fixe ensuite, quitte à choisir une famille de points $p_\varepsilon \in U_\varepsilon$, on obtient une famille de boules géodésiques $B_{\omega_\varepsilon}(p_\varepsilon, C_1)$ telles que

$$\mathrm{Vol}_\omega\big(B_{\omega_\varepsilon}(p_\varepsilon, C_1)\big) \geq \frac{1}{2}\mathrm{Vol}_\omega(X).$$

D'autre part on a

$$\int_{B_{\omega_\varepsilon}(p_\varepsilon, C_1)} |\phi_\varepsilon| dV_\omega \leq 2C\,\mathrm{Vol}(X)$$

où C est la borne supérieure des ϕ_ε. Considérons l'ensemble

$$V_\varepsilon := \{x \in B_{\omega_\varepsilon}(p_\varepsilon, C_1)/|\phi_\varepsilon(x)| < 8C\}.$$

Par un calcul standard, on obtient que $\mathrm{Vol}_\omega(V_\varepsilon) \geq 1/4\,\mathrm{Vol}(X)$ et maintenant on peut en déduire une borne inférieure du volume de la boule $B_{\omega_\varepsilon}(p_\varepsilon, C_1)$, uniforme par rapport à ω_ε. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_{\omega_\varepsilon}\big(B_{\omega_\varepsilon}(p_\varepsilon, C_1)\big) &= \lambda_\varepsilon \int_{B_{\omega_\varepsilon}(p_\varepsilon, C_1)} \exp(\varepsilon\phi_\varepsilon - f_\varepsilon) dV_\omega \\
&\geq C \int_{B_{\omega_\varepsilon}(p_\varepsilon, C_1)} \exp(\varepsilon\phi_\varepsilon) dV_\omega \geq C_3\,\mathrm{Vol}_\omega(V_\varepsilon) \\
&\geq C_4.
\end{aligned}$$

Cette suite de relations implique (éventuellement en utilisant le théorème de Bishop si $C_1 \leq 1$) l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ on ait

$$\text{(10)} \qquad \mathrm{Vol}_{\omega_\varepsilon}\big(B_{\omega_\varepsilon}(p_\varepsilon, 1)\big) \geq C.$$

On démontre ensuite le lemme suivant, bien connu dans le cas d'une variété à courbure de Ricci semi-positive, qui est pour l'essentiel une conséquence du théorème de Bishop:

Lemme 2.C.2.7. *Soit X une variété complète de dimension réelle m munie d'une métrique riemannienne g dont la courbure de Ricci est minorée par $-\delta^2$. Alors pour tout point $p \in X$ et tout $1 < R < \max\{d_g(p,q)/q \in X\}$, on a l'inégalité:*

$$\frac{\mathrm{Vol}_g\big(B_p(2R+2)\big)}{\mathrm{Vol}_g\big(B_p(1)\big)} \geq \frac{R-1}{2m + 2\delta(m-1)(R+1)}.$$

Démonstration. La preuve consiste en une légère modification des arguments donnés dans [ShY] pour le cas semi-positif.

Soit $x_0 \in \partial B_p(R)$ (donc $d_g(p, x_0) = R$) et considérons la fonction $\rho(x) = d_g(x_0, x)$. Pour cette fonction, il est connu que

$$\Delta(\rho) \leq \frac{m-1}{\rho}(1 + \delta\rho)$$

au sens des distributions sur X (voir par exemple [ShY]) et que la norme du gradient de ρ vaut 1. Par conséquent, on a $\Delta(\rho^2) = 2\rho\Delta(\rho) + 2 \leq 2m + 2\delta(m-1)\rho$, et donc pour tout $\phi > 0$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact dans X on a

$$\text{(11)} \qquad \int_X \phi\Delta(\rho^2)dV \leq 2m\int_X \phi dV + 2\delta(m-1)\int_X \rho\phi dV.$$

Par densité, l'inégalité (1) reste vraie pour toute fonction lipschitzienne à support compact $\phi \geq 0$. Soit $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ à support dans $[0, R+1]$, qui vaut 1 sur l'intervalle $[0, R-1]$ et telle que $\psi(t) = \frac{1}{2}(R - t + 1)$ pour $t \in]R-1, R+1]$, et soit $\phi(x) := \psi\big(\rho(x)\big)$. Alors ϕ est lipschitzienne , à support dans la boule $B_{x_0}(R+1)$ et on a

$$\begin{aligned}
\int_X \phi(x)\Delta(\rho^2)(x)dV_g =& -\int_X \nabla\phi(x)\nabla\rho^2(x)dV_g \\
=& -2\int_{B_{x_0}(R+1)} \psi'(x)\big(\rho(x)\big)\rho(x)|\nabla\rho|^2(x)dV_g \\
=& \int_{B_{x_0}(R+1)\setminus B_{x_0}(R-1)} \rho(x)dV_g \\
\geq& (R-1)\Big(\mathrm{Vol}_g\big(B_{x_0}(R+1)\big) - \mathrm{Vol}_g\big(B_{x_0}(R-1)\big)\Big).
\end{aligned}$$

D'autre part, par la relation (11) on obtient

$$\begin{aligned}\int_X \phi(x)\Delta(\rho^2)(x)dV_g &\leq 2m\int_X \phi(x)dV_g + 2\delta(m-1)\int_{B_{x_0}(R+1)} \rho(x)dV_g \\ &\leq \Big(2m+2\delta(m-1)(R+1)\Big)\operatorname{Vol}_g\big(B_{x_0}(R+1)\big).\end{aligned}$$

Par le choix de x_0 on a $B_p(1) \subset B_{x_0}(R+1)\setminus B_{x_0}(R-1)$ et également $B_{x_0}(R+1) \subset B_p(2R+2)$. Donc les inégalités ci-dessus et ces relations impliquent

$$\big(2m+2\delta(m-1)(R+1)\big)\operatorname{Vol}_g\big(B_p(2R+2)\big) \geq (R-1)\operatorname{Vol}_g\big(B_p(1)\big)$$

et ainsi on obtient l'estimation cherchée.
Maintenant on applique ce lemme pour notre suite de métriques et on obtient

$$\frac{d_\varepsilon - 2}{4n+2\varepsilon(2n-1)(d_\varepsilon+2)} \leq \frac{\operatorname{Vol}(X)}{\operatorname{Vol}_{\omega_\varepsilon}\big(B_{\omega_\varepsilon}(p_\varepsilon,1)\big)}$$

L'inégalité (10) montre que le membre de droite de l'inégalité ci-dessus est majoré par une constante C; on a donc

$$\frac{d_\varepsilon - 2}{4n+\varepsilon(2n-1)(d_\varepsilon+2)} \leq C$$

et on voit facilement que ceci donne une borne uniforme pour $d_\varepsilon = \operatorname{diam}(X,\omega_\varepsilon)$. Donc par rapport à la suite de métriques ω_ε, le diamètre de X est borné indepen-dament de ε et ceci achève la démonstration du théorème 2.D.1.2.

Remarque. Dans le cas où $c_1(X)$ a la propriété (INT), on a un théorème de Demailly-Peternell-Schneider qui dit que le morphisme d'Albanese est une submersion. Donc si $c_1(X)$ est nef et a la propriété (INT), alors la presque-abélianité du groupe fondamental de X découle exactement comme dans le cas projectif 2.C.1.

2.C.3. Un exemple.

Dans ce paragraphe on se propose de montrer que l'hypothèse (INT), bien que suffisante, n'est pas nécessaire en général pour avoir une suite de métriques dans la même classe de cohomologie, à courbure de Ricci presque-positive et dont la suite des diamètres est bornée. Par ailleurs, cet exemple sera utile pour motiver le théorème 2.D.3.1. On réprend donc l'exemple de Demailly-Peternell-Schneider; ce qu'on fait ici est de trouver de métriques adéquates et à cette ocasion on démontre directement que le fibré anticanonique de la variété en question est nef.

Rappelons la construction de la variété X. Soit $\Gamma = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ une courbe elliptique et $E \to \Gamma$ le fibré vectoriel de rang 2 donné par

$$E = \mathbb{C}\times\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$$

où l'action de $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ est donnée par les automorphismes

$$\begin{aligned}g_1(z; z_1, z_2) =&(z + 1; z_1, z_2),\\ g_2(z; z_1, z_2) =&(z + i; z_1 + z_2, z_2).\end{aligned}$$

Alors on prend pour X le fibré projectivisé $P(E)$ de E. Dans 1.A.8, on a démontré que la classe de Ricci de X est nef, et que malgré cela X n'admet aucune métrique kählérienne à courbure de Ricci semi-positive. On va construir une suite (ω_ε) de métriques kählériennes qui ont toutes les propriétés de l'énoncé du théorème 2.D.1.1, bien que $c_1(X)$ n'ait pas la propriété (INT).

Pour commencer, considérons la suite de métriques hermitiennes sur $\mathbb{C}^2$, (vu comme fibré trivial sur $\mathbb{C}$) définis par

$$|(z_1, z_2)|^2_{z,\varepsilon} := |z_1|^2 - \mathrm{Im}(z)(z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2) + \big(\frac{1}{\varepsilon} + \mathrm{Im}^2(z)\big)|z_2|^2.$$

Alors pour ε quelconque on prend sur X la forme différentielle

$$\omega_\varepsilon = i\partial\overline{\partial}\log|(z_1, z_2)|_{z,\varepsilon} + idz \wedge d\overline{z}$$

et on démontre qu'elle satisfait les propriétés suivantes:

1) Pour tout $\varepsilon > 0$, la forme ω_ε est fermée et positive définie; elle appartient à une classe de cohomologie fixée.
2) La courbure de Ricci de ω_ε est minorée par $-\varepsilon$.
3) Le diamètre de X par rapport à ω_ε est uniformément borné supérieurement.
4) La classe de Ricci de X n'a pas la propriété (INT).
5) Les valeurs propres de $\omega_\varepsilon(x)$ par rapport à $\omega_1(x)$ sont minorées uniformément en tout point x dans les directions transverses aux fibres du morphisme d'Albanese.

Démonstration:

1) Par construction, chaque terme de la suite est une 2-forme fermée et la classe de cohomologie est constante par rapport à ε. Montrons donc que ω_ε est une forme positive définie. Pour ceci, on travaille dans l'ouvert U de X défini par $z_2 \neq 0$ (on fait tous les calculs dans cette carte, car dans les autres la situation est analogue). Alors la restriction de ω_ε à U s'écrit

$$\begin{aligned}\omega_{\varepsilon|U} =&i\partial\overline{\partial}\log\big(|z_1 - \mathrm{Im}(z)|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\big) + idz \wedge d\overline{z}\\ =&\frac{id'd''|z_1 - \mathrm{Im}(z)|^2}{\frac{1}{\varepsilon} + |z_1 - \mathrm{Im}(z)|^2} - \frac{d'|z_1 - \mathrm{Im}(z)|^2 \wedge d''|z_1 - \mathrm{Im}(z)|^2}{\big(\frac{1}{\varepsilon} + |z_1 - \mathrm{Im}(z)|^2\big)^2}\\ &+idz \wedge d\overline{z}\end{aligned}$$

Par un calcul sans difficultés, on voit maintenant que dans l'expression de la restriction de ω_ε à U on obtient les coefficients suivants

$$
\begin{aligned}
\omega_{\varepsilon|U} =& \frac{\varepsilon}{\left(1+\varepsilon|Z|^2\right)^2} idz_1 \wedge d\overline{z}_1 + \frac{\varepsilon}{2i} \frac{\left(\varepsilon\overline{Z}^2 - 1\right)}{\left(1+\varepsilon|Z|^2\right)^2} idz \wedge d\overline{z}_1 \\
&- \frac{\varepsilon}{2i} \frac{\varepsilon\left(Z^2-1\right)}{\left(1+\varepsilon|Z|^2\right)^2} idz_1 \wedge d\overline{z} + \left(\frac{\varepsilon}{2} \frac{\left(1-\varepsilon\frac{\overline{Z}^2+Z^2}{2}\right)}{\left(1+\varepsilon|Z|^2\right)^2} + 1\right) idz \wedge d\overline{z}
\end{aligned}
$$

Dans l'expression ci-dessus, on a noté $Z := z_1 - \mathrm{Im}(z)$. Alors la positivité de ω_ε est équivalente à

$$
\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{Z^2+\overline{Z}^2}{2}\right) + \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon}+|Z|^2\right)^2}{\varepsilon} > \frac{1}{4}\left|\frac{1}{\varepsilon} - Z^2\right|^2
$$

Après quelques simplifications, l'inégalité ci-dessus est équivalente à

$$
\frac{1}{4\varepsilon^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon} + |Z|^2\right)^2 > \varepsilon|Z|^4
$$

et cette inégalité est évidemment vérifiée.

2) Passons maintenant au calcul de la courbure de Ricci; par définition on a

$$
\mathrm{Ricci}_{\omega_\varepsilon} = -i\partial\overline{\partial}\log\det(\omega_{\varepsilon j,k})
$$

et dans notre cas ceci donne

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ricci}_{\omega_\varepsilon|U} =& 4i\partial\overline{\partial}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}+|Z|^2\right) - \\
&- i\partial\overline{\partial}\log\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon}-|Z|^2\right)\left(\frac{1}{\varepsilon}+|Z|^2\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon}+|Z|^2\right)^2\right) \\
=& 3i\partial\overline{\partial}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}+|Z|^2\right) - i\partial\overline{\partial}\log\left(\delta_\varepsilon+|Z|^2\right)
\end{aligned}
$$

où $\delta_\varepsilon = \dfrac{4+\varepsilon}{\varepsilon(4-\varepsilon)}$. Pour rendre les calculs plus lisibles, on introduit les notations suivantes

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{3+\varepsilon}{\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}+|Z|^2\right)^2} - \frac{\delta_\varepsilon}{\left(\delta_\varepsilon+|Z|^2\right)^2} \\
W &= \frac{(3+\varepsilon)Z^2}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+|Z|^2\right)^2} - \frac{Z^2}{\left(\delta_\varepsilon+|Z|^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

Alors pour montrer que la courbure de Ricci de ω_ε est minorée par $-\varepsilon$, il suffit de prouver que

$$
V\left(\varepsilon + \frac{V}{2} - \frac{W+\overline{W}}{4}\right) \geq \frac{1}{4}\left|V-W\right|^2.
$$

Autrement dit, on doit vérifier que

$$V^2 + 4\varepsilon V \geq |W|^2. \tag{12}$$

Maintenant on observe que $V + |W| = \dfrac{(3+\varepsilon)\varepsilon}{1+\varepsilon|Z|^2} - \dfrac{1}{\delta_\varepsilon + |Z|^2}$ et la relation (12) est équivalente à

$$\Big((3/\varepsilon+1)v^2 - \delta_\varepsilon w^2\Big)\Big(4\varepsilon + 2v - 2w\Big) \geq \Big((3+\varepsilon)v - w\Big)^2, \tag{13}$$

où on a utilisé les notations

$$\begin{aligned} v^{-1} =& \frac{1}{\varepsilon} + |Z|^2, \\ w^{-1} =& \delta_\varepsilon + |Z|^2. \end{aligned}$$

Pour finir, on va grouper les termes dans la relation (13) de la façon suivante

$$2\Big(v-w\Big)\Big((3/\varepsilon+1)v^2 - \delta_\varepsilon w^2\Big) + 4(3+\varepsilon)v^2 - 4\varepsilon\delta_\varepsilon w^2 - \Big((3+\varepsilon)v - w\Big)^2 \geq 0$$

Le premier terme du membre gauche est positif, car $v > w$; quant au deuxième, on observe que $\varepsilon\delta_\varepsilon < 1+\varepsilon$ et que $3 - 2\varepsilon - \varepsilon^2 > 3(1-\varepsilon)$; pour voir qu'il est aussi positif il suffit de démontrer que

$$3(1-\varepsilon)v^2 + 2(3+\varepsilon)vw - (5+4\varepsilon)w^2 \geq 0.$$

En utilisant encore une fois que $v > w$, cette dernière relation est vérifiée dès que ε est assez petit.

3) Par le calcul fait au premier point, la forme de la métrique dans l'ouvert U est

$$\begin{aligned} \omega_{\varepsilon|U} =& \frac{\varepsilon}{\big(1+\varepsilon|Z|^2\big)^2} i dz_1 \wedge d\overline{z}_1 + \frac{\varepsilon}{2i}\frac{\big(\varepsilon\overline{Z}^2 - 1\big)}{\big(1+\varepsilon|Z|^2\big)^2} i dz \wedge d\overline{z}_1 \\ -& \frac{\varepsilon}{2i}\frac{\varepsilon\big(Z^2-1\big)}{\big(1+\varepsilon|Z|^2\big)^2} i dz_1 \wedge d\overline{z} + \Big(\frac{\varepsilon}{2}\frac{\big(1 - \varepsilon\frac{\overline{Z}^2+Z^2}{2}\big)}{\big(1+\varepsilon|Z|^2\big)^2} + 1\Big) i dz \wedge d\overline{z} \end{aligned}$$

Pour vérifier l'assertion sur la suite des diamètres, il suffit de démontrer que la longueur des chemins $\gamma : \mathbb{R}_+ \mapsto U$ donnés par $t \to (tz_1, z)$ est borné, où $|z_1| = 1$ et z appartient à un compact de $\mathbb{C}$. Par un calcul facile on obtient

$$l_{\omega_\varepsilon}(\gamma) = \int_0^\infty \frac{|z_1|\varepsilon^{1/2}}{1+\varepsilon|tz_1 - \mathrm{Im}(z)|^2} dt \leq \frac{\pi}{2}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et donc $\mathrm{diam}(X, \omega_\varepsilon) \leq \frac{\pi}{2} + 1$.

4). Comme on a vu dans 1.A.1, tous les courants positifs fermés appartenant à la première classe de Chern de la variété X ont une partie singulière égale à $2[C]$ (car le fibré anticanonique est $\mathcal{O}_E(2)$) où C est le diviseur $z_2 = 0$. La non-intégrabilité de la fonction $z \mapsto |z_2|^{-4}$ sur $(\mathbb{C}^2, 0)$ montre que $c_1(X)$ n'a pas la propriété (INT).

5). La vérification de cette affirmation est immédiate, vue la forme explicite de la métrique ω_ε.

Compte tenu de cet exemple et du théorème 2.C.2.2, la question suivante nous paraît naturelle:

Conjecture. *Soit X une variété kählérienne compacte dont la première classe de Chern est nef. Alors il existe une suite de métriques kählériennes $(\omega_k)_k$dans la même classe de cohomologie, à courbure de Ricci minorée par $-1/k$ et dont la suite de diamètres est majorée.*

En général, le probleme d'avoir une majoration de la suite de diamètres semble difficile, et lié à la nature des singularités des courants positifs fermés appartenant au bord du cône de Kähler de la variété X. Par exemple, si les singularités locales du courant limite de la suite $(\omega_k)_k$ sont du type $i\partial\overline{\partial}\big(\log|z| - \log\big|\log|z|\big|\big)$, alors la suite de diamètres de ces métriques tend vers l'infini (un calcul facile montre en effet que la métrique ci-dessus définit une métrique kählérienne sur $B(0, 1/2) \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{C}^n$, ayant la propriété d'être complète prés de 0).

2.D.

Dans ce dernier paragraphe on va se concentrer principalement sur les propriétés des 1–formes holomorphes sur les variétés kählériennes compactes à classe de Ricci nef. Les résultats présentés tournent autour de la conjecture suivante:

Conjecture (DPS). *Soit X une variété kählérienne compacte à classe de Ricci nef. Alors le morphisme d'Albanese de X est surjectif.*

Dans la première partie, on démontre que sous les hypothèses ci-dessus l'irrégularité de X est majorée par la dimension complexe de X. De plus, si la suite des diamètres de (X, ω_k) tend vers l'infini et si la norme géométrique des éléments de $H_1(X, \mathbb{Z})$ est contrôlée uniformément, on montre que l'irrégularité de X ne peut pas être maximale. Pour finir, on donne la preuve d'un cas particulier de la conjecture ci-dessus. Signalons que dans le cas où X est projective avec K_X^{-1} nef, on a déja mentionné (et utilisé) le résultat de Qi Zhang [Zh] qui a démontré que le morphisme d'Albanese est surjectif, ce qui implique aussi $h^1(X, \mathcal{O}_X) \leq n$; la méthode de Zhang utilise de manière essentielle des arguments de déformation en caractéristique $p > 0$. Malheureusement, il paraît difficile d'étendre ces résultats au cas où la variété est kählérienne compacte et non projective, lorsque le fibré anticanonique est supposé nef.

2.D.1. Une majoration du premier nombre de Betti des variétés kählériennes compactes à classe de Ricci numériquement effective.

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant:

Théorème 2.D.1.1. *Soit X une variété kählérienne compacte de dimension n, avec K_X^{-1} nef. Alors*

i) $b_1(X) \leq 2n$.

ii) *Si Γ est un sous-groupe du groupe fondamental de X, alors il existe Γ_1 sous-groupe d'indice fini de Γ, engendré par au plus $4^{2n}+1$ éléments.*

La démonstration du théorème 1 est basée sur quelques idées de Mikhail Gromov (voir [Gr], chapitre 5), combinés avec des résultats obtenus par Demailly-Peternell-Schneider dans [DPS2]. En effet, dans le cadre des variétés riemanniennes à courbure de Ricci presque-positive, on a le résultat suivant:

Théorème (Gromov). *Il existe une fonction $\varphi(n,r,d)$ à valeurs entières telle que pour toute variété riemannienne (M,g) de diamètre d, dimension n et courbure de Ricci minorée par $-(n-1)rg$, le premier nombre de Betti de M vérifie l'inégalité $b_1 \leq \varphi(n,r,d)$. En outre, quand rd^2 est assez petit, φ vaut n.*

Pour une application directe du résultat de Gromov sus-mentionné, on aurait besoin de savoir que $\varepsilon\big(\mathrm{diam}_{\omega_\varepsilon}(X)\big)^2$ tend vers 0 avec ε (car a priori, la seule majoration qu'on a sur la norme géométrique des générateurs de $\pi_1(X)$ est $2\mathrm{diam}_{\omega_\varepsilon}(X)$. Cependant on arrive à faire marcher les arguments utilisés ci-dessus grâce à l'observation qu'on peut mesurer les éléments du $\pi_1(X)$ "avec la classe de cohomologie de ω", donc uniformément par rapport à des divers représentants de cette classe.

Preuve du théorème 2.D.1.1. On commence par préciser quelques notations. Soit g une métrique riemannienne sur X; on note $h:\pi_1(X)\to H_1(X,\mathbb{Z})/\mathrm{Tors}$ le morphisme de Hurewicz, où Tors designe la partie de torsion du premier groupe d'homologie de X. Soit Γ le noyau de ce morphisme; c'est un sous-groupe distingué de $\pi_1(X)$ et on considère $\overline{X} := \widetilde{X}/\Gamma$ le revêtement associé. Alors $\overline{X}$ est une variété complète et la partie libre de $H_1(X,\mathbb{Z})$ agit sur $\overline{X}$ comme groupe d'isométries par rapport à la métrique image inverse $\overline{g}$. Sur le groupe $\pi_1(X)/\Gamma$ on définit la norme géométrique quotient comme suit:

Définition 2.D.1.2. *Soit $\overline{\gamma}$ une classe d'homologie; alors sa norme géométrique est donnée par $|\overline{\gamma}|_p = \inf\{|\beta|_p/\beta\in\overline{\gamma}\}$.*

Comme on le voit facilement, on a $|\overline{\gamma}|_p = d_{\overline{g}}(\overline{p},\overline{\gamma}\cdot\overline{p})$, où $\overline{p}$ est la projection sur $\overline{X}$ de $\tilde{p}$.

On a déja vu (à plusieurs reprises) que l'hypothèse qu'on a sur la classe anticanonique se traduit par l'existence d'une suite des métriques kählériennes $(\omega_\varepsilon)_\varepsilon$ dans la même classe de cohomologie, dont la courbure de Ricci est minoré par $-\varepsilon$. Un autre argument important pour ce qui va suivre est l'existence d'une famille des points $(p_\varepsilon)_\varepsilon \subset X$ telle que pour une certaine constante $C > 0$ et un système de générateurs γ_j on a $|\gamma_j|_\varepsilon \leq C$ (voir 2.B.1). Considerons des éléments $\rho_1, \ldots, \rho_{b_1}$ de $\pi_1(X)$ dont les classes dans $\pi_1(X)/\Gamma$ forment une base de ce groupe abélien libre. Il existe une (autre) constante $C > 0$ telle que pour tout $j = 1 \ldots b_1(X)$ on ait: $|\overline{\rho}_j|_{p_\varepsilon} \leq C$. Pour chaque $\varepsilon > 0$ considérons l'ensemble

$$\mathcal{P} = \{\overline{\gamma} \in \pi_1(X)/\Gamma ; |\overline{\gamma}|_{p_\varepsilon} < C\}$$

(évidemment, cet ensemble dépend aussi de ε, mais cela n'a pas d'importance pour nous). D'après la propriété 2.A.2.2 de la norme géométrique, l'ensemble $\mathcal{P}$ n'a qu'un nombre fini d'éléments. Donc si $\overline{\gamma}$ et toutes ses puissances ont une norme inférieure à C, alors $\overline{\gamma} = 0$. Par suite, pour $\overline{\gamma} \in \mathcal{P}$ qui n'est pas nulle, il existe un entier m, tel que $C \leq |m\overline{\gamma}|_{p_\varepsilon} \leq 2C$ (il suffit de choisir l'indice minimal m pour lequel $|m\overline{\gamma}| \geq C$). Ensuite on choisit un indice j tel que $m\overline{\gamma}$ a une j-composante non-nulle et on remplace le générateur $\overline{\rho}_j$ par $\overline{\gamma}$; le nouveau sous-groupe a moins d'éléments de norme géométrique inférieure à C (simplement parce que $\overline{\gamma}$ n'est plus dedans). Après un nombre fini d'opérations, on aboutit (quelque soit $\varepsilon > 0$) à un sous-groupe abélien libre Λ_ε du groupe des isométries de $\overline{X}$, engendré par $b_1(X)$ éléments, tel que

1) les générateurs ont une norme géométrique (par rapport à ω_ε) inférieure à $2C$;
2) tous les éléments non-nuls de Λ_ε ont une norme géométrique supérieure à C.

Maintenant pour chaque $\varepsilon > 0$ on considère la famille suivante:

$$\mathcal{F}_\varepsilon = \{m_1\gamma_1 + \ldots + m_{b_1}\gamma_{b_1} \quad / \quad m_1, \ldots, m_{b_1} \text{entiers}\}$$

où les γ_j sont les générateurs de Λ_ε. On prend l'orbite $\mathcal{F}_\varepsilon \overline{p}_\varepsilon$ et s un nombre entier. Le nombre de points de cette orbite dans la boule $B_{\overline{\omega}_\varepsilon}(\overline{p}_\varepsilon, 2sC)$ est supérieur au nombre de points $(\lambda_j) \in \mathbb{Z}^{b_1}$, tel que $\sum |\lambda_j| \leq s$, donc supérieur à $\dfrac{s^{b_1}}{b_1!}$. Grâce à 2), les boules $B_{\overline{\omega}_\varepsilon}(\gamma\overline{p}_\varepsilon, \frac{C}{2})$ sont disjointes et contenues dans $B_{\overline{\omega}_\varepsilon}(\overline{p}_\varepsilon, 2pC + \frac{C}{2})$; comme la courbure de Ricci de la métrique $\overline{\omega}_\varepsilon$ est minorée par $-\varepsilon$, le lemme de Bishop-Gromov 2.A.2.3 montre que le nombre de points de l'orbite est majoré par

$$\frac{\mathrm{Vol}_{\overline{\omega_\varepsilon}}\left(B_{\overline{\omega}_\varepsilon}(\overline{p}_\varepsilon, 2sC + \frac{C}{2})\right)}{\mathrm{Vol}_{\overline{\omega}_\varepsilon}\left(B_{\overline{\omega}_\varepsilon}(\overline{p}_\varepsilon, \frac{C}{2})\right)} \leq \frac{\int_0^{(2sC+\frac{C}{2})\sqrt{\frac{\varepsilon}{n-1}}} (\sinh t)^{2n-1} dt}{\int_0^{C\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{n-1}}}{2}} (\sinh t)^{2n-1} dt}.$$

Quand ε tend vers 0, le membre droit tend vers $(4s+1)^{2n}$ et on va montrer que cela implique $b_1 \leq 2n$. En effet, les arguments donnés ci-dessus montrent que pour tout p entier positif on a l'inégalité

$$\frac{s^{b_1}}{b_1!} \leq (4s+1)^{2n}.$$

La croissance des deux membres quand s tend vers ∞ impose $b_1 \leq 2n$, inégalité énoncée dans l'alinea i) du théorème 2.D.1.1.

Démonstration du ii). Soit $X_\Gamma \to X$ le revêtement de X associé à Γ (i.e. tel que $\pi_1(X_\Gamma)$ est isomorphe à Γ). Au moyen de la projection du revêtement de X on transporte sur X_Γ les métriques de Calabi-Yau ω_ε. Par le théorème 2.B.1.1, le groupe fondamental de X est presque-nilpotent, donc chacun de ses sous-groupes est engendré par un nombre fini d'éléments. Donc Γ n'a qu'un nombre fini de générateurs et alors les longueurs de ces générateurs sont uniformément bornées par une constante C_1 qui ne dépend pas de ε, c'est-à-dire de la métrique, mais seulement de leurs longueur algébrique par rapport aux générateurs de $\pi_1(X)$. On a le lemme suivant (dû à Gromov) qui dit que quitte à passer à un revêtement fini de X_Γ, on trouve une borne inférieure pour les distances entre les générateurs aussi grande qu'on veut, en contrôlant la croissance de leurs longueurs géométriques.

Lemme 2.D.1.3. *Soit (M,g) une variété riemannienne complète, dont le groupe fondamental est de type fini et soient $\gamma_1,\dots,\gamma_N$ des générateurs de $\pi_1(M)$. Soit C_0 un nombre réel, tel que $|\gamma_j|_g \le C_0$, pour tout j. Alors pour tout $\delta > 0$ il existe un revêtement fini $M' \to M$ tel que $\pi_1(M')$ soit engendré par $\rho_1,\dots,\rho_s$ avec*

a) $|\rho_j|_g \le C_0 + \delta$

et

b) $|\rho_j \cdot \rho_k^{-1}|_g \ge \delta$

pour j et k distincts (les normes géométriques sont prises par rapport à un point de revêtement universel de M au-dessus du point base du $\pi_1(M)$).

Démonstration du lemme. Considérons les familles $\{\rho_j\}$ d'éléments de $\pi_1(M)$ vérifiant les propriétés a) $|\rho_j|_g \le C_0+\delta$ et b) si j et k distincts, $|\rho_j \cdot \rho_k^{-1}|_g \ge \delta$. L'existence d'une telle famille est évidente, donc nous pouvons choisir une famille comportant le nombre maximum d'éléments et noter Φ le sous-groupe de $\pi_1(M)$ qu'elle engendre. On lui associe un revêtement $r : M' \to M$, quotient de $\tilde{M}$ par l'action de Φ. Si m est le point base de $\pi_1(M)$ et $\tilde{m}$ un point au-dessus du m dans le revêtement universel de M, soit m' la projection de $\tilde{m}$ dans M'.

On va montrer que la fibre de r au dessus de m est finie et donc que Φ est d'indice fini dans $\pi_1(M)$. Supposons qu'il existe z_0' dans $r^{-1}(m)$ tel que $d(m', z_0') > \delta$. Soit α dans le groupe fondamental de M représenté par la projection d'une géodésique minimale joignant m' à z_0' dans M'. Alors $|\phi\alpha|_g \ge d(m', z_0') > \delta$ pour tout ϕ dans Φ. Soit $\alpha_0 \in \pi_1(M)$ un élément de longueur minimale par rapport aux générateurs γ_j, tel que $|\phi\alpha_0|_g > \delta$ pour tout $\phi \in \Phi$. Alors si $\alpha_0 = \beta_0\gamma_j^{\varepsilon_j}$ avec $\varepsilon_j \in \{-1,1\}$ et β_0 de longueur inférieure à celle de α_0, il existe $\phi_0 \in \Phi$ tel que $|\phi_0\beta_0|_g \le \delta$, et par suite $|\phi_0\alpha_0|_g = |\phi_0\beta_0\gamma_j^{\varepsilon_j}|_g \le C_0 + \delta$. On contredit alors la maximalité de la famille $\{\rho_j\}$ en ajoutant l'élément $\rho_0 = \phi_0\alpha_0$.

Par conséquent la fibre $r^{-1}(m)$ est contenue dans la boule géodésique de centre m' et de rayon δ, et elle est donc finie. Le lemme est démontré.

On va appliquer le lemme 2 pour les données suivantes: $M = X_\Gamma$, $g = \omega_\varepsilon$ et $\delta = \varepsilon^{-\frac{1}{4}}$, pout tout $\varepsilon > 0$. Le lemme nous fournit une suite de variétés $X_{\Gamma,\varepsilon}$ et on note Γ_ε les groupes fondamentaux correspondants. Alors:

1) chaque Γ_ε est d'indice fini dans Γ,

2) les générateurs de Γ_ε ont une norme géométrique inférieure à $C_1+\varepsilon^{-\frac{1}{4}}$ et leur distance mutuelle est supérieure à $\varepsilon^{-\frac{1}{4}}$.

On considère le revêtement universel de chaque $X_{\Gamma,\varepsilon}$ et on applique une fois de plus l'inégalité de Bishop (fixons un point base $\tilde{x}_\varepsilon$, les normes ci-dessus étant alors prises par rapport à $\tilde{x}_\varepsilon$; si on note $\gamma_{\varepsilon,j}$ les générateurs de Γ_ε, alors les boules $B(\gamma_{\varepsilon,j}x_\varepsilon, \frac{1}{2}\varepsilon^{-\frac{1}{4}})$ sont disjointes et contenues dans $B(x_\varepsilon, C_1+2\varepsilon^{-\frac{1}{4}})\big)$.

Donc le nombre de générateurs de Γ_ε est inférieur à

$$\frac{\int_0^{(C_1+2\varepsilon^{-\frac{1}{4}})\sqrt{\varepsilon}}(\sinh t)^{2n-1}dt}{\int_0^{\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}}(\sinh t)^{2n-1}dt.}$$

Quand ε tend vers zéro, le quotient des intégrales tend vers 4^{2n}, et donc pour un ε suffisamment petit le groupe Γ_ε aura les propriétés mentionnées dans l'énoncé du théorème 1.

Applications à l'étude du morphisme d'Albanese.

a) La démonstration du premier point du théorème montre qu'en fait si Γ est un sous-groupe du groupe fondamental de X et si nous avons un morphisme surjectif de Γ dans un groupe abélien G, alors le rang du groupe G est inférieur à $2n$. En particulier, l'abélianisé de chaque sous-groupe de $\pi_1(X)$ est de rang inférieur à $2n$.

b) Soit $L \to X$ un fibré holomorphe en droites nef. On définit sa dimension numérique par

$$\nu(L) = \max\{k \ / \ c_1(L)^k \neq 0 \ \text{ dans } \ H^{k,k}(X)\}$$

Dans ce contexte, on a le théorème d'annulation suivant:

Théorème *(Kawamata-Viehweg). Si L est un fibré en droites nef sur une variété projective X, alors*

$$H^q\big(X, \mathcal{O}(K_X+L)\big) = 0 \quad pour \quad q > n-\nu(L).$$

Si le fibré anticanonique de X est nef et de dimension numérique maximale, on sait que X est simplement connexe; cela résulte immédiatement du "Basepoint-free theorem" (voir [CKM],page 57) et du théorème de structure donné dans [DPS3]: en effet, par le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg appliqué à $L=-K_X$ on a $H^q(X,\mathcal{O}_X)=0$ pour tout $q\geq 1$; donc $b_1=0$ et la caracteristique du faisceau $\mathcal{O}_X$ vaut $\chi(\mathcal{O}_X)=1$. Le "Basepoint-free theorem" nous donne la semi-positivité de $-K_X$ et le théorème de structure des variétés dont le fibré anticanonique est hermitien semi-positif montre que $\pi_1(X)$ est un groupe fini (cf. [DPS3]). Maintenant un argument standard dû à Kobayashi montre que $\pi_1(X)=0$: pour tout revêtement fini $k:1$ de X, soit $\tilde{X}\to X$, alors $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = k\chi(\mathcal{O}_X)$ et comme $\chi(\mathcal{O}_X)=\chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}})=1$ on conclut que $k=1$.

c) Si X est une variété projective dont le fibré anticanonique est nef et de dimension numérique égale à $n-1$, alors l'irrégularité de X, notée $q(X) := h^1(X, \mathcal{O}_X)$ est inférieure ou égale à 1. En effet, on a alors $H^j(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $j \geq 2$ par Kawamata-Viehweg, d'où $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q(X)$. Si $q(X) > 0$ il existe pour tout k entier positif $X_k \to X$ un revêtement abélien cyclique de degré k. Le fibré anticanonique de X_k a les mêmes propriétés numériques que celui de X, donc par Riemann-Roch on a

$$\chi(\mathcal{O}_{X_k}) = 1 - q(X_k) = k\big(1 - q(X)\big).$$

Mais $q(X_k)$ satisfait $0 \leq q(X_k) \leq n$ d'après le théorème principal, donc le membre gauche de l'égalité ci-dessus est borné indépendamment de k et ceci force $q(X) = 1$. En particulier on a

Corollaire 2.D.1.4. *Soit X une variété projective de dimension n dont le fibré anticanonique est nef et de dimension numérique supérieure ou égale à $n-1$. Alors le morphisme d'Albanese de X est soit trivial, soit une fibration surjective sur une courbe elliptique.*

2.D.2.

On a vu dans le paragraphe 2.D.1 que dans le cas d'une variété kählérienne à classe de Ricci nef, l'irrégularité est majorée par la dimension complexe. Par ailleurs, dans le paragraphe 2.C.2 on a démontré que si la suite des diamètres $D_\varepsilon := \mathrm{diam}(X, \omega_\varepsilon)$ est majorée, alors le groupe fondamental de X est presque-nilpotent. On se propose maintenant de regarder le cas où la suite des diamètres tend vers l'infini. Le résultat présenté dans cette section est le suivant:

Théorème 2.D.2.1 *Soit X une variété complexe compacte munie d'une suite de métriques kählériennes $(\omega_k)_k$ telles que:*

i) Chaque métrique ω_k appartient à une classe de cohomologie fixée, et $\mathrm{Ricci}_{\omega_k} \geq -1/k\omega_k$.

ii) Il existe une constante $C > 0$ et une suite $(C_k)_k$ de nombres positifs tels que $\lim_{k\to\infty} C_k/\sqrt{k} = 0$ et pour tout γ appartenant à la partie libre du $H_1(X, \mathbb{Z})$ on a:

$$C \leq |\gamma|_{k,p} \leq C_k l_{alg}(\gamma)$$

pour tout $p \in X$.

Alors si $D_k :=$ $\mathrm{diam}(X, \omega_k)$ *tend vers l'infini, l'irrégularité de X est majorée par $n-1$.*

Avant de passer à la démonstration de ce résultat, faisons quelques remarques. L'hypothèse *i)* est équivalente à $-K_X$ nef. Par l'hypothèse *ii)* on suppose qu'on peut mesurer le partie libre du $H_1(X, \mathbb{Z})$ uniformément par rapport à la suite de métriques. En fait, l'inégalité du membre de droite est toujours verifiée pour *certains* points $p \in X$; ici on suppose que pour les autres points la norme géométrique ne tend pas vers l'infini trop vite. Donc le théorème ci-dessus dit en quelques sortes que si la suite des diamètres tend vers l'infini et que si (malgré cela!) on peut mesurer uniformément le premier groupe d'homologie de X, alors la variété X n'est pas un tore.

Preuve. L'idée de la preuve est la suivante. D'après les hypothèses que l'on fait, si on renormalise convenablement la suite $(\omega_k)_k$, un théorème de Fukaya-Yamaguchi combiné avec un résultat de T. Colding montre que la limite de la suite des variétés pointées $(\overline{X}, \overline{g}_k, \overline{q}_k)$ est précisement $\mathbb{R}^m$, avec $m \leq 2n-1$. On a noté $\overline{X}$ le revêtement cyclique de X et $\overline{g}_k$ est l'image inverse de la renormalisation de la métrique ω_k. Ensuite on arrive à construire par le procédé habituel une action de $\mathbb{Z}^{b_1(X)}$ sur $\mathbb{R}^m$ discontinue en zéro et fidèle. Une simple comparaison de volume implique $b_1(X) \leq m$, ce qui impliquera $q(X) \leq n-1$.

Pour commencer, fixons quelques notations. Soit $h : \pi_1(X) \to H_1(X, \mathbb{Z})$ le morphisme de Hurewicz et $\Gamma := h^{-1}(T)$ où T désigne le sous-groupe de torsion du premier groupe d'homologie. On définit $\overline{X} := \widetilde{X}/\Gamma$. Alors le groupe fondamental de $\overline{X}$ est Γ et $\mathbb{Z}^{b_1(X)}$ agit sur $\overline{X}$ comme groupe des isométries par rapport à toute métrique image inverse.

Considérons la suite $(\overline{X}, \frac{1}{k}\overline{\omega}_k, \overline{p})_k$ où $p \in X$ est arbitrairement choisi. La courbure de Ricci de la métrique $\frac{1}{k}\overline{\omega}_k$ est minorée par -1 et on a le théorème suivant, dû à Fukaya–Yamaguchi:

Théorème 2.D.2.2. *Il existe une suite de réels positifs $(r_k)_k$ qui tend vers l'infini tel que $r_k \leq \sqrt{k}/C_k$ et une suite de points $\overline{q}_k \in \overline{X}$ telle que*

$$\lim_{k\to\infty} \big(\overline{X}, r_k/\sqrt{k} d_k, \overline{q}_k\big) = \big(\mathbb{R}^m, d, 0\big)$$

où d_k est la distance géodésique associée à la metrique $\overline{\omega}_k$ et d est la métrique canonique sur $\mathbb{R}^m$.

Dans ses grandes lignes, la preuve du théorème est la suivante. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que la suite $(\overline{X}, \frac{1}{k}\overline{\omega}_k, \overline{p})_k$ tend vers un espace de longueur (Y, d_Y, q). Si Y n'est pas réduit à un seul point, alors soit $z \neq y$ et soit y_1 un point intérieur de la géodésique minimisante entre y et z. Considérons la suite des espaces pointés $\big(Y, r_k d_Y, z\big)_k$ où $(r_k)_k$ est une suite de nombres réels positifs qui tend vers l'infini aussi lentement qu'on veut. On fabrique dans l'espace limite une droite, en dilatant la géodésique entre y et z. Par le "splitting theorem" de Cheeger–Colding, l'espace limite Y_1 est isométrique à $\mathbb{R} \times Y_2$. Mais Y_1 est aussi la limite de la suite $\big(\overline{X}, \frac{r_k}{\sqrt{k}} d_k, \overline{q}_k\big)$ (si r_k tend vers l'infini assez lentement). En itérant cette construction au plus $2n$ fois on obtient une preuve du théorème ci-dessus. Signalons ici un autre résultat de T. Colding qui dit qu'en fait les points de Y où le cône tangent est isométrique à un espace euclidien sont denses dans Y.

Ensuite on veut trouver une majoration de la dimension m; en général on a $m \leq 2n$, mais dans notre situation on montrera que $m \leq 2n-1$. Dans ce but, observons d'abord que si la suite des diamètres D_k tend vers l'infini, alors pour toute famille de points $q_k \in X$, le volume des boules géodésiques de rayon 1 centrées en q_k de (X, ω_k) tend vers zéro. Pour ceci, on utilise le lemme 2.C.2.7, appliqué aux données suivantes: la métrique g sera ω_k, $p := q_k$ et $R = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(X, \omega_k)$. On obtient donc

$$\frac{\mathrm{Vol}_{\omega_k}(X)}{\mathrm{Vol}_{\omega_k}\big(B_{\omega_k}(q_k, 1)\big)} \geq \frac{D_k - 2}{4n + 1/\sqrt{k}(2n-1)(D_k+2)}$$

et alors

$$\mathrm{Vol}_{\omega_k}\big(B_{\omega_k}(q_k, 1)\big) \leq \Big(\frac{4n}{D_k - 2} + \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{D_k+2}{D_k-2}\Big)\,\mathrm{Vol}(X)$$

et on voit que le membre de droite de cette inégalité tend vers zéro. Maintenant grâce au fait que la norme géométrique de chaque élément non-nul de la partie libre de $H_1(X, \mathbb{Z})$ est minoré uniformement, on obtient

$$\mathrm{Vol}_{\overline{\omega}_k}\Big(B_{\overline{\omega}_k}(\overline{q}_k, C)\Big) = \mathrm{Vol}_{\omega_k}\Big(B_{\omega_k}(q_k, C)\Big)$$

pour une certaine constante $C > 0$, où q_k est la projection de $\overline{q}_k$ sur X. Si la constante C est inférieure à 1, on en déduit donc que $\lim_{k\to\infty}\mathrm{Vol}_{\overline{\omega}_k}\Big(B_{\overline{\omega}_k}(\overline{q}_k, C)\Big) = 0$. Par l'inégalité de Bishop on obtient

$$\frac{\mathrm{Vol}_{\overline{\omega}_k}\Big(B_{\overline{\omega}_k}(\overline{q}_k, 1)\Big)}{\mathrm{Vol}_{\overline{\omega}_k}\Big(B_{\overline{\omega}_k}(\overline{q}_k, C)\Big)} \leq C_1$$

et donc $\lim_{k\to\infty}\mathrm{Vol}_{\overline{\omega}_k}\Big(B_{\overline{\omega}_k}(\overline{q}_k, 1)\Big) = 0$. Le cas $C > 1$ conduit à une conclusion similaire. Montrons maintenant que ceci reste vrai pour les métriques renormalisées $\overline{g}_k := \frac{r_k^2}{k}\overline{\omega}_k$. En effet, on a

$$\mathrm{Vol}_{\overline{g}_k}\Big(B_{\overline{g}_k}(\overline{q}_k, 1)\Big) = \frac{r_k^{2n}}{k^n}\,\mathrm{Vol}_{\overline{\omega}_k}\Big(B_{\overline{\omega}_k}(\overline{q}_k, \frac{\sqrt{k}}{r_k})\Big)$$

et en appliquant l'inégalité de Bishop–Gromov encore une fois, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_{\overline{\omega}_k}\Big(B_{\overline{\omega}_k}(\overline{q}_k, \frac{\sqrt{k}}{r_k})\Big) &\leq \frac{\int_0^{\frac{1}{r_k}} sh^{2n-1}t dt}{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}}} sh^{2n-1}t dt}\,\mathrm{Vol}_{\overline{\omega}_k}\Big(B_{\overline{\omega}_k}(\overline{q}_k, 1)\Big)\\ &\leq C\frac{k^n}{r_k^{2n}}\,\mathrm{Vol}_{\overline{\omega}_k}\Big(B_{\overline{\omega}_k}(\overline{q}_k, 1)\Big)\end{aligned}$$

car la suite r_k tend vers l'infini. En conclusion, pour la suite de métriques $\overline{g}_k$ on obtient

$$\mathrm{Vol}_{\overline{g}_k}\Big(B_{\overline{g}_k}(\overline{q}_k, 1)\Big) \leq C\,\mathrm{Vol}_{\overline{\omega}_k}\Big(B_{\overline{\omega}_k}(\overline{q}_k, 1)\Big)$$

et ainsi le volume des boules géodésiques de rayon 1 centrées dans $\overline{q}_k$ de $(\overline{X}, \overline{g}_k)$ tend vers zéro. L'intêret de cette observation est expliqué par le théorème suivant, dû à Cheeger–Colding:

Théorème 2.D.2.3(Cheeger–Colding)**.** *Soit* $\big(M_k, g_k, q_k\big)_k$ *une suite de variétés riemanniennes complètes de dimension* m*, telle que*

$$\mathrm{Vol}_{g_k}\big(B_{g_k}(q_k, 1)\big) \to 0 \text{ et } \mathrm{Ricci}_{g_k} \geq -g_k$$

Alors la dimension de Hausdorff de l'espace limite est au plus égale à $m - 1$*.*

On applique ce résultat à la suite $\big(\overline{X}, \overline{g}_k, \overline{q}_k\big)$; par le théorème 2.D.2.2 elle converge vers un espace euclidien de dimension au plus $2n - 1$.

Passons maintenant à la dernière étape de la démonstration, qui consiste à construire un monomorphisme de $\mathbb{Z}^{b_1(X)} \mapsto \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^m)$.

Si on note d_{g_k} la distance associée à la métrique $\overline{g}_k$, alors par les propriétés de la suite $(r_k)_k$ et l'hypothèse $ii)$ du théorème on obtient $d_{g_k}(\overline{q}_k, \gamma_j \overline{q}_k) \leq 1$ pour la famille de générateurs γ_j de la partie libre du $H_1(X, \mathbb{Z})$. Alors par le procédé de Gromov qu'on a expliqué dans le paragraphe 2.E, pour chaque entier positif k on peut trouver un sous–groupe d'indice fini Γ_k du groupe $H_1(X, \mathbb{Z})/T$ engendré par $\gamma_{1,k}, \cdots \gamma_{b_1,k}$ tels que:

$$d_{g_k}(\overline{q}_k, \gamma_{j,k}\overline{q}_k) \leq 4 \text{ et } d_{g_k}(\overline{q}_k, \gamma\overline{q}_k) \geq 2$$

pour chaque $\gamma \in \Gamma_k$ non-nul. Alors par le lemme d'isométrie de M. Gromov on construit un morphisme

$$\Psi : \mathbb{Z}^{b_1(X)} \to \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^m)$$

en associant à chaque générateur ρ_j de $\mathbb{Z}^{b_1(X)}$ la limite (d'une sous-suite) de la famille d'isométries $\gamma_{j,k}$ de $(\overline{X}, \overline{g}_k)$. Le fait que la norme géométrique en $\overline{q}_k$ de chaque élément non-trivial de Γ_k est minorée par 2 implique l'injectivité de Ψ et aussi que l'orbite de l'image de ce morphisme est discontinue en zéro (par les mêmes arguments que ceux utilisés dans le paragraphe 2.C.2).

En conclusion, sur $\mathbb{R}^m$ muni de la métrique plate agit un groupe d'isométries abélien libre noté Γ_∞ engendré par $\gamma_{1,\infty}, \cdots \gamma_{b_1(X),\infty}$ tels que: $||\gamma_{j,\infty}(0)|| \leq 5$ et $||\gamma(0)|| \geq 1$ pour tout $\gamma \neq Id$. Mais ceci implique $b_1(X) \leq m$, car le nombre de points de l'orbite de Γ_∞ en zéro dans une boule de rayon s est d'une part minoré par $Cs^{b_1(X)}$ et d'autre part il est de l'ordre de grandeur s^m. Par la théorie de Hodge on obtient l'inégalité $q(x) \leq n - 1$ et donc la preuve est terminée.

Remarque. On obtient la même conclusion dans le théorème 2.D.2.1 si on remplace l'hypothèse $|\gamma|_{k,p} \geq C$ par la condition (moins forte) suivante

$$N_p(k, 1) \max\{1/D_k, 1/\sqrt{k}\} \to 0$$

où $N_p(k, 1)$ est le cardinal de l'ensemble des éléments γ du $H_1(X, \mathbb{Z})$ tels que $d_{\omega_k}(\overline{p}, \gamma\overline{p}) \leq 1$. En effet, à des constantes près, le volume de la boule géodésique $B_{\overline{\omega}_k}(\overline{p}, 1)$ est majoré par la quantité ci-dessus.

Application.

Comme corollaire du théorème 2.D.2.1, on a:

Corollaire 2.D.2.4. *Soit X une variété complexe compacte munie d'une suite de métriques kählériennes qui satisfont les hypothèses i) et ii) du théorème 2.D.2.1. Alors si $b_1(X) = 2n$, la variété X est homéomorphe à un tore.*

Preuve. Par le théorème 2.D.2.1, la suite des diamètres $D_k = \mathrm{diam}(X, \omega_k)$ est uniformément bornée. Alors $(D_k/\sqrt{k})_k$ tend vers zéro, et par le théorème de Colding ci-dessous, la variété X est homéomorphe à un tore.

Théorème (Colding)**.** *Il existe une constante $\delta(m)$ telle que toute variété riemannienne (M, g) de dimension égale à m qui satisfait $\mathrm{Ricci}_g \geq -\delta(m)g$ et $b_1(M) = m$ est homéomorphe à un tore.*

2.D.3. Quelques remarques au sujet du morphisme d'Albanese d'une variété kählérienne compacte à classe de Ricci nef

On a vu dans les paragraphes précédents (2.D.1 et respectivement 2.D.2) que les 1–formes holomorphes des variétés kählériennes à classe de Ricci nef satisfont certaines propriétés "quantitatives" (notamment l'espace vectoriel qu'elles engendrent est de dimension inférieure à la dimension complexe de la variété et hormis le cas des tores cette dimension ne peut pas être maximale). On se propose dans cette dernière section de présenter quelques propriétés "qualitatives" des 1–formes holomorphes sur les variétés complexes compactes dont la classe anticanonique est numériquement effective. L'idée directrice est la suivante: supposons d'abord pour simplifier que X est une variété compacte munie d'une métrique riemannienne g à courbure de Ricci semi-positive. Alors si β est une 1-forme harmonique, la fonction $x \to |\beta|_{g,x}$ est constante, car la formule de Bochner implique le parallélisme des 1-formes. En général, dans le cas nef, si la courbure de Ricci est minorée par $-1/k$, on veut estimer la variation de $x \to |\beta|_{k,x}$ sur X, mais on peut seulement obtenir des estimations en moyenne. Si on fait des hypothèses d'uniformité sur la suite des métriques, on obtient le résultat principal de cette section qui est le suivant:

Théorème 2.D.3.1. *Soit X une variété complexe compacte munie d'une suite de métriques kählériennes $(\omega_k)_k$ telles que pour chaque entier positif k la métrique ω_k appartient à une classe de cohomologie fixée $\{\omega_1\}$, sa courbure de Ricci est minorée par $-1/k$ et le diamètre $D_k := \mathrm{diam}(X, \omega_k)$ est majoré par une constante qui ne dépend pas de k.*

Alors le morphisme d'Albanese de X est surjectif.

Démonstration. Commençons par fixer quelques notations et faire quelques rappels. Si g est une métrique riemannienne sur la variété M, soit λ_g la métrique induite par g sur le fibré unitaire en sphères SM. Alors l'application de projection de SM sur M devient une submersion riemannienne et pour toute fonction $f : SM \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a la formule de la "co-aire" suivante

$$\int_{SM} f d\lambda_g = \int_M \Big(\int_{v \in T_{p,m} |v|=1} f d\sigma \Big) dg$$

La mesure de Liouville $d\lambda_g$ est invariante par le flot géodésique de la métrique g; comme conséquence de ce fait on a la proposition suivante qui va nous permettre ensuite d'estimer la variation de la fonction $x \to |\beta|_{g,x}$ (voir aussi le preprint de T. Colding):

Proposition 2.D.3.2 *Soit $f : M \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, et r, t deux réels positifs. Alors pour tout $p \in M$ on a l'inégalité suivante*

$$(14) \qquad \int_{(x,v) \in SB_p(r)} |f\big(\exp_x(tv)\big) - f\big(x\big)| d\lambda_g(x,v) \leq t\alpha_m \int_{x \in B_p(r+t)} |df|_x dV_g(x)$$

où m est la dimension de M et α_m désigne le volume de la sphère unité d'un l'espace euclidien de dimension égale à m. On note $SB_p(r) = SM|_{B_p(r)}$.

Preuve de la proposition. Pour chaque réel positif t on a

$$\begin{aligned} \big|f\big(\exp_x(tv)\big) - f\big(x\big)\big| &= \Big| \int_0^t \frac{d}{d\tau} \big(f(\exp_x(\tau v)\big) d\tau \Big| = \\ &= \Big| \int_0^t df_{\exp_x(\tau v)} \Big(\frac{d}{d\tau} \exp_x(\tau v) \Big) d\tau \Big| \leq \int_0^t |df|_{\exp_x(\tau v)} d\tau \end{aligned}$$

car $\big|\frac{d}{d\tau} \exp_x(\tau v)\big| = 1$ et par suite

$$\begin{aligned} \int_{(x,v) \in SB_p(r)} &|f\big(\exp_x(tv)\big) - f\big(x\big)| d\lambda_g(x,v) \leq \\ &\leq \int_0^t \int_{(x,v) \in SB_g(p,r)} |df|_{\exp_x(\tau v)} d\lambda_g(x,v) \, d\tau. \end{aligned}$$

Considérons pour chaque $\tau > 0$ l'application $\Phi_\tau : SB_g(p,r) \to SB_g(p, r+\tau)$ donnée par le flot géodésique, i.e.

$$\Phi_\tau(x,v) = \Big(\exp_x(\tau v), d/d\tau\big(\exp_x(\tau v)\big) \Big)$$

Compte tenu du fait que $\Phi_\tau^* d\lambda_g = d\lambda_g$, par un changement de variable on obtient

$$\int_0^t \int_{(x,v) \in SB_g(p,r)} |df|_{\exp_x(\tau v)} d\lambda_g(x,v) \, d\tau \leq \alpha_m \int_0^t \int_{x \in B_g(p,r+\tau)} |df|_x dV_g(x) \, d\tau.$$

Mais le terme de droite de l'inégalité précédente est majoré par

$$t\alpha_m \int_{x\in B_g(p,r+t)} |df|_x dV_g(x)$$

et ceci démontre la proposition.

Considérons maintenant la fonction suivante: $f(x) = |\beta|_x^2$ où β est une 1–forme différentielle quelconque et la notation $|\cdot|_x$ désigne la norme ponctuelle induite par g sur l'espace cotangent en x; par la proposition 2.G.1.1 on obtient

$$\begin{aligned}\int_{(x,v)\in SB_p(r)} &\big||\beta|^2_{\exp_x(tv)} - |\beta|_x^2\big| d\lambda_g(x,v) \leq \\ &\leq 2t\alpha_m \int_{x\in B_p(r+t)} |\langle\nabla\beta,\beta\rangle_x|\, dV_g(x)\end{aligned}$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita de la métrique g. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\int_{x\in B_p(r+t)} |\langle\nabla\beta,\beta\rangle_x|\, dV_g(x) \leq \Big(\int_{x\in B_p(r+t)} |\nabla\beta|_x^2\, dV_g(x) \int_{x\in B_p(r+t)} |\beta|_x^2\, dV_g(x)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

En conclusion on en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{(x,v)\in SB_p(r)} &\big||\beta|^2_{\exp_x(tv)} - |\beta|_x^2\big|\, d\lambda_g(x,v) \leq \\ &\leq 2t\alpha_m \Big(\int_{x\in B_p(r+t)} |\nabla\beta|_x^2\, dV_g(x) \int_{x\in B_p(r+t)} |\beta|_x^2\, dV_g(x)\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Prenons dans l'inégalité ci-dessus $r := \mathrm{diam}(M,g)$; on obtient pour toute 1–forme différentielle β l'inégalité

$$\begin{aligned}\int_{(x,v)\in SM} &\Big||\beta|^2_{\exp_x(tv)} - |\beta|_x^2\Big| d\lambda_g(x,v) \leq \\ &2\alpha_m t\Big(\int_{x\in M} |\nabla\beta|_x^2\, dV_g(x) \int_{x\in M} |\beta|_x^2\, dV_g(x)\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Maintenant on intègre par rapport à t l'inégalité ci-dessus de 0 à $D := \mathrm{diam}(M,g)$ et on obtient

$$\begin{aligned}\int_{(x,v)\in SM} \int_0^D &\Big||\beta|^2_{\exp_x(tv)} - |\beta|_x^2\Big|\, dt\, d\lambda_g(x,v) \leq \\ &\leq \alpha_m D^2\Big(\int_{x\in M} |\nabla\beta|_x^2\, dV_g(x) \int_{x\in M} |\beta|_x^2\, dV_g(x)\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Voyons à présent ce que cela donne en termes de notre suite ω_k. On note $S_k(X)$ le fibré unitaire de la variété (X,ω_k), $|\cdot|_k$ la norme sur $\Lambda^* T_X^*$ induite par ω_k et ∇_k

la connexion de Levi–Civita de la métrique ω_k. Observons d'abord que la norme L^2 globale de toute forme holomorphe β notée

$$\|\beta\|_{L^2}^2 := \int_X |\beta|_{x,k}^2 \, dV_{\omega_k}(x)$$

est indépendante de k parce que

$$\int_X |\beta|_{x,k}^2 dV_{\omega_k}(x) = i\int_X \beta \wedge \overline{\beta} \wedge \omega_k^{n-1} = i\int_X \beta \wedge \overline{\beta} \wedge \omega_1^{n-1}$$

(on a utilisé le fait que toutes les ω_k sont cohomologues). De plus, pour toute 1–forme différentielle β on a la formule de Bochner

$$\Delta_k(\beta) = \nabla_k^* \nabla_k \beta + \rho_k(\beta)$$

où Δ_k est l'opérateur de Laplace-Beltrami de la métrique ω_k qui agit sur les 1–formes, et où les valeurs propres de l'opérateur ρ_k sont les mêmes que celles de la courbure de Ricci de ω_k, donc minorées par $-1/k$. Maintenant la métrique ω_k est kählérienne, donc pour toute 1–forme holomorphe β on obtient $\Delta_k(\beta) = 0$. En conclusion, pour toute 1–forme holomorphe β, la formule de Bochner ci-dessus implique

$$\int_{x\in X} |\nabla_k \beta|_{k,x}^2 \, dV_{\omega_k}(x) \leq \frac{1}{k}\|\beta\|_{L^2}^2.$$

Donc pour chaque entier positif k on obtient

$$\int_{(x,v)\in S_k(X)} \int_0^D \Big| |\beta|_{k,\exp_{k,x}(tv)}^2 - |\beta|_{k,x}^2 \Big| dt \, d\lambda_k(x,v) \leq \frac{\alpha_{2n} D^2}{\sqrt{k}} \|\beta\|_{L^2}^2.$$

D'après la formule de la co-aire qu'on a énoncée au début de la preuve, l'inégalité ci-dessus s'écrit

$$\int_{x\in X} \Big(\int_{v\in T_xX, |v|_k=1} \int_0^D \Big| |\beta|_{k,\exp_{k,x}(tv)}^2 - |\beta|_{k,x}^2 \Big| dt \, d\sigma(v) \Big) dV_{\omega_k}(x) \leq \frac{\alpha_{2n} D^2}{\sqrt{k}} \|\beta\|_{L^2}^2.$$

Maintenant la classe de cohomologie de ω_k est constante et donc le volume de X par rapport à ω_k l'est aussi. Alors l'inégalité ci-dessus implique l'existence d'un ouvert $\Lambda_k(\beta) \subset X$ tel que

1) Le volume de $\Lambda_k(\beta)$ satisfait $\mathrm{Vol}_{\omega_k}\big(\Lambda_k(\beta)\big) \geq (1 - 1/k^{\frac{1}{4}})\,\mathrm{Vol}(X)$.

2) Pour tout point $p \in \Lambda_k(\beta)$ on a

$$\int_{v\in T_pX, |v|_k=1} \int_0^D \Big| |\beta|_{k,\nu_v(t)}^2 - |\beta|_{k,p}^2 \Big| dt \, d\sigma(v) \leq \frac{\alpha_{2n} D^2}{k^{1/4}} \|\beta\|_{L^2}^2.$$

Évaluons à présent la norme L^2 de la forme β. On a

$$\|\beta\|^2_{L^2} = \int_{x\in X} |\beta|^2_{k,x} dV_{\omega_k}(x) \le |\beta|^2_{k,p} \operatorname{Vol}(X) + \int_{x\in X} \Big| |\beta|^2_{k,x} - |\beta|^2_{k,p} \Big| dV_{\omega_k}(x).$$

Pour majorer le second terme du membre de droite de cette inégalité on travaille dans des coordonnées normales en p. On obtient ainsi par un changement de variable

$$\int_{x\in X} \Big| |\beta|^2_{k,x} - |\beta|^2_{k,p} \Big| dV_{\omega_k}(x) \le$$
$$\le \int_{v\in T_pX, |v|_k=1} \int_0^D \Big| |\beta|^2_{k,\exp_p(tv)} - |\beta|^2_{k,p} \Big| \overline{\theta_k(t,v)} dt\, d\sigma(v).$$

Mais par l'inégalité 2 du 2.A.2, le jacobien $\overline{\theta_k(t,v)}$ est uniformément borné par une constante $C = C(D,n)$. Si le point p est dans $\Lambda_k(\beta)$, on obtient

$$\|\beta\|^2_{L^2} \le |\beta|^2_{k,p} \operatorname{Vol}(X) + \frac{C(D,n)}{k^{1/4}} \|\beta\|^2_{L^2}$$

pour toute 1–forme holomorphe β.

En conclusion, il existe un rang $k_0 > 0$ tel que pour tout $k \ge k_0$ on ait

$$\|\beta\|^2_{L^2} \le 2 \operatorname{Vol}(X) |\beta|^2_{k,p} \tag{15}$$

pour toute 1–forme holomorphe β et tout point $p \in \Lambda_k(\beta)$.

On définit les sous–ensembles de X suivants

$$\begin{aligned} \mathcal{ND}\big(X,(\omega_k)_k\big) &:= \{p\in X/ \text{ pour tout voisinage } V \text{ du point } p \text{ on a} \\ &\qquad \operatorname{Vol}_{\omega_{k_m}}(V) > C(V) > 0 \text{ pour une sous-suite } (k_m)_m\} \\ \mathcal{D}\big(X,(\omega_k)_k\big) &:= \{p\in X/ \text{ il existe un voisinage } W \text{ du point } p \\ &\qquad \text{telle que } \lim_{k\to\infty} \operatorname{Vol}_{\omega_k}(W) = 0\}. \end{aligned}$$

Il est clair que $X = \mathcal{ND}\big(X,(\omega_k)_k\big) \bigcup \mathcal{D}\big(X,(\omega_k)_k\big)$ et que cette réunion est disjointe. On montre ensuite que si $q(X) \ne 0$, alors l'ensemble $\mathcal{ND}\big(X,(\omega_k)_k\big)$ contient au moins un point non-critique pour l'application d'Albanese de X.

Comme les métriques $(\omega_k)_k$ sont toutes cohomologues, on a

$$\int_X \omega_1 \wedge \omega_k^{n-1} = \operatorname{Vol}(X)$$

et donc si on note $\lambda_j^k(x)$ les valeurs propres de ω_k par rapport à ω_1 en un point x quelconque, l'égalité ci-dessus s'écrit

$$\int_X \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j^k(x)} dV_{\omega_k} = n \operatorname{Vol}(X). \tag{16}$$

En utilisant à nouveau le fait que le volume de la variété X par rapport à ω_k est constant, la relation (16) entraîne l'existence d'une suite de sous-ensembles $(U_k)_k$ de X telles que pour chaque entier k on ait $\mathrm{Vol}_{\omega_k}(U_k) \geq \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(X)$ et également $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j^k(p)} \leq 2n$ pour tout point $p \in U_k$. Donc pour chaque point $p \in U_k$ on a $\lambda_j^k(p) \geq \frac{1}{2n}$.

Pour toute 1–forme holomorphe β, considérons la suite des ouverts $U_k(\beta) := U_k \cap \Lambda_k(\beta)$. Alors pour tout k supérieur à un certain rang k_1 (indépendant de β) on a $\mathrm{Vol}_{\omega_k}\big(U_k(\beta)\big) \geq \frac{1}{4}\mathrm{Vol}(X)$ (par la propriété 1 de $\Lambda_k(\beta)$). Si on note $k_2 := \max(k_0, k_1)$ on observe que

$$\overline{\bigcup_{k \geq k_2} U_k(\beta)} \cap \mathcal{ND}\big(X, (\omega_k)_k\big) \neq \emptyset \tag{17}$$

car sinon $\overline{\bigcup_{k \geq k_2} U_k(\beta)}$ est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{D}\big(X, (\omega_k)_k\big)$ et grâce à la compacité de X, on aurait

$$\lim_{k \to \infty} \mathrm{Vol}_{\omega_k}\big(\overline{\bigcup_{m \geq k_2} U_m(\beta)}\big) = 0.$$

Mais par ailleurs $\mathrm{Vol}_{\omega_k}\big(\overline{\bigcup_{m \geq k_2} U_m(\beta)}\big) \geq \mathrm{Vol}_{\omega_k}\big(U_k(\beta)\big) \geq 1/4\,\mathrm{Vol}(X)$ pour tout $k \geq k_2$, contradiction.

Prenons donc un point q dans l'intersection (17). Alors il existe une suite de points $q_m \in U_{k_m}(\beta)$ qui convergent vers q. Par la relation (15) et le fait qu'en tous les points de U_k les valeurs propres λ_j^k sont minorées par $1/2n$, on obtient

$$\|\beta\|_{L^2} \leq 2\,\mathrm{Vol}(X)|\beta|_{k_m, q_m} \leq 3n\,\mathrm{Vol}(X)|\beta|_{1, q_m}$$

et par passage à la limite on obtient

$$\|\beta\|_{L^2} \leq 3n\,\mathrm{Vol}(X) \sup_{z \in \mathcal{ND}\left(X, (\omega_k)_k\right)} |\beta|_{1,z} \tag{18}$$

Pour le reste de la preuve, supposons qu'il existe des 1–formes holomorphes non-identiquement nulles sur X (sinon, la surjectivité de l'application d'Albanese ne pose pas de problèmes majeurs). Alors par l'inégalité (18) on en déduit que l'ensemble $\mathcal{ND}\big(X, \omega_k)_k\big)$ contient au moins un point p_0 non-critique pour α_X.

On démontre dans la proposition 2.D.3.5 que le fait que p_0 est non-critique entraîne la non-dégénérescence locale en p_0 de la suite de métriques, transversalement au fibres du morphisme d'Albanese. Ceci signifie la chose suivante:

Définition 2.D.3.3 *La suite de métriques $(\omega_k)_k$ est dite non-dégénérée localement en p_0 dans les directions transverses aux fibres du morphisme d'Albanese, s'il existe* *un voisinage U de p_0 et une constante $C > 0$ telle que pour tout point $p \in U$ et tout vecteur $v \in T_pX$ orthogonal à* $\ker(d\alpha_{X,p})$ *par rapport à la métrique* ω_1 *on ait*

$$|v|_{\omega_k} \geq C|v|_{\omega_1}.$$

Alors on voit facilement que cette propriété de non-dégénérescence entraine l'assertion suivante: pour toute 1–forme holomorphe globale β, tout point $p \in U$ et tout $k \geq 1$ on ait

$$|\beta|_{k,p} \leq C|\beta|_{1,p}.$$

En effet, pour un point $p \in U$ on note H_p le sous-espace de l'espace tangent holomorphe en p, égal à l'orthogonal par rapport à ω_1 du noyau de la différentielle de α_X en p. On peut prendre pour chaque k des coordonnées locales en p, soient $z_{1,k}, \ldots, z_{n,k}$, telles que les $m = m(p)$ premiers vecteurs parmi $\left(\dfrac{\partial}{\partial z_{j,k}}\right)$ forment une base orthonormale par rapport à ω_1 et orthogonale par rapport à ω_k de l'espace H_p, et telles que les autres vecteurs $\dfrac{\partial}{\partial z_{m+j,k}}$ soient dans le noyau de $d\alpha_{X,p}$. La propriété 2.D.3.3 de la suite de métriques implique

$$\lambda_j^k(p) = \Big|\frac{\partial}{\partial z_{k,j}}\Big|^2 \geq C_1$$

pour tout $j = 1 \ldots m$ et $p \in U$. Par ailleurs toute 1–forme holomorphe globale β s'écrit en p de la façon suivante

$$\beta_p = \sum_{j=1}^{m} \beta_{j,k} dz_{j,k}$$

et comme les valeurs propres $\lambda_j^k(q)$ pour $j = 1 \ldots m$ sont minorées par la constante C_1, on obtient

$$|\beta|_{k,p} \leq C_1^{-1/2}|\beta|_{1,p}.$$

En conclusion, quitte à admettre pour l'instant la proposition 2.D.3.5, on a le corollaire suivant:

Corollaire 2.D.3.4. *Pour toute 1–forme holomorphe β il existe une suite $\Lambda_k(\beta)$ d'ouverts de X tels que:*

1) Pour tout entier positif k on a $\mathrm{Vol}_{\omega_k}\big(\Lambda_k(\beta)\big) \geq (1 - 1/k^{1/4})\,\mathrm{Vol}(X)$.

2) Pour chaque $p \in \Lambda_k(\beta) \cap U$ on a

$$\|\beta\|_{L^2}^2 \leq C|\beta|_{1,p}^2$$

si $k \geq k_2$.

Si l'application d'Albanese α_X n'est pas surjective, alors il existe une 1–forme holomorphe β non identiquement nulle, telle que $\beta_{p_0} = 0$. Considérons la suite $\Lambda_k(\beta)$ donnée par le corollaire ci-dessus. L'appartenence de p_0 à l'ensemble $\mathcal{ND}\big(X,(\omega_k)_k\big)$, implique l'existence d'une suite de points $p_m \in \Lambda_{k_m}(\beta)\cap U$ convergent vers p_0. En effet, considérons une suite décroissante $(U_m)_m$ de voisinages de p_0 dont l'intersection est exactement p_0. Comme $p \in \mathcal{ND}\big(X,(\omega_k)_k\big)$, pour chaque m on a $\mathrm{Vol}_{\omega_k}(U_m) \geq c(m) > 0$ si k appartient à une sous-suite non-bornée des entiers positifs, et compte tenu du point 1) du corollaire 2.D.3.3, il existe bien un rang $k_m \geq k_2$ tel que $\Lambda_{k_m}(\beta) \cap U_m \neq \emptyset$. Il suffit de prendre alors p_m dans cette intersection.

Par le point 2) du corollaire ci-dessus on obtient

$$\|\beta\|^2_{L^2} \leq C|\beta|^2_{1,p_m}.$$

Quand m tend vers l'infini, le membre de droite de cette inégalité tend vers zéro, ce qui entraîne $\beta = 0$, contradiction.

Remarque 1. Il se peut que l'ensemble $\mathcal{ND}\big(X,(\omega_k)_k\big)$ consiste en exactement un point. En effet, regardons l'espace projectif $(\mathbb{P}^n,\omega_k)$, muni de la métrique telle que

$$\pi^*\omega_k = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\big(\frac{1}{k}|z_0|^2 + |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2\big)$$

où $\pi : \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{P}^n$ est la projection canonique.

Alors l'ensemble $\mathcal{ND}\big(X,(\omega_k)_k\big)$ contient seulement le point $q = [1:0:\ldots:0]$, car ω_k^n tend vers la distribution de Dirac δ_q quand k tend vers l'infini.

Remarque 2. Si $\mathcal{ND}\big(X,(\omega_k)_k\big)$ contient un ouvert U, alors le diamètre de (X,ω_k) est uniformement borné. Pour vérifier cette affirmation, rappelons que l'équation qui donne la suite $(\omega_k)_k$ est

$$\omega_k^n = \lambda_k \exp(\frac{1}{k}\varphi_k - f_k)\omega^n$$

où λ_k est la constante de renormalisation, telle que $\max_X(f_k) = \max_X(\varphi_k) = 0$ (voir 2.C.2.2). On peut supposer que l'ouvert U est disjoint de la variété des zéros de l'idéal de Nadel associée à la suite $(f_k)_k$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que $\displaystyle\int_U \exp(-f_k)\,dV_\omega \leq C$ pour tout entier positif k (voir [Na]) et donc

$$0 < C(U) \leq \int_U \omega_k^n = \lambda_k \int_U \exp(1/k\varphi_k - f_k)\,dV_\omega \leq \lambda_k \int_U \exp(-f_k)\,dV_\omega \leq C\lambda_k.$$

Donc l'existence d'un ouvert $U \subset \mathcal{ND}\big(X,(\omega_k)_k\big)$ permet de minorer la constante λ_k; le fait que $\mathrm{diam}(X,\omega_k) \leq D$ en découle maintenant exactement comme dans le paragraphe 2.C.2.2..

En général, on ne peut pas minorer λ_k, même si la suite des potentiels $(f_k)_k$ est choisi de manière optimale. Dans l'exemple 2.C.3, un calcul simple montre que

λ_k est de l'ordre de grandeur $1/k$. Dans cet exemple, le volume de (X, ω_k) est "concentré" dans le diviseur $z_2 = 0$.

On démontre maintenant le résultat suivant, dont on a eu besoin dans la preuve du théorème précédent:

Proposition 2.D.3.5 *Soit X une variété complexe compacte munie d'une suite de métriques kählériennes $(\omega_k)_k$ telles que pour tout entier positif k on a*

$$\operatorname{diam}(X, \omega_k) \leq D, \ \operatorname{Vol}_{\omega_k}(X) \geq v, \ \operatorname{Ricci}_{\omega_k} \geq -\delta^2 \omega_k.$$

et soit p_0 un point qui n'est pas critique pour l'application d'Albanese de X.

Alors la suite $(\omega_k)_k$ est non-dégénérée localement en p_0 transversalement aux fibres du morphisme d'Albanese de X.

Preuve. La preuve présentée ci-dessous doit beaucoup aux remarques de S. Gallot, qui ont permis de simplifier nos arguments initiales.

Commençons par l'observation suivante, qui est une conséquence de l'inégalité de Sobolev de S. Gallot. Dans l'hypothèse ci-dessus, pour toute 1–forme holomorphe β et tout $k \geq 1$ on a

$$|\beta|_{k,p} \leq C \|\beta\|_{L^2} \tag{19}$$

en tout point $p \in X$, où C est une constante qui ne dépend pas de la suite de métriques. Pour ceci, remarquons d'abord que par l'inégalité de Kato (voir par exemple [HSU]) et la minoration de la courbure de Ricci on a

$$|\beta|_{k,p} \Delta_k(|\beta|_{k,p}) \leq \operatorname{Re}\langle \nabla_k^* \nabla_k \beta, \beta \rangle_{k,x} \leq \frac{1}{k} |\beta|_{k,x}^2$$

et par conséquence on obtient $\Delta_k(|\beta|_{k,p}) \leq \dfrac{1}{k} |\beta|_{k,p}$ pour tout entier positif k et tout point $p \in X$. Rappelons maintenant le résultat de S. Gallot (voir [Ga]):

Théorème (Gallot). *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension m, telle que* $\operatorname{Ricci}_g \geq -(m-1)\delta^2 g$, $\operatorname{Vol}_g(M) = V$ *et* $\operatorname{diam}(M, g) \leq D$. *Alors pour toute fonction positive f qui satisfait $\Delta(f) \leq \delta^2 f$ presque partout sur M on a l'estimation*

$$|f|_{L^\infty} \leq \frac{1}{V}\big(1 + \eta_D(\delta)\big) \|f\|_{L^2}$$

où η_D est une fonction continue qui tend vers zéro quand δ tend vers zéro.

Par l'inégalité de Kato et le théorème de Gallot ci-dessus appliqués aux variétés (X, ω_k), on en déduit l'inégalité (19), où la constante C peut être choisi (par exemple) $2/\operatorname{Vol}(X)$.

Soit p_0 un point non-critique quelconque pour α_X; soit également U un voisinage du point p_0 qui n'intersecte pas l'ensemble critique de α_X. Avec les notations précedents, pour tout $v \in H_p$ tel que $|v|_1 = 1$ on a $|d\alpha_{X,p}(v)| \geq \delta$ pour une certaine constante $\delta = \delta(U) > 0$. Par l'inégalité (19), on obtient $|d\alpha_X(v)| \leq C|v|_k$ pour une certaine constante C. En resumé, pout tout vecteur $v \in H_p$, de norme 1 par rapport à ω_1 on a

$$|v|_k \geq C_1 \tag{20}$$

pour une (autre) constante C_1 uniforme par rapport à k et $p \in U$. Ceci achève la preuve de la proposition 2.D.3.5.

Remarque 3. Sous les hypothèses du théorème 2.D.3.1, on obtient l'information suivante concernant la dégénérescence de la suite ω_k: si $q(X) \neq 0$, alors l'ensemble

$$\mathcal{D}_n(X) := \{p \in X / \lim_{k\to\infty} \lambda_j^k(p) = 0 \text{ pour tout } j = 1, \ldots, n\}.$$

est contenu dans un sous-ensemble analytique de X. En effet, soit $p \in \mathcal{D}_n(X)$; d'après l'inégalité (19), pour toute 1–forme β la relation suivante

$$|\beta(v)| \leq C(\beta)|v|_{k,p}$$

a lieu pour tout vecteur v dans l'espace tangent en p. Mais l'appartenance de p à $\mathcal{D}_n(X)$ fait que le membre de droite de cette inégalité tend vers zéro quand k tend vers l'infini. Donc $\beta_p = 0$ et par suite $\mathcal{D}_n(X)$ est un sous-ensemble de l'ensemble critique de α_X.

Références:

[Am] Amoros J., Burger M., Corlette K., Kotschick D., Toledo D.,–*Fundamental groups of compact kähler manifolds*, AMS, Vol 44.

[An] Anderson M.T., –*Short geodesics and gravitational instantons*, J. Diff. Geom. **31** (1990).

[Au] Aubin, T.,– *Equations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes*, Bull. Sci. Math. **102** (1978), 63-95.

[Ca2] Campana F.,– *On twistor space of the class $\mathcal{C}$*, J. Diff. Geom., **33** (1991).

[CCo1] Cheeger, J., Colding, T.– *Lower bounds on Ricci curvature and almost rigidity of warped products* , Ann. Math. **144** (1996), 189-237.

[CCo2] Cheeger J., Colding T.H. —*On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below; 1*, to appear in J. Diff. Geom.

[ChE] Cheeger, J., Ebin D.G.– *Comparison theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland, Amsterdam 1975.

item**[ChG]** Cheeger, J., Gromoll, D. — *The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature*, J. Diff. Geom. **6** (1971), 119–128.

[CKM] Clemens, H., Kollár, J., Mori, S. — *Higher dimensional complex geometry*, Astérisque **166** (1988).

[Co] Colding T.H. —*Ricci curvature and volume convergence*, Preprint.

[DPS1] Demailly, J.-P., Peternell, T., Schneider, M.– *Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles*, J. Alg. Geometry, **3** (1994), 295-345.

[DPS2] Demailly, J.-P., Peternell, T., Schneider, M.– *Kähler manifolds with numerically effective Ricci class*, Comp. Math. **89** (1993), 217-240.

[DPS3] Demailly, J.-P., Peternell, T., Schneider, M.– *Compact Kähler manifolds with hermitian semipositive anticanonical bundle*, Comp. Math.,**101** (1996).

[Fu] Fujiki A., — *On automorphisms groups of compact kähler manifolds*, Invent. Math. **44** (1978).

[FY] Fukaya K., Yamaguchi T., —*The fundamental group of almost nonnegatively curved manifolds*, Ann. of Math. **136** (1992).

[Ga] Gallot S., –*A Sobolev inequality and some geometric applications*, Spectra of riemannian manifolds, Kaigai Publications, Tokio, 1983.

[Gr1] Gromov, M. — *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Cours rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu, Textes Mathématiques, 1. Paris: Cedic/Fernand Nathan, Vol. VII, (1981), 152 p.

[Gr2] Gromov, M. —*Groups of polynomial growth and expanding maps, Appendix by J. Tits*, Publ. I.H.E.S. **53** (1981).

[HSU] Hess H., Schrader R., Uhlenbrock D. A. — *Kato's inequality and the spectral distribution of laplacians on compact riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. bf 15 (1980), 27-37.

[H] Hirsch K.A.,– *Infinite soluble groups*, Proc. Lond Math. Soc. **44** (1938).

[Ko] Kobayashi, S. – *On compact Kähler manifolds with positive Ricci tensor*, Ann. of Math. **74** (1961), 570-574.

[Li1] Lichnerowicz, A. — *Variérés kählériennes et première classe de Chern*, J. Diff. Geom. **1** (1967), 195–224

[Li2] Lichnerowicz, A. — *Variétés kählériennes à première classe de Chern non négative et variétés riemanniennes à courbure de Ricci généralisée non négative*, J. Diff. Geom. **6** (1971), 47–94.

[Mi] Milnor, J.– *A note on curvature and fundamental groups*, J. Diff. Geom. **2** (1968), 1-7.

[Na] Nadel A.M.– *Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature*, Ann. Math. **132** (1990), 189-237.

[ShY] Schoen R., Yau S.-T. — *Lectures on differential geometry*, Conference proceedings and lecture notes in geometry and topology, edited by N. Hitchin, R. Kirbi, J. Wolf.

[S] Stallings J.,– *Homology and central series of groups*, Journal of Algebra, **2** (1965).

[Zh] Zhang Qi. — *On projective manifolds with nef anticanonical bundle*, à paraître dans J. für die reine und angewandte Math.

[Y] Yun G., —*A note on the fundamental groups of manifolds with almost nonnegative curvature*, Proc. Amer. Math Soc. **125** (1997).

RÉSUMÉ

L'objet principal de cette thèse est l'étude des fibrés en droites numériquement effectifs sur les variétés complexes compactes et les propriétés des variétés kählériennes compactes à classe de Ricci nef.

Dans une première partie, nous démontrons que la notion d'effectivité numérique (au sens métrique) est invariante par images inverses de morphismes surjectives entre variétés complexes compactes. Ceci implique l'équivalence des deux formulation de l'effectivité numérique – au sens métrique et respectivement au sens des courbes – dans le cadre des variétés de Moishezon. En utilisant des techniques analytiques de J.-P. Demailly, nous donnons deux caractérisations de cette notion en termes de restrictions à de sous-variétés analytiques. Dans la seconde partie, on s'intéresse surtout à des propriétés du groupe fondamental et des 1-formes holomorphes des variétés kählériennes compactes à classe de Ricci nef, en s'appuyant sur les outils de la géométrie des espaces à courbure de Ricci minorée.

Ainsi, en combinant des techniques de Demailly, Peternell et Schneider avec une version du "lemme de Margulis" démontré par Cheeger-Colding, nous montrons la presque-nilpotence du groupe fondamental des variétés kählériennes compactes à classe de Ricci nef. Pour certains classes de telles variétés, on peut nettement améliorer ce résultat et démontrer que leur groupe fondamental est presque abélien.

Concernant les 1-formes holomorphes, on démontre que la dimension de l'espace vectoriel qu'elles engendrent est majoré par la dimension de la variété. Nous obtenons également des information "qualitatives" pour les 1-formes holomorphes, en estimant la variation en moyenne de leur norme. Comme application, on donne une réponse partielle à une conjecture de Demailly, Peternell et Schneider.

MOTS-CLÉS

Variété complexe, variété kählérienne, 1-forme holomorphe, groupe fondamental, morphisme d'Albanese, courbure de Ricci, inégalité de Bishop-Gromov, fibré numériquement effectif, critère de positivité.

CLASSIFICATION MATHÉMATIQUE

14J60, 58A25, 32J25, 32C17, 53C20, 53C23.