

Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier (Grenoble I)

Théorèmes d'annulation pour la cohomologie des fibrés vectoriels amples

Laurent Manivel

préparée à l'Institut Fourier
laboratoire de mathématiques, UMR 5582 du C.N.R.S.

soutenue à Grenoble le mardi 9 juin 1992 devant le jury :

Président : Joseph Le Potier (Université de Paris VII)
Examineurs : Michel Brion (Université Joseph Fourier)
Jean-Pierre Demailly (Université Joseph Fourier), dir. thèse
Paul Gauduchon (Collège de France)
Alain Lascoux (Université de Paris VII)

Mes remerciements vont d'abord à Jean-Pierre Demailly, dont les conseils, les critiques, l'enthousiasme aussi, m'auront été précieux tout au long de ces dernières années. Avoir supporté, stoïquement, les maux de tête que lui aura parfois occasionné la lecture de cette thèse, appelle toute ma reconnaissance !

Je remercie sincèrement Joseph Le Potier de présider le jury, et Paul Gauduchon d'y participer, quelques années après avoir, très amicalement, accompagné mes tous premiers pas dans la recherche mathématique.

Michel Brion et Alain Lascoux ont plus d'une fois éclairé ma lanterne, et cette thèse aura, je crois, beaucoup profité de leurs remarques : je leur suis reconnaissant d'avoir eux aussi accepté de se joindre au jury.

Enfin, je suis redevable à Arlette Guttin-Lombard d'avoir mis la dernière main à ce texte, et ce avec la plus grande gentillesse.

Introduction

1.

De nombreux problèmes de géométrie algébrique font intervenir des théorèmes d'annulation pour la cohomologie des fibrés vectoriels holomorphes. L'archétype en est certainement le théorème de Kodaira-Nakano pour les fibrés en droites amples, dont se déduisent la plupart des résultats connus pour les fibrés vectoriels amples de rang arbitraire. Parmi les plus fameux de ceux-ci, les théorèmes de Griffiths et de Le Potier s'appliquent respectivement aux puissances symétriques et extérieures d'un fibré vectoriel holomorphe E , ample, de rang d , sur une variété complexe compacte X de dimension n :

- (1) $H^{n,q}(X, S^k E \otimes \det E) = 0$ si $q > 0$,
- (2) $H^{p,q}(X, E) = 0$ si $p + q \geq n + d$,
- (3) $H^{p,q}(X, \wedge^k E) = 0$ si $p + q > n + k(d - k)$,
- (4) $H^{n,q}(X, \wedge^k E) = 0$ si $q > d - k$.

Le premier de ces énoncés a été publié par Griffiths en 1969, les trois suivants par Le Potier en 1975 et 1977. Plus récemment, en 1988, Jean-Pierre Demailly a établi différents théorèmes concernant la cohomologie d'un fibré vectoriel associé au fibré E , de poids positif décroissant a quelconque, tensorisé par une puissance assez grande de son déterminant: sous les mêmes hypothèses que précédemment,

- (5) $H^{n,q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l) = 0$ si $q > 0$ et $l \geq h(a)$,
- (6) $H^{p,q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l) = 0$ si $p + q > n$ et $l \geq d - 1 + n - p$,

où $h(a)$ est le nombre de composantes non nulles du poids a .

Si le premier de ces énoncés est une conséquence directe du théorème de Griffiths, il n'en est pas de même du second, dont la démonstration nécessite une étude détaillée de la suite spectrale, dite de Borel-Le Potier, associée aux différentes variétés de drapeaux du fibré vectoriel E , et aux fibrés en droites homogènes canoniquement définis sur ces variétés.

Se posait en conséquence la question de l'existence d'une éventuelle dégénérescence de cette suite spectrale. Peternell, Le Potier et Schneider ayant montré qu'en général, on ne pouvait s'attendre à une dégénérescence en E_1 , Jean-Pierre Demailly suggéra que cette dégénérescence pourrait, au moins dans le cas des fibrés amples, intervenir en E_2 : résultat dans lequel on aurait pu voir un analogue de la dégénérescence en E_2 , établie par Blanchard, de la suite spectrale de Leray pour les submersions kähleriennes. Notre premier objectif fut donc de vérifier cette dégénérescence dans le cas, relativement simple, des grassmanniennes.

2.

La grassmannienne, variété compacte homogène sous l'action du groupe linéaire, possède la particularité, parmi les variétés de drapeaux, d'avoir un fibré tangent irréductible sous l'action du groupe parabolique associé, et dont les puissances extérieures peuvent se décomposer en somme holomorphe de produits tensoriels de fibrés associés aux fibrés tautologique et quotient naturellement définis sur cette variété. Ceci permet par exemple d'expliciter la cohomologie de Dolbeault de n'importe quel fibré associé à ces fibrés quotient et tautologique, selon une méthode diagrammatique essentiellement due à Snow (qui se restreint cependant au cas des puissances du déterminant de ce fibré), et qui permet de se ramener à des problèmes de pure combinatoire: une présentation détaillée de cette méthode est donnée au premier chapitre de cette thèse.

On peut ainsi retrouver le théorème de Kodaira pour les puissances positives du déterminant du fibré quotient, obtenir un énoncé analogue pour ses puissances symétriques, et vérifier l'optimalité des théorèmes de Griffiths, Le Potier, et du premier résultat de Demailly. Pour ce qui est du second de ces résultats, on peut démontrer sur la grassmannienne un énoncé plus précis, qui semble être une généralisation naturelle du précédent, et que Jean-Pierre Demailly fut amené à conjecturer pour les fibrés amples quelconques:

Conjecture *Si E est un fibré vectoriel holomorphe de rang d , L un fibré en droites sur une variété complexe compacte X de dimension n , si E est ample et L nef, ou E nef et L ample, alors*

$$H^{p,q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} p + q > n, \\ l \geq h(a) + \min(n - p, n - q). \end{cases}$$

Théorème (Th. 5.3.1 et Pr. 2.3.1, première partie) *Cette conjecture est vraie si $X = G_r(V)$ est la grassmannienne des sous-espaces de codimension r d'un espace vectoriel complexe V , si $E = Q$ est le fibré quotient sur cette variété, et si $L = \det Q$. Autrement dit, si a est un poids positif décroissant,*

$$H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l) = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} p + q > n, \\ l > h(a) + \min(n - p, n - q). \end{cases}$$

Quant à la suite spectrale de Borel-Le Potier, on est amené à répondre par la négative à la question posée par Jean-Pierre Demailly. Par exemple, si l'on note $\mathcal{O}_Q(1)$ le fibré en droites quotient naturellement défini sur la variété $\mathbb{P}(Q^*)$ des hyperplans du fibré quotient Q , et $\mathcal{O}_Q(k)$ sa k -ième puissance tensorielle:

Proposition (Pr. 6.3.5, première partie) *Si les entiers r et k sont suffisamment grands, si l est un entier strictement positif, et si $d = rl + k$, la suite spectrale de Borel-Le Potier associée au fibré en droites ample $\mathcal{O}_Q(k) \otimes \pi^*(\det Q)^l$ et à la projection naturelle $\pi : \mathbb{P}(Q^*) \longrightarrow G_r(V)$, ne dégénère pas en E_2 .*

3.

L'intérêt de la grassmannienne n'est pas seulement d'être une mine d'exemples et de contre-exemples: les propriétés cohomologiques du fibré quotient sur cette variété interviennent par exemple de manière essentielle dans les démonstrations des théorèmes de Le Potier. On aura d'ailleurs remarqué que le premier, bien qu'optimal, est en degré maximal beaucoup moins précis que le second. L'étude de la cohomologie de Dolbeault des puissances extérieures du fibré quotient sur la grassmannienne permet cependant d'établir un théorème d'annulation pour les puissances extérieures d'un fibré ample, qui fait le lien entre les énoncés (3) et (4) de Le Potier:

Théorème (Th. 1.1.1, deuxième partie) *Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang d , ample, sur une variété complexe compacte X de dimension n . Alors*

$$H^{p,q}(X, \wedge^k E) = 0 \quad \text{si } p + q > n + \min(k, n - p + 1, n - q + 1)(d - k).$$

Incidentement, la démonstration de ce résultat permet de prouver que la suite spectrale de Borel-Le Potier, même si l'on se restreint aux fibrés amples, ne dégénère uniformément en E_r pour aucune valeur, aussi grande soit-elle, de l'entier r .

Une très légère variante de cette démonstration permet également de généraliser le théorème de Griffiths sous la forme suivante:

Théorème (Th. 1.1.2) *Sous les mêmes hypothèses,*

$$H^{p,q}(X, S^k E \otimes \det E) = 0 \quad \text{si } q > (k + 1)(n - p).$$

4.

D'autre part, les résultats obtenus sur la grassmannienne laissent espérer que l'on puisse améliorer le second des théorèmes d'annulation de Jean-Pierre Demailly. Pour ce faire, une étude poussée de la cohomologie de Dolbeault des fibrés en droites homogènes sur les variétés de drapeaux paraît indispensable. Cependant, si l'on excepte le cas

des grassmanniennes, ces groupes de cohomologie sont d'un calcul extrêmement délicat. Certaines de leurs propriétés, que l'on n'a pu vérifier que par l'intermédiaire de la suite spectrale de Borel-Le Potier et de pénibles raisonnements combinatoires, permettent cependant d'établir, entre autres, le résultat suivant:

Théorème (Th 2.1.2, deuxième partie) *Soit E un fibré ample de rang d sur une variété complexe compacte X de dimension n , soient a et u des poids positifs décroissants tels que $h(a) + h(u) \leq d$. Alors*

$$H^{n,q}(X, \Gamma^{a-\chi(u)} E \otimes (\det E)^l) = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} q > |u|, \\ l \geq h(a) + u_1. \end{cases}$$

On a désigné par χ la permutation $\chi(i) = d + 1 - i$, de sorte que a et $-\chi(u)$ sont respectivement les parties positives et négatives du poids $a - \chi(u)$. L'énoncé précédent englobe à la fois le théorème de Griffiths et le théorème (4) de Le Potier.

On obtient également, pour $u = 0$, une partie de la conjecture de Demailly:

Théorème (Th 2.1.1) *Sous les mêmes hypothèses, et si $p \geq n - 20$,*

$$H^{p,q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l) = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} p + q > n, \\ l \geq h(a) + n - p. \end{cases}$$

5.

Dans la dernière partie, on s'est attaché à prolonger certains travaux d'Ohsawa, utilisant des techniques d'analyse "à la Hormander" qui permettent d'aboutir à des résultats que les théorèmes d'annulation, du genre de ceux dont il vient d'être question, semblent impuissants à établir. En l'occurrence, on s'intéresse au problème de l'extension à une variété de Stein, ou à une variété projective, des sections d'un fibré en droites définies sur une sous-variété qui soit le lieu des zéros d'une section holomorphe d'un fibré vectoriel. On obtient par exemple le théorème d'existence suivant:

Théorème (Th 1.1.1, troisième partie) *Soit X une variété projective, E un fibré holomorphe de rang d sur cette variété, et s une section globale de E génériquement transverse à la section nulle. Soit $Y = s^{-1}(0)$, soit L un fibré en droites sur X tel que le fibré $\mathcal{O}_{E^*}(d) \otimes \pi^*(L \otimes K_X^*)$ soit ample sur la variété $\mathbb{P}(E)$ des droites du fibré E .*

Alors le morphisme de restriction $H^0(X, L) \longrightarrow H^0(Y, L)$ est surjectif.

Première partie

Cohomologie du fibré quotient sur la grassmannienne.

Nous allons développer, dans cette première partie, une méthode de détermination de la cohomologie de Dolbeault des fibrés associés au fibré quotient universel (et, éventuellement, au fibré tautologique) sur la grassmannienne. Cette méthode, que nous appellerons *méthode des diagrammes*, a d'abord été conçue par Snow dans le cas, assez nettement plus simple, des puissances du déterminant de ce fibré quotient.

Si l'on veut ne pas se restreindre à ce cas particulier, c'est à tout l'attirail de la théorie des représentations du groupe linéaire qu'il est nécessaire d'avoir recours: notre premier chapitre regroupe les résultats de cette théorie qui nous seront utiles tout au long de ce travail; il se termine sur une brève introduction aux variétés de drapeaux (en particulier à la grassmannienne), ainsi qu'aux fibrés en droites homogènes qui peuvent y être définis.

Dans un second chapitre, nous présentons dans le détail cette méthode des diagrammes, et en examinons les implications: propriétés d'"hérédité", selon lesquelles certaines particularités des groupes de cohomologie auxquels nous nous sommes intéressés, peuvent persister lorsqu'en sont modifiés différents paramètres; conditions d'annulation, puisque nous retrouvons, de manière purement diagrammatique, le théorème de Kodaira-Nakano pour les puissances positives du déterminant du fibré quotient, en déduisons des résultats similaires pour ses puissances symétriques, examinons quelles puissances de ce déterminant permettent d'annuler les groupes considérés.

Nous montrons enfin, dans un troisième chapitre, comment ces méthodes permettent d'étudier la suite spectrale dite de Borel-Le Potier, qui jouera un rôle essentiel dans la seconde partie de cette thèse. En particulier, nous donnons deux exemples de non-dégénérescence en E_2 de cette suite spectrale.

1 Préliminaires

1.1 Représentations du groupe linéaire

Le groupe linéaire complexe est un groupe réductif (chacune de ses représentations est somme directe de représentations irréductibles): c'est le groupe simplement connexe complexifié du groupe unitaire, lui-même semi-simple, puisque compact. Cette propriété fondamentale du groupe linéaire fut établie, bien avant les travaux fondamentaux de Hermann Weyl, par Schur (cf [Di] pour l'influence qu'eut sur Weyl la dissertation de Schur), qui mit en évidence les relations très profondes qui unissent représentations du groupe linéaire et du groupe symétrique.

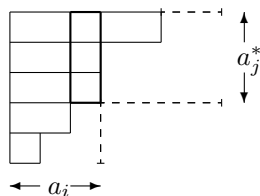
1.1.1 Construction de Weyl et foncteurs de Schur

La *construction de Weyl* rend ces liens manifestes. Si W est un espace vectoriel complexe de dimension r , le groupe symétrique \mathcal{S}_n agit sur $W^{\otimes n}$ par permutation des facteurs, et cette action commute avec l'action de $Gl(W)$. Par exemple, l'espace des tenseurs totalement symétriques est la puissance symétrique $S^n W$, celui des tenseurs totalement antisymétriques est la puissance extérieure $\wedge^n W$: ils s'obtiennent comme l'image de $W^{\otimes n}$ par des opérateurs de symétrisation ou d'antisymétrisation totales, qui dans l'algèbre du groupe symétrique s'écrivent respectivement:

$$\begin{aligned}\theta_n &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sigma, \\ \theta_{1,\dots,1} &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)\sigma,\end{aligned}$$

où $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ .

Plus généralement, on peut définir des opérateurs de symétrisation et d'antisymétrisation partielles de la façon suivante. Si $a = (a_1 \geq \dots \geq a_h > 0)$ est une partition décroissante de n , son *diagramme de Young* (ou diagramme de Ferrer) est constitué de a_i cases sur sa ligne d'indice i (les lignes étant comptées de bas en haut).



Représentation d'une partition
par un diagramme de Young

Ayant numéroté les cases de ce diagramme de 1 à n , de gauche à droite et de haut en bas, on définit dans l'algèbre du groupe symétrique les opérateurs θ_a^s de symétrisation

sur les indices de ses lignes, et θ_a^e d'antisymétrisation sur les indices de ses colonnes:

$$\begin{aligned}\theta_a^s &= \sum_{\sigma \in L_a} \sigma, \\ \theta_a^e &= \sum_{\sigma \in C_a} \epsilon(\sigma) \sigma,\end{aligned}$$

où L_a (resp. C_a) est l'ensemble des permutations laissant invariantes les lignes (resp. les colonnes) du tableau de Young associé à a . On appelle alors *symétriseur de Young* l'élément $\theta_a = \theta_a^s \theta_a^e$ de l'algèbre du groupe symétrique \mathcal{S}_n .

Exemple: Si l'on excepte les cas des puissances extérieures ou symétriques (les diagrammes de Young associés sont alors des bandes verticales ou horizontales), les diagrammes de Young les plus simples sont constitués d'une bande horizontale et d'une bande verticale. Notons j la longueur de la première, qui doit être numérotée des entiers compris entre 1 et j . La seconde est alors de longueur $n - j + 1$, et se voit numérotée, en plus de l'entier 1, des entiers compris entre $j + 1$ et n . Pour $j = 5$ et $n = 9$, on obtient par exemple le tableau numéroté suivant:

1	2	3	4	5
6				
7				
8				
9				

Si l'on note a la partition correspondante, il vient

$$\begin{aligned}\theta_a^s &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_j} \sigma, \\ \theta_a^e &= \tau_j \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-j+1}} \epsilon(\sigma) \sigma \right) \tau_j^{-1},\end{aligned}$$

où τ_j est une permutation de $\{1, \dots, n\}$ envoyant $1, 2, \dots, n - j + 1$ sur $1, j + 1, \dots, n$. On notera $Z^{n-j,n}W$ la représentation correspondante de $Gl(W)$.

On peut vérifier qu'à un scalaire près, θ_a est un idempotent: on notera $\Gamma^a W$ le $Gl(W)$ -module image de son action sur $W^{\otimes n}$. Est ainsi défini le *foncteur de Schur*, covariant, associé à la partition a .

Le $Gl(W)$ -module $\Gamma^a W$ est nul si et seulement si $a_{r+1} > 0$: on se restreindra donc aux partitions formées d'au plus r entiers naturels, que l'on considérera comme des éléments du groupe \mathbb{Z}^r . Si l'on note $\mathbf{1}_1, \dots, \mathbf{1}_r$ la base canonique de \mathbb{Z}^r , puis $\mathbf{1}_{i,j} = \sum_{k=i}^j \mathbf{1}_k$ et $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{1,r}$, alors $\Gamma^{\mathbf{1}} W = \det W$ et, plus généralement,

$$\Gamma^{a+l\mathbf{1}} W = \Gamma^a W \otimes (\det W)^l.$$

Le déterminant permet ainsi de généraliser le foncteur de Schur de la façon suivante: si $a \in \mathbb{Z}^d$ n'est pas décroissant, on posera $\Gamma^a W = 0$; sinon, on notera

$$\Gamma^a W = \Gamma^{a+l\mathbf{1}} W \otimes (\det W)^{-l},$$

où l'entier l est supposé assez grand pour que $a + l1$ soit positif. On désignera par \mathbb{N}_{\geq}^r l'ensemble des suites décroissantes de r entiers naturels.

Théorème 1.1.1 *Les $Gl(W)$ -modules $\Gamma^a W$, où a décrit l'ensemble des r -uplets décroissants d'entiers relatifs, forment un système complet de représentations rationnelles irréductibles de $Gl(W)$.*

Si $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$, le caractère de la représentation correspondante associée à un endomorphisme le polynôme de Schur s_a de ses valeurs propres.

Les *polynômes de Schur* de r variables x_1, \dots, x_r sont des fonctions symétriques de ces variables, définies par Jacobi selon l'identité:

$$s_a(x_1, \dots, x_r) = \det(x_i^{a_j+r-j}) / \det(x_i^{r-j}).$$

Notons que le premier de ces déterminants, étant fonction antisymétrique de ses variables, est bien divisible par le déterminant de VanderMonde $V(x_1, \dots, x_r) = \det(x_i^{r-j})$. Ceci permet de ramener l'étude des représentations du groupe linéaire (ou du groupe symétrique) à celle des fonctions symétriques (cf [W], [McD], [Kn], [FH] parmi beaucoup d'autres), via le dictionnaire suivant (qui pourrait être largement prolongé):

$$\begin{array}{ll} \text{modules } \Gamma^a W, \ a \in \mathbb{N}_{\geq}^r & \longrightarrow \text{fonctions de Schur } s_a, \\ \text{puissances extérieures } \wedge^k W & \longrightarrow \text{fonctions sym. élémentaires } e_k = s_{\mathbf{1}_{1,k}}, \\ \text{puissances symétriques } S^k W, & \longrightarrow \text{fonctions sym. complètes } h_k = s_{k\mathbf{1}_1}, \\ \text{produit tensoriel} & \longrightarrow \text{produit de fonctions de Schur.} \end{array}$$

Rappelons que e_k est la somme des monômes de degré total k , et de degré au plus un en chacune des variables x_1, \dots, x_r , alors que h_k est somme de tous les monômes de degré total k . Plus généralement, si $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$, on appelle *tableau* de forme a une numérotation, croissante sur ses lignes, strictement croissante sur ses colonnes, du diagramme de Young associé à a par des entiers compris entre 1 et r ; on associe à un tel tableau le r -uplet (T_1, \dots, T_r) , où T_i est le nombre apparitions de l'entier i dans le tableau T . Alors s_a est la somme, prise sur les tableaux T de forme a , des monômes $x_1^{T_1} \dots x_r^{T_r}$.

Remarque 1.1: La correspondance entre représentations irréductibles du groupe linéaire et fonctions de Schur justifierait une autre définition du foncteur de Schur associé à une suite d'entiers non décroissante, définition mieux adaptée à l'énoncé du théorème de Bott, mais qui ne nous sera pas utile (cf [L3]).

1.1.2 Dualités

Si $a = (a_1 \geq \dots \geq a_h > 0)$ est une partition d'un entier n , on définit sa partition *duale* a^* en échangeant les axes du diagramme de Young associé:

$$a_i^* = \text{Card} \{j, \ a_j \geq i\}.$$

Ceci définit une involution sur l'algèbre des fonctions symétriques, ou sur l'anneau de Grothendieck des représentations du groupe linéaire, qui échange fonctions symétriques élémentaires et complètes, puissances symétriques et puissances extérieures.

Remarque 1.2: Encore faut-il prendre garde au fait que si W est de dimension r , et si $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$, $\Gamma^a W$ est nul si $a_1 > r$. On définit donc, lorsqu'on se spécialise à un espace vectoriel de dimension r , une involution seulement sur ses représentations dont les poids dominants ont des composantes au plus égales à r . Ce genre d'inconvénient disparaît lorsqu'on manie des espaces "de dimension arbitrairement grande", autrement dit des fonctions symétriques en une infinité de variables, ce qui revient par exemple à considérer la limite projective des anneaux de Grothendieck des groupes linéaires $Gl(r, \mathbb{C})$ pour les inclusions naturelles $\mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}^{r+1}$. Cette limite projective, qui est un "λ-anneau à un générateur" ([Kn]), est l'objet adéquat à l'étude des représentations du groupe linéaire: la spécialisation à un espace vectoriel complexe de dimension donnée ne doit avoir lieu qu'a posteriori.

Une autre involution peut être définie sur les représentations du groupe linéaire, par l'échange de W et de son dual, c'est-à-dire en identifiant $Gl(W)$ et $Gl(W^*)$. Notons $\chi \in \mathcal{S}_r$ la permutation de nombre d'inversions maximal: si $a \in \mathbb{Z}^r$, alors $\chi(a) = (a_r, \dots, a_1)$, et l'on a l'identité

$$\Gamma^a(W^*) \simeq \Gamma^{-\chi(a)}W.$$

1.1.3 Décomposition des puissances tensorielles

Sur la puissance tensorielle $W^{\otimes n}$ agissent simultanément le groupe linéaire et le groupe symétrique \mathcal{S}_n . Notons que les représentations irréductibles du groupe symétrique s'obtiennent exactement comme celle du groupe linéaire: on notera $\Gamma_a(\mathcal{S}_n)$ la représentation irréductible de \mathcal{S}_n image de l'action, cette fois sur l'algèbre du groupe symétrique, de l'idempotent θ_a . Ceci implique que l'action du produit $\mathcal{S}_n \times Gl(W)$ sur $W^{\otimes n}$ se décompose de la façon suivante:

$$W^{\otimes n} = \bigoplus_{|a|=n} \Gamma^a(\mathcal{S}_n) \otimes \Gamma^a W,$$

somme portant sur les partitions décroissantes de n .

La décomposition de $W^{\otimes n}$ en somme de $Gl(W)$ -modules irréductibles s'écrit donc

$$W^{\otimes n} = \bigoplus_{|a|=n} \mu(a) \Gamma^a W,$$

où $\mu(a)$ n'est autre que le degré de la représentation $\Gamma^a(\mathcal{S}_n)$. Cette dimension peut se calculer à partir du diagramme de Young associé à a . Numérotions ce diagramme de ses *longueurs d'équerres*: sur la case d'indices (i, j) , cette longueur d'équerre est définie

comme le nombre $h_{i,j}^a$ de cases du diagramme situées soit à sa droite, soit au dessous de cette case, elle comprise:

$$h_{i,j}^a = a_i - i + a_j^* - j + 1.$$

Le degré $\mu(a)$ de $\Gamma^a(\mathcal{S}_n)$ est alors donné par la *formule de Frame*

$$\mu(a) = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{i,j}^a}.$$

Notons que $\mu(a)$ s'interprète également comme le nombre de manières de numérotter le diagramme de Young de a par les entiers $1, \dots, n$, de façon strictement croissante sur ses lignes et ses colonnes.

1.1.4 Formules de Pieri

Les formules de Pieri explicitent le produit tensoriel d'un $Gl(W)$ -module irréductible par une puissance symétrique ou extérieure de W . D'après notre dictionnaire, ceci revient à effectuer le produit d'une fonction de Schur par une fonction symétrique complète ou élémentaire, ces deux produits se correspondant par dualité.

Proposition 1.1.1 *Les produits tensoriels d'un $Gl(W)$ -module irréductible $\Gamma^a W$, avec $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$, par une puissance extérieure ou symétrique de W , sont donnés par les formules suivantes:*

$$\begin{aligned} \Gamma^a W \otimes S^k W &= \bigoplus_{b \in T_k^s(a)} \Gamma^b W, \\ \Gamma^a W \otimes \wedge^k W &= \bigoplus_{b \in T_k^e(a)} \Gamma^b W, \end{aligned}$$

où $T_k^s(a)$ (respectivement $T_k^e(a)$) est l'ensemble des r -uplets $b \in \mathbb{N}_{\geq}^r$ de module $|a| + k$, tels que pour tout i compris entre 1 et r , $a_i \leq b_i \leq a_{i-1}$ (respectivement $a_i \leq b_i \leq a_i + 1$).

Remarque 1.3: Autrement dit, les diagrammes de Young des poids de $T_k^s(a)$ (respectivement $T_k^e(a)$), s'obtiennent en ajoutant k cases à celui de a , dont au plus une par colonne (respectivement par ligne).

Preuve: Multiplions par exemple la fonction de Schur s_a par la k -ième fonction symétrique élémentaire e_k . Si l'on note $\delta = \sum_{i=1}^r (r-i) \mathbf{1}_i$, il vient

$$\begin{aligned} e_k \times s_a &= \left(\sum_{\alpha \in \{0,1\}^r, |\alpha|=k} x^\alpha \right) \times \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \epsilon(\sigma) x^{\sigma(a+\delta)} \right) / V(x_1, \dots, x_r) \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) x^{\sigma(a+\alpha+\delta)} / V(x_1, \dots, x_r) \\ &= \sum_{\alpha} s_{a+\alpha}, \end{aligned}$$

et l'on obtient la seconde formule de Pieri en remarquant que si $a+\alpha$ n'est pas décroissant, le déterminant qui définit $s_{a+\alpha}$ a deux colonnes identiques, donc est nul. La première formule de Pieri s'en déduit par la dualité des partitions, qui échange puissances symétriques et extérieures. ♣

1.1.5 Formules de déterminants

Les formules de Pieri permettent de montrer que chaque $Gl(W)$ -module irréductible s'écrit, dans l'anneau de Grothendieck des représentations irréductibles du groupe linéaire, comme un déterminant de puissances symétriques, ou extérieures ([Kn], p.184). Ces formules nous seront nécessaires dans la deuxième moitié de la seconde partie de cette thèse.

Proposition 1.1.2 *L'anneau de Grothendieck des représentations de $Gl(W)$ est engendré:*

1. soit par les puissances extérieures $\wedge^k W$, $0 \leq k \leq r$, et $(\det W)^{-1}$: on a l'identité, si $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$,

$$\Gamma^a W = \det(\wedge^{a_i^* - i + j} W)_{1 \leq i, j \leq \alpha},$$

pour tout entier $\alpha \geq a_1$;

2. soit par les puissances symétriques $S^k W$, $k \geq 0$, et $(\det W)^{-1}$: on a l'identité, si $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$,

$$\Gamma^a W = \det(S^{a_i - i + j} W)_{1 \leq i, j \leq \beta},$$

pour tout entier $\beta \geq a_1^*$.

Preuve: Démontrons par exemple la seconde de ces formules par récurrence sur β : si l'on développe le déterminant D considéré par rapport à sa dernière colonne, il vient

$$D = \bigoplus_{k=1}^{\beta} (-1)^{\beta+k} S^{a_k - k + \beta} W \otimes \Gamma^{\sum_{j=1}^{k-1} a_j \mathbf{1}_j + \sum_{j=k+1}^{\beta} (a_j - 1) \mathbf{1}_{j-1}} W.$$

Ceci peut s'écrire

$$D = \bigoplus_{k=1}^{\beta} (-1)^{\beta+k} \bigoplus_{d \in P_k(a)} \Gamma^d W,$$

où $P_k(a)$ est l'ensemble des r -uplets positifs décroissants d , de même module que a , et tels que $a_j \leq d_j \leq a_{j-1}$ si $1 \leq j < k$, $a_{k+1} - 1 \leq d_k \leq a_{k-1}$, et $a_{j+1} - 1 \leq d_j \leq a_j - 1$ si $k < j \leq r$. Mais $P_k(a) = Q_k(a) \cup Q_{k-1}(a)$, où $Q_k(a)$ est l'ensemble des r -uplets positifs décroissants d , de même module que a , tels que $a_j \leq d_j \leq a_{j-1}$ si $1 \leq j \leq k$ et $a_{j+1} - 1 \leq d_j \leq a_j - 1$ si $k < j \leq r$: donc

$$D = \bigoplus_{d \in Q_{\beta}(a)} \Gamma^d W \oplus (-1)^{\beta+1} \bigoplus_{d \in Q_0(a)} \Gamma^d W.$$

Mais $Q_0(a) = \emptyset$ et $Q_{\beta}(a) = \{a\}$: la seconde partie de la proposition est donc démontrée, et la première s'en déduit par dualité. ♣

Remarque 1.4: La seconde des formules précédentes, dite *formule de Jacobi-Trudi* est l'analogue de la formule de Giambelli en calcul de Schubert ([GH], de même que les formules de Pieri explicitent l'intersection d'un cycle de Schubert quelconque avec un cycle de Schubert "spécial"), ou de la formule qui définit les polynômes de Schur en fonction des classes de Chern usuelles d'un fibré vectoriel complexe (le fameux "principe de scindage" permet en effet d'identifier l'algèbre engendrée par les classes de Chern à celles des fonctions symétriques).

On peut déduire des identités précédentes d'autres formules qui les généralisent, et expriment un $Gl(W)$ -module irréductible comme un produit tensoriel de $Gl(W)$ -modules qui ne sont pas simplement des puissances extérieures ou symétriques. Rappelons tout d'abord un développement du déterminant qui remonte à Laplace ([Bo]):

Lemme 1.1.1 Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ une partition d'un entier ρ , avec $\mu_1, \dots, \mu_m \geq 1$. Soit $\mathcal{S}_\rho(\mu) \subset \mathcal{S}_\rho$ l'ensemble des permutations σ de $\{1, \dots, \rho\}$ telles que, si l'on note $\nu_i = \mu_1 + \dots + \mu_i$,

$$\sigma(\nu_{i-1} + 1) \leq \dots \leq \sigma(\nu_i), \quad \text{si } 1 \leq i \leq m.$$

Si $\sigma \in \mathcal{S}_\rho(\mu)$, et si $A = (a_{i,j}) \in M_\rho(\mathcal{A})$, où \mathcal{A} est un anneau commutatif, soit

$$\Delta_\mu^\sigma(A) = \prod_{i=1}^m \det(a_{\nu_{i-1}+j, \sigma(\nu_{i-1}+k)})_{1 \leq j, k \leq \mu_i}.$$

Alors on a l'identité

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_\rho(\mu)} \epsilon(\sigma) \Delta_\mu^\sigma(A).$$

Si $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$, définissons:

- $|a|$, le *module* de a , comme la somme des composantes de a ,
- $h(a)$ comme le nombre de composantes non nulles de a ,
- $s(a)$ comme la suite des entiers $(0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = r)$ tels que $a_{s_i} > a_{s_i+1}$ si $1 \leq i \leq m-1$.

Notons que $h(a) = a_1^*$. D'autre part, si $s(a) = (0 = s_0 < \dots < s_m = r = a_1^*)$, alors $s(a^*) = (0 = t_0 < \dots < t_m = a_1)$ avec $a_{s_i} = t_{m+1-i}$ et $a_{t_j}^* = s_{m+1-j}$.

Corollaire 1.1.1 Soit $u \in \mathbb{N}_{\geq}^r$: si $s(u) = (0 = s_0 < \dots < s_m = u_1^*)$,

$$\Gamma^u W = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}_{u_1^*}} \epsilon(\sigma) \bigotimes_{i=1}^m \Gamma^{\sum_{k=1}^{s_i - s_{i-1}} (u_{s_i} + \sigma(s_i + 1 - k) - (s_i + 1 - k)) \mathbf{1}_k} W.$$

Preuve: Appliquons le lemme précédent à la matrice, à coefficients dans l'anneau des représentations de $Gl(W)$, $A = (S^{u_i - i + j} W)_{1 \leq i, j \leq u_1^*}$, et à la partition $\mu_i = s_i - s_{i-1}$, $1 \leq i \leq m$, de u_1^* . Ici $\nu_i = s_i$, donc si $\sigma \in \mathcal{S}_{u_1^*}(\mu)$,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu}^{\sigma}(A) &= \prod_{i=1}^m \det(\wedge^{u_{s_{i-1}} + j - (s_{i-1} + j) + \sigma(s_{i-1} + k)} W)_{1 \leq j, k \leq s_i - s_{i-1}}, \\ \Delta_{\mu}^{\sigma}(A) &= \prod_{i=1}^m \det(\wedge^{u_{s_i} - (s_{i-1} + j) + \sigma(s_{i-1} + k)} W)_{1 \leq j, k \leq s_i - s_{i-1}}. \end{aligned}$$

Inversons complètement les lignes et les colonnes de chacune des matrices dont $\Delta_{\mu}^{\sigma}(A)$ est le produit des déterminants: il vient après transposition

$$\Delta_{\mu}^{\sigma}(A) = \prod_{i=1}^m \det(\wedge^{u_{s_i} + \sigma(s_i + 1 - j) - (s_i + 1 - j) - j + k} W)_{1 \leq j, k \leq s_i - s_{i-1}},$$

donc d'après la proposition 1.1.2,

$$\Gamma^u W = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}_{u_1^*}(\mu)} \epsilon(\sigma) \bigotimes_{i=1}^m \Gamma^{\sum_{k=1}^{s_i - s_{i-1}} (u_{s_i} + \sigma(s_i + 1 - k) - (s_i + 1 - k)) \mathbf{1}_k} W,$$

et cette somme peut s'étendre à $\mathcal{S}_{u_1^*}$ tout entier, puisque pour une permutation σ n'appartenant pas à $\mathcal{S}_{u_1^*}(\mu)$, un facteur $\Gamma^{\sum_{k=1}^{s_i - s_{i-1}} (u_{s_i} + \sigma(s_i + 1 - k) - (s_i + 1 - k)) \mathbf{1}_k} W$ au moins est nul. \clubsuit

1.1.6 Formule de Cauchy

La formule de Cauchy sera, avec le théorème de Bott, l'outil fondamental de l'étude de la cohomologie de Dolbeault des fibrés homogènes sur la grassmannienne. Elle permet de décomposer une puissance extérieure ou symétrique d'un produit tensoriel d'espaces vectoriels, selon les représentations irréductibles des groupes linéaires correspondants.

Du point de vue des caractères, la formule de Cauchy se réduit à une identité algébrique publiée par Cauchy en 1842 ([C]). On en donnera ici une démonstration plus géométrique, qui se déduit simplement des formules de Pieri ([Ka], voir aussi [McD], [L4], [LS]).

Lemme 1.1.2 Si W et L sont des espaces vectoriels complexes de dimensions respectives r et u , alors

$$\Gamma^a(W \oplus L) = \bigoplus_{b \in \tau(a)} \Gamma^b W \otimes L^{|a| - |b|},$$

où $\tau(a) = \{b \in \mathbb{N}_{\geq}^r, a_1 \geq b_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r \geq b_r \geq a_{r+1}\}$.

Preuve: Lorsque $a = k\mathbf{1}_1$, l'identité précédente se réduit à la formule usuelle pour les puissances symétriques

$$S^k(W \oplus L) = \bigoplus_{j=0}^k S^{k-j}W \otimes L^j.$$

La seconde formule de la proposition précédente implique donc l'identité

$$\Gamma^a(W \oplus L) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^r} \det(S^{a_i - k_i - i + j}W) \otimes L^{|k|};$$

d'après cette même formule, le déterminant qui du membre de droite de cette identité n'est autre que $\Gamma^{a-k}W$ si $a - k$ est décroissant; en général, on doit ordonner le poids $a - k - c(r)$, où $c(r)$ est le poids $\sum_{i=1}^r i\mathbf{1}_i$, en permutant les lignes du déterminant considéré (ce qui introduit un facteur $\epsilon(a - k) = (-1)^{i(a-k)}$, $i(a - k)$ étant le nombre d'inversions strictes de l'ordre dans le r -uplet $a - k - c(r)$), et ajouter au poids décroissant obtenu le poids $c(r)$. Si l'on note $\xi(a - k)$ le résultat de cette opération, il vient

$$\det(S^{a_i - k_i - i + j}W) = \epsilon(a - k)\Gamma^{\xi(a-k)}W.$$

La formule précédente s'écrit donc

$$\Gamma^a(W \oplus L) = \bigoplus_{b \in \mathbb{N}_{\geq}^r} \nu(b)\Gamma^bW \otimes L^{|a|-|b|},$$

où $\nu(b)$ est la somme des entiers relatifs $\epsilon(a - k)$ pour tous les r -uplets $k \in \mathbb{N}^r$ tels que $\xi(a - k) = b$; autrement dit,

$$\nu(b) = \sum_{\sigma \in \Sigma_{a,b}} \epsilon(\sigma),$$

où $\Sigma_{a,b} = \{\sigma \in \Sigma_r, b_i - i \leq a_{\sigma(i)} - \sigma(i), 1 \leq i \leq r\}$. Pour que $\Sigma_{a,b}$ ne soit pas vide, il faut tout d'abord que $b_1 \leq a_1$. De plus, si $a_1 \geq a_2 > b_1$, $\Sigma_{a,b}$ est stable par composition avec la transposition de 1 et 2, ce qui implique que $\nu(b) = 0$. Si $\nu(b)$ n'est pas nul, on doit donc avoir $a_1 \geq b_1 \geq a_2$, auquel cas tout élément de $\Sigma_{a,b}$ admet 1 pour point fixe. De proche en proche, on vérifie ainsi que si $\nu(b)$ n'est pas nul, alors $b \in \tau(a)$, et que dans ce cas $\Sigma_{a,b} = \{id\}$, donc $\nu(b) = 1$. ♣

Proposition 1.1.3 (Formule de Cauchy) *Soient V et W des espaces vectoriels complexes de dimensions respectives s et r . Alors, pour tout entier naturel k ,*

$$\wedge^k(V \otimes W) = \bigoplus_{|u|=k} \Gamma^uV \otimes \Gamma^{u^*}W.$$

Remarque 1.5: Pour que $\Gamma^u V$ et $\Gamma^{u^*} W$ ne soient pas nuls, il faut que u (respectivement u^*) soit positif, décroissant, et n'ait pas plus de r (respectivement s) composantes non nulles. La somme précédente ne porte donc que sur l'ensemble

$$\sigma_{r,s}^k = \{u \in \mathbb{N}_{\geq}^r, \quad |u| = k \text{ et } u_1 \leq s\}.$$

Preuve: On remarquera tout d'abord que les représentations du groupe linéaire sont déterminées par leurs caractères, autrement dit par leurs restrictions à un tore maximal $Gl_1(\mathbb{C}) \times \cdots \times Gl_1(\mathbb{C})$: il suffit donc, par exemple, de démontrer la formule précédente, interprétée comme isomorphisme de représentations de $Gl(L_1) \times \cdots \times Gl(L_s) \times Gl(W)$, lorsque V est décomposé en somme de droites vectorielles L_1, \dots, L_s . A fortiori, il suffit de démontrer que si cette formule est vraie pour V et W , elle l'est encore pour $V \oplus L$ et W en termes de représentations de $Gl(V) \times Gl(L) \times Gl(W)$. Or, sous cette hypothèse,

$$\begin{aligned} \wedge^k((V \oplus L) \otimes W) &= \bigoplus_{i=0}^k \wedge^i(V \otimes W) \otimes \wedge^{k-i}(L \otimes W) \\ &= \bigoplus_{|v| \leq k} \Gamma^v V \otimes \Gamma^{v^*} W \otimes \wedge^{k-|v|} W \otimes L^{k-|v|} \\ &= \bigoplus_{|v| \leq k} \bigoplus_{w^* \in T_{k-|v|}^e(v^*)} \Gamma^v V \otimes \Gamma^{w^*} W \otimes L^{k-|v|}. \end{aligned}$$

Mais $w^* \in T_{k-|v|}^e(v^*)$ signifie que w^* s'obtient à partir du diagramme de Young de v^* en lui ajoutant $k - |v|$ cases à raison d'au plus une par ligne, autrement dit que le diagramme de Young de w s'obtient à partir de celui de v en lui ajoutant $k - |v|$ cases à raison d'au plus une par colonne (avec bien sûr la condition supplémentaire $w_1 \leq r$, nécessaire à ce que $\Gamma^{w^*} W$ ne soit pas nul). Mais il est clair que ceci équivaut à $v \in \tau(w)$, et que $|w| = k$: d'où l'identité

$$\wedge^k((V \oplus L) \otimes W) = \bigoplus_{|w|=k} \bigoplus_{v \in \tau(w)} \Gamma^v V \otimes L^{|w|-|v|} \otimes \Gamma^{w^*} W,$$

soit encore, d'après le lemme précédent,

$$\wedge^k((V \oplus L) \otimes W) = \bigoplus_{|w|=k} \Gamma^w(V \oplus L) \otimes \Gamma^{w^*} W.$$

La formule de Cauchy est donc établie. ♣

Remarque 1.6: On pourrait démontrer de manière analogue une formule "duale" pour les puissances symétriques d'un produit tensoriel:

$$S^k(V \otimes W) = \bigoplus_{|u|=k} \Gamma^u V \otimes \Gamma^u W,$$

cette somme portant sur l'ensemble des poids positifs décroissants de module k , ayant au plus $\min(r, s)$ composantes non nulles. Cette formule est d'ailleurs celle qui se déduit le plus directement de l'identité démontrée par Cauchy.

Plus généralement, on pourrait d'ailleurs décomposer les $Gl(V) \times Gl(W)$ -modules $\Gamma^a(V \otimes W)$: déterminer ces décompositions revient en effet à effectuer des produits tensoriels de représentations du groupe symétrique ([FH], p.80).

1.1.7 La règle de Littlewood-Richardson

Les formules de Pieri donnent des expressions simples des produits tensoriels par des puissances extérieures ou symétriques. Plus généralement, nous aurons besoin d'effectuer des produits tensoriels de $Gl(W)$ -modules irréductibles de poids quelconques: on doit pour cela faire appel à la *règle de Littlewood-Richardson*.

Soient $a, b \in \mathbb{N}_{\geq}^r$: on appellera *a-tableau de base b* un tableau numéroté dont la i -ème ligne contient d'abord b_i cases non numérotées, puis un certain nombre de cases numérotées, de telle sorte que l'entier j apparaisse au total exactement a_j fois. Un tel diagramme sera dit *admissible* s'il obéit aux restrictions suivantes:

- (A) Les entiers numérotant chaque ligne sont, lorsque qu'ils sont lus de gauche à droite, en ordre croissant.
- (B) Les entiers numérotant chaque colonne sont, lorsque qu'ils sont lus de haut en bas, en ordre strictement croissant.
- (C) Pour chaque entier i compris entre 1 et r , le poids dont la j -ième composante est la somme de b_j et du nombre de cases de la j -ième ligne du tableau numérotées d'entiers au plus égaux à i , est décroissant. En particulier, si l'on note c'_j le nombre de cases numérotées de la j -ième ligne du tableau, le poids $b + c'$, qui est le "poids total" du diagramme, est décroissant.
- (D) Si w est la suite des entiers du tableau lus de droite à gauche et de haut en bas, alors pour tous les entiers i et j , i apparaît au moins aussi souvent que $i + 1$ parmi les j premiers termes de w .

Exemple:

					1	1
			1	2	2	
			2	3		
		1	3			
	4					

Un *a*-tableau de base *b* admissible avec $b = (5, 3, 3, 2, 1, 0)$ et $a = (4, 3, 2, 1, 0, 0)$

Alors, selon la règle de Littlewood-Richardson, un tel tableau contribue à $\Gamma^b W \otimes \Gamma^a W$ pour $\Gamma^{b+c'} W = \Gamma^c W$, et $\Gamma^b W \otimes \Gamma^a W$ est la somme des contributions de tous les a -tableaux de base b admissibles.

Remarque 1.7: Pour une démonstration de la règle de Littlewood-Richardson par l'emploi des fonctions symétriques, on pourra se reporter à [McD]. Lascoux et Schützenberger ([LS]), en se plaçant dans un anneau non commutatif, *l'anneau plaxique*, en donnent une preuve plus agréable, l'énoncé final se réduisant à la formule lapidaire: "dans l'anneau plaxique, un produit de fonctions de Schur est une somme de fonctions de Schur". Plus récemment, Littlemann ([Li]) a pu obtenir une démonstration purement géométrique de la règle de Littlewood-Richardson, et la généraliser à l'ensemble des groupes classiques.

Remarque 1.8: Pour notre part, nous n'aurons en général par besoin de calculer les multiplicités d'un produit tensoriel, mais seulement de savoir que certaines d'entre elles ne sont pas nulles. Un certain nombre de conditions sont nécessaires à cela, dont nous allons énumérer celles qui nous seront régulièrement utiles.

Notons $\alpha_i(j)$ le nombre de cases de la i -ème ligne du tableau numérotées de l'entier j : la définition d'un tableau admissible implique que pour chaque entier i compris entre 1 et r ,

$$\begin{aligned}\alpha_1(i) + \cdots + \alpha_r(i) &= a_i, \\ \alpha_i(1) + \cdots + \alpha_i(r) &= c'_i.\end{aligned}$$

a. Sur la première ligne du tableau considéré, par exemple, **(D)** implique que la dernière case numérotée, s'il en existe, le soit de l'entier 1, et **(A)** implique alors que toutes les cases numérotées de la première ligne le soient de cet entier. Plus généralement, la i -ème ligne ne peut contenir aucune case numérotée d'entiers strictement supérieurs à i . On peut le vérifier par récurrence, puisque si $j > i$ est le plus grand de ces entiers, il figure d'après **(A)** à l'extrémité droite de cette ligne; la partie de w formée des entiers des $i - 1$ premières lignes du tableau, et de cet entier j , est alors en contradiction avec **(D)**, puisque i devrait y apparaître au moins aussi souvent que j , et n'y apparaît pas par hypothèse de récurrence. Autrement dit,

$$\alpha_i(j) = 0 \quad \text{si } j > i.$$

b. L'entier i ne peut donc apparaître que sur les lignes d'indice au moins égal à i , et d'après **(B)**, ne peut le faire que sur des cases appartenant à des colonnes distinctes du tableau. Parmi ces cases, celle qui est située le plus à droite appartient donc à une colonne dont l'indice est, d'une part, supérieur à $b_r + a_i$ (puisque a_i cases numérotées de l'entier i appartiennent à des colonnes distinctes d'indices supérieurs à b_r), d'autre part inférieur à $b_i + c'_i$ (puisque toutes les cases numérotées de l'entier i sont sur des lignes d'indice supérieur à i , et puisque $b + c'$ est décroissant). Autrement dit,

$$b_r + \alpha_i(i) + \cdots + \alpha_r(i) \leq b_i + \alpha_i(1) + \cdots + \alpha_i(i).$$

c. On peut également vérifier que la condition **(C)** entraîne que sur chaque colonne du tableau, les entiers des cases numérotées forment une suite qui croît strictement vers le bas du tableau. Ceci implique que les cases de la i -ème ligne numérotées de l'entier j , ne peuvent admettre au dessus d'elles plus de $j - 1$ cases numérotées, donc que l'indice de la colonne où se trouve celle de ces cases qui se situe le plus à droite du tableau, est inférieur à b_{i-j} . Autrement dit, si j est strictement inférieur à i ,

$$b_i + \alpha_i(1) + \cdots + \alpha_i(j) \leq b_{i-j}.$$

En particulier, il vient pour $j = i - 1$

$$b_i + \alpha_i(1) + \cdots + \alpha_i(i - 1) \leq b_1.$$

Mais d'après $b_.$, le membre de gauche de cette inégalité est minoré par $b_r + a_i - \alpha_i(i)$, d'où

$$\alpha_i(i) \geq a_i + b_r - b_1 \geq a_i - b_1.$$

d. Pour vérifier la condition **(D)**, il suffit, pour chaque ligne d'indice i et pour chaque entier j , de se placer au point de cette i -ème ligne pour lequel la partie correspondante de w contienne le plus souvent possible j , et le moins souvent possible $j - 1$, c'est-à-dire entre les cases contenant $j - 1$ et les cases contenant j . Le nombre d'apparitions de j dans les i premières lignes est égal à $\alpha_1(j) + \cdots + \alpha_i(j)$, le nombre d'apparitions de $j - 1$ dans les $i - 1$ premières lignes à $\alpha_1(j - 1) + \cdots + \alpha_{i-1}(j - 1)$: si l'on tient compte de $a_.$, la condition **(D)** est donc équivalente aux inégalités, pour $i \geq j$,

$$\alpha_{j-1}(j - 1) + \cdots + \alpha_{i-1}(j - 1) \geq \alpha_j(j) + \cdots + \alpha_i(j).$$

1.1.8 Cas de poids non positifs

Le produit tensoriel de $Gl(W)$ -modules irréductibles dont les poids ne sont pas positifs se détermine encore grâce à la règle de Littlewood-Richardson, via une simple translation selon les puissances du déterminant de W . On écrira en général un poids décroissant non positif sous la forme $a - \chi(u)$, où $\chi \in \mathcal{S}_r$ est définie par $\chi(i) = r + 1 - i$, où a et $-\chi(u)$ sont respectivement formés des composantes positives et négatives du poids $a - \chi(u)$: les poids a et u sont alors positifs, décroissants, et tels que $h(a) + h(u) \leq r$ (les parties non nulles de a et $-\chi(u)$ sont disjointes).

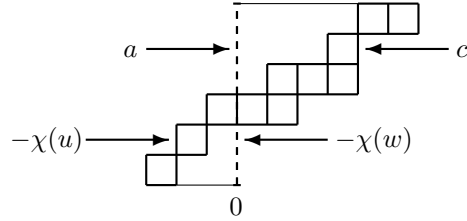
Si les composantes d'un produit tensoriel de $Gl(W)$ -modules irréductibles ont des poids supérieurs dont les modules sont la somme des modules des poids des facteurs de ce produit, il n'en est bien sûr pas de même des parties positives et négatives de ces poids. On utilisera cependant, dans la seconde partie de cette thèse le lemme suivant:

Lemme 1.1.3

1. Si a et b sont décroissants dans \mathbb{Z}^r , $\Gamma^{a+b}W$ est un facteur de $\Gamma^aW \otimes \Gamma^bW$.
2. Soient $a, b, c, u, v, w \in \mathbb{N}_{\geq}^r$ des poids tels que $h(a)+h(u)$, $h(b)+h(v)$, $h(c)+h(w)$ soient inférieurs ou égaux à r . Alors, si $\Gamma^{c-\chi(w)}W$ est un facteur de $\Gamma^{a-\chi(u)} \otimes \Gamma^{b-\chi(v)}W$, on a $|w| \leq |u| + |v|$ et $|c| \leq |a| + |b|$.

Preuve:

1. Il suffit de le vérifier pour $a, b \in \mathbb{N}_{\geq}^r$. Mais alors, $\Gamma^{a+b}W$ est la contribution à $\Gamma^aW \otimes \Gamma^bW$ du b -tableau de base a dont la i -ème ligne est numérotée de b_i fois l'entier i , et de cet entier seulement: un tel diagramme est évidemment admissible (remarquons au passage que la multiplicité de $\Gamma^{a+b}W$ dans $\Gamma^aW \otimes \Gamma^bW$ est exactement un: en effet, un b -tableau de base a ne peut, s'il est admissible, avoir d'autres entiers que des 1 sur sa première ligne; s'il contribue à $\Gamma^aW \otimes \Gamma^bW$ pour $\Gamma^{a+b}W$, tous ses 1 doivent être sur sa première ligne, et en itérant ce raisonnement, tous ses i se trouvent sur sa i -ème ligne: il coïncide donc avec le tableau défini plus haut).
2. D'après la première partie du lemme, il suffit de supposer que $\Gamma^{c-\chi(w)}W$ est un facteur de $\Gamma^{a-\chi(u)}W \otimes \Gamma^bW \otimes \Gamma^{-\chi(v)}W$. Dans un premier temps, on effectuera le produit tensoriel de $\Gamma^{a-\chi(u)}$ par Γ^bW en multipliant d'abord le premier de ces facteurs par une puissance $(\det W)^l$ suffisamment grande pour que le poids obtenu soit dans \mathbb{N}^r (c'est-à-dire $l \geq u_1$), en appliquant ensuite à ce poids et à b la règle de Littlewood-Richardson, et en multipliant enfin chacun des termes obtenus par $(\det W)^{-l}$. Une telle multiplication par une puissance du déterminant revient simplement à décaler de l unités l'origine des abscisses pour les tableaux de base $a - \chi(u) + l\mathbf{1}$. D'après la règle de Littlewood-Richardson, chaque facteur $\Gamma^{\tilde{c}-\chi(\tilde{w})}W$ correspond donc à un b -tableau de base $a - \chi(u) + l\mathbf{1}$, de la forme suivante:



Les cases numérotées de ce tableau sont celles que l'on a hachurées: le poids a (respectivement $-\chi(u)$) correspond aux cases non hachurées situées à droite (respectivement à gauche) de la ligne pointillée, qui est elle-même l'image du bord gauche du tableau par translation de l unités. Le poids \tilde{c} (respectivement $-\chi(\tilde{w})$) désignant, comme on l'a remarqué, la partie positive (respectivement négative) du

poids total $\tilde{c} - \chi(\tilde{w})$ associé à ce tableau, correspond aux cases situées à droite (respectivement aux cases non hachurées situées à gauche) de la ligne pointillée. Le nombre total de cases numérotées étant égal, d'après la règle de Littlewood-Richardson, à $|b|$, on pourra donc écrire

$$|\tilde{c}| = |a| + b_+, \quad |\tilde{w}| = |u| - b_-, \quad \text{avec } |b| = b_+ + b_-,$$

b_+ et b_- désignant le nombre de cases hachurées situées respectivement à droite et à gauche de la ligne pointillée.

Reste à effectuer le produit tensoriel de $\Gamma^{\tilde{c}-\chi(\tilde{w})}W$ par $\Gamma^{-\chi(v)}W$: on montrerait de la même façon que, $\Gamma^{c-\chi(w)}W$ étant un facteur de ce produit, alors

$$|c| = |\tilde{c}| - v_-, \quad |w| = |\tilde{w}| + v_+, \quad \text{avec } |v| = v_+ + v_-.$$

D'où, finalement, $|c| = |a| + b_+ - v_- \leq |a| + |b|$, et $|w| = |u| - b_- + v_+ \leq |u| + |v|$. ♣

1.2 Variétés de drapeaux

1.2.1 Grassmanniennes et formule de Cauchy

Si V est un espace vectoriel complexe de dimension d , on notera $G_r(V)$ la grassmannienne des sous-espaces de codimension r de V : c'est une variété complexe compacte de dimension $n = r(d-r)$, quotient de l'espace $Isom(\mathbb{C}^d, V)$ des isomorphismes de \mathbb{C}^d sur V par l'action d'un sous-groupe parabolique de $Gl(\mathbb{C}^d)$. En particulier, l'action transitive du groupe linéaire $Gl(V)$ permet d'identifier le fibré tangent à la grassmannienne, au quotient du fibré trivial des endomorphismes de V par un sous-fibré W_r dont la fibre au-dessus d'un sous-espace V_r de codimension r de V , est l'espace des endomorphismes u de V tels que $u(V_r) \subset V_r$:

$$TG_r(V) \simeq End(V)/W_r.$$

Notons S le *fibré tautologique* sur $G_r(V)$, dont la fibre au-dessus de V_r est précisément ce sous-espace de V , et Q le *fibré quotient universel*, de rang r , quotient du fibré trivial $G_r(V) \times V$ par le fibré tautologique :

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow G_r(V) \times V \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

Le fibré $End(V)/W_r$ s'identifie alors naturellement à celui des homomorphismes de S dans Q :

$$TG_r(V) \simeq Q \otimes S^*.$$

Notons alors $\Omega_{G_r(V)}^p$ le fibré des p -formes holomorphes sur la grassmannienne, puissance extérieure p -ième du fibré cotangent. La formule de Cauchy permet de déduire de l'isomorphisme précédent la décomposition holomorphe suivante de ce fibré :

$$\Omega_{G_r(V)}^p \simeq \bigoplus_{u \in \sigma_{r,d-r}^p} \Gamma^{-\chi(u)} Q \otimes \Gamma^{u^*} S,$$

où $\sigma_{r,d-r}^p$ est le sous-ensemble de \mathbb{N}_{\geq}^r formé des poids u de module p tels que $u_1 \leq d-r$, de sorte que u^* puisse être considéré comme un élément de \mathbb{N}_{\geq}^{d-r} .

1.2.2 Variétés de drapeaux générales

Les grassmanniennes $G_r(V)$ sont les plus simples des variétés de drapeaux de l'espace vectoriel complexe V : si $s = (s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_m = d)$, on notera $M_s(V)$ la variété des drapeaux D de la forme

$$D = (V_{s_m} = 0 \subset V_{s_{m-1}} \subset \dots \subset V_{s_0} = V), \quad \text{où } \text{codim}_V V_{s_i} = s_i.$$

C'est une variété complexe compacte de dimension

$$N_s = \sum_{i=1}^{m-1} s_i (s_{i+1} - s_i),$$

ce que l'on peut vérifier, par exemple, en la considérant comme un empilement de fibrés en grassmanniennes.

De même que pour les grassmanniennes, on peut associer à chaque élément ϕ de l'ensemble $\text{Isom}(\mathbb{C}^d, V)$, si l'on note ϕ_i , $1 \leq i \leq d$, les images des vecteurs de la base canonique de \mathbb{C}^d , le drapeau défini par

$$V_{s_i} = \text{Vect}(\phi_{s_{i+1}}, \dots, \phi_d).$$

Ceci permet d'identifier $M_s(V)$ au quotient de $\text{Isom}(\mathbb{C}^d, V)$ par l'action du groupe parabolique B_s de $Gl(\mathbb{C}^d)$ constitué des isomorphismes $u = (u_{jk})_{1 \leq j, k \leq d}$ tels que $u_{jk} = 0$ s'il existe un entier i compris entre 1 et $m-1$, pour lequel $j \leq s_i < k$.

En particulier, si $s_i = i$ pour i compris entre 0 et d , on obtient la variété des drapeaux complets $M(V) = M_s(V)$, qui est le quotient de $\text{Isom}(\mathbb{C}^d, V)$ par l'action du sous-groupe de Borel de $Gl(\mathbb{C}^d)$ des matrices triangulaires inférieures inversibles.

L'action transitive de $Gl(V)$ sur $M_s(V)$ induit l'isomorphisme

$$TM_s(V) \simeq \text{End}(V)/W_s,$$

où W_s est le sous-fibré du fibré trivial des endomorphismes de V dont la fibre au-dessus du drapeau D est constituée des endomorphismes qui le laissent invariant. La forme de Killing $(g, h) \mapsto \text{trace}(gh)$ de l'algèbre de Lie semi-simple $\text{End}(V)$, étant non dégénérée, induit alors l'identification

$$T^*M_s(V) \simeq W_s^\perp,$$

et l'on vérifie que

$$W_{s,D}^\perp = \{g \in \text{End}(V), \ g(V_{s_{i-1}}) \subset V_{s_i}, \ 1 \leq i \leq m\}.$$

Notons alors E_i , $1 \leq i \leq m$, le fibré sur $M_s(V)$ dont la fibre au-dessus du drapeau D est le quotient $V_{s_{i-1}}/V_{s_i}$. Le fibré W_s^\perp admet une filtration par des fibrés \mathcal{F}_μ de la forme

$$\mathcal{F}_{\mu,D} = \{g \in \text{End}(V), \ g(V_{s_{i-1}}) \subset V_{s_{\mu(i)}}, \ 1 \leq i \leq m\},$$

filtration dont le quotient gradué associé est la somme

$$\mathcal{Q}_s = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq m} E_i^* \otimes E_j.$$

En conséquence, sa puissance extérieure p -ième admet de même une filtration dont le quotient est la puissance extérieure p -ième du quotient précédent, à savoir

$$\mathcal{Q}_s^p = \wedge^p \mathcal{Q}_s = \bigoplus_{\sum_{ij} p_{ij}=p} \bigotimes_{1 \leq i < j \leq m} \wedge^{p_{ij}} (E_i^* \otimes E_j);$$

ce que la formule de Cauchy permet finalement d'écrire

$$\mathcal{Q}_s^p = \bigoplus_{\sum_{ij} |u_{ij}|=p} \bigotimes_{1 \leq i < j \leq m} \Gamma^{-\chi(u_{ij})} E_i \otimes \Gamma^{u_{ij}^*} E_j.$$

Notons que pour que les fibrés $\Gamma^{-\chi(u_{ij})} E_i$ et $\Gamma^{u_{ij}^*} E_j$ soient tous deux non nuls, il faut que u_{ij} ait au plus $s_i - s_{i-1}$ composantes, inférieures ou égales à $s_j - s_{j-1}$. En particulier,

$$\sum_{i < j} |u_{ij}| \leq \sum_{i < j} (s_i - s_{i-1})(s_j - s_{j-1}) = N_s,$$

ce qui implique que pour $p = N_s$, $\mathcal{Q}_s^{N_s}$ se réduit à un unique terme correspondant à $u_{ij} = (s_j - s_{j-1})\mathbf{1}_{1,s_i-s_{i-1}}$: d'où l'on déduit l'isomorphisme

$$K_{M_s(V)} = Q_s^{\kappa(s)},$$

avec $\kappa(s) = \sum_{i=1}^m (s_i + s_{i-1} - d)\mathbf{1}_{s_{i-1}+1,s_i}$.

Remarque 1.9: Dans le cas d'une variété de drapeaux complets $M(V)$, les fibrés $E_i = Q_i$ sont des fibrés en droites, et les poids u_{ij} doivent donc être de module égal à zéro ou un. Le fibré quotient gradué associé à la filtration considérée de $\Omega_{M(V)}^p$ est donc une somme de fibrés en droites

$$\mathcal{Q}^p = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^d} \nu(u, p) Q^u,$$

où $Q^u = \otimes_{i=1}^d Q_i^{u_i}$, la multiplicité $\nu(u, p)$ étant égale au nombre d'écritures du poids u comme somme de p poids de la forme $-\mathbf{1}_i + \mathbf{1}_j$, $i < j$, deux à deux distincts.

1.2.3 Amplitude et k -amplitude

Un fibré vectoriel holomorphe E de rang r sur une variété complexe compacte X est dit:

1. *globalement engendré* si l'application canonique d'évaluation en un point

$$H^0(X, E) \longrightarrow E_x$$

est surjective pour tout $x \in X$;

2. *très ample* si les applications canoniques

$$\begin{aligned} H^0(X, E) &\longrightarrow E_x \oplus E_y, \quad x \neq y, \\ H^0(X, E) &\longrightarrow \mathcal{O}(E) \otimes \mathcal{O}_x \setminus \mathcal{M}_x^2 \end{aligned}$$

sont surjectives, \mathcal{M}_x étant l'idéal maximal de \mathcal{O}_x . La variété X peut alors être plongée dans la grassmannienne $G_r(V)$ des sous-espaces de codimension r de $V = H^0(X, E)$, en associant au point $x \in X$ l'espace des sections globales de E s'annulant en ce point: E s'identifie alors à l'image réciproque du fibré quotient universel par ce plongement;

3. *semi-ample* si les puissances symétriques $S^k E$ sont globalement engendrées lorsque k est assez grand;
4. *ample* si ces mêmes puissances symétriques sont très amples lorsque k est assez grand.

Si $\mathcal{O}_E(1)$ est le fibré quotient canonique sur $\mathbb{P}(E^*)$, variété des hyperplans de E , alors E est globalement engendré (respectivement semi-ample, ample) si et seulement si $\mathcal{O}_E(1)$ l'est sur $\mathbb{P}(E^*)$: c'est une conséquence des identités

$$\pi_* \mathcal{O}_E(k) \simeq S^k E,$$

où $\pi : \mathbb{P}(E^*) \longrightarrow X$ est la projection naturelle.

Si la variété X est projective, on dira que E est *numériquement effectif* (nef) si le fibré en droites $\mathcal{O}_E(1)$ est nef sur $\mathbb{P}(E^*)$ au sens usuel: pour toute courbe C de $\mathbb{P}(E^*)$,

$$\mathcal{O}_E(1).C \geq 0.$$

De même qu'un fibré en droites est ample si et seulement si il admet une métrique hermitienne de courbure strictement positive, on peut montrer qu'un fibré E est nef si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ et tout entier $m \geq M(\epsilon)$, $S^m E$ admet une métrique hermitienne dont la courbure vérifie

$$c(S^m E) \geq -m\epsilon\omega \otimes Id_{S^m E}$$

au sens de Griffiths, où ω est une métrique donnée sur X ([DPS]). Cette propriété permet par exemple de définir la notion de fibré vectoriel numériquement effectif sur une variété complexe compacte quelconque.

Le théorème de Kodaira-Nakano: L'archétype des théorèmes d'annulation, dont découleront tous ceux qui seront établis par la suite, est le fameux théorème de Kodaira-Nakano ([AN]): si L est un fibré en droites ample sur une variété complexe compacte X de dimension n , alors

$$H^{p,q}(X, L) = H^q(X, \Omega_X^p \otimes L) = 0 \quad \text{si } p + q > n.$$

1.2.4 Amplitude des fibrés homogènes sur les variétés de drapeaux

Un fibré est globalement engendré si et seulement si c'est un quotient d'un fibré trivial: ainsi, le fibré quotient Q sur la grassmannienne est globalement engendré, de même que le dual S^* du fibré tautologique (par contre, S n'a pas de section globale). A fortiori, $\det Q$ est globalement engendré, de même que le fibré tangent

$$TG_r(V) \simeq Q \otimes S^*.$$

Pour ce qui est des fibrés en droites homogènes sur les variétés de drapeaux, la proposition suivante ([De1], lemme (2.11)) généralise les propriétés classiques du fibré en droites canonique sur l'espace projectif:

Proposition 1.2.1

1. Q_s^a est globalement engendré sur $M_s(V)$ si et seulement si a est décroissant relativement à s ,
2. Q_s^a est ample (et même très ample) si et seulement si a est strictement décroissant relativement à s .

Dire qu'un poids a est décroissant (respectivement strictement décroissant) relativement à s signifie que pour tout entier i compris entre 1 et $m - 1$, $a_{s_i} \geq a_{s_i+1}$ (respectivement $a_{s_i} > a_{s_i+1}$, autrement dit $s(a) = s$).

En particulier, le déterminant $\det Q$ du fibré quotient sur la grassmannienne est très ample: le plongement associé n'est autre que le plongement de Plücker de la grassmannienne.

La notion de k -amplitude, introduite par Sommese ([So]), permet d'obtenir des résultats plus précis: un fibré en droites L sur X est dit k -ample si L^m est globalement engendré pour un entier $m > 0$, et si les fibres du morphisme correspondant de X dans l'espace projectif associé à $H^0(X, L^m)$, sont de dimension au plus égale à k . Un fibré vectoriel E sur X est dit k -ample si le fibré en droites $\mathcal{O}_E(1)$ est k -ample sur $\mathbb{P}(E^*)$. Notons qu'un fibré est ample si et seulement si il est 0-ample au sens de Sommese.

La k -amplitude des fibrés homogènes a été étudiée par Snow ([Sn1]): sur les variétés de drapeaux, on obtient par exemple le résultat suivant, qui généralise la proposition précédente:

Proposition 1.2.2

1. Le fibré $\otimes_{i=1}^m \Gamma^{a_i} E_i$ sur $M_s(V)$ est globalement engendré si et seulement si le poids $a = (a^1, \dots, a^m)$ est décroissant.
2. Si c'est le cas, ce fibré est $i_s(a)$ -ample, où l'indice du poids a relativement à s est défini par
$$i_s(a) = \text{Card}\{(i, j) \in \{1, \dots, d\}, \exists k \in \{1, \dots, m-1\}, i \leq s_k < j, \text{ et } a_i = a_j\}.$$

Exemples:

1. Sur la grassmannienne $G_r(V)$, un fibré de la forme $\Gamma^a Q \otimes \Gamma^b S$ est globalement engendré si et seulement si $a_r \geq b_1$, ample si et seulement si $a_r > b_1$. Si $a_r = b_1$, et si

$$a_h > a_{h+1} = \dots = a_r = b_1 = \dots = b_l > b_{l+1},$$

alors $\Gamma^a Q \otimes \Gamma^b S$ est $l(r-h)$ -ample.

2. En particulier, le fibré tangent

$$TG_r(V) = Q \otimes S^* = \Gamma^{1_1} Q \otimes \Gamma^{-1_{d-r}} S$$

est globalement engendré, et $(r-1)(d-r-1)$ -ample: on retrouve là une trace du fait que le fibré tangent de l'espace projectif est ample, et que c'est, comme l'a démontré Mori, la seule variété qui possède cette propriété.

3. Plus généralement, la décomposition des puissances extérieures du fibré cotangent de la grassmannienne donnée par la formule de Cauchy implique que $\Omega_{G_r(V)}^p \otimes (\det Q)^l$ est globalement engendré si et seulement si $l \geq \min(p+1, d)$, ample si et seulement si $l > \min(p+1, d)$ ([Sn2]).
4. Si Q_s^a est globalement engendré sur $M_s(V)$, les entiers qui définissent $s(a)$ font partie de ceux qui définissent s , autrement dit il existe une projection naturelle $\pi : M_s(V) \rightarrow M_{s(a)}(V)$. La proposition précédente implique alors que Q_s^a est k -ample, avec

$$k = \dim M_s(V) - \dim M_{s(a)}(V) = N_s - N_{s(a)}.$$

Ceci se déduit d'ailleurs aisément de l'identité $\pi_* Q_s^{ma} = Q_{s(a)}^{ma}$, qui implique que le morphisme de $M_s(V)$ dans l'espace projectif se factorise, pour tout $m \geq 1$, selon la projection π et le plongement de $M_{s(a)}(V)$ associé au fibré très ample $Q_{s(a)}^a$.

2 La méthode des diagrammes

2.1 Cohomologie de Dolbeault des fibrés associés au fibré quotient universel

Pour calculer des groupes de cohomologie du type $H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q)$, on combinera essentiellement la formule de Cauchy, qui permet de décomposer les puissances extérieures du fibré cotangent de la grassmannienne, avec un cas particulier d'un théorème de Bott ([B],[D]). Considérons sur la variété $M(V)$ des drapeaux complets de V , c'est-à-dire de la forme $(0 = V_d \subset \dots \subset V_0 = V)$, avec $\text{codim} V_i = i$, les fibrés quotients

$$\begin{aligned} Q_i &= V_{i-1}/V_i, \\ Q^a &= Q_1^{a_1} \otimes \dots \otimes Q_d^{a_d}, \quad a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Z}^d. \end{aligned}$$

R. Bott, à la suite des travaux de Borel et Weil ([BW]), a montré que le $Gl(V)$ -module des sections du fibré en droites Q^a est irréductible et de poids supérieur a :

$$H^0(M(V), Q^a) = \Gamma^a V.$$

En particulier, ce module est non trivial si et seulement si a est décroissant. Dans tous les cas, la cohomologie de Q^a compte au plus une composante irréductible:

Théorème (Bott): Soit $a \in \mathbb{Z}^d$, soit $c(d) = (1, 2, \dots, d)$, et définissons

$$\xi(a) = (a - c(d))^{\geq} + c(d),$$

où $(a - c(d))^{\geq}$ est la suite décroissante d'entiers obtenue par permutation de la suite $a - c(d)$. Alors, si $i(a)$ est le nombre d'inversions strictes de $a - c(d)$,

$$H^q(M(V), Q^a) = \delta_{q, i(a)} \Gamma^{\xi(a)} V,$$

où δ désigne le symbole de Kronecker.

Remarque 2.1: En particulier, la cohomologie du fibré quotient Q^a n'est pas nulle si et seulement si les composantes de $a - c(d)$ sont deux à deux distinctes: on dira alors que le poids a est *régulier*.

Preuve (d'après Demazure [D]): Considérons sur $M(V)$ le fibré, de rang 2, $E_i = V_{i-1}/V_{i+1}$, extension de Q_i par Q_{i+1} :

$$0 \rightarrow Q_{i+1} \rightarrow E_i \rightarrow Q_i \rightarrow 0.$$

Les puissances symétriques de E_i donnent lieu pour tout entier naturel k aux suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow S^{k-1} E_i \otimes Q_{i+1} &\rightarrow S^k E_i \rightarrow Q_i^k \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow Q_{i+1}^{k+1} \rightarrow S^{k+1} E_i &\rightarrow S^k E_i \otimes Q_i \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Tensorisons ces deux suites exactes par le fibré en droites Q^b , avec $b \in \mathbb{Z}^d$, et la seconde par Q_i^{-1} : il vient

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow S^{k-1}E_i \otimes Q^{b+1_{i+1}} &\rightarrow S^kE_i \otimes Q^b \rightarrow Q^{b+k1_i} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow Q^{b-1_i+(k+1)1_{i+1}} &\rightarrow S^{k+1}E_i \otimes Q^{b-1_i} \rightarrow S^kE_i \otimes Q^b \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Soit alors $M_i(V)$ la variété des drapeaux incomplets de V , auxquels manque simplement, pour qu'ils soient complets, un sous-espace de V de codimension i , et soit π_i la projection naturelle de $M(V)$ sur $M_i(V)$. Si $D \in M_i(V)$, alors $\pi_i(D) \simeq \mathbb{P}^1$, et le fibré E_i est trivial sur $\pi_i^{-1}(D)$: si l'on suppose le poids b tel que $b_i = b_{i+1}$, il en est de même de Q^b . De plus,

$$Q_{i+1|\pi_i^{-1}(D)} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1), \quad Q_{i|\pi_i^{-1}(D)} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1).$$

Or $H^*(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = 0$: donc la cohomologie de tout fibré dont la restriction aux fibres de π_i est le produit tensoriel d'un fibré trivial par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ doit être identiquement nulle. En particulier,

$$\begin{aligned} H^*(M(V), S^{k-1}E_i \otimes Q^{b+1_{i+1}}) &= 0, \\ H^*(M(V), S^{k+1}E_i \otimes Q^{b-1_i}) &= 0. \end{aligned}$$

Les suites exactes longues associées aux deux suites exactes courtes qui précèdent induisent donc les isomorphismes

$$\begin{aligned} H^q(M(V), S^kE_i \otimes Q^b) &= H^q(M(V), Q^{b+k1_i}), \\ H^q(M(V), S^kE_i \otimes Q^b) &= H^{q+1}(M(V), Q^{b-1_i+(k+1)1_{i+1}}). \end{aligned}$$

Si l'on pose $a = b - 1_i + (k+1)1_{i+1}$, donc $k = a_{i+1} - a_i - 2$, il vient

$$b + k1_i = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1} - 1, a_i + 1, a_{i+2}, \dots, a_r) = \tau_i(a - c(d)) + c(d),$$

où τ_i est la transposition $(i, i+1)$. On obtient donc, sous l'hypothèse $a_i - a_{i+1} \leq -2$, l'isomorphisme

$$H^{q+1}(M(V), Q^a) = H^q(M(V), Q^{\tau_i(a-c(d))+c(d)}).$$

De plus, si $a_i - a_{i+1} = -1$, la restriction de Q^a aux fibres de π_i étant isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$,

$$H^*(M(V), Q^a) = 0.$$

L'hypothèse $a_i - a_{i+1} = -1$ signifie que les composantes d'indices i et $i+1$ de $a - c(d)$ sont égales, alors que si $a_i - a_{i+1} \leq -2$, $a - c(d)$ présente une inversion entre ses composantes d'indices i et $i+1$. Si l'on utilise $i(a)$ fois l'isomorphisme précédent, de manière à éliminer ces inversions par transpositions successives, il vient

$$H^q(M(V), Q^a) = H^{q-i(a)}(M(V), Q^{\xi(a)})$$

si les composantes de $a - c(d)$ sont deux à deux distinctes, autrement dit si a est régulier. En particulier, si l'on considère le poids a' tel que $a' - c(d)$ soit strictement croissant, et tel que $\xi(a') = \xi(a)$, alors $i(a') = \frac{1}{2}d(d-1) = \dim M(V)$, ce qui implique que

$$H^q(M(V), Q^{\xi(a)}) = 0 \quad \text{si } q \geq 1.$$

On obtient donc, en général, l'isomorphisme suivant, qui démontre le théorème de Bott:

$$H^q(M(V), Q^a) = \delta_{q, i(a)} H^0(M(V), Q^{\xi(a)}) = \delta_{q, i(a)} \Gamma^{\xi(a)} V.$$

Sur une variété de drapeaux incomplets $M_s(V)$ de la forme $(0 = V_{s_m} \subset \cdots \subset V_{s_0} = V)$, on définit de la même façon que sur une variété de drapeaux complets les fibrés en droites

$$\begin{aligned} Q_{s,i} &= \det(V_{s_{i-1}}/V_{s_i}) = \det E_i, \\ Q_s^a &= Q_{s,1}^{a_{s_1}} \otimes \cdots \otimes Q_{s,m}^{a_{s_m}}, \end{aligned}$$

où le poids $a \in \mathbb{Z}^d$ est supposé tel que $a_{s_{i-1}+1} = \cdots = a_{s_i}$ pour tout entier i compris entre 1 et m . Le théorème de Bott permet également de déterminer la cohomologie de ces fibrés en droites:

Corollaire 2.1.1 *Pour tout poids $a \in \mathbb{Z}^d$ tel que $a_{s_{i-1}+1} = \cdots = a_{s_i}$ si i est compris entre 1 et m ,*

$$H^q(M_s(V), Q_s^a) = \delta_{q, i(a)} \Gamma^{\xi(a)} V.$$

Preuve: Soit π_s la projection naturelle de $M(V)$ sur $M_s(V)$, et considérons les fibrés images directes par π_s du fibré en droites Q^a sur $M(V)$. Si $D = (0 = V_{s_m} \subset \cdots \subset V_{s_0} = V) \in M_s(V)$, la fibre $\pi_s^{-1}(D)$ s'identifie au produit des variétés de drapeaux complets $M(V_{s_0}/V_{s_1}) \times \cdots \times M(V_{s_{m-1}})$, et la restriction de Q^a à cette fibre, au produit des fibrés en droites $Q^{a_{s_i}}$, définis sur $M(V_{s_{i-1}}/V_{s_i})$ pour i compris entre 1 et m . D'après le théorème de Bott, chacun de ces fibrés n'a de cohomologie qu'en degré zéro, et

$$H^0(M(V_{s_{i-1}}/V_{s_i}), Q^{a_{s_i} \mathbf{1}}) = \det(V_{s_{i-1}}/V_{s_i})^{a_{s_i}}.$$

La formule de Künneth implique par conséquent que les fibrés images directes du fibré en droites Q^a par π_s soient donnés par la formule

$$R_{\pi_s*}^k Q^a = \delta_{k,0} Q_s^a.$$

La suite spectrale de Leray associée dégénère donc en E_2 , d'où l'isomorphisme

$$H^q(M_s(V), Q_s^a) = H^q(M(V), Q^a).$$

De façon tout à fait analogue, le théorème de Bott permet de déterminer, sur la grassmannienne, les groupes de cohomologie des fibrés associés au fibré quotient universel Q et au fibré tautologique S :

Corollaire 2.1.2 *Si a et b sont respectivement des r et $(d - r)$ -uplets décroissants d'entiers, alors*

$$H^q(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes \Gamma^b S) = \delta_{q, i(a,b)} \Gamma^{\xi(a,b)} V.$$

Preuve: Soit π la projection naturelle de $M(V)$ sur $G_r(V)$, et considérons les fibrés images directes par π du fibré en droites $Q^{(a,b)}$ sur $M(V)$. Si $V_r \in G_r(V)$, $\pi^{-1}(V_r) = M(V/V_r) \times M(V_r)$, et le fibré $Q^{(a,b)}$ restreint à cette fibre s'identifie au produit des fibrés quotients canoniques Q^a et Q^b définis respectivement au-dessus des variétés de drapeaux $M(V/V_r)$ et $M(V_r)$. D'après la formule de Künneth,

$$\begin{aligned} R_{\pi_*}^k Q_{|V_r}^{(a,b)} &= H^k(\pi^{-1}(V_r), Q^{(a,b)}) \\ &= \bigoplus_{i+j=k} H^i(M(V/V_r), Q^a) \otimes H^j(M(V_r), Q^b). \end{aligned}$$

Comme a et b sont décroissants, le théorème de Bott implique donc que

$$R_{\pi_*}^k Q^{(a,b)} = \delta_{k,0} \Gamma^a Q \otimes \Gamma^b S,$$

de sorte que la suite spectrale de Leray associée à $Q^{(a,b)}$ et à la projection π dégénère en E_2 . D'où l'isomorphisme

$$H^q(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes \Gamma^b S) = H^q(M(V), Q^{(a,b)}),$$

et, encore d'après le théorème de Bott, le résultat annoncé. ♣

Sur la grassmannienne, le théorème de Bott peut être explicité sous la forme suivante: *pour déterminer la cohomologie du produit tensoriel de fibrés associés au fibré quotient et tautologique pour des poids a et b , il faut les concaténer, ordonner le poids obtenu par soustraction de $c(d)$, et ajouter $c(d)$ au résultat de cette opération.* Le degré auquel correspond le module dont on obtient ainsi le poids dominant, est le nombre d'inversions effectuées.

Le théorème de Bott, et la décomposition des puissances extérieures du fibré cotangent de la grassmannienne, donnée par la formule de Cauchy, permettent d'expliciter en toute généralité les groupes de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q)$ du fibré quotient: si $n_{a,b}(e)$ désigne la multiplicité de $\Gamma^e Q$ dans le produit tensoriel $\Gamma^a Q \otimes \Gamma^b Q$, le corollaire précédent mène immédiatement au résultat suivant:

Proposition 2.1.1 *Les groupes de cohomologie des fibrés associés au fibré universel sur la grassmannienne sont donnés par la formule suivante:*

$$H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q) = \bigoplus_{\substack{u \in \sigma_{r,d-r}^p \\ e \in i_{u*}^{-1}(q)}} n_{a, -\chi(u)}(e) \Gamma^{\xi(e, u^*)} V,$$

où $i_{u^*}^{-1}(q) = \{e \in \mathbb{Z}^r, \quad q = i(e, u^*)\}$.

Rappelons que l'on a désigné par $\sigma_{r,s}^k$ l'ensemble des r -uplets décroissants d'entiers naturels, de module k , et dont les composantes sont inférieures ou égales à s .

Remarque 2.2: Bien entendu, cette formule se généralise au calcul de la cohomologie de Dolbeault des fibrés de la forme $\Gamma^a Q \otimes \Gamma^b S$:

$$H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes \Gamma^b S) = \bigoplus_{\substack{u \in \sigma_{r,d-r}^p \\ i(e, f) = q}} n_{a, -\chi(u)}(e) n_{b, u^*}(f) \Gamma^{\xi(e, f)} V.$$

2.2 Tableaux et diagrammes

Dans le cas du déterminant de Q et de ses puissances, Snow ([Sn2]) a proposé, pour déterminer les groupes de cohomologie de Dolbeault correspondants, une méthode diagrammatique commode et qu'il est facile de généraliser au cas des fibrés associés $\Gamma^a Q$, où le poids a sera toujours supposé tel que $a_r = 0$, tensorisés par une puissance du déterminant de Q . D'après la proposition précédente, en effet,

$$\begin{aligned} H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l) &= \bigoplus_{\substack{u \in \sigma_{r,d-r}^p \\ e \in i_{u^*}^{-1}(q)}} n_{a+l\mathbf{1}, -\chi(u)}(e) \Gamma^{\xi(e, u^*)} V, \\ &= \bigoplus_{\substack{u \in \sigma_{r,d-r}^p \\ e' + (l-d+r)\mathbf{1} \in i_{u^*}^{-1}(q)}} n_{a, u'}(e') \Gamma^{\xi(e' + (l-d+r)\mathbf{1}, u^*)} V, \end{aligned}$$

où $u' = (d-r)\mathbf{1} - \chi(u)$, et puisque les identités $n_{a+l\mathbf{1}, b}(e + l\mathbf{1}) = n_{a, b+l\mathbf{1}}(e + l\mathbf{1}) = n_{a, b}(e)$ impliquent l'égalité

$$n_{a, u'}(e') = n_{a+l\mathbf{1}, -\chi(u)}(e' + (l-d+r)\mathbf{1}).$$

Les multiplicités $n_{a, u'}(e')$ sont déterminées par la règle de Littlewood-Richardson, selon laquelle les composantes de $\Gamma^a Q \otimes \Gamma^{u'} Q$ sont en correspondance avec les a -tableaux numérotés de base u' admissibles: $e' = u' + c'$ correspond au poids total d'un tel tableau.

Reste donc à déterminer la contribution d'un tableau numéroté à la cohomologie de Dolbeault du fibré $\Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l$, contribution qui, avec les notations précédentes et d'après le théorème de Bott, est égale à $\Gamma^{\xi(u' + c' + (l-d+r)\mathbf{1}, u^*)} V$. Tout d'abord, pour que cette contribution ne soit pas nulle, il est nécessaire que le poids $(u' + c' + (l-d+r)\mathbf{1}, u^*) = (l\mathbf{1} + c' - \chi(u), u^*)$ soit régulier: ce qui signifie que pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{N}_r^* \times \mathbb{N}_{d-r}^*$,

$$l + c'_i - u_{r+1-i} - i \neq u_j^* - (r + j),$$

autrement dit, si l'on change i en $r+1-i$, et si l'on pose $c = \chi(c')$ (χ étant la permutation de nombre d'inversions maximal), $l \neq u_i + u_j^* - i - j + 1 - c_i$. On note

$$h_{i,j}^u = u_i + u_j^* - i - j + 1$$

les *longueurs d'équerres* ("hook numbers") du diagramme de Young associé à u : ces nombres s'interprètent comme la somme des distances de la case située à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ième colonne de ce diagramme à son bord, respectivement sur la i -ème ligne et la j -ième colonne (distances comptées positivement si l'on se trouve à l'"intérieur" du diagramme, négativement sinon), moins une unité. En particulier, les longueurs d'équerres sont strictement positives à l'intérieur du diagramme associé à u , strictement négatives à l'extérieur, et prennent les valeurs 1 et -1 en ses coins respectivement intérieurs et extérieurs.

On dira d'autre part que les poids u et c définissent un a -diagramme \mathcal{D} de dimensions $r \times (d - r)$, auquel seront également associées des longueurs d'équerres

$$h_{i,j}^{\mathcal{D}} = h_{i,j}^u - c_i.$$

Le poids $(l\mathbf{1} + c' - \chi(u), u^*)$ sera donc régulier si et seulement si pour tout couple (i, j) ,

$$l \neq h_{i,j}^{\mathcal{D}},$$

autrement dit si l'entier l n'apparaît pas parmi les longueurs d'équerres du diagramme \mathcal{D} : on dira alors que \mathcal{D} est l -admissible. Les composantes d'indices $r + 1 - i$ et $r + j$ du poids $(l\mathbf{1} + c' - \chi(u), u^*) - c(d)$ donneront alors lieu à une inversion si et seulement si

$$l < h_{i,j}^{\mathcal{D}}.$$

D'après le théorème de Bott, \mathcal{D} contribuera donc à la cohomologie de $\Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l$ en bidegré (p, q) , pour

$$p = |u|, \quad q = \text{card}\{(i, j) \in \mathbb{N}_r^* \times \mathbb{N}_{d-r}^*, \quad h_{i,j}^{\mathcal{D}} > l\}.$$

On dira que le diagramme \mathcal{D} lui-même est de bidegré (p, q) .

Exemple: Reprenons le tableau de l'exemple du paragraphe 1.1.1, où $r = 6$ et $d = 13$, le poids b correspondant à $(d - r)\mathbf{1} - \chi(u)$: de sorte que le diagramme de Young associé à u s'obtient en renversant ce tableau. Le poids c correspond au nombre de cases ajoutées à chaque ligne, de bas en haut, donc $c = (0, 1, 2, 2, 3, 2)$: et les longueurs d'équerres du diagramme $\mathcal{D} = (u, c)$ se déduisent de ceux de u en leur ôtant les composantes de c .

12	11	9	8	5	3	1
9	8	6	5	2	0	
6	5	3	2	-1		
4	3	1	0			
2	1	-1	-2			
0	-1					

Le diagramme \mathcal{D} est donc 7-admissible en bidegré $(p, q) = (28, 6)$ (on n'y a fait figurer que les longueurs d'équerres intérieures au diagramme de Young associé à u , les autres étant négatives).

Remarque 2.3: De même que la proposition qui conclut le paragraphe précédent se généralise au cas des fibrés de la forme $\Gamma^a Q \otimes \Gamma^b S$, on pourrait étendre cette méthode de diagrammes à l'étude de la cohomologie de Dolbeault de ces fibrés, en considérant des diagrammes $\mathcal{D} = (u, c, e)$, avec des conditions traduisant le fait que $\Gamma^{u^*+e} S$ est un facteur de $\Gamma^{u^*} S \otimes \Gamma^b S$, et des longueurs d'équerres

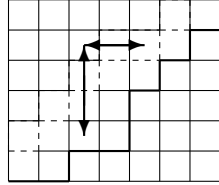
$$h_{i,j}^{\mathcal{D}} = h_{i,j}^u - c_i + e_j.$$

La différence des signes des c_i et e_j tient au fait que la dualité de V et V^* échange r et $d - r$, et Q et S^* , et non pas S . On utilisera cette remarque dans la seconde partie de cette thèse.

Remarque 2.4:

- a.* Pour visualiser les entiers $h_{i,j}^{\mathcal{D}}$ sur le diagramme \mathcal{D} , on peut considérer la ligne obtenue en translatant le bord du diagramme de Young associé à u de c_i unités à gauche sur la i -ème ligne de ce diagramme: $h_{i,j}^{\mathcal{D}}$ est alors la somme de la distance horizontale de la case de coordonnées i, j avec ce bord translaté, et de sa distance verticale avec le bord d'origine (avec les mêmes conventions de signe que précédemment), moins une unité. Le poids $u' + c'$ (autrement dit le poids $u - c$) étant nécessairement décroissant, les longueurs d'équerres $h_{i,j}^{\mathcal{D}}$ sont strictement monotones sur chaque ligne et chaque colonne de \mathcal{D} (et diminuent, bien entendu, vers la droite et vers le bas du diagramme).

Exemple:



Le bord du diagramme de Young associé à $u = (7, 6, 5, 4, 4, 2)$, avec $r = 6$ et $d = 13$, est en trait fort, le bord translaté de $c = (0, 1, 2, 2, 3, 2)$ est en trait pointillé, et la longueur d'équerre $h_{2,3}^{\mathcal{D}}$ du diagramme \mathcal{D} associé est égale au nombre de cases hachurées.

- b.* Un a -diagramme $\mathcal{D} = (u, c)$ peut provenir de plusieurs a -tableaux de base u' distincts, ce qui conduit à lui associer une certaine multiplicité. De plus, un tel a -tableau s'obtiendra en retournant le diagramme de Young associé à u (ce qui fait apparaître le diagramme de Young associé à $u' = (d - r)\mathbf{1} - \chi(u)$), et en lui ajoutant des cases numérotées selon la règle de Littlewood-Richardson. Le bord du diagramme obtenu sera bien sûr, après retournement, le bord translaté dont il vient d'être question. On pourra donc associer à un a -diagramme, selon les circonstances, deux types d'entiers, à ne bien sûr pas confondre.

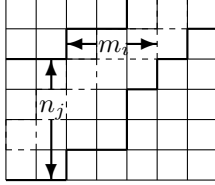
c. On pourra calculer le poids de la contribution du a -diagramme l -admissible $\mathcal{D} = (u, c)$ au groupe de cohomologie $H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l)$, soit en calculant directement $\xi(l\mathbf{1} - \chi(u - c), u^*)$, soit, plus simplement, en tenant compte des remarques suivantes. Si la $(r + 1 - i)$ -ième composante du poids $(l\mathbf{1} - \chi(u - c), u^*)$, à savoir $l - u_i + c_i$, participe à q_i inversions, on commencera, lors du calcul de $\xi(l\mathbf{1} - \chi(u - c), u^*)$, par lui ôter $r + 1 - i$ unités, puis on la décalera de q_i unités vers la droite, pour enfin lui ajouter $r + 1 - i + q_i$ unités: elle sera donc devenue $l - u_i + c_i + q_i$. De même, si u_j^* participe à q_j^* inversions, cette composante sera changée en $u_j^* - q_j^*$. Les composantes du poids $\xi(l\mathbf{1} - \chi(u - c), u^*)$, qui est décroissant, sont donc les entiers $l - u_i + c_i + q_i = l - m_i$, $i \in \mathbb{N}_r^*$, et $u_j^* - q_j^* = n_j$, $j \in \mathbb{N}_{d-r}^*$.

Si l est par exemple positif, les entiers m_i et n_j sont faciles à visualiser sur le diagramme \mathcal{D} : en effet,

$$q_i = \text{card}\{j \in \mathbb{N}_{d-r}^*, h_{i,j}^{\mathcal{D}} > l\}, \quad q_j^* = \text{card}\{i \in \mathbb{N}_r^*, h_{i,j}^{\mathcal{D}} > l\},$$

de sorte que si l'on considère le bord du diagramme formé par les cases dont les longueurs d'équerres sont strictement supérieures à l , m_i (respectivement n_j) n'est autre que la distance, sur la i -ème ligne (respectivement la j -ième colonne), de ce bord au bord translaté (respectivement au bord original) du diagramme de Young associé à u .

Exemple:



Les entiers m_i et n_j associés à \mathcal{D} sont donnés par $m = (3, 3, 3, 2, 1, 0)$ et $n = (4, 4, 4, 4, 3, 2, 1)$. Comme $7\mathbf{1} - m = (4, 4, 4, 5, 6, 7)$, le poids associé à \mathcal{D} est donc $(7\mathbf{1} - m, n)^{\geq} = (7, 6, 5, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 2, 1)$.

Remarque 2.5: A. Lascoux propose dans [L3] une méthode différente, mais sensiblement équivalente, pour mettre en évidence les composantes irréductibles des groupes de cohomologie des fibrés homogènes sur la grassmannienne. Considérons par exemple les puissances du déterminant du fibré quotient. D'après la formule de Cauchy et le théorème de Bott, les composantes irréductibles de $H^{p,q}(G_r(V), (\det Q)^l)$ correspondent aux poids décroissants u de module p tels que la suite $(l\mathbf{1} - \chi(u), u^*) - c(d)$ soit constituée d'entiers deux à deux distincts, et contienne q inversions. Cette suite s'écrit

$$(l - u_r - 1, \dots, l - u_1 - r, \underbrace{-1, \dots, -u_r}_{u_r}, \dots, \underbrace{-r - u_2 - 1, \dots, -r - u_1 + 1}_{u_1 - u_2}, \underbrace{-r - u_1 - 1, \dots, -d}_{d - r - u_1}),$$

et Lascoux remarque qu'à une permutation près, elle coïncide avec la suite $w_l(u) - c(d)$, où

$$w_l(u) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{u_r}, \underbrace{l, \dots, l}_{u_1 - u_2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{d - r - u_1}, \underbrace{l, 0, \dots, 0}_{d - r - u_1}).$$

La suite $w_l(u) - c(d)$ a des composantes deux à deux distinctes si et seulement si la suite $w_l(u)$ n'a pas de facteur de la forme

$$0, \underbrace{*, \dots, *}_{l-1}, l,$$

ce qui permet de mettre plus facilement en évidence les termes non nuls de la somme de la proposition 2.1.1.

Examinons comment cette présentation se relie aux méthodes de diagrammes que nous avons utilisées:

- la suite $w_l(u)$ se déduit mécaniquement du diagramme de Young associé à u : il suffit pour cela de se placer au coin inférieur gauche de ce diagramme, et d'en parcourir son bord jusqu'à son coin supérieur droit en associant un zéro à chaque déplacement horizontal, et un l à chaque déplacement vertical; $w_l(u)$ définit donc bien une bijection entre suites de longueur d contenant r fois l'entier l et $d - r$ fois zéro, et diagrammes de Young de dimensions $r \times (d - r)$;
- le nombre d'inversions q de la suite $(l\mathbf{1} - \chi(u), u^*) - c(d)$, et le nombre d'inversions q' de la suite $w_l(u) - c(d)$, sont liés si l est positif par la relation

$$q' = p - q;$$

q' s'obtient en comptant, pour chaque entier l de $w_l(u)$, le nombre de zéros qui figurent parmi les $l - 1$ entiers qui le précèdent;

- dans le cas des groupes $H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l)$, le produit tensoriel par $\Gamma^a Q$ revient à ajouter un certain nombre d'unités (données, dans nos notations, par le poids c) aux composantes de $w_l(u)$ égales à l , avec des conditions de compatibilité avec la règle de Littlewood-Richardson. Dans le cas des puissances symétriques, par exemple, on vérifie que ces conditions peuvent s'énoncer de la façon suivante: *le nombre d'unités ajoutées à un entier l ne peut excéder le nombre de zéros qui le séparent de l'entier l immédiatement précédent.*

Exemple: La suite $w_7(u)$ associée au poids u de l'exemple précédent est

$$w_7(u) = (0, 0, 7, 0, 0, 7, 7, 0, 7, 0, 7, 0, 7),$$

et ne contribue pas à la cohomologie de $(\det Q)^7$ puisque le septième entier précédant son quatrième 7 est un zéro. Par contre, si l'on ajoute aux 7 de cette suite, de la droite vers la gauche, les composantes de $c = (0, 1, 2, 2, 3, 2)$, on obtient la suite

$$(0, 0, 9, 0, 0, 10, 9, 0, 9, 0, 8, 0, 7),$$

qui n'a pas de facteur de la forme $i, \underbrace{*, \dots, *}_{j-i-1}, j$.

Comparer la commodité des deux présentations, en termes de diagrammes ou de suites de l et de zéros, semble relativement délicat. Une suite de d entiers est bien sûr un objet plus simple qu'un tableau de dimensions $r \times (d - r)$, et la méthode de Lasoux permet par exemple d'engendrer plus facilement les composantes irréductibles des groupes de cohomologie des puissances du déterminant du fibré quotient (cf. cependant nos remarques sur ses puissances d'exposant petit). Toutefois, un tableau nous semble un objet plus facile à manipuler, parce que plus visuel: s'il contient trop d'information redondante pour donner lieu à un traitement algorithmique commode, il paraît mieux se prêter aux raisonnements combinatoires qui vont suivre. Avec sans doute un inconvénient majeur: ce qui parfois saute aux yeux sur un diagramme est rarement facile à formuler, et l'évidence visuelle disparaît aisément sous la masse des notations. C'est pourquoi nous nous sommes efforcés de multiplier les dessins, en espérant, avec malheureusement des chances de succès très incertaines, qu'ils puissent éclairer nos démonstrations.

2.3 Premières applications

On donne ici une illustration élémentaire de la méthode des diagrammes, en démontrant quelques propriétés simples des groupes de cohomologie de Dolbeault des fibrés associés au fibré quotient universel, en particulier de ses puissances symétriques et extérieures.

2.3.1 Une propriété générale

Proposition 2.3.1 (cf [Sn2], Théorème 3.4) *Soit $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$, alors*

$$H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l) = 0$$

dès que l'une des conditions suivantes est vérifiée:

1. $l \geq 0$ et $q > p$;
2. $l \geq 1$ et $q > \frac{r-1}{r}p$.

Preuve:

1. Considérons un a -diagramme l -admissible $\mathcal{D} = (u, c)$ de bidegré (p, q) . Les longueurs d'équerres $h_{i,j}^u$ sont positives seulement sur les cases intérieures au diagramme de Young associé à u , cases qui sont au nombre de $|u| = p$. Comme pour tout couple (i, j) ,

$$h_{i,j}^{\mathcal{D}} \leq h_{i,j}^u,$$

les cases de \mathcal{D} dont les longueurs d'équerres sont strictement supérieures à l'entier naturel l , sont a fortiori en nombre inférieur à p , autrement dit $q \leq p$.

2. Si l est de plus supposé non nul, les longueurs d'équerres $h_{i,j}^u$ des coins internes du diagramme de Young associé à u étant égaux à 1, les entiers $h_{i,j}^{\mathcal{D}}$ associés à ces coins internes sont a fortiori inférieures à l . Mais les longueurs d'équerres de \mathcal{D} forment une suite d'entiers consécutifs sur chaque segment horizontal du bord de ce diagramme de Young, et doivent donc toutes, \mathcal{D} étant supposé l -admissible, être strictement inférieures à l . Si l'on note par exemple s le nombre de cases de l'union des segments horizontaux de ce bord, il vient $q \leq p - s$, et comme $p \leq rs$, on obtient bien $q \leq \frac{r-1}{r}p$. \clubsuit

2.3.2 Puissances symétriques et extérieures

Les énoncés qui suivent concernent les puissances symétriques et extérieures du fibré quotient Q , éventuellement tensorisées par son déterminant: on donnera d'abord des conditions nécessaires et suffisantes de non-annulation de leurs groupes de cohomologie, avant de s'intéresser de plus près aux composantes de ces groupes.

Rappelons les formules de Pieri, qui expriment les produits tensoriels d'un fibré associé à Q pour un poids a quelconque, par une de ses puissances symétriques ou extérieures:

$$\Gamma^a Q \otimes S^k Q = \bigoplus_{\substack{c \in \mathbb{N}^r, \quad |c| = k, \\ c_i \leq a_{i-1} - a_i}} \Gamma^{a+c} Q, \quad (S)$$

$$\Gamma^a Q \otimes \wedge^k Q = \bigoplus_{\substack{c \in \{0,1\}^r, \\ |c| = k}} \Gamma^{a+c} Q. \quad (\wedge)$$

Proposition 2.3.2 *Si k est un entier naturel non nul, alors*

1. $H^{p,q}(G_r(V), S^k Q) \neq 0$ si et seulement si

$$p - \frac{p}{r} \leq q \leq \min(p, n - \frac{n}{r}) \quad \text{et} \quad k > p - q.$$

2. $H^{p,q}(G_r(V), S^k Q \otimes \det Q) \neq 0$ si et seulement si

$$p - \frac{n}{r} \leq q \leq p - \frac{p}{r} \quad \text{et} \quad k \geq p - q.$$

Preuve:

1. Soit $\mathcal{D} = (u, c)$ un $k\mathbf{1}_1$ -diagramme 0-admissible de bidegré (p, q) , et considérons un coin intérieur du diagramme de Young associé à u , coin situé sur la i -ème ligne, et donc la u_i -ième colonne de ce diagramme. Comme on l'a remarqué, $h_{i,u_i}^u = 1$, et ceci implique que les longueurs d'équerres de la i -ème ligne de \mathcal{D} forment entre les colonnes d'indices compris entre $u_{i+1} + 1$ et u_i une suite consécutive d'entiers, allant de $h_{i,u_{i+1}+1}^{\mathcal{D}} = u_i - u_{i+1} - c_i$ à $h_{i,u_i}^{\mathcal{D}} = 1 - c_i$.

D'après la première formule de Pieri (S), les poids c et u doivent être tels que $c_j \leq u_j - u_{j+1}$ si $j < r$, donc $h_{i,u_{i+1}+1}^{\mathcal{D}}$ doit être positif. \mathcal{D} étant supposé 0-admissible, ceci implique que $h_{i,u_i}^{\mathcal{D}}$ soit strictement positif, donc que $c_i = 0$: $u - c$ étant, de plus, décroissant, ceci implique que $c = k\mathbf{1}_r$. De plus, les longueurs d'équerres $h_{i,j}^u$ étant toutes non nulles, et coïncidant avec les longueurs d'équerres de \mathcal{D} sur ses $r - 1$ premières lignes, la 0-admissibilité de \mathcal{D} est alors équivalente à l'inégalité $h_{r,1}^{\mathcal{D}} < 0$, autrement dit à

$$u_r + u_1^* < k + r.$$

Notons que cette inégalité est elle-même équivalente à $u_r < k$, puisque si $u_r = 0$, u_1^* est strictement inférieur à r , donc a fortiori à $r + k$, alors que si u_r n'est pas nul, $u_1^* = r$. De plus, si cette condition est vérifiée, toutes les longueurs d'équerres de \mathcal{D} intérieures au diagramme de Young associé à u sont positives, exceptés celles de sa dernière ligne, de sorte que

$$p - q = u_r \leq d - r.$$

Comme $ru_r \leq p \leq u_r + (r - 1)(d - r) = n - d + r + u_r$, et comme ces conditions sont équivalentes à l'existence d'un poids décroissant u tel que $|u| = p$, et dont la composante u_r est fixée, il existe un $k\mathbf{1}_1$ -diagramme 0-admissible de bidegré (p, q) si et seulement si $0 \leq p - q \leq d - r$ et $r(p - q) \leq p \leq p - q + n - d + r$, autrement dit $p - d + r \leq q \leq p$, $(r - 1)p \leq rq$, $q \leq n - d + r$, et $k > p - q$. La proposition s'ensuit, si l'on remarque que

$$p - d + r = p - \frac{n}{r} \leq p - \frac{p}{r} = \frac{r - 1}{r}p.$$

2. Avec les mêmes notations que précédemment, le diagramme \mathcal{D} étant à présent supposé 1-admissible doit avoir toutes ses longueurs d'équerres $h_{i,u_{i+1}+1}^{\mathcal{D}}, \dots, h_{i,u_i}^{\mathcal{D}}$ strictement inférieures à 1, ce qui implique que $c_i = u_i - u_{i+1}$ si $i < r$, et en particulier

$$u_1 - u_r = c_1 + \dots + c_{r-1} = k - c_r \leq k.$$

De plus, les longueurs d'équerres de la r -ième ligne de \mathcal{D} doivent être négatives ou nulles, autrement dit, puisque $h_{r,1}^{\mathcal{D}} = u_r + u_1^* - r - c_r$, $u_r + u_1^* \leq c_r + r$, et les deux inégalités précédentes impliquent que

$$u_1 + u_1^* \leq k + r.$$

Réciproquement, si u vérifie les inégalités $u_1 - u_r \leq k$ et $u_1 + u_1^* \leq k + r$, il existe un unique poids c tel que $\mathcal{D} = (u, c)$ définisse un $k\mathbf{1}_1$ -diagramme 1-admissible, et cela en bidegré (p, q) tel que

$$p - q = u_1 \leq d - r.$$

Notons que ces deux inégalités sont équivalentes à $u_1 \leq k$: si $u_r = 0$, alors $u_1^* < r$ et l'inégalité $u_1 \leq k$ implique $u_1 + u_1^* \leq k + r$, tandis que si $u_r \neq 0$, alors $u_1^* = r$, auquel cas l'inégalité $u_1 + u_1^* \leq k + r$ implique $u_1 \leq k < k + u_r$.

Comme $u_1 \leq p \leq ru_1$, et comme ces conditions sont équivalentes à l'existence d'un poids décroissant u tel que $|u| = p$, et dont la première composante est fixée, il existe un $k\mathbf{1}_1$ -diagramme 1-admissible de bidegré (p, q) si et seulement si $p - d + r \leq q \leq p$, $(r - 1)p \geq rq$, et $k \geq p - q$; d'où la seconde partie de la proposition. \clubsuit

Proposition 2.3.3 *Soit k un entier naturel au plus égal à r . Alors*

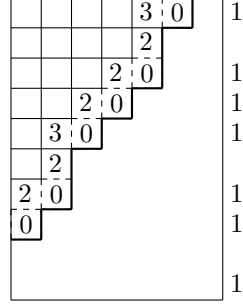
1. $H^{p,q}(G_r(V), \wedge^k Q) \neq 0$ si et seulement si $p = q \leq (r - k)(d - r)$;
2. $H^{p,q}(G_r(V), \wedge^k Q \otimes \det Q) \neq 0$ si et seulement si il existe des entiers naturels m et μ , avec $m \leq d - r$ et $\mu \leq m(r - k)$, tels que

$$p = \frac{m(m+1)}{2} + \mu, \quad q = \frac{m(m-1)}{2} + \mu, \quad \text{et } k \geq m.$$

Preuve:

1. Soit $\mathcal{D} = (u, c)$ un $\mathbf{1}_{1,k}$ -diagramme 0-admissible de bidegré (p, q) . Comme pour la proposition précédente, on doit avoir $c_i = 0$ pour chaque ligne d'indice i contenant un coin intérieur au diagramme de Young associé à u , ce qui implique, le poids $u - c$ étant nécessairement décroissant, que $c_j = 0$ si $1 \leq j \leq u_1^*$. Les longueurs d'équerres des lignes d'indices strictement supérieures à u_1^* étant strictement négatives, cette condition est équivalente à la 0-admissibilité de \mathcal{D} . D'après la seconde formule de Pieri (\wedge), elle ne peut être vérifiée que si $u_1^* \leq r - k$, puisque c_j doit être égal à 1 si $r - k + 1 \leq j \leq r$: \mathcal{D} est alors de bidegré tel que $p = q$. Enfin, l'existence d'un poids décroissant u tel que $|u| = p$ et $u_1^* \leq r - k$ est clairement équivalente à l'inégalité $p \leq (r - k)(d - r)$.
2. De même que dans le cas des puissances symétriques, la 1-admissibilité du diagramme \mathcal{D} implique que $c_i = u_i - u_{i+1}$ si $1 \leq i \leq u_1^*$. Comme, d'après la formule (\wedge), $c \in \{0, 1\}^r$ et $|c| = k$, ceci implique que les "sauts" entre composantes successives et distinctes de u soient d'amplitude égale à 1, et en nombre au plus égal à k , au moins égal à $k - (r - u_1^*)$. Ce nombre de sauts est alors égal à u_1 qui, en particulier, doit être inférieur à u_1^* .

Exemple:



Un $\mathbf{1}_{1,7}$ -diagramme 1-admissible
pour $r = 10$ et $d = 17$, avec
 $u = (6, 5, 5, 4, 3, 2, 2, 1, 0, 0)$ et
 $c = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1)$.

Il existe donc un poids c tel que $\mathcal{D} = (u, c)$ définisse un $\mathbf{1}_{1,k}$ -diagramme 1-admissible si et seulement si sont vérifiées les conditions $u_i - u_{i+1} \leq 1$ si $1 \leq i \leq r$, et

$$k + u_1^* - r \leq u_1 \leq k, u_1^*.$$

Le bidegré de \mathcal{D} est alors tel que $p - q = u_1$.

L'existence d'un poids décroissant u , pour lequel $|u| = p$, $u_i - u_{i+1} \leq 1$ si $1 \leq i \leq r$, et pour lequel u_1 et u_1^* sont donnés, est équivalente aux conditions

$$u_1^* + \frac{u_1(u_1 - 1)}{2} \leq p \leq u_1 u_1^* - \frac{u_1(u_1 - 1)}{2}$$

(les valeurs extrêmes que peut prendre p correspondant aux cas où les sauts de u ont lieu le plus tôt, ou le plus tard possible). De plus, u_1^* doit être tel que $u_1 \leq u_1^* \leq u_1 + r - k$, d'où l'existence d'un poids u vérifiant les mêmes conditions que précédemment, excepté le fait que u_1^* n'est plus donné a priori, si et seulement si

$$\frac{u_1(u_1 + 1)}{2} \leq p \leq \frac{u_1(u_1 + 1)}{2} + u_1(r - k).$$

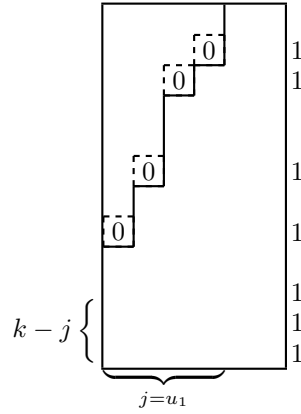
Enfin, u_1 doit être au plus égal à k : il existe donc un $\mathbf{1}_{1,k}$ -diagramme 1-admissible de bidegré (p, q) si et seulement si $0 \leq m = p - q \leq k, d - r$, et

$$\frac{m(m + 1)}{2} \leq p \leq \frac{m(m + 1)}{2} + m(r - k).$$

Remarque 2.6: Les premières parties des deux propositions précédentes ont été démontrées par Le Potier par des méthodes différentes ([LP2]), tandis que la seconde partie de la proposition précédente permet, pour $k = r$, de retrouver les groupes de cohomologie non nuls du fibré $(\det Q)^2$, tels que Snow les a obtenus ([Sn2], Théorème 3.3).

Si l'on s'intéresse plus précisément aux composantes irréductibles de ces groupes de cohomologie, on peut faire usage, comme A.Lascoux dans [L3], de séries génératrices qui permettent une écriture commode, du moins dans les cas les plus simples. Nous donnerons trois exemples de ce genre de calculs.

Revenons par exemple aux puissances extérieures du fibré quotient, tensorisées par son fibré déterminant. D'après la discussion qui précède, leur cohomologie est donnée par les diagrammes de la forme suivante:



Le diagramme ci-dessus est défini par un entier j (le nombre de ses coins, ou u_1) inférieur ou égal à k et à $d - r$, et une partition strictement décroissante de p en j entiers au plus égaux à $r - k + j$, soit de la forme $(r - k + j > p_j > \dots > p_1 > 0)$. De plus, la valeur correspondante de q est $p - j$. Pour déterminer le poids associé, reprenons les notations de la remarque 2.4c: le r -uplet m contient $k - j$ fois -1 , et des zéros, alors que le $(d - r)$ -uplet n contient j fois l'entier 1, et des zéros; le poids associé est donc

$$(\mathbf{1} - m, n)^{\geq} = \mathbf{1}_{1, k-j} + \mathbf{1}_{1, r+j}.$$

Reste à déterminer la multiplicité de ce poids. Si l'on pose $\pi_i = p_i - i$, on obtient une partition de $\pi = p - \frac{j(j+1)}{2}$ en j entiers naturels au plus égaux à $r - k$; et le nombre de ces partitions est donné par le lemme suivant:

Lemme 2.3.1 ([McD]) *Le nombre de partitions de m en i entiers au plus égaux à t est le coefficient de x^m dans le polynôme de Gauss*

$$\left[\begin{matrix} t+i \\ i \end{matrix} \right](x) = \frac{(1-x^{t+1}) \dots (1-x^{t+i})}{(1-x) \dots (1-x^i)}.$$

Preuve: Notons provisoirement P_i^t le polynôme dont le coefficient de x^m est le nombre de partitions de m en i entiers au plus égaux à t . Par exemple,

$$P_i^0(x) = 1 = \left[\begin{smallmatrix} i \\ i \end{smallmatrix} \right](x), \quad P_1^t(x) = 1 + x + \cdots + x^t = \frac{1 - x^{t+1}}{1 - x} = \left[\begin{smallmatrix} t+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right](x).$$

De plus, le nombre de partitions de m en i entiers dont le plus grand vaut t est égal au nombre de partitions de $m - t$ en $i - 1$ entiers au plus égaux à t , et ceci équivaut à la relation

$$P_i^t(x) - P_i^{t-1}(x) = x^t P_{i-1}^t(x).$$

Les polynômes de Gauss vérifiant la même propriété, on obtient bien $P_i^t = \left[\begin{smallmatrix} t+i \\ i \end{smallmatrix} \right]$. ♣

Ce lemme et la discussion qui l'a précédé mènent au résultat suivant:

Proposition 2.3.4 *La cohomologie des puissances extérieures du fibré quotient, tensorisées par son déterminant, est donnée par la série génératrice*

$$\begin{aligned} \sum_{p,q,d} x^p y^q z^{d-r} H^{p,q}(G_r(V), \wedge^k Q \otimes \det Q) \\ = \frac{1}{1-z} \sum_{j=0}^k (xz)^j (xy)^{\frac{j(j-1)}{2}} \left[\begin{smallmatrix} r-k+j \\ j \end{smallmatrix} \right] (xy) \Gamma^{\mathbf{1}_1, k-j+\mathbf{1}_1, r+j} V. \end{aligned}$$

On obtiendrait tout aussi simplement des formules analogues pour les puissances symétriques du fibré quotient tensorisées par son fibré déterminant, et plus généralement pour les fibrés $Z^{j,k} Q = \Gamma^{(k-j)\mathbf{1}_1 + \mathbf{1}_{2,j+1}} Q$ (cf [L3], proposition 5.8).

2.3.3 Multiplicités des puissances extérieures

Les séries génératrices qui permettent de décrire la cohomologie des fibrés $\Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l$ deviennent lorsque l augmente d'une complexité très vite inextricable (c'est pourquoi l'on n'en fera pas usage dans la suite de ce chapitre). On peut cependant obtenir des expressions simples pour les multiplicités des puissances extérieures, par exemple dans les groupes de cohomologie des puissances symétriques ou extérieures du fibré quotient, tensorisées par une puissance positive quelconque du fibré déterminant.

Il s'agit tout d'abord de déterminer à quelles conditions un a -diagramme l -admissible $\mathcal{D} = (u, c)$ est associé à une puissance extérieure de V . La remarque 2.4c permet de répondre très simplement à cette question: si l'on en reprend les notations, le r -uplet $l\mathbf{1} - m$ et le $(d-r)$ -uplet n doivent être formés exclusivement de zéros et de uns. Pour ce

qui est de n , cela signifie précisément que sur la j -ième colonne de \mathcal{D} , une seule longueur d'équerre du diagramme de Young associé à u est plus petite que l ; autrement dit:

$$h_{u_j^*, j}^{\mathcal{D}} < l < h_{u_j^* - 1, j}^{\mathcal{D}}.$$

Supposons pour simplifier que $l \geq 2$. Alors u doit être strictement décroissant: en effet, si $u_i = u_{i+1}$, ce qui précède implique que les longueurs d'équerres de la i -ème ligne de \mathcal{D} soient toutes supérieures à l . En conséquence, $m_i = -c_i$, et $l - m_i = l + c_i \geq 2$! On doit au contraire avoir, sur la i -ème ligne du diagramme,

$$h_{i, u_{i+1}+1}^{\mathcal{D}} = l - 1 = \lambda,$$

ce qui signifie, si l'on se souvient que $h_{i, j}^{\mathcal{D}} = h_{i, j}^u - c_i$ et que $h_{i, u_i}^u = 1$, puisque $u_i > u_{i+1}$, que

$$u_i - u_{i+1} = \lambda + c_i.$$

On appellera diagramme *régulier* un diagramme $\mathcal{D} = (u, c)$ vérifiant cette propriété: un tel diagramme est défini par le poids c , de module k , et qui doit être compatible avec la règle de Littlewood-Richardson pour définir un a -diagramme. Son bidegré est donné par les formules suivantes:

$$\begin{aligned} p &= \lambda \frac{r(r+1)}{2} + \sum_{i=1}^r i c_i, \\ q &= \lambda \frac{r(r-1)}{2} + \sum_{i=1}^r (i-1) c_i = p - r\lambda - k. \end{aligned}$$

Il existe des diagrammes réguliers si et seulement si $u_1 = r\lambda + k \leq d - r$.

Notons $n_{p, q}^{r, d-r}(S^k Q \otimes (\det Q)^l)$ (respectivement $n_{p, q}^{r, d-r}(\wedge^k Q \otimes (\det Q)^l)$) la multiplicité de la puissance extérieure de V d'exposant $rl + k$, dans le groupe de cohomologie $H^{p, q}(G_r(V), S^k Q \otimes (\det Q)^l)$ (respectivement $H^{p, q}(G_r(V), \wedge^k Q \otimes (\det Q)^l)$). Ces multiplicités sont les nombres de $k\mathbf{1}_1$ -diagrammes (respectivement de $\mathbf{1}_{1, k}$ -diagrammes) réguliers l -admissibles $\mathcal{D} = (u, c)$ de bidegré (p, q) (ce qui suppose que $q = p - r\lambda - k$). Supposons $d \geq rl + k$, condition nécessaire à l'existence de tels diagrammes, et posons $d_i = c_r + \dots + c_i$.

- Dans le cas d'une puissance symétrique k -ième, la règle de Littlewood-Richardson n'impose aucune condition supplémentaire sur le poids c : on doit donc simplement déterminer le nombre de partitions de $\pi = p - \lambda \frac{r(r+1)}{2}$ de la forme $(d_1 = k \geq \dots \geq d_r \geq 0)$, qui n'est autre que le coefficient de x^π dans le polynôme $x^k \left[\begin{smallmatrix} r+k-1 \\ r-1 \end{smallmatrix} \right](x)$.
- Dans le cas d'une puissance extérieure k -ième, les entiers c_1, \dots, c_r doivent être égaux à zéro ou à un, et l'on doit donc déterminer le nombre de partitions de π de la forme $(d_1 = k \geq \dots \geq d_r \geq 0)$, avec $d_i - d_{i+1} \leq 1$. Si l'on passe aux partitions duales, cela revient à déterminer le nombre de partitions strictement décroissantes

de π en k entiers au plus égaux à r , ($r \geq e_k > \dots > e_1 > 0$): c'est-à-dire, si l'on pose $f_i = e_i - i$, le nombre de partitions de $\pi' = \pi - \frac{k(k+1)}{2}$ en k entiers au plus égaux à $r - k$, qui n'est autre que le coefficient de $x^{\pi'}$ dans le polynôme de Gauss $\begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}(x)$.

Notons respectivement $\Phi_{sym}^{r,k,l}$ et $\Phi_{ext}^{r,k,l}$ les séries génératrices

$$\begin{aligned}\Phi_{sym}^{r,k,l}(x, y, z) &= \sum_{p,q,s} x^p y^q z^s n_{p,q}^{r,s} (S^k Q \otimes (det Q)^l), \\ \Phi_{ext}^{r,k,l}(x, y, z) &= \sum_{p,q,s} x^p y^q z^s n_{p,q}^{r,s} (\wedge^k Q \otimes (det Q)^l).\end{aligned}$$

La discussion qui précède permet d'aboutir aux expressions suivantes:

$$\begin{aligned}\Phi_{sym}^{r,k,l}(x, y, z) &= \sum_{s \geq r\lambda + k} x^{\lambda \frac{r(r+1)}{2}} y^{\lambda \frac{r(r-1)}{2} - k} z^s (xy)^k \begin{bmatrix} r+k-1 \\ k \end{bmatrix}(xy), \\ \Phi_{ext}^{r,k,l}(x, y, z) &= \sum_{s \geq r\lambda + k} x^{\lambda \frac{r(r+1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2}} y^{\lambda \frac{r(r-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2}} z^s \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}(xy).\end{aligned}$$

Sous une forme plus ramassée:

Proposition 2.3.5 *Les séries génératrices des multiplicités des puissances extérieures dans la cohomologie des puissances symétriques ou extérieures k -ième du fibré quotient, tensorisées par son déterminant à la puissance $l > 1$, sont données respectivement par les expressions suivantes:*

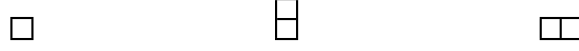
$$\begin{aligned}(1-z)\Phi_{sym}^{r,k,l}(x, y, z) &= (xz)^{r\lambda+k} (xy)^{\lambda \frac{r(r-1)}{2}} \begin{bmatrix} r+k-1 \\ k \end{bmatrix}(xy), \\ (1-z)\Phi_{ext}^{r,k,l}(x, y, z) &= (xz)^{r\lambda+k} (xy)^{\lambda \frac{r(r-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}(xy).\end{aligned}$$

2.3.4 Petites puissances du déterminant

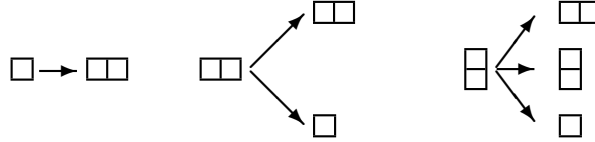
Pour ce qui est des puissances du déterminant du fibré quotient, A.Lascoux a donné des méthodes de calculs du nombre de composantes irréductibles de leurs groupes de cohomologie de Dolbeault, qui apparaissent comme coefficients de séries rationnelles en variables non commutatives. Ces méthodes sont détaillées dans [L3] pour la puissance troisième du déterminant: montrons comment les méthodes de diagrammes permettent d'en retrouver simplement les principaux résultats, et de les étendre au cas d'une puissance quatrième du déterminant.

Soit \mathcal{D} un diagramme 3-admissible, et considérons les rectangles qui dont sont formés les coins de ce diagramme: ils sont numérotés régulièrement à partir de leur coin inférieur

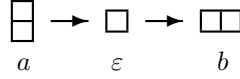
droit, qui est affublé de l'entier un, et ne doivent pas contenir l'entier trois. D'où les trois possibilités suivantes:



Les ordres de succession possibles de ces briques élémentaires, de gauche à droite et de bas en haut, sont tout aussi simples à déterminer et peuvent être schématisés comme suit:



Un diagramme 3-admissible, qui est évidemment déterminé par ses coins, correspond donc nécessairement à une succession



avec $\varepsilon = 0$ ou 1 . Le bidegré correspondant est donné par les formules

$$\begin{aligned} p &= a(a+1) + b(b+1) + ab + \varepsilon(a+b+1), \\ q &= a(a-1) + b(b-1) + ab + \varepsilon(a+b), \end{aligned}$$

et la remarque 2.4c permet d'associer à ce diagramme le poids

$$3\mathbf{1}_{1,r-2a-b-\varepsilon} + 2\mathbf{1}_{r-2a-b-\varepsilon+1,r+a-b} + \mathbf{1}_{r+a-b+1,r+a+2b+\varepsilon},$$

avec les conditions évidentes $r \geq 2a + b + \varepsilon$ et $d - r = s \geq a + 2b + \varepsilon$.

Notons $n_{r,s}^3(p, q)$ le nombre de composantes irréductibles du groupe de cohomologie $H^{p,q}(G_r(V), (\det Q)^3)$, où V est de dimension $r+s$. D'après ce qui précède, le changement de variables $\rho = r - 2a - b - \varepsilon$, $\sigma = s - a - 2b - \varepsilon$ mène à l'identité

$$\sum_{r,s,p,q} n_{r,s}^3(p, q) x^p y^q u^r v^s = \frac{1}{1-u} \frac{1}{1-v} \sum_{a,b,\varepsilon} x^{a(a+1)+b(b+1)+ab} y^{a(a-1)+b(b-1)+ab} \times u^{2a+b} v^{a+2b} (1 + x^{a+b+1} y^{a+b} uv).$$

Lascoux considère les multiplicités $n_{r,s}^3 = \sum_{p,q} n_{r,s}^3(p, q)$, qui s'obtiennent en posant $x = y = 1$ dans la formule précédente: le nombre de composantes irréductibles de la somme $H^{*,*}(G_r(V^{r+s}), (\det Q)^3)$ est donc égal au coefficient de $u^r v^s$ dans la série génératrice

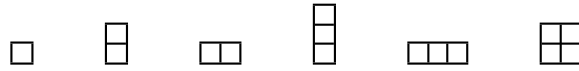
$$\Phi^3(u, v) = \frac{1 + uv}{(1 - u)(1 - v)(1 - u^2v)(1 - uv^2)}.$$

On retrouve là l'énoncé du corollaire 6.6 de [L3] (sans doute à une erreur typographique près, puisque la série donnée par ce corollaire n'est pas symétrique en ses deux variables, alors que la proposition 3.1.1 à venir impose cette symétrie). A.Lascoux s'intéresse également aux multiplicités $n_r^3(p) = \sum_q n_{r,\infty}(p, q)$, où $n_{r,\infty}(p, q)$ désigne la valeur de $n_{r,s}(p, q)$ obtenue pour s assez grand (autrement dit lorsque les diagrammes considérés sont suffisamment larges pour que l'on puisse faire abstraction de leur bord droit). Ces multiplicités s'obtiennent en faisant $y = 1$ et $s = 2a + b + \varepsilon$ dans la série génératrice des multiplicités $n_{r,s}(p, q)$: on obtient donc, en reprenant la notation de [L3],

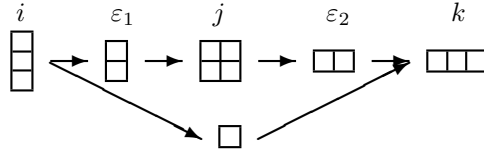
$$H(u) = \sum_{p,r} n_r^3(p) z^p u^r = \frac{1}{1 - u} \sum_{j,k \geq 0} z^{j(j+1)+k(k+1)+jk} u^{j+2k} (1 + uz^{j+k+1}),$$

ce qui constitue une version légèrement simplifiée de la proposition 6.9 de [L3].

Le même type de raisonnement s'applique sans beaucoup plus de difficultés au cas des puissances quatrièmes du déterminant du fibré quotient. Les briques élémentaires qui permettent de constituer les coins d'un diagramme 4-admissible sont en effet les suivantes



L'examen de leurs successions possibles permet aisément de vérifier qu'un diagramme 4-admissible est nécessairement représenté par une succession de briques élémentaires d'un des deux types suivants:



avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1\}$.

Intéressons nous simplement, pour ne pas trop alourdir les calculs, à la série génératrice $\Phi^4(u, v)$, dont le coefficient de $u^r v^s$ est le nombre de composantes irréductibles de la somme $H^{*,*}(G_r(V^{r+s}), (\det Q)^4)$. Il est facile de se rendre compte de ce que cette série est uniquement déterminée par les conditions qui expriment le fait qu'un diagramme, défini par les successions précédentes, a des dimensions qui n'excèdent pas r et s : $r \geq 3i + 2\varepsilon_1 + 2j + \varepsilon_2 + k$ et $s \geq i + \varepsilon_1 + 2j + 2\varepsilon_2 + 3k$ dans le premier cas, $r \geq 3i + k + 1$ et

$s \geq i + 3k + 1$ dans le second. D'où l'expression

$$\Phi^4(u, v) = \frac{1}{1-u} \frac{1}{1-v} \left[\sum_{i,j,k,\varepsilon_1,\varepsilon_2} u^{3i+2\varepsilon_1+2j+\varepsilon_2+k} v^{i+\varepsilon_1+2j+2\varepsilon_2+3k} + \sum_{i,k} u^{3i+k+1} v^{i+3k+1} \right],$$

soit finalement

$$\Phi^4(u, v) = \frac{1 + uv(1 + u + v)}{(1-u)(1-v)(1-u^3v)(1-u^2v^2)(1-uv^3)}.$$

Ces quelques remarques n'enlèvent rien au fait que pour des puissances d'ordre supérieur du déterminant du fibré quotient, les méthodes de diagrammes semblent moins propices à un traitement algorithmique, que la théorie des séries rationnelles utilisée par Lascoux.

3 Propriétés d'hérédité

Sont regroupées dans ce paragraphe différentes propriétés des groupes de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l)$, qui manifestent une relative invariance de ces groupes lorsque sont modifiés certains des paramètres impliqués. L'exemple le plus simple en est, lorsque $a = 0$, l'évidente symétrie entre diagrammes l -admissibles dont on échange les dimensions. On s'arrêtera ensuite à l'effet de l'augmentation de l'une ou l'autre de ces dimensions, pour conclure sur l'examen des conséquences d'un accroissement des écarts entre composantes successives du poids a , conséquences que l'on rapprochera de phénomènes similaires relatifs à l'annulation de la cohomologie des fibrés vectoriels globalement engendrés.

3.1 Cas des puissances du déterminant

On explicite ici la transformation simple qui affecte les groupes de cohomologie des puissances du déterminant du fibré quotient universel, lorsqu'on échange r et $d - r$. On notera V_d un espace vectoriel complexe de dimension $d = r + \delta$.

Proposition 3.1.1 *Soit $\mu(v)$ la multiplicité du poids $v \in \mathbb{Z}^d$ dans le groupe de cohomologie $H^{p,q}(G_r(V_d), (\det Q)^l)$. Alors*

$$H^{p,q}(G_\delta(V_d), (\det Q)^l) = \bigoplus_{v \in \mathbb{Z}^d} \mu(v) \Gamma^{l\mathbf{1} - \chi(v)} V_d.$$

Preuve: Soit $u \in \mathbb{N}^r$ définissant un 0-diagramme l -admissible de dimensions $r \times \delta$: alors u^* définit un 0-diagramme l -admissible de dimensions $\delta \times r$, et pour les mêmes valeurs des entiers p et q . Reste à comparer les poids associés par le théorème de Bott à ces deux diagrammes, poids qu'on notera respectivement v_r et v_δ :

$$v_r = \xi(l\mathbf{1}_{1,r} - \chi(u), u^*), \quad v_\delta = \xi(l\mathbf{1}_{1,\delta} - \chi(u^*), u).$$

D'où, successivement:

$$\begin{aligned} v_\delta &= l\mathbf{1} + \xi(-\chi(u^*), u - l\mathbf{1}_{1,r}) \\ &= l\mathbf{1} + [(-\chi(u^*), u - l\mathbf{1}_{1,r}) - c(d)]^\geq + c(d) \\ &= l\mathbf{1} - \chi[(\chi(u^*), l\mathbf{1}_{1,r} - u) + c(d)]^\geq + c(d) \quad \text{car } (-a)^\geq = -\chi(a^\geq) \\ &= l\mathbf{1} - \chi[\chi((l\mathbf{1}_{1,r} - \chi(u), u^*) - c(d))]^\geq + c(d) \quad \text{car } \chi(c(d)) = (d+1)\mathbf{1} - c(d) \\ &= l\mathbf{1} - \chi[(l\mathbf{1}_{1,r} - \chi(u), u^*) - c(d)]^\geq + c(d) \quad \text{car } \chi(a)^\geq = a^\geq \\ v_\delta &= l\mathbf{1} - \chi(v_r). \end{aligned}$$

Autrement dit, si v est un poids dominant d'une composante isotypique du groupe de cohomologie $H^{p,q}(G_r(V_{r+\delta}), (\det Q)^l)$, $H^{p,q}(G_\delta(V_{r+\delta}), (\det Q)^l)$ admet donc une composante isotypique de poids supérieur $l\mathbf{1} - \chi(v)$ de même multiplicité.

On peut également procéder directement en remarquant que $G_\delta(V_{r+\delta}) \simeq G_r(V_{r+\delta}^*)$, le fibré quotient sur $G_\delta(V_{r+\delta})$ correspondant sous cet isomorphisme au dual du fibré tautologique sur $G_r(V_{r+\delta}^*)$. ♣

3.2 Accroissement des dimensions

Dans le cas des puissances positives du déterminant du fibré quotient universel, il est clair qu'un 0-diagramme l -admissible, avec $l \geq 0$, auquel on ajoute une quantité quelconque de lignes dans sa partie inférieure, et de colonnes à sa droite, reste l -admissible en même bidegré, puisque les entiers figurant sur les cases ajoutées sont nécessairement strictement négatifs ([Sn2]). On donnera de cette observation, pour la cohomologie des fibrés de poids positif associés au fibré quotient universel, les deux généralisations suivantes.

Proposition 3.2.1 *Soient $a \in \mathbb{N}^r$, $l \geq 0$, et soit $b \in \mathbb{Z}^d$ un poids supérieur d'une composante isotypique de $H^{p,q}(G_r(V_d), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l)$. Alors $H^{p,q}(G_r(V_{d+\delta}), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l)$ admet, pour tout entier naturel δ , une composante isotypique de poids supérieur b , considéré comme élément de $\mathbb{Z}^{d+\delta}$, de multiplicité au moins égale.*

De plus, si $p \leq d-r$, ces multiplicités sont égales, et toutes les composantes du groupe $H^{p,q}(G_r(V_{d+\delta}), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l)$ s'obtiennent de cette manière.

Preuve: Soit $\mathcal{D} = (u, c)$ un a -diagramme l -admissible, de dimensions $r \times (d-r)$, et auquel le théorème de Bott associe le poids b . Alors pour tout entier naturel δ , le couple

(u, c) définit aussi un a -diagramme l -admissible de dimensions $r \times (d - r + \delta)$. Le conjugué de u associé, disons u_δ^* , se déduit de u^* en lui adjoignant δ composantes nulles, et comme ces composantes ne peuvent participer à aucune inversion dans le calcul du poids b^δ associé, celui-ci se déduit également de b en lui adjoignant δ composantes nulles: ce qui démontre la première partie de la proposition.

De plus, lorsque $p \leq d - r$, tout couple (u, c) définissant un a -diagramme l -admissible, et de dimensions $r \times (d - r + \delta)$, est tel que $u_i^* = 0$ si $i > d - r$. En conséquence, (u, c) définit aussi un a -diagramme l -admissible, de dimensions $r \times d - r$, et pour les mêmes valeurs des entiers p et q associés. La seconde partie de la proposition s'ensuit. ♣

Proposition 3.2.2 *Soient $k \geq 0$, $l \geq 1$, et soit $b \in \mathbb{Z}^d$ un poids supérieur d'une composante isotypique de $H^{p,q}(G_r(V_d), S^k Q \otimes (\det Q)^l)$. Alors pour tout entier naturel δ , le groupe de cohomologie $H^{p,q}(G_{r+\delta}(V_{d+\delta}), S^k Q \otimes (\det Q)^l)$ admet une composante isotypique de poids b^δ de multiplicité au moins égale, où*

$$b^\delta = [l\mathbf{1}_{1,\delta} + T_\delta(b)]^{\geq} \in \mathbb{Z}^{d+\delta},$$

et où l'on a noté T_δ l'opérateur de translation de δ unités à droite.

De plus, si $p \leq r$, les multiplicités de poids associés sont égales, et toutes les composantes de $H^{p,q}(G_{r+\delta}(V_{d+\delta}), S^k Q \otimes (\det Q)^l)$ s'obtiennent de cette manière.

Preuve: Soit $\mathcal{D} = (u, c)$ un $k\mathbf{1}_1$ -diagramme l -admissible. Notons u^δ le poids u considéré comme élément de $\mathbb{N}^{r+\delta}$, et définissons un poids $c^\delta \in \mathbb{N}^{r+\delta}$ de la façon suivante:

$$\begin{aligned} c_i^\delta &= c_i & \text{si } 0 < i < r, \\ c_r^\delta &= \min(c_r, u_r), \\ c_i^\delta &= 0 & \text{si } r < i < r + \delta, \\ c_{r+\delta}^\delta &= c_r - c_r^\delta. \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{D}^\delta = (u^\delta, c^\delta)$ est encore un $k\mathbf{1}_1$ -diagramme l -admissible: en effet, il est tout d'abord immédiat que pour tout entier i , $c_i^\delta \leq u_i^\delta - u_{i+1}^\delta$, donc c^δ est compatible avec la formule (S) du produit tensoriel par une puissance symétrique. De plus, les δ lignes adjointes au diagramme considéré ne font apparaître que des longueurs d'équerres négatives, alors que les $r - 1$ premières sont restées inchangées. La ligne restante faisait apparaître sur ses u_r premières colonnes une succession d'entiers consécutifs compris entre $1 - c_r$, qui est plus petit que 1, et $u_r - c_r$: la l -admissibilité de \mathcal{D} implique donc que $u_r - c_r < l$, et comme $u_r^\delta - c_r^\delta = \max(u_r - c_r, 0)$, l'entier l ne peut pas figurer non plus dans la r -ième ligne du diagramme transformé: \mathcal{D}^δ est donc l -admissible.

Reste à relier les poids associés b et b^δ . Comme les $\delta + 1$ dernières lignes du diagramme transformé \mathcal{D}^δ ne participent, d'après ce qui précède, à aucune inversion dans le calcul de b^δ , et comme ses $r - 1$ premières lignes sont les mêmes que celles du diagramme de départ \mathcal{D} , les $\delta + 1$ premières composantes de b^δ sont celles de $l\mathbf{1} - \chi(u^\delta - c^\delta)$, alors que ses $r - 1$ dernières composantes sont celles de b . Mais comme la dernière ligne du

diagramme de départ ne peut participer à aucune inversion, la première composante de b doit être $l - u_r + c_r$. Si $c_r \leq u_r$, on a donc

$$b^\delta = (\underbrace{l, \dots, l}_\delta, l - u_r + c_r, b_2, \dots, b_r),$$

alors que si $c_r \geq u_r$,

$$b^\delta = (l - u_r + c_r, \underbrace{l, \dots, l}_\delta, b_2, \dots, b_r),$$

de sorte que dans tous les cas, $b^\delta = [l\mathbf{1}_{1,\delta} + T_\delta(b)]^\geq$.

Enfin, lorsque $p \leq r$, la seconde partie de la proposition peut être démontrée comme pour la proposition précédente. \clubsuit

3.3 Accroissement des écarts entre composantes

Montrons tout d'abord comment peuvent être liées les composantes des groupes de cohomologie de puissances symétriques du fibré quotient universel d'exposants différents, tensorisées par une même puissance de son déterminant.

Proposition 3.3.1 *Soit b un poids supérieur d'une composante isotypique du groupe de cohomologie $H^{p,q}(G_r(V), S^k Q \otimes (\det Q)^l)$, où $l \geq 1$. Alors pour tout entier naturel δ , le groupe $H^{p,q}(G_r(V), S^{k+\delta} Q \otimes (\det Q)^l)$ admet une composante isotypique de poids supérieur $b + \delta\mathbf{1}_1$ de multiplicité au moins égale.*

De plus, si $k \geq d - r$, ces multiplicités sont égales, et toutes les composantes du groupe de cohomologie $H^{p,q}(G_r(V), S^{k+\delta} Q \otimes (\det Q)^l)$ s'obtiennent de cette façon.

Preuve: Soit $\mathcal{D} = (u, c)$ un $k\mathbf{1}_1$ -diagramme l -admissible. Comme on l'a remarqué à l'occasion de la proposition précédente, la condition $l \geq 1$ implique que toutes les longueurs d'équerres figurant sur la dernière ligne du diagramme considéré sont strictement inférieures à l . Si l'on pose $c^\delta = c + \delta\mathbf{1}_r$, c^δ est comme c compatible avec la formule (S), et le couple (u, c^δ) définit un diagramme dont les $r - 1$ premières lignes sont celles du diagramme défini par (u, c) , et dont les longueurs d'équerres de la dernière ligne sont strictement inférieures à $l - \delta$, donc a fortiori à l : ce diagramme est donc un $(k + \delta)$ -diagramme l -admissible.

De plus, la ligne du diagramme \mathcal{D} qui a été modifiée ne participe à aucune inversion dans le calcul du poids associé au diagramme \mathcal{D}^δ par le théorème de Bott: ce poids se déduit donc du poids associé à \mathcal{D} par simple ajout de $\delta\mathbf{1}_1$, et la première partie de la proposition s'ensuit.

Réciproquement, considérons un $(k + \delta)$ -diagramme $\mathcal{D} = (u, c)$ l -admissible. Le fait que c soit compatible avec la formule (S), c'est-à-dire que $c_i \leq u_i - u_{i+1}$ si $0 < i < r$, implique que $c_1 + \dots + c_{r-1} = k + \delta - c_r \leq u_1 - u_r \leq d - r$. Si $c^\delta = c - \delta\mathbf{1}_r$, c^δ est donc

positif dès que $k \geq d - r$. De plus, la plus grande longueur d'équerre de la dernière ligne du diagramme \mathcal{D}^δ est $h_{r,1}^{\mathcal{D}^\delta} = u_r - c_r + \delta \leq u_1 - k \leq 0 < l$, de sorte que ce diagramme est un $k\mathbf{1}_1$ -diagramme l -admissible. On conclut comme pour la première partie de la proposition. \clubsuit

On généralisera le résultat qui précède au cas de la cohomologie des fibrés associés au fibré quotient universel pour un poids a quelconque, en montrant que cette cohomologie garde une certaine constance, au sens de la proposition suivante, lorsqu'on ajoute à a un poids positif décroissant, autrement dit lorsqu'on augmente les écarts entre ses composantes successives.

Proposition 3.3.2 *Soient $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$, et $l \geq 1$. Soit $0 < m < r$, et $k \in \mathbb{N}_{\geq}^r$ un autre poids décroissant, tel que $h(k) \leq m$.*

1. *Supposons $a_m - m \geq 2(d - r) - l$. Alors si b est un poids supérieur d'une composante isotypique de $H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l)$, $b + k$ est poids supérieur d'une composante isotypique de $H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^{a+k} Q \otimes (\det Q)^l)$ de multiplicité au moins égale.*
2. *Supposons de plus $a_i - a_{i+1} \geq d - r$ si $1 \leq i \leq m$: alors les multiplicités de poids correspondants sont égales, et toutes les composantes isotypiques des groupes de cohomologie $H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^{a+k} Q \otimes (\det Q)^l)$ s'obtiennent de cette façon.*
3. *En particulier, si a vérifie les conditions qui précèdent, et si $H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l) = 0$, alors pour tout poids k positif décroissant tel que $h(k) \leq m$,*

$$H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^{a+k} Q \otimes (\det Q)^l) = 0.$$

Preuve:

1. Soit $\mathcal{D} = (u, c) \in \mathbb{N}^r \times \mathbb{N}^r$ un a -diagramme l -admissible, auquel le théorème de Bott associe le poids b : il s'agit de montrer que le couple $(u, c + \chi(k))$ définit encore un a -diagramme l -admissible $\mathcal{D}(k)$, auquel le théorème de Bott associe le poids $b + k$.

- **$\mathcal{D}(k)$ est un a -diagramme**

Autrement dit, il s'agit de vérifier que $\Gamma^{u'+\chi(c)+k} Q$ est un facteur du produit tensoriel $\Gamma^{a+k} Q \otimes \Gamma^{u'} Q$, et de multiplicité au moins égale à celle de $\Gamma^{u'+\chi(c)} Q$ dans $\Gamma^a Q \otimes \Gamma^{u'} Q$, où $u' = (d - r)\mathbf{1} - \chi(u) \in \mathbb{N}^r$. Considérons donc un a -tableau numéroté de base u' , et notons $\alpha_j(i)$ le nombre d'apparitions de l'entier i dans la j -ième ligne de ce tableau, où, d'après la remarque 2.4a,

$1 \leq i \leq j \leq r$: on peut alors définir un $a+k$ -tableau numéroté de même base, dont le nombre d'apparitions de l'entier i dans la j -ième ligne est

$$\begin{aligned}\alpha_i^k(i) &= \alpha_i(i) + k_i & \text{si } 1 \leq i \leq m, \\ \alpha_j^k(i) &= \alpha_j(i) & \text{sinon.}\end{aligned}$$

k étant décroissant, le fait que le tableau numéroté de départ obéisse à la règle de Littlewood-Richardson implique nécessairement que ce nouveau tableau y obéisse aussi, et le poids qui lui est associé est bien $c + \chi(k)$.

- **$\mathcal{D}(k)$ est l -admissible**

L'entier l ne peut apparaître parmi les longueurs d'équerres des $r-m$ premières lignes de $\mathcal{D}(k)$, puisque ces lignes sont les mêmes que celles de \mathcal{D} . Il suffira donc, pour conclure, de vérifier que toutes les longueurs d'équerres figurant sur les m dernières lignes de \mathcal{D} sont strictement inférieures à l , c'est-à-dire que $h_{r-m+1,1}^{\mathcal{D}} < l$: il en sera a fortiori de même pour le diagramme $\mathcal{D}(k)$. Or cet entier vérifie

$$h_{r-m+1,1}^{\mathcal{D}} \leq u_{r-m+1} + m - 1 - c_{r-m+1},$$

avec $c_{r-m+1} = \alpha_m(1) + \dots + \alpha_m(m)$. Or la règle de Littlewood-Richardson implique, d'après la remarque 2.4c, que $\alpha_m(m)$ soit au moins égal à $a_m - d + r$. En conséquence de quoi $h_{r-m+1,1}^{\mathcal{D}} < l$ dès que a_m est supérieur à $2(d-r) + m - l$.

- **calcul du poids associé**

Reste à vérifier que le poids associé au diagramme $\mathcal{D}(k)$ est bien $b + k$. Mais c'est une conséquence immédiate du fait que les m dernières lignes de ce diagramme ne peuvent participer à aucune inversion dans le calcul du poids associé.

2. Réciproquement, on doit montrer que si $\mathcal{D} = (u, c)$ est un $(a+k)$ -diagramme l -admissible, alors $\mathcal{D}(-k) = (u, c - \chi(k))$ est un a -diagramme l -admissible. D'après ce qui précède, il suffit de vérifier que si l'on considère un $(a+k)$ -tableau de base u' , et de poids total $u' + \chi(c) = u' + c'$, et dont $\alpha_j(i)$ est le nombre d'apparitions de l'entier i sur la j -ième ligne, alors le tableau de base u' défini par

$$\begin{aligned}\alpha_i^k(i) &= \alpha_i(i) - k_i & \text{si } 1 \leq i \leq m, \\ \alpha_j^k(i) &= \alpha_j(i) & \text{sinon,}\end{aligned}$$

et par la condition **(A)** de la règle de Littlewood-Richardson, est un a -tableau de poids total $u' + c' - k$. Il suffit pour cela de vérifier qu'il obéit aux trois autres conditions de cette règle (notons que d'après la remarque 2.4c, $\alpha_i^k(i) \geq a_i - u'_1 \geq a_{i-1} + d - r - u'_1 \geq 0$).

- (B)** Aucune colonne ne doit contenir deux fois le même entier: c'est par hypothèse le cas pour le tableau associé à \mathcal{D} , donc a fortiori pour le tableau qu'on a associé à $\mathcal{D}(-k)$.

- (C) Le tableau associé à \mathcal{D} devant vérifier cette condition, il suffit, pour s'assurer qu'il en est de même pour le diagramme transformé, de prouver la décroissance du poids total associé. Autrement dit, il s'agit de vérifier que pour tout entier $1 \leq i \leq m$,

$$u'_i + \alpha_i(1) + \cdots + \alpha_i(i) - k_i \geq u'_{i+1} + \alpha_{i+1}(1) + \cdots + \alpha_{i+1}(i+1) - k_{i+1}.$$

Or d'après la remarque 2.4b,

$$u'_i + \alpha_i(1) + \cdots + \alpha_i(i) \geq a_i + k_i,$$

$a_i + k_i$ étant le nombre total d'entiers i du tableau de départ. D'autre part, d'après la remarque 2.4c,

$$u'_{i+1} + \alpha_{i+1}(1) + \cdots + \alpha_{i+1}(i) \leq u'_1 \leq d - r,$$

et comme $\alpha_{i+1}(i+1) \leq a_{i+1} + k_{i+1}$, la condition de décroissance est vérifiée dès que $a_i - a_{i+1} \geq d - r$ pour $1 \leq i \leq m$.

- (D) D'après la remarque 2.4d, et sachant que le tableau associé à \mathcal{D} doit la vérifier, cette condition est équivalente aux inégalités

$$\alpha_{j-1}(j-1) + \cdots + \alpha_{i-1}(j-1) - k_{j-1} \geq \alpha_j(j) + \cdots + \alpha_i(j) - k_j,$$

pour $j \leq i$ et $j \leq m+1$. Or le membre de gauche de cette inégalité est supérieur à $\alpha_{j-1}(j-1) - k_{j-1}$, donc à $a_{j-1} - d + r$ d'après la remarque 2.4c, alors que son membre de droite est clairement inférieur à a_j , et l'hypothèse $a_{j-1} - a_j \geq d - r$ permet encore de conclure.

3. est une conséquence immédiate de 2. ♣

La proposition 3.3.1 est à rapprocher d'un résultat de Peternell, Le Potier et Schneider ([PLPS1]), selon lequel l'annulation de certains groupes de cohomologie des puissances symétriques d'exposant petit d'un fibré vectoriel globalement engendré implique l'annulation des mêmes groupes de cohomologie pour toutes ses puissances symétriques. Plus précisément, si E est un fibré vectoriel holomorphe globalement engendré sur une variété complexe compacte X de dimension n , si le fibré F est tel que

$$H^q(X, S^k E \otimes F) = 0 \quad \text{si } q \geq n - k_0, \quad 0 \leq k \leq k_0,$$

alors il en est de même pour $q \geq n - k_0$ et pour tout entier k .

Il est facile de généraliser ce résultat à des fibrés de poids positifs quelconques associés à un fibré globalement engendré: l'annulation de certains de leurs groupes de cohomologie pour des poids dont les écarts entre composantes successives sont inférieurs à des valeurs données, implique l'annulation des mêmes groupes pour les poids d'écarts

entre composantes successives supérieurs. Pour simplifier, on démontrera ce résultat, qui est à rapprocher de la proposition 3.3.2, seulement pour des poids n'ayant que deux composantes non nulles. Si $a \in \mathbb{N}^r$, on notera $\delta_i(a) = a_i - a_{i+1}$.

Proposition 3.3.3 *Soit k_0 un entier naturel, et $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$ tel que $h(a) = 2$ et $a_1 \geq r + k_0$. Considérons un fibré vectoriel E de rang r globalement engendré sur une variété complexe compacte X de dimension n , et F un fibré tel que*

$$H^q(X, \Gamma^b E \otimes F) = 0 \quad \text{si } q \geq n - k_0$$

pour tout poids $b \in \mathbb{N}_{\geq}^r$ distinct de a tel que $h(b) \leq 2$ et $\delta_i(b) \leq \delta_i(a)$, $i = 1, 2$. Alors

$$H^q(X, \Gamma^a E \otimes F) = 0 \quad \text{si } q \geq n - k_0.$$

Preuve: Soit $Y = M_{1,2}(E)$ la variété des drapeaux de E constitués de sous-espaces de codimension 1 et 2, π sa projection naturelle sur X , et $N = 2r - 3$ sa dimension relative. Si l'on note respectivement u_1 et u_2 les poids positifs décroissants $\mathbf{1}_1$ et $\mathbf{1}_{1,2}$, les fibrés en droites canoniques Q^{u_1} et Q^{u_2} sur Y sont globalement engendrés: si p_1 et p_2 sont deux entiers naturels, le fibré $Q = p_1 Q^{u_1} \oplus p_2 Q^{u_2}$ admet donc une section dont le lieu Z des zéros, s'il n'est pas vide, est de codimension $p_1 + p_2$. Considérons le complexe de Koszul associé à cette section, tensorisé par $Q^a = Q^{\delta_1 u_1 + \delta_2 u_2}$:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow Q^{(\delta_1 - p_1)u_1 + (\delta_2 - p_2)u_2} \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{j_1 + j_2 = j} C_{p_1}^{j_1} C_{p_2}^{j_2} Q^{(\delta_1 - j_1)u_1 + (\delta_2 - j_2)u_2} \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow p_1 Q^{(\delta_1 - 1)u_1} \oplus p_2 Q^{(\delta_2 - 1)u_2} \rightarrow Q^a \rightarrow \mathcal{O}_Z \otimes Q^a \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pour que le fibré $Q^{(\delta_1 - j_1)u_1 + (\delta_2 - j_2)u_2}$ n'ait pas de cohomologie relative en degré $q > 0$, il suffit d'après le théorème de Bott que soient vérifiées les conditions

$$\delta_1 - j_1 \geq -1, \quad \delta_2 - j_2 \geq -r + 2, \quad \delta_1 - j_1 + \delta_2 - j_2 \geq -r + 1.$$

En conséquence, dès que $\delta_1 \geq p_1 - 1$ et $\delta_2 + r - 2 \geq p_2$, on aura

$$C_{p_1}^{j_1} C_{p_2}^{j_2} R_{\pi_*}^q Q^{(\delta_1 - j_1)u_1 + (\delta_2 - j_2)u_2} = 0 \quad \text{si } q > 0.$$

Dans ces conditions, l'image par π de la suite exacte précédente est exacte sur X :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \Gamma^{(\delta_1 - p_1)u_1 + (\delta_2 - p_2)u_2} E \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{j_1 + j_2 = j} C_{p_1}^{j_1} C_{p_2}^{j_2} \Gamma^{(\delta_1 - j_1)u_1 + (\delta_2 - j_2)u_2} E \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \Gamma^a E \rightarrow \pi_*(\mathcal{O}_Z \otimes Q^a) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Par hypothèse, $H^q(X, \Gamma^{(\delta_1 - j_1)u_1 + (\delta_2 - j_2)u_2} E \otimes F) = 0$ si $q \geq n - k_0$ et $j_1 + j_2 > 0$, et la suite exacte précédente, tensorisée par F , implique alors que si $q \geq n - k_0$,

$$H^q(X, \Gamma^a E \otimes F) = H^q(X, \pi_*(\mathcal{O}_Z \otimes Q^a) \otimes F).$$

Mais le support de $\pi_*(\mathcal{O}_Z \otimes Q^a)$ est de dimension au plus égale à $n + N - p_1 - p_2$, qui pour $p_1 = \delta_1 + 1$ et $p_2 = \delta_2 + r - 2$ est strictement inférieur à $n - k_0$, puisque $\delta_1 + \delta_2 = a_1 \geq k_0 + r$: donc

$$H^q(X, \Gamma^a E \otimes F) = 0 \quad \text{si } q \geq n - k_0,$$

ce qui conclut cette démonstration. ♣

4 Majoration du bidegré

On s'intéresse, dans ce paragraphe, à différentes estimations du degré $p + q$ des groupes de cohomologie $H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l)$ non nuls, lorsque l est strictement positif. Le fibré en droites $\det Q$ étant ample, l'archétype en sera bien entendu le théorème d'annulation de Kodaira-Nakano appliqué à ce fibré, à savoir

$$H^{p,q}(G_r(V), (\det Q)^l) = 0 \quad \text{si } p + q > n.$$

On commencera par retrouver ce résultat par le seul moyen des méthodes diagrammatiques précédemment développées. Puis on utilisera ce résultat pour obtenir, par des méthodes de transformations de diagrammes, des majorations analogues pour la cohomologie des puissances symétriques de Q .

La seconde partie de cette thèse montrera comment ces résultats relatifs à la cohomologie des puissances symétriques peuvent être établis en toute généralité, pour un fibré vectoriel ample par exemple: on peut donc ne voir dans ce qui suit qu'un simple exercice d'application de la méthode des diagrammes ou, au mieux, la preuve que les méthodes analytiques sur lesquelles repose la démonstration du théorème de Kodaira-Nakano ne sont, en l'occurrence, pas indispensables. Cependant, on pourra déterminer précisément, sur la grassmannienne, les groupes de cohomologie non nuls qui établissent l'optimalité d'un certain nombre de théorèmes d'annulation (dont celui de Kodaira-Nakano), et l'on rencontrera à cette occasion des diagrammes qui joueront, dans la seconde partie, un rôle essentiel.

4.1 Une preuve diagrammatique du théorème de Kodaira

Considérons un 0-diagramme l -admissible u de dimensions $r \times (d - r)$, l'entier l étant strictement positif. Pour chaque entier i compris entre 1 et r , il existe par hypothèse un entier j compris entre 0 et $d - r$, tel que

$$h_{i,j}^u > l > h_{i,j+1}^u,$$

(avec les conventions $h_{i,0}^u = +\infty$ et $h_{i,d-r+1}^u = -\infty$). En particulier, $h_{i,j}^u - h_{i,j+1}^u - 1 = u_j^* - u_{j+1}^* > 0$, et ceci implique qu'il existe un entier, qu'on notera $\phi(i)$, tel que $j = u_{\phi(i)}$.

A chaque diagramme l -admissible est donc associée une fonction ϕ de $\{1, \dots, r\}$ dans $\{1, \dots, r+1\}$ (avec la convention $u_{r+1} = 0$), telle que pour tout i compris entre 1 et r ,

$$h_{i,u_{\phi(i)}} > l > h_{i,u_{\phi(i)}+1}. \quad (L)$$

La monotonie des longueurs d'équerres de u sur chacune des lignes et colonnes du diagramme de Young associé, implique que la fonction ϕ est croissante. De plus, si l est positif (respectivement strictement positif), alors $\phi \geq id$ (respectivement $\phi > id$), puisque les longueurs d'équerres des coins intérieurs du diagramme de Young associé à u sont égales à 1, et puisque ces entiers forment des suites consécutives sur chacun des segments horizontaux du bord de ce diagramme.

Remarquons également que si $u_i = u_{i-1}$, alors $h_{i,j}^u = h_{i-1,j}^u - 1$, ce qui implique que $h_{i,j}^u$ et $h_{i-1,j}^u$ sont soit tous deux strictement supérieurs, soit tout deux strictement inférieurs à l (ils sont par hypothèse distincts de l). Par conséquent, $u_{\phi(i)} = u_{\phi(i-1)}$.

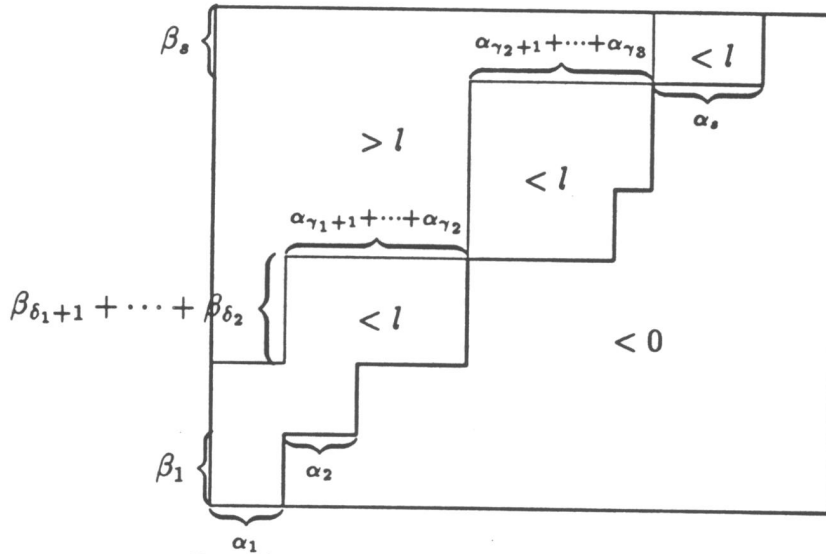
Notons enfin que cette égalité n'implique a priori pas que $\phi(i) = \phi(i-1)$, et plus généralement, que les inégalités (L), si u n'est pas strictement décroissant, ne définissent pas nécessairement ϕ de manière univoque. Pour lever cette ambiguïté, on supposera que $\phi(i)$ prend la plus petite valeur compatible avec ces inégalités.

Il sera également commode d'associer au diagramme u des entiers s, α_i, β_i , où $1 \leq i \leq s$, et t, γ_j, δ_j , où $1 \leq j \leq t$, de la façon suivante:

$$\begin{aligned} u_{\beta_s + \dots + \beta_{i+1} + 1} &= \dots = u_{\beta_s + \dots + \beta_i} > u_{\beta_s + \dots + \beta_{i+1}} = u_{\beta_s + \dots + \beta_i} - \alpha_i, \\ u_{\phi(\beta_s + \dots + \beta_{\delta_j+1})} &> u_{\phi(\beta_s + \dots + \beta_{\delta_j+1} + 1)} = u_{\phi(\beta_s + \dots + \beta_{\delta_j+1})} - \alpha_{\gamma_j+1} - \dots - \alpha_{\gamma_j+1}, \end{aligned}$$

où $1 \leq i \leq s$ et $1 \leq j \leq t$, et avec la convention $\phi(0) = 1$. Les entiers α_i (respectivement β_i) sont simplement les "sauts" entre composantes successives distinctes de u (respectivement de u^*). De plus, si v est le poids dont le diagramme de Young associé est formé des cases du diagramme considéré auxquelles sont associés des longueurs d'équerres strictement supérieures à l , les sauts entre composantes successives distinctes de v (respectivement de v^*) sont les entiers $\alpha_{\gamma_j+1} + \dots + \alpha_{\gamma_{j+1}}$ (respectivement $\beta_{\delta_j+1} + \dots + \beta_{\delta_{j+1}}$). Notons que $\gamma_t = \delta_t = s$, et que, le diagramme de Young associé à v étant à l'intérieur du diagramme de Young associé à u ,

$$\gamma_j \leq \delta_j \quad \text{si } 1 \leq j \leq t.$$



Représentation d'un 0-diagramme l -admissible

Lemme 4.1.1 *Sont vérifiées les inégalités suivantes, où $0 < j < t$:*

$$\begin{aligned}\alpha_{\gamma_{j-1}+1} + \cdots + \alpha_{\gamma_j} &\leq \alpha_{\delta_j+1}, \\ \beta_{\delta_j+1} + \cdots + \beta_{\delta_{j+1}} &\leq \beta_{\gamma_j}.\end{aligned}$$

Preuve: En effet, on a les identités suivantes pour les longueurs d'équerres du diagramme u (correspondant respectivement aux coins extérieurs et intérieurs du diagramme de Young associé au poids v):

$$\begin{aligned}h_{\beta_s + \cdots + \beta_{\delta_j+1}+1, \alpha_1 + \cdots + \alpha_{\gamma_{j-1}+1}}^u &= \alpha_{\gamma_{j-1}+1} + \cdots + \alpha_{\delta_j} + \\ &\quad \beta_{\gamma_{j-1}+1} + \cdots + \beta_{\delta_j} - 1, \quad 1 \leq j \leq t, \\ h_{\beta_s + \cdots + \beta_{\delta_j+1}, \alpha_1 + \cdots + \alpha_{\gamma_j}}^u &= \alpha_{\gamma_j+1} + \cdots + \alpha_{\delta_{j+1}} + \\ &\quad \beta_{\gamma_j} + \cdots + \beta_{\delta_j} + 1, \quad 1 \leq j \leq t-1.\end{aligned}$$

De plus, la l -admissibilité du diagramme implique que

$$\begin{aligned}h_{\beta_s + \cdots + \beta_{\delta_j+1}+1, \alpha_1 + \cdots + \alpha_{\gamma_{j-1}+1}}^u &< l, \\ h_{\beta_s + \cdots + \beta_{\delta_j+1}, \alpha_1 + \cdots + \alpha_{\gamma_j}}^u &> l,\end{aligned}$$

de sorte qu'en comparant la seconde de ces inégalités d'indice j avec la première d'indices j et $j+1$, on obtient respectivement, pour $1 \leq j \leq t-1$,

$$\begin{aligned}\alpha_{\gamma_{j-1}+1} + \cdots + \alpha_{\gamma_j} + \beta_{\gamma_{j-1}+1} + \cdots + \beta_{\gamma_j-1} &\leq \alpha_{\delta_j+1}, \\ \alpha_{\delta_{j+2}} + \cdots + \alpha_{\delta_{j+1}} + \beta_{\delta_{j+1}} + \cdots + \beta_{\delta_{j+1}} &\leq \beta_{\gamma_j},\end{aligned}$$

et ces inégalités impliquent les inégalités annoncées.

Pour démontrer le théorème de Kodaira-Nakano pour les puissances positives de $\det Q$, l'idée sera de majorer le degré q de chaque diagramme l -admissible, qui, avec les notations précédentes, est une somme de produits $\alpha_i \beta_j$, au moyen des inégalités du lemme précédent. Il s'agira donc de regrouper correctement les termes dont q est la somme, d'appliquer ces majorations, et de montrer qu'en itérant ce procédé, on aboutit nécessairement à une somme de produits $\alpha_i \beta_j$ tels que $i > j$, somme qui sera donc majorée par $n - p$.

Cependant, si l'on appliquait à tous les termes de q , et de ses majorants successifs, les inégalités du lemme 4.1.1, on obtiendrait en fin de compte, en général, certains produits $\alpha_i \beta_j$ avec des multiplicités plus grandes que un, ce que l'on veut éviter. Prenons en effet l'exemple d'un diagramme admissible du type suivant:

qui a la forme désirée, et correspond aux blocs hachurés du schéma précédent, où les majorations effectuées ont été représentées par des flèches.

La multiplicité excessive de $\alpha_7\beta_1$ après trois majorations provient de l'existence, au rang précédent, d'une chaîne $(\alpha_6\beta_4, \alpha_7\beta_1)$ dont le dernier terme ne peut être majoré via le lemme 4.1.1, mais majore lui-même le terme précédent.

On est donc amené à définir à chaque étape un ensemble exceptionnel auquel on n'appliquera pas les inégalités du lemme 4.1.1. C'est ce qui motive les définitions suivantes.

Soit ω une partie de $I = \{0, \dots, \delta_t - 1\} \times \{1, \dots, \gamma_t\}$: on définit le sous-ensemble ω_0 de ω comme l'ensemble des couples (i, j) pour lesquels il existe une suite de couples (i_m, j_m) de ω , $0 \leq m \leq \mu$, tels que:

- $(i_0, j_0) = (i, j)$;
- $\gamma_{i_{m+1}-1} \leq i_m < \gamma_{i_{m+1}}$ et $\delta_{j_{m+1}} < j_m \leq \delta_{j_{m+1}+1}$;
- $i_\mu \geq \gamma_{t-1}$ ou $j_\mu \leq \delta_1$.

Le second point implique, d'après le lemme 4.1.1, que $\alpha_{i_m+1}\beta_{j_m} \leq \alpha_{i_{m+1}+1}\beta_{j_{m+1}}$, et le troisième signifie que tous les couples d'indices des majorants successifs de $\alpha_{i+1}\beta_j$, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus appliquer le lemme 4.1.1, sont dans ω . Il est clair que dans cette situation, on ne saurait, en appliquant ce lemme aux produits $\alpha_{i_m+1}\beta_{j_m}$, aboutir à des produits $\alpha_{k+1}\beta_l$ deux à deux distincts.

Soit alors Δ_ω l'ensemble des couples $(k, l) \in I$ pour lesquels il existe un couple $(i, j) \in \omega \setminus \omega_0$ tel que

$$\gamma_{k-1} \leq i < \gamma_k, \quad \delta_l < j \leq \delta_{l+1},$$

(de sorte que la somme des produits $\alpha_{i+1}\beta_j$ sur l'ensemble de ces couples est majorée par $\alpha_{\delta_k+1}\beta_{\gamma_l}$). On associe à ω la partie $\xi(\omega)$ de I définie comme l'union (disjointe par définition de ω_0)

$$\xi(\omega) = \{(\delta_k, \gamma_l), (k, l) \in \Delta_\omega\} \cup \omega_0.$$

On définira également, pour toute partie ω de I , la quantité

$$q(\omega) = \sum_{(i,j) \in \omega} \alpha_{i+1}\beta_j.$$

Lemme 4.1.2 *Pour toute partie ω de I , $q \circ \xi(\omega) \geq q(\omega)$.*

Preuve: Si $(k, l) \in \Delta_\omega$, soit $\omega_{(k,l)}$ l'ensemble des couples (i, j) de $\omega \setminus \omega_0$ tels que $\gamma_{k-1} \leq i < \gamma_k$ et $\delta_l < j \leq \delta_{l+1}$: alors

$$\sum_{(i,j) \in \omega_{(k,l)}} \alpha_{i+1}\beta_j \leq \left(\sum_{i=\gamma_{k-1}+1}^{\gamma_k} \alpha_i \right) \left(\sum_{j=\delta_l+1}^{\delta_{l+1}} \beta_j \right) \leq \alpha_{\delta_k+1}\beta_{\gamma_l},$$

cette dernière inégalité étant conséquence du lemme 4.1.1. Si l'on somme ces inégalités, il vient

$$q(\omega) \leq \sum_{(k,l) \in \Delta_\omega} \alpha_{\delta_k+1} \beta_{\gamma_l} + \sum_{(i,j) \in \omega_0} \alpha_{i+1} \beta_j = q \circ \xi(\omega).$$

Lemme 4.1.3 *La valeur de l'entier q associée au diagramme u est donnée par $q = q(\Omega)$, avec*

$$\Omega = \bigcup_{0 \leq i < j < t} \{\gamma_i, \dots, \gamma_{i+1} - 1\} \times \{\delta_j + 1, \dots, \delta_{j+1}\}.$$

De plus, $n - p \geq q(\bar{\Omega})$, où $\bar{\Omega} = \{(i, j) \in I, i \geq j\}$.

Preuve: C'est une conséquence immédiate de la définition des entiers $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k, \delta_l$. Notons que l'égalité $n - p = q(\bar{\Omega})$ est vérifiée si et seulement si $u_1 = d - r$ et $u_1^* = r$.

Reste à vérifier (c'est la partie la plus délicate de cette démonstration), qu'en appliquant ξ un nombre suffisant de fois, on parviendra toujours, comme dans l'exemple précédent, à "évacuer" les blocs dont les longueurs d'équerres sont plus grandes que l , du diagramme de Young considéré.

Lemme 4.1.4 *Il existe un entier $\nu \geq 1$ tel que $\xi^\nu(\Omega) \subset \bar{\Omega}$.*

Preuve: $\xi(\omega) = \{(\delta_i, \gamma_j), 1 \leq i \leq j \leq s-1\}$; puis, par applications successives de ξ , on associe à un couple (k, l) de $\xi^\mu(\Omega)$ un couple (δ_i, γ_j) tel que $k < \gamma_i \leq \delta_i$ et $l > \delta_j \geq \gamma_j$, si cela est possible: la première composante est ainsi augmentée strictement, alors que la seconde est strictement diminuée. En conséquence, il existe un entier $\nu \geq 1$ tel que $\xi^{\nu+1}(\Omega) = \xi^\nu(\Omega)$, et qui soit le plus petit entier vérifiant cette égalité. Notons \mathcal{P}^+ (respectivement \mathcal{P}^- et \mathcal{P}^0) l'ensemble des couples (δ_i, γ_j) de I tels que $i > j$ (respectivement $i < j$ et $i = j$): on voudrait vérifier que $\xi^\nu(\Omega) \cap \mathcal{P}^- = \emptyset$.

Mais il suffit pour cela de montrer que pour toute chaîne de couples dont le premier est dans $\xi(\Omega)$, et dont chacun "majore" le précédent selon le procédé qui définit l'application ξ , alors au moins autant de ces couples sont dans $\mathcal{P}^+ \cup \mathcal{P}^0$ que dans $\mathcal{P}^- \cup \mathcal{P}^0$: tous les couples de $\xi(\Omega)$ étant dans $\mathcal{P}^- \cup \mathcal{P}^0$, cela garantira qu'après majorations successives, tous les couples obtenus doivent être dans $\mathcal{P}^+ \cup \mathcal{P}^0$, ce dont le lemme sera conséquence.

Considérons donc des couples d'entiers (i_m, j_m) , $1 \leq m \leq \mu$, tels que

$$\gamma_{i_{m+1}-1} \leq \delta_{i_m} < \gamma_{i_{m+1}}, \quad \delta_{j_{m+1}} < \gamma_{j_m} \leq \delta_{j_{m+1}+1},$$

avec $i_m < j_m$ si $1 \leq m \leq \rho$, et $i_m \geq j_m$ si $\rho < m \leq \mu$. Supposons par exemple $\gamma_{j_\mu} \leq \delta_1$: comme $\delta_1 \leq \delta_{i_1} < \gamma_{i_2}$, on doit avoir $j_\mu < i_2$. Distinguons alors deux cas, selon que l'intersection de la chaîne considérée avec \mathcal{P}^0 est vide ou non:

- si $i_{\rho+1} > j_{\rho+1}$, il s'agit de montrer que $\rho \leq \mu - \rho$; or $\delta_{i_\rho} < \delta_{j_\rho} \leq \gamma_{j_\rho} \leq \delta_{j_{\rho+1}+1}$, donc $i_\rho \leq j_{\rho+1}$, et par récurrence sur τ , $i_{\rho+1-\tau} \leq j_{\rho+\tau}$, puisqu'alors, les inégalités $\delta_{i_{\rho-\tau}} < \gamma_{i_{\rho+1-\tau}} \leq \gamma_{j_{\rho+\tau}} \leq \delta_{j_{\rho+\tau}+1+1}$ impliquent que $i_{\rho-\tau} \leq j_{\rho+\tau+1}$. Mais si $\rho > \mu - \rho$, on peut appliquer cette inégalité pour obtenir la contradiction

$$i_2 \leq i_{2\rho+1-\mu} \leq j_\mu < i_2 !$$

- si $i_{\rho+1} = j_{\rho+1}$, il s'agit de vérifier que $\rho < \mu - \rho$: on montre de même par récurrence sur τ que $i_{\rho+1-\tau} \leq j_{\rho+\tau}$, et si $\rho \geq \mu - \rho$, cette inégalité donne pour $\tau = \mu - \rho - 1$ la contradiction $i_2 \leq i_{2\rho+2-\mu} \leq j_\mu < i_2$.

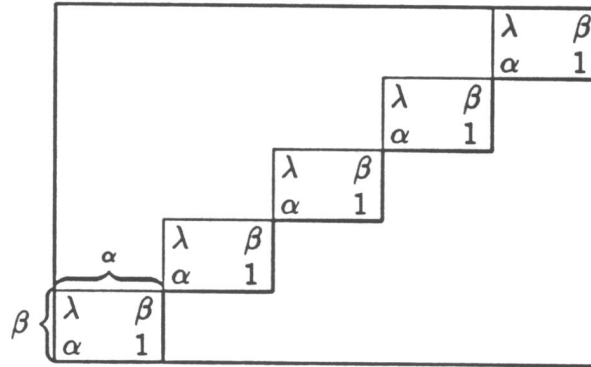
Les deux lemmes précédents impliquent le théorème de Kodaira-Nakano pour les puissances positives du déterminant du fibré quotient, puisqu'avec les notations précédentes,

$$q = q(\Omega) \leq q(\xi^\nu(\Omega)) \leq q(\bar{\Omega}) \leq n - p.$$

On peut également déduire de ce qui précède les groupes de cohomologie non nuls pour $p + q = n$: si le bidegré du diagramme que l'on vient de considérer vérifie cette égalité, on doit avoir $t = s$, $\gamma_i = \delta_i = i$ pour tout $1 \leq i \leq t$, et $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = \alpha$, $\beta_1 = \dots = \beta_s = \beta$, avec $d - r = s\alpha$ et $r = s\beta$; le diagramme obtenu est alors l -admissible pour $l = \alpha + \beta$, et de bidegré donné par

$$p = \frac{s(s+1)}{2}\alpha\beta, \quad q = \frac{s(s-1)}{2}\alpha\beta.$$

Si l'on note (comme on le fera dans toute la suite) $\lambda = l - 1$, un tel diagramme a l'allure suivante:



Un diagramme l -admissible en bidegré $p + q = n$.

Enfin, on vérifie (par exemple en utilisant la remarque 2.4c) que le poids associé à ce diagramme par le théorème de Bott est $(\det V)^\beta$. On a donc démontré le résultat suivant:

Proposition 4.1.1 *Si $p + q > n$ et $l \geq 1$, alors $H^{p,q}(G_r(V), (det Q)^l) = 0$. En bidegré $p + q = n$, les seuls groupes de cohomologie non nuls sont les*

$$H^{\frac{s+1}{2}, \frac{s-1}{2}}(G_r(V), (det Q)^{\frac{s}{2}}) = (det V)^{\frac{r}{2}},$$

où s est un diviseur commun à r et à d .

Remarque 4.1: Notons que si $\mathcal{D} = (u, c)$ est un 0-diagramme l -admissible, l étant toujours supposé strictement positif, on peut considérer \mathcal{D} comme étant de dimensions $r \times u_1$: le théorème de Kodaira-Nakano implique donc, pour le bidegré de \mathcal{D} , l'inégalité

$$p + q \leq ru_1.$$

4.2 Extension aux puissances symétriques

La suite de ce chapitre a pour objet de démontrer un théorème analogue au théorème de Kodaira-Nakano, pour les puissances symétriques du fibré quotient. Pour cela, on montrera qu'il est possible de se ramener au cas de simples puissances de $det Q$, en effectuant sur les diagrammes admissibles des transformations qui permettent de diminuer l'exposant des puissances symétriques considérées.

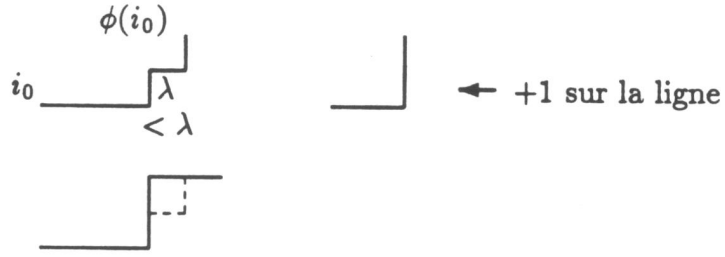
Etant donné un $k1_1$ -diagramme l -admissible $\mathcal{D} = (u, c)$, avec $l > 0$, on voudrait construire un $(k-1)1_1$ -diagramme l -admissible, de façon à pouvoir appliquer le théorème de Kodaira-Nakano au 0-diagramme que l'on obtiendra après avoir répété k fois la même opération.

Considérons donc le plus grand indice i_0 auquel correspond une composante non nulle de c . Si l'on réduit c_{i_0} d'une unité, ce qui revient à augmenter d'une unité les nombres de crochet de la ligne correspondante, le diagramme obtenu est certainement un $(k-1)1_1$ -diagramme, mais n'est pas nécessairement l -admissible.

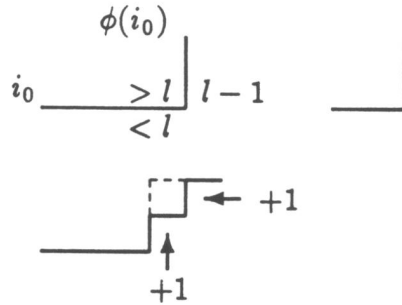
Supposons qu'il ne le soit pas. Alors le plus grand nombre de crochet de la ligne d'indice i_0 du diagramme, qui soit plus petit que l , doit être égal à $l-1 = \lambda$. Notons $\phi_{i_0} + 1$ l'indice de la colonne correspondante: les nombres de crochet de \mathcal{D} d'indices (i_0, ϕ_{i_0}) et $(i_0 + 1, \phi_{i_0} + 1)$ ne pouvant être égal à l , on a

$$u_{i_0} > u_{i_0+1}, \quad u_{\phi(i_0)}^* > u_{\phi(i_0)+1}^*.$$

On est donc dans la situation suivante:

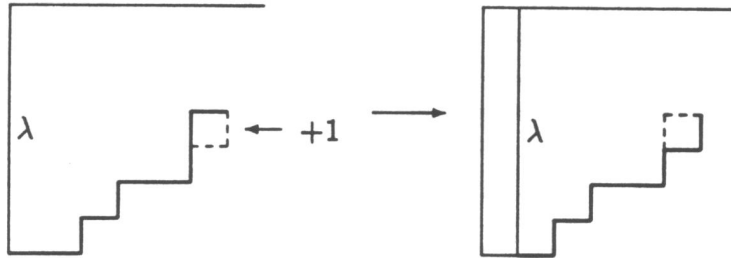


Ajoutons alors une case au diagramme \mathcal{D} , à l'intersection de sa ligne d'indice $u_{\phi(i_0)}^* + 1$ et de sa colonne d'indice $\phi(i_0) + 1$, ce qui augmente d'une unité les nombres de crochet de cette colonne. L'entier l n'apparaît alors plus dans les $u_{\phi(i_0)}^*$ premières lignes du diagramme obtenu, puisqu'elles sont représentées par le schéma suivant:



Mais cette case ajoutée augmente également d'une unité les nombres de crochet de la ligne correspondante de \mathcal{D} : on est donc ramené à la situation précédente, et l'on peut réitérer autant que nécessaire le procédé qui vient d'être décrit.

Cependant, il se peut que cela ne soit pas possible à la dernière étape nécessaire, c'est à dire si l'on vient d'ajouter une case à une ligne dont le premier entier de crochet valait λ . Si $u_1^* < r$, on peut ajouter une case à la première colonne du diagramme, et obtenir ainsi un $(k-1)_1$ -diagramme l -admissible. Cela n'est pas possible si $u_1^* = r$: on décide alors, pour faire disparaître le nombre de crochet de la première colonne qui vaut maintenant l , de supprimer purement et simplement cette colonne.



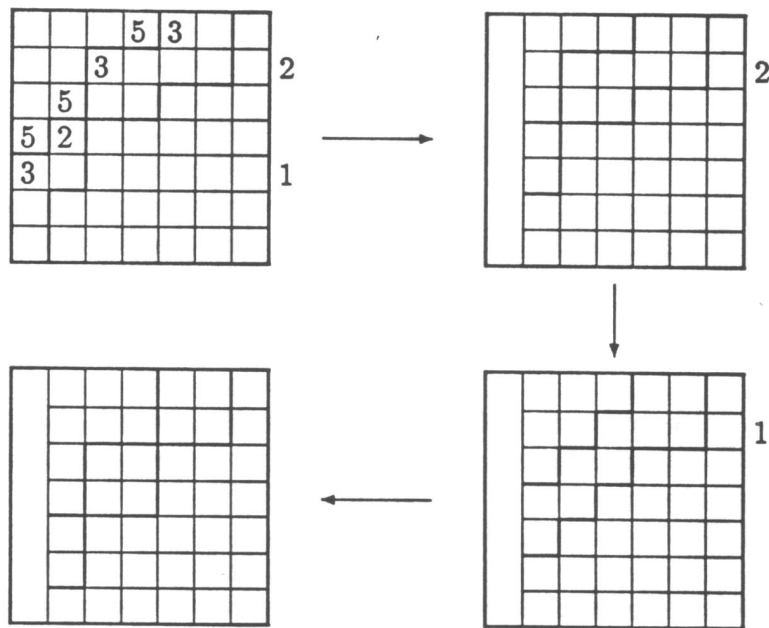
Notons que les cases ajoutées au diagramme augmentent à la fois les entiers p et q associés, sauf éventuellement lorsque l'on supprime sa première colonne: une telle

suppression fait disparaître r cases, au plus $r - 1$ inversions, et diminue u_1 d'une unité. En conséquence, si l'on note $\mathcal{D}' = (u', c')$ le diagramme obtenu, et (p', q') son bidegré, on peut énoncer le résultat suivant:

Proposition 4.2.1 *Le diagramme \mathcal{D}' est un $(k - 1)1_1$ diagramme l -admissible, tel que*

$$p' + q' \geq p + q - (r - 1) - r(u_1 - u'_1).$$

Exemple: Pour $r = d - r = 7$, $k = 3$, $l = 4$, une composante irréductible de $H^{p,q}(G_r(V), S^3 Q \otimes (\det Q)^4)$ est donnée en bidegré $(p, q) = (22, 9)$ par le diagramme suivant, auquel on fait subir trois fois la transformation précédente:



On obtient successivement des composantes irréductibles des groupes de cohomologie $H^{p,q}(G_7(V), S^k Q \otimes (\det Q)^4)$ pour $(k, p, q) = (3, 22, 9), (2, 15, 5), (1, 16, 6), (0, 18, 8)$.

Cette transformation se traduit relativement simplement dans le langage employé par Alain Lascoux. Si le diagramme $\mathcal{D} = (u, c)$ est l -admissible, la suite obtenue en ajoutant aux entiers l de la suite $w_l(u)$, de la droite vers la gauche, les composantes de c , n'a pas de facteur de la forme $i, \underbrace{*, \dots, *}_{j-i-1}, j$. D'après la règle de Littlewood-Richardson, le nombre

d'unités ajoutées à un entier l de la suite $w_l(u)$ est au plus égal au nombre de zéros qui le séparent de l'entier l précédent: il suffit donc a priori d'exclure les facteurs de la forme précédente pour lesquels $i = 0$.

Considérons donc le premier entier l de la suite $w_l(u)$ auquel on a ajouté au moins une unité, disons $\alpha + 1$ unités. Si la suite obtenue en enlevant une de ces unités fait

apparaître un facteur $0, \underbrace{*, \dots, *}_{j-1}, j$, c'est nécessairement le facteur $0, \underbrace{*, \dots, *}_{l+\alpha-1}, l + \alpha$; de plus, le zéro par lequel commence ce facteur doit être précédé d'un l , à moins qu'il ne soit la première composante de $w_l(u)$. Dans le deuxième cas, on supprimera ce zéro de la suite. Dans le premier cas, on l'échangera avec l'entier l qui le précède, et l'on procédera de même pour les facteurs $0, \underbrace{*, \dots, *}_{l-1}, l$ éventuellement créés par cet échange.

Exemple: La succession précédente de diagrammes 4-admissibles se traduit par la succession suivante de suites, on l'on passe d'une suite à la suivante par diminution progressive des entiers strictement supérieurs à 4, transpositions $(4, 0) \rightarrow (0, 4)$ (correspondant à l'apparition de cases supplémentaires) et suppression éventuelle de la première composante (correspondant à la disparition de la première colonne du diagramme associé):

0440540040064
 440440040064
 440404040054
 404400440044

Il serait intéressant de savoir si ces transformations de diagrammes (ou de suites) peuvent avoir une quelconque interprétation combinatoire...

Revenons au k -diagramme \mathcal{D} . Si on lui applique k fois l'opération précédente, on obtient un 0-diagramme l -admissible $\mathcal{D}^0 = (u^0, c^0 = 0)$ de bidegré (p^0, q^0) , avec d'après la proposition précédente

$$p^0 + q^0 \geq p + q - k(r - 1) - r(u_1 - u_1^0).$$

Or le théorème de Kodaira-Nakano, et la remarque 4.1, impliquent que $p^0 + q^0 \leq ru_1^0$ et, comme $ru_1 \leq r(d - r) = n$, on a finalement démontré le résultat suivant:

Proposition 4.2.2 *Soit k un entier naturel, et $l \geq 1$: alors*

$$H^{p,q}(G_r(V), S^k Q \otimes (\det Q)^l) = 0 \quad \text{si } p + q > n + k(r - 1).$$

La démonstration qui précède, associée aux résultats du paragraphe 3.1.1, permet également de déterminer les groupes de cohomologie non nuls correspondant à la valeur limite $n + k(r - 1)$ de $p + q$:

Proposition 4.2.3 *Si $k, l \in \mathbb{N}^*$, les seuls groupes de cohomologie de Dolbeault non nuls $H^{p,q}(G_r(V), S^k Q \otimes (\det Q)^l)$ pour lesquels $p + q = n + k(r - 1)$ s'obtiennent lorsque V est de dimension $d = rl + k$, et sont les groupes*

$$H^{\lambda \frac{r(r+1)}{2} + kr, \lambda \frac{r(r-1)}{2} + k(r-1)}(G_r(V), S^k Q \otimes (\det Q)^l) = \det V.$$

Preuve: Soit $\mathcal{D} = (u, c)$ un $k1_r$ -diagramme l -admissible de bidegré (p, q) , avec $p + q = n + k(r-1)$. Chacune des opérations qui permettent de transformer \mathcal{D} en un 0-diagramme l -admissible \mathcal{D}^0 doit provoquer une variation de la quantité $p + q - ru_1$ égale à $r - 1$. Ceci implique, d'après ce qui précède, que $u_1^* = r$, $\kappa = r - 1$ et $c = k1_r$: \mathcal{D}^0 s'obtient alors en enlevant à \mathcal{D} ses k premières colonnes.

De plus, le diagramme \mathcal{D}^0 , défini par un poids u^0 , doit être de bidegré (p^0, q^0) tel que $p^0 + q^0 = ru_1^0$, avec $u_1^0 = d - r - k$: et sa première colonne doit compter $r - 1$ longueurs d'équerres strictement supérieures à l . D'après la proposition 4.1.1, u^0 est donc tel que $u_i^0 - u_{i+1}^0 = \lambda$, ce qui implique que $d = rl + k$, et

$$p^0 = p - kr = \lambda \frac{r(r+1)}{2}, \quad q^0 = q - k(r-1) = \lambda \frac{r(r-1)}{2}.$$

Remarque 4.2: Lorsque $d \geq rl + k$, on peut démontrer le théorème qui précède beaucoup plus simplement: il suffit en effet de remarquer que si $\mathcal{D} = (u, c)$ est un k -diagramme l -admissible, on doit avoir $u_i - u_{i+1} \leq \lambda + c_i$.

En effet, si l'on suppose $\delta_i = u_i - u_{i+1}$ strictement positif, les longueurs d'équerres de la i -ème ligne de \mathcal{D} , dont les indices de colonne sont compris entre $u_{i+1} + 1$ et u_i , forment une suite consécutive d'entiers allant de $h_{i, u_i}^{\mathcal{D}} = 1 - c_i$ à $h_{i, u_{i+1}+1}^{\mathcal{D}} = \delta_i - c_i$. Comme $l \geq 1 \geq 1 - c_i$, et comme \mathcal{D} est supposé l -admissible, $h_{i, u_{i+1}+1}^{\mathcal{D}}$ doit être strictement inférieur à l , ce qui équivaut bien à $u_i - u_{i+1} \leq \lambda + c_i$. Il existe donc un unique $k1_r$ -diagramme de bidegré maximal, pour lequel $c = k1_r$, dont le bidegré est précisément celui du groupe qui apparaît à la proposition ci-dessus, et dont la contribution, comme l'implique la remarque 2.4c, est une puissance extérieure de V d'exposant $rl + k$.

Remarque 4.3: On utilisera à plusieurs reprises les inégalités $u_i - u_{i+1} \leq \lambda + c_i$ pour majorer le bidegré des diagrammes l -admissibles. Rappelons que les égalités $u_i - u_{i+1} = \lambda + c_i$ définissent les diagrammes que nous avons appelés *extrémaux*, rencontrés au paragraphe 2.3.3: de tels diagrammes existent si et seulement si $d \geq rl + k$.

Notons que pour que le diagramme $\mathcal{D} = (u, c)$ soit extrémal, il suffit que $u_r = \lambda + c_r$. Si c'est le cas, en effet, les longueurs d'équerres de l'avant-dernière ligne de \mathcal{D} intérieurs au diagramme de Young associé à u forment deux suites consécutives d'entiers (la première pouvant être vide, si $u_{r-1} = u_r$), allant respectivement de $h_{r-1, u_{r-1}}^{\mathcal{D}} = 1 - c_{r-1}$ à $h_{r-1, u_r+1}^{\mathcal{D}} = u_{r-1} - u_r - c_{r-1}$, et de $h_{r-1, u_r}^{\mathcal{D}} = u_{r-1} - u_r + 2 - c_{r-1}$ à $h_{r-1, 1}^{\mathcal{D}} = u_{r-1} - c_{r-1}$. Comme $h_{r-1, 1}^{\mathcal{D}} > h_{r, 1}^{\mathcal{D}} = \lambda$, l est compris entre $h_{r-1, u_{r-1}}^{\mathcal{D}}$ et $h_{r-1, 1}^{\mathcal{D}}$, mais par hypothèse est distinct de toutes les longueurs d'équerres de \mathcal{D} : il doit donc être compris entre $h_{r-1, u_r+1}^{\mathcal{D}}$ et $h_{r-1, u_r}^{\mathcal{D}}$, ce qui équivaut à $u_{r-1} - u_r = \lambda + c_{r-1}$. On en déduit bien, par récurrence, que \mathcal{D} est extrémal.

De plus, si l'on munit N^r de la relation d'ordre selon laquelle $c \geq c'$ équivaut à $|c| = |c'|$ et aux inégalités, pour tout entier i compris entre 1 et r ,

$$c_1 + \cdots + c_i \geq c'_1 + \cdots + c'_i,$$

alors le degré p du diagramme extrémal associé au poids c est une fonction strictement décroissante de ce poids, puisque

$$p = \sum_{i=1}^r i(\lambda + c_i) = \lambda \frac{r(r+1)}{2} + (r+1)|c| - \sum_{i=1}^r (c_1 + \dots + c_i).$$

En particulier, si c définit un a -diagramme extrémal, alors $|c| = |a|$ est fixé, et la remarque 2.4a implique que $\chi(c) \leq a$. Le poids $\chi(a)$ définit donc un a -diagramme extrémal dont le degré p (de même que q et $p+q$) est maximal parmi les degrés des a -diagrammes l -admissibles: ce degré est donné par

$$p = \lambda \frac{r(r+1)}{2} + \sum_{i=1}^r (r+1-i)a_i.$$

On pourrait, en adaptant les méthodes précédentes aux a -diagrammes, a étant un poids positif quelconque, démontrer un résultat du même genre pour les fibrés $\Gamma^a Q$ que pour les puissances symétriques de Q . On verra cependant que la proposition précédente peut être établie très généralement, par exemple pour un fibré globalement engendré E de rang r , et un fibré en droites ample L sur une variété complexe compacte X de dimension n , sous la forme

$$H^{p,q}(X, \Gamma^a E \otimes L) = 0 \quad \text{si} \quad p+q > n + \sum_{i=1}^r (r+1-2i)a_i.$$

Notons dès à présent que, comme pour les puissances symétriques, ce résultat est optimal: en effet, si $d = rl + |a|$, l'existence d'un diagramme extrémal $\mathcal{D} = (u, c)$, défini comme à la remarque précédente par $u_i - u_{i+1} = \lambda + c_i$ et $c = \chi(a)$, implique que

$$H^{\lambda \frac{r(r+1)}{2} + \pi, \lambda \frac{r(r-1)}{2} + \pi - |a|}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l) = \wedge^{rl+|a|} V,$$

où $\pi = \sum_{i=1}^r (r+1-2i)a_i$: si l'on note (p^+, q^+) le bidegré de ce groupe de cohomologie, il vient précisément

$$p^+ + q^+ = n + \sum_{i=1}^r (r+1-2i)a_i,$$

avec en l'occurrence $n = r(\lambda r + |a|)$.

5 Majoration de l'exposant

Les propriétés des groupes $H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l)$ mises en évidence aux paragraphes précédents sont indépendantes de l'entier strictement positif l . Cependant, le fibré en droites $\det Q$ étant ample, ces groupes sont nuls en degré $q > 0$, dès que l est suffisamment grand. L'objet de ce paragraphe est de donner quelques estimations du plus petit entier naturel non nul $l^{p,q}(a)$, où q est strictement positif, tel que

$$\forall l \geq l^{p,q}(a), \quad H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l) = 0.$$

5.1 Quelques résultats élémentaires

On donnera tout d'abord une majoration uniforme de $l^{p,q}(a)$ dont on vérifiera le caractère optimal:

Proposition 5.1.1 *Pour tout poids $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$, $l^{p,q}(a) < d$.*

Preuve: Considérons un a -diagramme l -admissible $\mathcal{D} = (u, c)$: la plus grande de ses longueurs d'équerres est

$$h_{1,1}^{\mathcal{D}} = u_1 + u_1^* - c_1 - 1 \leq (d - r) + r - 1 = d - 1.$$

Si $l \geq d - 1$, toutes les longueurs d'équerres du diagramme sont donc inférieures à l , et \mathcal{D} ne peut être l -admissible qu'en degré $q = 0$. ♣

Supposons r et $d - r$ au moins égaux à 2. Alors:

Proposition 5.1.2 *L'égalité $l^{p,q}(a) = d - 1$ est vérifiée si et seulement si $q = 1$, $p \leq d - 1$ et $n - p \geq d - h(a) - 3$.*

Preuve: Supposons le a -diagramme $\mathcal{D} = (u, c)$ l -admissible en bidegré (p, q) , avec $l = d - 2$ et $q \geq 1$. D'après la preuve de la proposition précédente, on doit avoir alors $u_1 = d - r$, $u_1^* = r$ et $c_1 = 0$, de sorte que $h_{1,1}^{\mathcal{D}} = d - 1$. Les longueurs d'équerres étant strictement décroissantes le long des lignes et des colonnes du diagramme, seule $h_{1,1}^{\mathcal{D}}$ peut être strictement supérieure à l , ce qui implique que $q = 1$. De plus, $p \geq u_1 + u_1^* - 1 = d - 1$.

Restent les conditions $h_{1,2}^{\mathcal{D}} < l$ et $h_{2,1}^{\mathcal{D}} < l$, qui sont respectivement équivalentes à $u_2^* < r$ et $u_2 - c_2 < d - r$. Introduisons l'entier naturel σ défini par

$$u_1 = \cdots = u_{\sigma+1} = d - r > u_{\sigma+2},$$

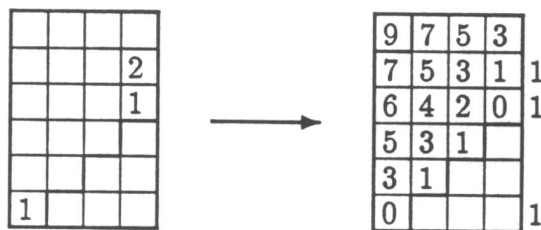
et considérons un tableau numéroté μ associé au diagramme \mathcal{D} . Si $\sigma \geq 1$, on doit avoir $1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_{\sigma+1}$: les lignes du tableau μ correspondant aux lignes de \mathcal{D} d'indices

compris entre 2 et $\sigma + 1$ contiennent donc σ cases numérotées sur une même colonne; d'après la règle de Littlewood-Richardson, ces entiers doivent être deux à deux distincts, ce qui implique que $h(a) \geq \sigma$. Enfin, $u_1^* = r$ et $u_2^* < r$ impliquent $u_r = 1$, d'où

$$n - p = \sum_{i=1}^r (d - r - u_i) \geq (r - \sigma - 2) + (d - r - 1) \geq d - h(a) - 3.$$

Réciproquement, si $p \geq d - 1$ et $n - p \geq d - h(a) - 3$, on peut trouver un poids u tel que $p = \sum_{i=1}^r u_i$, $u_1 = d - r$ et $u_1^* = r > u_2^*$, et tel que la valeur associée de σ soit inférieure à $h(a)$. On construit alors un a -tableau numéroté μ de base $(d - r)\mathbf{1} - \chi(u)$ de la façon suivante: on place tout d'abord les entiers $h(a) + 1 - i$, $1 \leq i \leq \sigma$, chacun sur la première colonne et la $(r - i)$ -ème ligne du tableau, puis chacun des entiers j restants sur sa j -ième ligne. Le diagramme obtenu est alors un a -diagramme $(d - 2)$ -admissible en bidegré $(p, 1)$. ♣

Exemple: Pour $r = 6$, $d = 10$, $n = 24$ et $a = 2\mathbf{1}_1 + \mathbf{1}_2$, il existe des diagrammes 8-admissibles en degré p compris entre 9 et 20. Par exemple, si $u = (4, 4, 4, 3, 2, 1)$, une composante du produit tensoriel de $\Gamma^{-\chi(u)}Q$ par $\Gamma^a Q$ correspond au diagramme et au tableau numéroté ci-dessous:



Ce diagramme est bien 8-admissible, donc $H^{18,1}(G_6(\mathbb{C}^{10}), \Gamma^{2\mathbf{1}_1 + \mathbf{1}_2}Q \otimes (\det Q)^8)$ n'est pas nul, et possède plus précisément une composante de la forme $\Gamma^b V \otimes (\det V)^3$ avec $b = 5\mathbf{1}_1 + 3\mathbf{1}_2 + 2\mathbf{1}_{3,8} + \mathbf{1}_9$.

5.2 Une estimation de $l^{p,q}(a)$

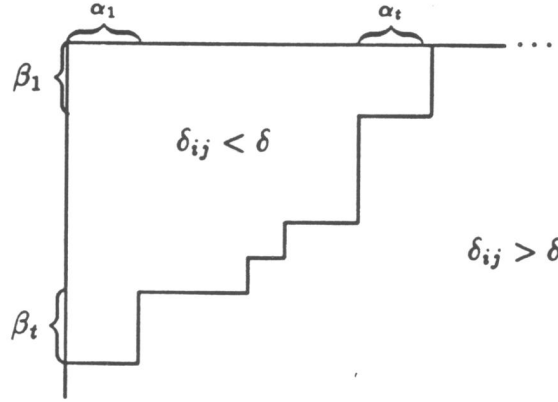
Proposition 5.2.1 *On a l'estimation suivante:*

$$l^{p,q}(a) \leq \min(d, p + 1) + E(-2q^{\frac{1}{2}}) + 1.$$

Preuve: Considérons le problème suivant: on suppose donné un tableau $\infty \times \infty$ dont lignes et colonnes sont indexées par \mathbb{N}^* à partir de son coin supérieur gauche. Pour $i, j \geq 2$, la i -ème ligne et la j -ème colonne de ce tableau sont affectés d'entiers σ_i et τ_j strictement positifs, et l'on pose

$$\delta_{i,j} = \sum_{m=2}^i \sigma_m + \sum_{n=2}^j \tau_n + 1.$$

On définit alors des entiers strictement positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ et β_1, \dots, β_t tels que l'ensemble des cases du tableau pour lesquelles $\delta_{i,j} < \delta$ ait la forme du diagramme suivant:



Il s'agit de déterminer la valeur maximale de l'aire de ce diagramme,

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i+j \leq t+1} \alpha_i \beta_j,$$

lorsque le tableau considéré est supposé tel que les entiers $\delta_{i,j}$ soient distincts de δ .

Sous cette hypothèse, on a par exemple

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha_1 + \dots + \alpha_t, \beta_1} &< \delta < \delta_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{t-1} + 1, \beta_1 + 1} \\ &< \delta_{\alpha_1 + \dots + \alpha_t, \beta_1} + \sigma_{\beta_1 + 1} - \sum_{i=2}^{\alpha_t} \tau_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{t-1} + i} \\ &< \delta_{\alpha_1 + \dots + \alpha_t, \beta_1} + \sigma_{\beta_1 + 1} - \alpha_t + 1. \end{aligned}$$

Par conséquent $\sigma_{\beta_1 + 1} > \alpha_t$, et l'on obtient de même pour tout entier i compris entre 1 et $t-1$ l'inégalité

$$\sigma_{\beta_1 + \dots + \beta_i + 1} > \alpha_{t+1-i}.$$

Or ceci implique que

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha_1, \beta_1 + \dots + \beta_t} &\geq \alpha_1 + \beta_1 + \dots + \beta_t + (\sigma_{\beta_1 + 1} - 1) + \dots + (\sigma_{\beta_1 + \dots + \beta_{t-1} + 1} - 1) - 1 \\ &\geq \sum_{i=1}^t (\alpha_i + \beta_i) - 1. \end{aligned}$$

Comme par hypothèse $\delta_{\alpha_1, \beta_1 + \dots + \beta_t} < \delta$, il vient $\sum_{i=1}^t (\alpha_i + \beta_i) \leq \delta$, donc

$$\begin{aligned} S(\alpha, \beta) = \sum_{i+j \leq t+1} \alpha_i \beta_j &\leq \sum_{i=1}^t \alpha_i \sum_{j=1}^t \beta_j \\ &\leq \sum_{i=1}^t \alpha_i (\delta - \sum_{j=1}^t \alpha_j) \leq \frac{\delta^2}{4}, \end{aligned}$$

cette valeur ne pouvant être atteinte que pour $t = 1$, et $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{\delta}{2}$.

Si $\mathcal{D} = (u, c)$ est à présent un diagramme l -admissible de bidegré (p, q) , on peut le considérer, puisque ses longueurs d'équerres sont strictement monotones le long de

chacune de ses lignes et colonnes, comme une partie d'un tableau infini du type précédent, avec $h_{i,j}^{\mathcal{D}} = h_{1,1}^{\mathcal{D}} - \delta_{i,j} + 1$, $\delta = h_{1,1}^{\mathcal{D}} - l + 1$, et dont l'aire est alors égale à q . Il vient

$$h_{1,1}^{\mathcal{D}} - l + 1 \geq 2q^{\frac{1}{2}};$$

mais $h_{1,1}^{\mathcal{D}} = u_1 + u_1^* - c_1 - 1 \leq \min(p, d-1)$, d'où l'inégalité

$$l \leq \min(d, p+1) + E(-2q^{\frac{1}{2}}). \clubsuit$$

Montrons que cette majoration de $l^{p,q}(a)$ est susceptible de correspondre à sa valeur précise.

Proposition 5.2.2 *Soit ρ un entier tel que $1 \leq \rho \leq d-r$ et $2\rho \leq r$, soit p un entier compris entre $\rho(d-\rho)$ et $n-\rho(d-r-\rho)$, et soit $q = \rho^2$. Alors il existe un poids $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$ tel que*

$$H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^{d-2\rho}) \neq 0,$$

et donc tel que $l^{p,q}(a) = d - 2q^{\frac{1}{2}} + 1$.

Preuve: Si p est compris entre $\rho(d-\rho)$ et $n-\rho(d-r-\rho)$, il existe un poids $u \in \mathbb{N}_{\geq}^r$ tel que $|u| = p$, et

$$u_1 = \dots = u_{\rho} = d-r, \quad u_{r-\rho+1} = \dots = u_r = \rho,$$

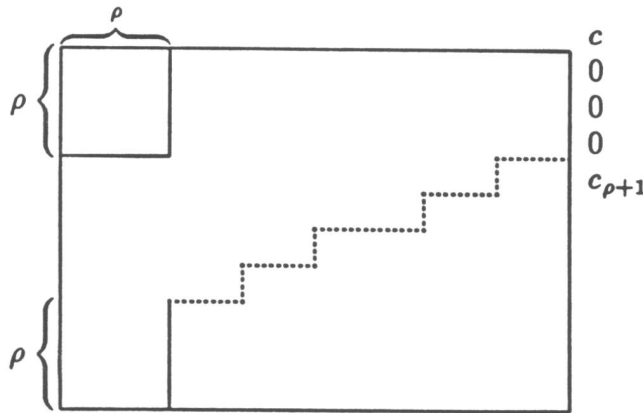
ce qui implique que les longueurs d'équerres associées vérifient

$$h_{\rho,\rho}^u = d - 2\rho + 1 \quad \text{et} \quad h_{1,\rho+1}^u \leq d - 2\rho - 1.$$

Le diagramme $\mathcal{D} = (u, c)$ sera donc $(d-2\rho)$ -admissible en bidegré (p, q) , dès que $c_1 = \dots = c_{\rho} = 0$, et

$$h_{\rho+1,1}^{\mathcal{D}} = u_{\rho+1} + r - \rho - 1 - c_{\rho+1} \leq d - 2\rho - 1,$$

c'est-à-dire $c_{\rho+1} \geq u_{\rho+1} + \rho - d + r$. Enfin, si le poids c vérifie ces différentes conditions, et si $u - c$ est décroissant, il existe nécessairement un poids $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$ tel que \mathcal{D} soit un a -diagramme. \clubsuit



Exemple: Si $r = 6$, $d = 10$, $n = 24$, si $\rho = 2$, $d - 2\rho = 6$, on peut considérer le poids $u = (4, 4, 3, 3, 2, 2)$ en degré $p = 18$. Le tableau numéroté associé est de la forme

		5	
	7		
6			

Il suffit de diminuer $h_{3,1}^u = 6$ d'une unité pour obtenir un tableau 6-admissible, ce que l'on pourra faire en tensorisant $\Gamma^{-x(u)}Q$ par $\Gamma^a Q$ pour n'importe quel poids $a \in \mathbb{N}_{\geq}^6$ tel que $h(a)$ soit compris entre 2 et 4. Par exemple, si $a = 2\mathbf{1}_1 + \mathbf{1}_2$, une composante de ce produit tensoriel correspond au diagramme de gauche, donc au tableau numéroté de droite ci-dessous:

		2	
		1	
1			

→

9	8	5	2
8	7	4	1
5	4	1	
4	3	0	
3	2		
1	0		

1
1
1

Le groupe $H^{18,4}(G_6(\mathbb{C}^{10}), \Gamma^{2\mathbf{1}_1 + \mathbf{1}_2}Q \otimes (\det Q)^6)$ n'est donc pas nul, et possède une composante de la forme $\Gamma^b V \otimes (\det V)^2$, avec $b = 3\mathbf{1}_1 + 2\mathbf{1}_{2,7}$.

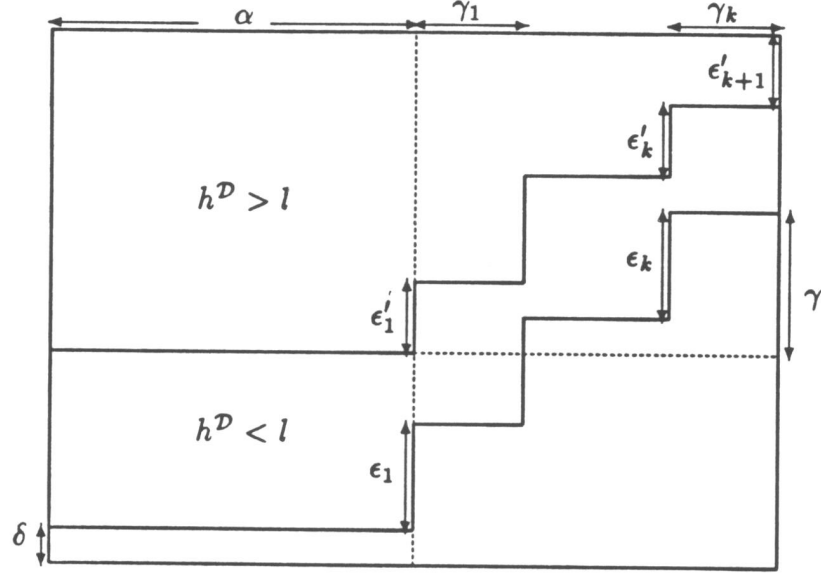
5.3 Cas d'un bidegré $p + q > n$

Les résultats suivants sont à rapprocher des théorèmes généraux que l'on obtiendra dans la seconde partie de cette thèse pour les fibrés amples et semi-amples:

Théorème 5.3.1 *Soit $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$ tel que $h(a) < r$. Alors $H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l) = 0$ si $p + q > n$ et si l'on est dans une des situations suivantes:*

1. $h(a) = r - 1$ et $l > h(a) + n - p$;
2. $h(a) = r - 2$ et $l > h(a) + \frac{n-p}{2}$;
3. $h(a) \leq r - 3$ et $l > h(a) + \frac{n-p+2}{3}$.

Preuve: Soit \mathcal{D} un a -diagramme l -admissible de bidegré (p, q) , avec $l \geq 1$ et $p + q > n$, et introduisons des entiers $\alpha, \gamma, \delta, \epsilon_1, \dots, \epsilon_k, \epsilon'_1, \dots, \epsilon'_{k+1}$ et $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ tels que \mathcal{D} ait la forme suivante:



L'entier γ est par définition égal à $r - \delta - \sum_{i=1}^k (\epsilon_i + \epsilon'_i)$, et n'est pas nécessairement positif (il est par exemple négatif pour le schéma précédent). Par contre, les ϵ_i et γ_i sont supposés strictement positifs, ainsi que α , alors que les ϵ'_i peuvent éventuellement s'annuler. On posera de plus $\sigma_i = \epsilon'_i + \dots + \epsilon'_{k+1}$, et $v = (d - r)1 - u \in \mathbb{N}^r$.

Lemme 5.3.1 Si $1 \leq i \leq k$, alors $\epsilon'_i \leq \epsilon_i$ et $(v + c)_{\sigma_i} \geq \gamma_i + \dots + \gamma_{k-1}$.

Preuve: Par définition, pour tout entier i compris entre 1 et k ,

$$h_{\sigma_{i+1}+1, \alpha+\gamma_1+\dots+\gamma_{i-1}+1}^{\mathcal{D}} < l < h_{\sigma_i, \alpha+\gamma_1+\dots+\gamma_{i-1}}^{\mathcal{D}}.$$

Or ces entiers de crochet sont donnés par les formules suivantes:

$$\begin{aligned} h_{\sigma_{i+1}+1, \alpha+\gamma_1+\dots+\gamma_{i-1}+1}^{\mathcal{D}} &= (\gamma_1 + \dots + \gamma_k - v_{\sigma_{i+1}+1}) + \\ &\quad + (\epsilon'_1 + \dots + \epsilon'_i - \epsilon_1 - \dots - \epsilon_i + \beta + \gamma) - 1 - c_{\sigma_{i+1}+1}, \\ h_{\sigma_i, \alpha+\gamma_1+\dots+\gamma_{i-1}}^{\mathcal{D}} &= (\gamma_1 + \dots + \gamma_k - v_{\sigma_i}) + \\ &\quad + (\epsilon'_1 + \dots + \epsilon'_{i-1} - \epsilon_1 - \dots - \epsilon_{i-1} + \beta + \gamma) + 1 - c_{\sigma_i}. \end{aligned}$$

L'inégalité $h_{\sigma_{i+1}+1, \alpha+\gamma_1+\dots+\gamma_{i-1}+1}^{\mathcal{D}} + 1 \leq h_{\sigma_i, \alpha+\gamma_1+\dots+\gamma_{i-1}}^{\mathcal{D}} - 1$ implique donc que

$$\epsilon_i - \epsilon'_i \geq (v + c)_{\sigma_i} - (v + c)_{\sigma_{i+1}+1} \geq 0$$

si $\sigma_i > \sigma_{i+1}$, c'est-à-dire $\epsilon'_i > 0$, puisque $v + c$ est nécessairement croissant (si $\epsilon'_i = 0$, il n'y a rien à démontrer).

Soit de plus j le plus grand entier strictement inférieur à i tel que $\epsilon'_j > 0$. L'inégalité

$$h_{\sigma_i, \alpha + \gamma_1 + \dots + \gamma_{i-1}}^{\mathcal{D}} - 1 \geq h_{\sigma_{j+1}+1, \alpha + \gamma_1 + \dots + \gamma_{j-1}+1}^{\mathcal{D}} + 1$$

implique alors, d'après ce qui précède,

$$(v + c)_{\sigma_{j+1}+1} - (v + c)_{\sigma_i} \geq \gamma_j + \dots + \gamma_{i-1} + \sum_{k=j+1}^{i-1} (\epsilon_k - \epsilon'_k) \geq \gamma_j + \dots + \gamma_{i-1}.$$

Comme ϵ'_j est supposé non nul, σ_j est strictement supérieur à σ_{j+1} , et comme $v + c$ est croissant, l'inégalité $(v + c)_{\sigma_i} \geq \gamma_i + \dots + \gamma_{k-1}$ implique donc

$$(v + c)_{\sigma_j} \geq (v + c)_{\sigma_{j+1}+1} \geq \gamma_j + \dots + \gamma_{k-1},$$

et l'on conclut par récurrence. ♣

Lemme 5.3.2 Si $\epsilon'_{k+1} > 0$, alors $l \leq h(a)$.

Preuve: En effet, $l \leq h_{\sigma_{k+1}, \alpha + \gamma_1 + \dots + \gamma_k}^{\mathcal{D}} - 1 \leq \gamma + \epsilon'_1 + \dots + \epsilon'_k$, et sous l'hypothèse $\epsilon'_{k+1} > 0$, on peut démontrer comme au lemme précédent, que

$$(v + c)_{\sigma_{k+1}+1} \geq \gamma_k.$$

Mais comme l est supposé strictement positif, $v_{\sigma_{k+1}+1}$ est nul, d'où $c_{\sigma_{k+1}+1} \geq \gamma_k > 0$: la règle de Littlewood-Richardson implique alors que

$$h(a) \geq \gamma + \epsilon'_1 + \dots + \epsilon'_k \geq l,$$

puisque chaque tableau numéroté associé à \mathcal{D} admet au moins $\gamma + \epsilon'_1 + \dots + \epsilon'_k$ cases numérotées sur sa colonne correspondant à la $\alpha + \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ -ième colonne de \mathcal{D} , et puisqu'elles doivent l'être d'entiers distincts. ♣

On supposera donc, dans ce qui suit, que $\epsilon'_{k+1} = 0$.

Lemme 5.3.3 On a $(v + c)_{\sigma_1+1} \geq \alpha + \gamma_1 + \dots + \gamma_{k-1}$ et, si $p + q > n$,

$$\alpha > \sum_{i=1}^k \frac{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_i - \epsilon_{i+1} - \dots - \epsilon_k}{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_k} \gamma_i.$$

Preuve: L'inégalité $h_{\sigma_1, \alpha}^{\mathcal{D}} - 1 \geq h_{\sigma_1+1, 1}^{\mathcal{D}} + 1$ s'écrit en effet

$$\gamma_1 + \dots + \gamma_k + \gamma + \epsilon_1 + \dots + \epsilon_k - (v+c)_{\sigma_1} \geq \alpha + \gamma_1 + \dots + \gamma_k + \gamma + \epsilon_1 + \dots + \epsilon_k - (v+c)_{\sigma_1+1},$$

d'où l'on déduit, d'après les lemmes précédents,

$$(v+c)_{\sigma_1+1} \geq \alpha + (v+c)_{\sigma_1} \geq \alpha + \gamma_1 + \dots + \gamma_{k-1}.$$

De plus, l'inégalité $p+q > n$ implique

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq j} \epsilon_i \gamma_j &\leq n - p < q = \alpha(\epsilon'_1 + \dots + \epsilon'_k) + \sum_{i > j} \epsilon'_i \gamma_j \\ &\leq \alpha(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_k) + \sum_{i > j} \epsilon_i \gamma_j, \end{aligned}$$

d'où la minoration annoncée de α . ♣

Introduisons alors l'entier m , compris entre 1 et k , tel que

$$\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{m-1} - \epsilon_m - \dots - \epsilon_k < 0 \quad \text{et} \quad \epsilon_1 + \dots + \epsilon_m - \epsilon_{m+1} - \dots - \epsilon_k \geq 0.$$

Dans la minoration de α du lemme précédent, le coefficient de γ_k est égal à 1, ceux de $\gamma_m, \dots, \gamma_{k-1}$ sont positifs, et ceux de $\gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}$ sont supérieurs à -1 , d'où $\alpha > -\gamma_1 - \dots - \gamma_{m-1} + \gamma_k$ et

$$(v+c)_{\sigma_1+1} > \gamma_m + \dots + \gamma_k,$$

ce qui implique que $h(a) \geq \gamma + \epsilon_m + \dots + \epsilon_k = \gamma + \beta - \epsilon$, où l'on note $\epsilon = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_{m-1}$.
On distinguera finalement deux cas:

- $m \geq 2$: alors l'inégalité $\epsilon_m + \dots + \epsilon_k > \epsilon > 0$ implique

$$n - p \geq \gamma_k(2\epsilon + 1) + \epsilon,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} l &\leq h_{\sigma_k, \alpha + \gamma_1 + \dots + \gamma_{k-1}}^{\mathcal{D}} - 1 \leq \beta + \gamma + \gamma_k \\ &\leq h(a) + \epsilon + \gamma_k \leq h(a) + \epsilon + \frac{n-p-\epsilon}{2\epsilon+1}. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité étant fonction convexe de ϵ , qui est compris, puisque $\gamma_k \geq 1$, entre 1 et $\frac{n-p-1}{3}$, il vient

$$l \leq h(a) + \frac{n-p+2}{3}.$$

- $m = 1$: alors l'inégalité $h(a) \geq \gamma + \epsilon_1 + \dots + \epsilon_k$ implique $r - h(a) \leq \epsilon'_1 + \dots + \epsilon'_k \leq \epsilon_1 + \dots + \epsilon_k$, donc $n - p \geq \gamma_k(r - h(a))$; comme $l \leq h(a) + \gamma_k$, il vient

$$l \leq h(a) + \frac{n-p}{r-h(a)},$$

et le théorème est démontré. ♣

Les résultats suivants permettent d'apprécier l'optimalité du théorème qui vient d'être établi.

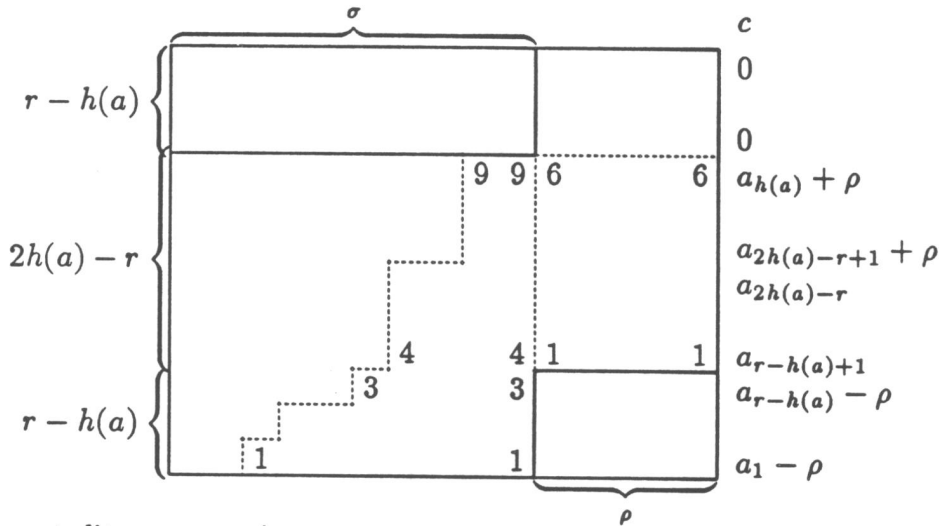
Proposition 5.3.1 Soit $a \in \mathbb{N}_\geq^r$ tel que $2h(a) < 2r \leq 3h(a)$. Alors

$$H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^{h(a) + \frac{n-p}{r-h(a)}}) \neq 0$$

si l'on suppose q multiple de $r - h(a)$, et $p - q = h(a)(d - r)$, cela dès que

$$a_{2h(a)-r} - a_{2h(a)-r+1} \geq \frac{n-p}{r-h(a)} \text{ et } a_{h(a)} \geq \frac{p+q-n}{r-h(a)}.$$

Preuve: Il suffit de considérer le diagramme $\mathcal{D} = (u, c)$ correspondant au schéma suivant (en l'occurrence, $r = 12$, $h(a) = 9$, $\rho = 6$, et l'on a fait figurer quelques-uns des entiers du tableau numéroté qui définit \mathcal{D}):



Autrement dit, on a posé

$$u = (d-r)\mathbf{1} - \rho\mathbf{1}_{h(a)+1,r},$$

$$\chi(c) = a - \rho(\mathbf{1}_{1,r-h(a)} - \mathbf{1}_{2h(a)-r+1,h(a)}).$$

Alors c est positif dès que $a_{r-h(a)} \geq \rho$, et la décroissance de $u - c$ est équivalente à l'inégalité

$$a_{2h(a)-r} - a_{2h(a)-r+1} \geq \rho,$$

et cette inégalité implique la précédente.

Le poids c correspond alors par exemple au tableau numéroté de base $\mathbf{1}_{1,r-h(a)}$, admettant ρ cases sur sa $(r-h(a)+i)$ -ième ligne numérotées de l'entier i , pour i compris entre 1 et $2h(a)-r$, et $a_i - \rho$ (respectivement a_i) autres cases numérotées de l'entier i sur sa i -ième ligne (qui correspond, rappelons-le, à la $(r+1-i)$ -ième ligne de \mathcal{D}) si $1 \leq i \leq r-h(a)$ (respectivement $r-h(a) < i \leq h(a)$).

Les entiers de crochet de \mathcal{D} prennent alors les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} h_{1,\sigma+1}^{\mathcal{D}} &= h(a) + \rho - 1, \\ h_{r-h(a),\sigma}^{\mathcal{D}} &= h(a) + \rho + 1, \\ h_{r-h(a)+1,1}^{\mathcal{D}} &= h(a) + \sigma - a_{h(a)} - 1, \end{aligned}$$

de sorte que \mathcal{D} est un a -diagramme l -admissible, pour $l = h(a) + \rho$, en bidegré

$$p = n - \rho(r - h(a)), \quad q = \sigma(r - h(a)),$$

dès que $a_{h(a)} \geq \sigma - \rho$: la proposition est donc démontrée, si l'on remarque que la relation $\rho + \sigma = d - r$ est équivalente à $p - q = n - (r - h(a))(d - r) = h(a)(d - r)$. ♣

Proposition 5.3.2 Soit $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$ tel que $r - h(a) = 3\rho + 1$, et $a_{h(a)-1} \geq 2$. Alors si V est de dimension $d = r + 3$,

$$H^{n-3\rho-1, 3\rho+2}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^{h(a)+\rho+1}) \neq 0.$$

Preuve: Il suffit de considérer le diagramme $\mathcal{D} = (u, c)$ correspondant au schéma suivant, où $\gamma = h(a) - \rho - 1$ (en l'occurrence $\rho = 2$ et $\gamma = 3$),

				c
				0
$\rho + 1$				0
			5	1
ρ			4	1
		6	3	2
		5	2	2
γ		4	1	2
		3		1
$\rho + 1$	4	2		2
	3	1		2
	2			1
ρ	1			1

c'est-à-dire donné par

$$\begin{aligned} u &= 3\mathbf{1} - \mathbf{1}_{\gamma+2\rho+2,r} - \mathbf{1}_{\gamma+3\rho+3,r}, \\ c &= \mathbf{1}_{\rho+2,\gamma+2\rho+1} + \mathbf{1}_{2\rho+2,\gamma+3\rho+2} + \chi(b), \end{aligned}$$

avec $b = a - 2\mathbf{1}_{1,\rho+\gamma} - \mathbf{1}_{\rho+\gamma+1}$. Le poids c correspond par exemple au tableau numéroté comptant une case numérotée de l'entier i sur ses lignes d'indices $2\rho + i + 1$ pour $1 \leq i \leq$

$\gamma + \rho$, et $\rho + i$ pour $1 \leq i \leq \gamma + \rho$, et b_i cases numérotées de ce même entier sur sa i -ème ligne. Les entiers de crochet de \mathcal{D} prennent alors les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} h_{1,3}^{\mathcal{D}} &= \gamma + 2\rho + 1 = h(a) + \rho, \\ h_{\rho+2,2}^{\mathcal{D}} &= 1 + \gamma + 2\rho + 1 - c_{\rho+2} = h(a) + \rho, \\ h_{2\rho+2,1}^{\mathcal{D}} &= 2 + \gamma + 2\rho + 1 - c_{2\rho+2} = h(a) + \rho, \\ h_{\rho+2}^{\mathcal{D}} &= 2 + \gamma + 2\rho + 1 = h(a) + \rho + 2, \\ h_{2\rho+1}^{\mathcal{D}} &= 3 + \gamma + 2\rho + 1 - c_{2\rho+1} = h(a) + \rho + 2, \end{aligned}$$

de sorte que \mathcal{D} est bien un a -diagramme l -admissible, pour $l = h(a) + \rho + 1$, en bidegré

$$p = n - 3\rho - 1, \quad q = 3\rho + 2. \clubsuit$$

6 Non dégénérescence en E_2 de la suite spectrale de Borel-Le Potier

6.1 La suite spectrale de Borel-Le Potier

6.1.1 Définition

Soit $\pi : Y \longrightarrow X$ un morphisme lisse de variétés complexes compactes. Le fibré Ω_Y^p des p -formes holomorphes sur Y peut être filtré par les sous-fibrés

$$F^{m,p} = \pi^* \Omega_X^m \wedge \Omega_Y^{p-m}.$$

Les fibrés quotients associés sont les

$$G^{m,p} = F^{m,p} / F^{m+1,p} = \pi^* \Omega_X^m \otimes \Omega_{Y/X}^{p-m},$$

où $\Omega_{Y/X}^q$ est le fibré des q -formes relatives aux fibres de la projection π . De même, pour tout faisceau cohérent \mathcal{S} , le faisceau $\Omega_Y^p \otimes \mathcal{S}$ peut être filtré par ses sous-faisceaux

$$\mathcal{F}^{m,p} = F^{m,p} \otimes \mathcal{S}.$$

A cette filtration est associée ([Go]) une suite spectrale dite *suite spectrale de Borel-Le Potier d'ordre p* ([Bor],[LP1]), convergeant vers $H^q(Y, \Omega_Y^p \otimes \mathcal{S}) = H^{p,q}(Y, \mathcal{S})$, et dont les termes d'ordre un sont les groupes de cohomologie

$${}^p E_1^{t,q-t} = H^q(Y, \mathcal{G}^{t,p}),$$

où les faisceaux $\mathcal{G}^{t,p} = G^{t,p} \otimes \mathcal{S}$ sont les quotients de la filtration considérée de $\Omega_Y^p \otimes \mathcal{S}$.

6.1.2 Non dégénérescence en E_1

La suite spectrale de Borel-Le Potier dégénère en E_1 si les morphismes

$${}^p d_r^{t,q-t} : {}^p E_r^{t,q-t} \longrightarrow {}^p E_r^{t+r,q-t-r+1}$$

sont nuls pour $r \geq 1$. Peternell, Le Potier et Schneider ([PLPS2]) ont montré qu'un tel phénomène de dégénérescence en E_1 ne pouvait avoir lieu que sous des conditions très restrictives.

Par exemple, si E est un fibré vectoriel sur X , et si $Y = \mathbb{P}(E)$, on définit la *classe d'Atiyah de E* de la façon suivante: le fibré des jets d'ordre un de E est une extension de E par $\Omega_X^1 \otimes E$:

$$0 \longrightarrow \Omega_X^1 \otimes E \longrightarrow J^1 E \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

On en déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(E, \Omega_X^1 \otimes E) \longrightarrow \mathcal{H}om(E, J^1 E) \longrightarrow \mathcal{H}om(E, E) \longrightarrow 0,$$

d'où un morphisme de connexion

$$\mathcal{H}om(E, E) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{H}om(E, \Omega_X^1 \otimes E)) = H^{1,1}(X, \mathcal{H}om(E, E)).$$

La classe d'Atiyah de E est alors définie comme l'image de l'identité par ce morphisme.

La suite spectrale de Borel-Le Potier dégénère alors en E_1 pour tout faisceau \mathcal{S} dès que la classe d'Atiyah de E est dans l'image de l'homomorphisme

$$H^{1,1}(X) \longrightarrow H^{1,1}(X, \mathcal{H}om(E, E))$$

induit par l'injection $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{H}om(E, E)$. De plus, Peternell, Le Potier et Schneider montrent qu'au moins dans certains cas, cette condition est nécessaire: et lorsqu'elle est vérifiée, toutes les classes de Chern de E sont par exemple déterminées par la première d'entre elles.

6.1.3 Dégénérescence en E_2 sur les variétés de drapeaux

Considérons, sur une variété X de dimension n , un fibré vectoriel holomorphe E de rang d , et notons π la projection sur X d'une variété de drapeaux $Y = M_s(E)$ associée à E . Sur $M_s(E)$ sont définis les fibrés en droites Q_s^a , et les suites spectrales de Borel-Le Potier correspondant à ces fibrés et à la projection π , qui convergent vers les groupes de cohomologie $H^{p,q}(Y, Q_s^a)$, sont étroitement liées à la cohomologie des fibrés associés à E . En effet, les termes d'ordre un de ces suites spectrales, les groupes

$${}^p E_1^{t,q-t} = H^q(Y, G^{t,p} \otimes Q_s^a),$$

sont eux-mêmes l'aboutissement de suites spectrales de Leray dont les termes d'ordre deux sont les groupes de cohomologie sur X

$$E_2^{i,j} = H^{t,i}(X, H^{p-t,j}(M_s(E), Q_s^a)).$$

On a noté ici $H^{p,q}(M_s(E), Q_s^a)$ les groupes de cohomologie relatifs aux fibres de π , du fibré en droites Q_s^a : ce groupe étant un $Gl(E)$ -module est somme de fibrés associés au fibré E , et l'on peut écrire a priori

$$E_2^{i,j} = \bigoplus_b \nu_a^{p-t,j}(b) H^{t,i}(X, \Gamma^b E).$$

Par exemple, si $p = n + N_s = \dim Y$, le seul quotient $G^{t,p}$ non nul est $G^{n,n+N_s} = \pi^* K_X \otimes K_{Y/X}$, et la suite spectrale de Leray associée a pour termes d'ordre deux les groupes

$$E_2^{i,j} = H^{n,i}(X, H^j(M_s(E), Q_s^{a+\kappa(s)})),$$

puisque $K_{M_s(E)} = Q_s^{\kappa(s)}$. Si a est strictement décroissant relativement à s , le théorème de Bott implique alors que

$$E_2^{i,j} = \delta_{j,0} H^{n,i}(X, \Gamma^{a+\kappa(s)} E).$$

La suite spectrale de Leray considérée dégénère donc en E_2 , de même que la suite spectrale de Borel-Le Potier d'ordre $n + N_s$ associée à Q_s^a , et l'on obtient l'isomorphisme ([De1], (3.10))

$$H^{n+N_s,q}(M_s(E), Q_s^a) \simeq H^{n,q}(X, \Gamma^{a+\kappa(s)} E),$$

qui généralise le théorème d'isomorphisme de Griffiths ([G])

$$H^{n+d-1,q}(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(k)) \simeq H^{n,q}(X, S^{k-d} E \otimes \det E).$$

Jean-Pierre Demailly a posé le problème d'une éventuelle dégénérescence en E_2 de la suite spectrale de Borel-Le Potier associée à un fibré en droites ample sur une variété de drapeaux d'un fibré vectoriel. Un tel phénomène aurait eu d'intéressantes conséquences dont on donnera quelques exemples aux paragraphes suivants, et l'on utilisera les méthodes développées au chapitre précédent pour montrer que cette dégénérescence en E_2 n'a pas nécessairement lieu.

6.2 Un exemple de non dégénérescence

Ce paragraphe explicite un contre-exemple à la dégénérescence en E_2 de la suite spectrale de Borel-Le Potier, par des calculs explicites des poids des groupes de cohomologie impliqués dans cette suite spectrale (cet exemple a fait l'objet d'une note aux C.R.A.S. [M1]). On donnera au paragraphe suivant un contre-exemple légèrement différent, et beaucoup plus commode à interpréter en termes de diagrammes.

Lemme 6.2.1 *Soit W un espace vectoriel complexe de dimension $r \geq 2$, et $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$ un poids tel que pour tout entier i compris entre 1 et $r-1$, $a_i - a_{i+1} \geq r-1$. Alors*

$$H^{p,q}(M(W), Q^a) = \delta_{q,0} \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^w} \nu(u,p) \Gamma^{a+u} W.$$

Preuve: Le fibré $\Omega_{M(W)}^p$, en vertu de la remarque 1.9, est filtré par des sous fibrés dont les quotients sont des fibrés en droites Q^u , où u décrit l'ensemble des sommes de p poids $1_i - 1_j$, $i > j$, deux à deux distincts, comptés avec leurs multiplicités. Ceci implique que pour tout entier i compris entre 1 et $r - 1$, $u_i \geq i - r$ et $u_{i+1} \leq i$, donc

$$u_i - u_{i+1} \geq -r,$$

de sorte que sous l'hypothèse faite sur le poids a , $a + u - c(r)$ est décroissant. Le théorème de Bott implique alors que chacun des quotients Q^{a+u} de $\Omega_{M(W)}^p \otimes Q^a$ correspondants ne peut avoir de cohomologie qu'en degré zéro: il en est donc de même de $\Omega_{M(W)}^p \otimes Q^a$, dont la cohomologie est alors la somme de celles des fibrés Q^{a+u} . \clubsuit

Soit donc $a \in \mathbb{N}_{\geq}^r$ tel que $a_i - a_{i+1} \geq r - 1$ si $0 < i < r$, et $a_r = 0$, soit l un entier naturel non nul, et considérons la suite spectrale de Borel-Le Potier associée au schéma

$$\begin{array}{ccc} Q^{a+l\mathbf{1}} & & Q \\ \downarrow & \pi & \downarrow \\ Y = M(Q) & \longrightarrow & X = G_r(V) \end{array}$$

(on prendra garde à ne pas confondre le fibré quotient Q sur la grassmannienne avec les fibrés en droites Q^b définis en l'occurrence sur la variété de ses drapeaux complets...). Ses termes d'ordre un ${}^p E_1^{t,q-t} = H^q(Y, \mathcal{G}^{t,p})$ sont l'aboutissement d'une suite spectrale de Leray dont les termes d'ordre deux sont, en vertu du lemme précédent, les groupes

$$\begin{aligned} E_2^{i,j} &= H^{t,i}(X, H^{p-t,j}(M(Q), Q^{a+l\mathbf{1}})) \\ &= \delta_{j,0} \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^r} \nu(u, p-t) H^{t,i}(X, \Gamma^{a+l\mathbf{1}+u} Q). \end{aligned}$$

Cette suite spectrale de Leray dégénère donc en E_2 , ce qui implique l'isomorphisme

$${}^p E_1^{t,q-t} = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^r} \nu(u, p-t) H^{t,q}(X, \Gamma^{a+u} Q \otimes (\det Q)^l).$$

D'où le résultat suivant:

Proposition 6.2.1 *Si la suite spectrale de Borel-Le Potier associée au fibré en droites $Q^{a+l\mathbf{1}}$ sur $M(Q)$, et à la projection $\pi : M(Q) \longrightarrow G_r(V)$, dégénère en E_2 , on a pour $p + q > n + \frac{r(r-1)}{2}$ un morphisme surjectif*

$$\bigoplus_{i < j} H^{p-1,q-1}(G_r(V), \Gamma^{a-1_i+1_j} Q \otimes (\det Q)^l) \longrightarrow H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l).$$

Preuve: Le fibré en droites Q^{a+l1} est ample, et Y est de dimension $n + \frac{r(r-1)}{2}$. Sous l'hypothèse de dégénérescence en E_2 , le théorème de Kodaira-Nakano implique donc que

$${}^p E_2^{p,q-p} = 0 \quad \text{si } p+q > \dim Y.$$

Autrement dit, sous cette hypothèse, la suite

$${}^p E_1^{p-1,q-p} \longrightarrow {}^p E_1^{p,q-p} \longrightarrow {}^p E_1^{p+1,q-p}$$

est exacte. Mais d'après ce qui précède, ${}^p E_1^{p+1,q-p} = 0$, et le morphisme surjectif

$${}^p E_1^{p-1,q-p} \longrightarrow {}^p E_1^{p,q-p}$$

est le morphisme annoncé. ♣

Pour aboutir à une contradiction, il suffit donc de montrer que les poids des différentes composantes de $H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l)$ ne font pas nécessairement partie des poids des composantes des groupes $H^{p-1,q-1}(G_r(V), \Gamma^{a-1} Q \otimes (\det Q)^l)$. Or

$$\begin{aligned} \Omega_{G_r(V)}^p \otimes \Gamma^{a+l1} Q &= \bigoplus_{|u|=p} \Gamma^{-\chi(u)} Q \otimes \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l \otimes \Gamma^{u^*} S \\ &= \bigoplus_{|u|=p} \bigoplus_b n_{a,-\chi(u)}(b) \Gamma^{b+l1} Q \otimes \Gamma^{u^*} S. \end{aligned}$$

Pour un poids u donné de module p , définissons des entiers naturels i_1, \dots, i_r par les identités

$$u_k = i_k + \dots + i_r, \quad 1 \leq k \leq r,$$

auquel cas $p = \sum_{k=1}^r k i_k$. Si $n_{a,-\chi(u)}(b)$ n'est pas nul, la remarque 2.4b du chapitre précédent (où b correspond à $-\chi(u)$, et $b+c'$ à b) implique les inégalités

$$b_j \geq a_j - u_1 \geq a_j - d + r.$$

Si, de plus, $a_{r-1} \geq d-l-1$, l'inégalité $u_1^* \leq r$ implique donc que $b_{r-1} + l \geq r-1$ ne peut donner dans le poids $(b+l1, u^*) - c(d)$ aucune inversion avec les composantes de u^* .

D'autre part, l'entier i_k correspond par définition au nombre de composantes de u^* égales à k , ce qui permet d'écrire

$$u^* - c(d-r) = (r-1, \dots, r-i_r, \dots, k - (i_r + \dots + i_k), k - (i_r + \dots + i_k) - 2, \dots).$$

Le poids $(b+l1, u^*)$ contribuera donc au groupe de cohomologie $H^{p,q}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (\det Q)^l)$ si et seulement si il existe un entier s tel que

$$b_r + l = s - (i_r + \dots + i_s) - 1 \quad \text{et} \quad q = i_r + \dots + i_s.$$

Pour ordonner le poids obtenu, on décale alors d'une unité à gauche les $i_r + \dots + i_s$ premières composantes de u^* , et la remarque 2.4c du chapitre précédent implique que le

poids associé s'obtient en ôtant une unité à chacune de ces composantes, et en ajoutant $i_r + \dots + i_s$ à la dernière composante de b , qui est translatée d'autant à droite; le poids obtenu est donc

$$\sum_{j=1}^{r-1} b_j 1_j + \sum_{k=s+1}^r (k-1) 1_{r+i_r+\dots+i_{k+1}, r+i_r+\dots+i_k-1} \\ + (s-1) 1_{r+i_r+\dots+i_{s+1}, r+i_r+\dots+i_{s-1}} + \sum_{k=1}^{s-2} k 1_{r+i_r+\dots+i_{k+1}+1, r+i_r+\dots+i_k}.$$

De même, si l'on suppose $a_{r-1} \geq d-l$, les poids des composantes des $Gl(V)$ -modules $H^{p-1, q-1}(G_r(V), \Gamma^{a-1} i + 1_j Q \otimes (det Q)^l)$ seront de la forme

$$\sum_{j=1}^{r-1} d_j 1_j + \sum_{k=t+1}^r (k-1) 1_{r+j_r+\dots+j_{k+1}, r+j_r+\dots+j_k-1} \\ + (t-1) 1_{r+j_r+\dots+j_{t+1}, r+j_r+\dots+j_{t-1}} + \sum_{k=1}^{t-2} k 1_{r+j_r+\dots+j_{k+1}+1, r+j_r+\dots+j_k},$$

avec $q-1 = j_1 + \dots + j_t$ et $p-1 = \sum_{k=1}^r k j_k$. Reste à déterminer sous quelles conditions ces deux types de poids peuvent coïncider. Trois cas sont à distinguer:

1. $s > t$, ce qui impose

$$\begin{aligned} i_k &= j_k & \text{si } k > s, \\ i_s + i_{s-1} + 1 &= j_s, \\ i_k &= j_{k+1} & \text{si } s-1 > k > t-1, \\ i_{t-1} &= j_{t-1} + j_t - 1, \\ i_k &= j_k & \text{si } k < t-1. \end{aligned}$$

Mais ceci impliquerait que

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{k=1}^r k(i_k - j_k) &= s(-i_{s-1} - 1) + \sum_{k=t+1}^{s-1} k(i_k - i_{k-1}) \\ &\quad + t(i_t - i_{t-1} + j_{t-1} + 1) + (t-1)(i_{t-1} - j_{t-1}) \\ &= t - s - i_{s-1} - \dots - i_t - i_{t-1} + j_{t-1} \\ &= t - s - 1 - i_{s-1} - \dots - i_t - j_t \leq -2! \end{aligned}$$

2. $s < t$: en inversant i et j , s et t , p et $p-1$, on obtiendrait de même $-1 \leq -2!$

3. $s = t$: alors $i_k = j_k$ si $k \neq s, s-1$, et $i_s + i_{s-1} = j_s + j_{s-1}$, d'où

$$1 = \sum_{k=1}^r k(i_k - j_k) = s(i_s - j_s) + (s-1)(j_s - i_s) = i_s - j_s.$$

Il s'ensuit que si $i_s = 0$, le poids considéré de $H^{p, q}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (det Q)^l)$ ne saurait être celui d'une composante de ${}^p E_1^{p-1, q-p}$.

Conclusion: Si une composante de $H^{p, q}(G_r(V), \Gamma^a Q \otimes (det Q)^l)$ provient d'un poids u de la décomposition de $\Omega_{G_r(V)}^p$ qui n'est pas strictement décroissant, le morphisme

$${}^p E_1^{p-1, q-p} \longrightarrow {}^p E_1^{p, q-p}$$

n'est pas surjectif.

Reste à montrer qu'une telle composante est susceptible d'exister sous les conditions données sur p et q .

Le produit tensoriel étant commutatif, le poids $b + u_1 \mathbf{1}$ provient d'un v -tableau de base a , où

$$v = u_1 \mathbf{1} - \chi(u) = (i_1 + \cdots + i_{r-1}, \dots, i_1, 0).$$

Supposons $a_i - a_{i+1} \geq n - p$ pour i compris entre 1 et $r - 1$, et considérons le tableau de base a dont le nombre d'apparitions de l'entier i sur la j -ième ligne est donné par

$$\begin{aligned} \alpha_{r-1}(i) &= n_i & \text{si } i < r, \\ \alpha_j(i) &= \delta_{i,j}(v_i - n_i) & \text{si } j < r. \end{aligned}$$

Les conditions (A), (B), et (C) de la règle de Littlewood-Richardson sont alors automatiquement vérifiées. De plus, la condition (D) est équivalente aux inégalités

$$n_i \leq v_i - v_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq r - 1.$$

Il existe donc un v -tableau de base a admissible et de poids total $b + u_1 \mathbf{1}$, avec $b_r + l = s - 1 - i_s - \cdots - i_r$, dès que $0 \leq b_r + u_1 \leq v_1$, c'est-à-dire $-u_1 \leq b_r \leq -u_r$, soit encore

$$s - 1 + i_1 + \cdots + i_{s-1} \geq l \geq s - 1 - i_s - \cdots - i_{r-1}.$$

On n'a donc plus qu'à déterminer des conditions, portant sur les entiers p et q , sous lesquelles il existe des entiers i_1, \dots, i_r , avec $\sum_{k=1}^r i_k \leq d - r$ et $i_s = 0$, tels que

$$\begin{aligned} q &= i_r + \cdots + i_s, & p &= \sum_{k=1}^r k i_k, \\ s - 1 + i_1 + \cdots + i_{s-1} &\geq l \geq s - 1 - i_s - \cdots - i_{r-1}. \end{aligned}$$

Supposons par exemple $1 < s \leq l \leq d - r$, et

$$\begin{aligned} i_{s-1} &= l - s + 1, \\ i_r &= d - r - l + s - 1, \\ i_k &= 0 & \text{si } k \neq s - 1, r. \end{aligned}$$

L'entier l obéit alors à l'encadrement précédent, et

$$\begin{aligned} q &= d - r - l + s - 1, \\ p &= (s - 1)(l - s + 1) + r(d - r - l + s - 1) = n - (r - s + 1)(l - s + 1), \end{aligned}$$

de sorte que

$$p + q = n + d - r - (r - s + 2)(l - s + 1) \geq n + d - rl.$$

D'où le résultat suivant :

Proposition 6.2.2 *Si $l \geq 2$ et $d > rl + \frac{r(r+1)}{2}$, si le poids $a \in \mathbb{N}_\Sigma^r$ est tel que les entiers $a_i - a_{i+1}$, $1 \leq i \leq r-1$, soient suffisamment grands, alors la suite spectrale de Borel-Le Potier associée au fibré en droites ample $Q^{a+l}\mathbf{1}$ sur $M(Q)$, et à la projection $\pi : M(Q) \rightarrow G_r(V)$, ne dégénère pas en E_2 .*

6.3 Transformation de diagrammes et dégénérescence de la suite spectrale de Borel-Le Potier

6.3.1 Cas des puissances symétriques et extérieures secondes

On voudrait donner dans ce paragraphe une interprétation diagrammatique, sur la grassmannienne, du résultat suivant, dû à J.P.Demailly:

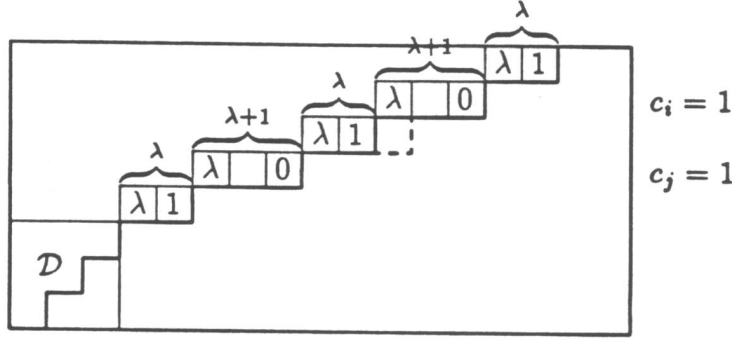
Théorème 6.3.1 ([De1]) *Pour tout fibré vectoriel E et tout fibré en droites L sur une variété complexe compacte X de dimension n , on peut définir un morphisme canonique*

$$H^{p,q}(X, \wedge^2 E \otimes L) \rightarrow H^{p+1,q+1}(X, S^2 E \otimes L).$$

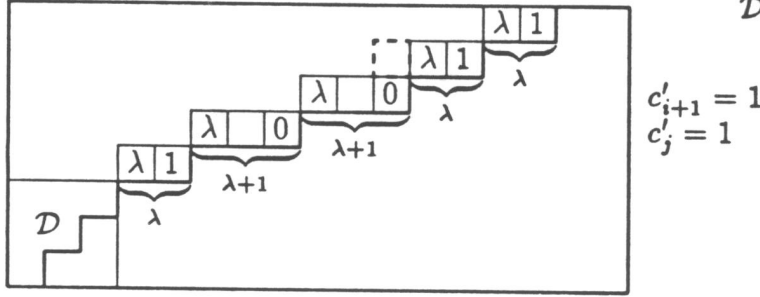
Si E est ample et L nef, ou E nef et L ample, ce morphisme est un isomorphisme en degré $p+q \geq n+r-1$, et surjectif en degré $p+q = n+r-2$.

On considère ici le cas où E est le fibré quotient universel Q sur $G_r(V)$, et $L = (\det Q)^l$, avec $l \geq 1$. Pour simplifier la discussion qui va suivre, on supposera de plus que $d \geq rl+2$, de sorte que $n \geq \hat{n} = r(\lambda r + 2)$.

Soit alors \mathcal{D} un 0-diagramme l -admissible de dimensions $(r-\sigma) \times (d-r-\tau)$, avec $\sigma \geq 2$ et $\tau \geq \sigma\lambda+2$, défini par un poids v tel que $v_1 = d-r-\tau$ et $v_1 - v_2 < \lambda$. A chaque couple d'entiers i, j tels que $1 \leq i < j \leq \sigma$ (respectivement $1 \leq i \leq j \leq \sigma$), on peut alors associer le $1_{1,2}$ -diagramme (respectivement 21_1 -diagramme) l -admissible $\mathcal{D}(i, j) = (u, c)$, où $c = 1_i + 1_j$, et où u est défini par le diagramme d'Young suivant:



La transformation
 $\mathcal{D}(i, j) \rightarrow \mathcal{D}(i+1, j)$



Explicitement, $u_m - u_{m+1} = \lambda + c_m$ si $1 \leq m \leq \sigma$, et $u_m = v_{m-\sigma}$ si $\sigma + 1 \leq m \leq r$.

Remarquons que le poids associé à $\mathcal{D}(i, j)$ par le théorème de Bott ne dépend pas des entiers i et j , mais seulement de \mathcal{D} : c'est une conséquence immédiate de la remarque 2.4c. Plus précisément, si $b \in \mathbb{N}^{d-\sigma-r}$ est le poids supérieur de la composante associée au diagramme \mathcal{D} , le poids associé à chacun des diagrammes $\mathcal{D}(i, j)$ n'est autre que $b + 1_{d-\sigma-r+1, d+\sigma\lambda-r+2}$.

Proposition 6.3.1 *La correspondance $\mathcal{D}(i, j) \rightarrow \mathcal{D}(i+1, j)$ induit pour tout $l \geq 1$ un morphisme*

$$\phi_{p,q} : H^{p,q}(G_r(V), \wedge^2 Q \otimes (\det Q)^l) \rightarrow H^{p+1,q+1}(G_r(V), S^2 Q \otimes (\det Q)^l).$$

Si $p + q \geq \hat{n} - 1$, ce morphisme est un isomorphisme.

Plus précisément, si $p \geq \lambda \frac{r(r+1)}{2} + r$ ou $p + q \geq \hat{n} - 2$, les seuls groupes de cohomologie non nuls de $\wedge^2 Q \otimes (\det Q)^l$ sont les groupes

$$H^{\lambda \frac{r(r+1)}{2} + \sigma + 1, \lambda \frac{r(r-1)}{2} + \sigma - 1}(G_r(V), \wedge^2 Q \otimes (\det Q)^l) = \mu(\sigma) \wedge^{r^{l+2}} V,$$

où $r - 1 \leq \sigma \leq 2r - 2$ et $\mu(\sigma) = E(\frac{\sigma}{2}) - (\sigma - r)^+$.

De même, si $p \geq \lambda \frac{r(r+1)}{2} + r + 1$ ou $p + q \geq \hat{n}$, les seuls groupes de cohomologie non nuls de $S^2 Q \otimes (\det Q)^l$ sont les groupes

$$H^{\lambda \frac{r(r+1)}{2} + \sigma + 1, \lambda \frac{r(r-1)}{2} + \sigma - 1}(G_r(V), S^2 Q \otimes (\det Q)^l) = \nu(\sigma) \wedge^{r+2} V,$$

où $r \leq \sigma \leq 2r - 1$ et $\nu(\sigma) = E(\frac{\sigma+1}{2}) - (\sigma - r)$.

Preuve: Si \mathcal{D} est un 0-diagramme l -admissible de dimensions $(r - \sigma) \times (d - r - \tau)$, associé à un poids v tel que $v_1 = d - r - \tau$, $\mathcal{D}(i, j)$ est lorsque $i < j$ un $1_{1,2}$ -diagramme l -admissible, tandis que $\mathcal{D}(i + 1, j)$ est un 21_1 -diagramme l -admissible; de plus, si le premier est de bidegré (p, q) , le second est de bidegré $(p + 1, q + 1)$. Les poids associés à ces deux diagrammes étant identiques, on peut définir un morphisme entre les composantes associées des groupes de cohomologie correspondants, comme n'importe quel multiple non nul de l'identité. La somme directe de ces morphismes, et de l'application nulle sur les composantes du groupe de départ associées à des diagrammes qui ne sont pas de la forme $\mathcal{D}(i, j)$, définit un morphisme

$$\phi_{p,q} : H^{p,q}(G_r(V), \wedge^2 Q \otimes (\det Q)^l) \rightarrow H^{p+1,q+1}(G_r(V), S^2 Q \otimes (\det Q)^l),$$

qui n'est pas canonique, mais seulement défini à un certain nombre de constantes non nulles près.

Cependant, c'est un isomorphisme en degré $p + q \geq \hat{n} - 1$: en effet, considérons un 0-diagramme \mathcal{D} de dimensions $(r - \sigma) \times (d - r - \tau)$, tel que le diagramme $\mathcal{D}(i, j) = (u, c)$ associé, avec $i < j$, vérifie $u_r < \lambda + c_r$. Comme pour tout entier m , $u_m - u_{m+1} \leq \lambda + c_m$ d'après la remarque 4.3, comme les entiers c_m sont égaux à 1 ou 0, et ne prennent que deux fois la valeur 1, le bidegré (p, q) du diagramme (u, c) est inférieur à celui du diagramme (u', c') défini par $u'_i - u'_{i+1} = \lambda + \delta_{i,r-1} + \delta_{i,r}$, $1 \leq i \leq r$, et $c' = 1_{r-1,r}$. Par conséquent,

$$p \leq \lambda \frac{r(r+1)}{2} + r - 1, \quad q \leq \lambda \frac{r(r-1)}{2} + r - 2,$$

et $p + q \leq \hat{n} - 3$. Si $p + q \geq \hat{n} - 2$, les $1_{1,2}$ -diagrammes l -admissibles correspondent donc à $\sigma = r$, $\mathcal{D} = \emptyset$, puisque d'après ce qui précède, et avec les mêmes notations, on doit avoir $u_r = \lambda + c_r$, donc $u_m - u_{m+1} = \lambda + c_m$ pour tout entier m d'après la remarque 4.3. De même pour les 21_1 -diagrammes l -admissibles de bidegré (p, q) avec $p \geq \lambda \frac{r(r+1)}{2} + r + 1$ ou $p + q \geq \hat{n}$. Le morphisme $\phi_{p,q}$ sera donc un isomorphisme en degré $p + q \geq \hat{n} - 2$ s'il existe pas de 21_1 -diagramme l -admissible (u, c) de bidegré $(p + 1, q + 1)$ tel que c soit de la forme $1_1 + 1_j$.

Mais pour un tel diagramme, on aurait, en vertu des remarques qui précèdent

$$p + 1 \leq \lambda \frac{r(r+1)}{2} + r + 1, \quad q + 1 \leq \lambda \frac{r(r-1)}{2} + r - 1,$$

et en particulier $p + q \leq \hat{n} - 2$: $\phi_{p,q}$ est donc un isomorphisme en degré $p + q \geq \hat{n} - 1$.

Plus précisément, pour $p \geq \lambda \frac{r(r+1)}{2} + r$ ou $p + q \geq \hat{n} - 1$, on a vu que les $1_{1,2}$ -diagrammes l -admissibles (u, c) de bidegré (p, q) vérifiaient $u_m - u_{m+1} = \lambda + c_m$, et

$c = 1_i + 1_j$, avec $i < j$, la composante associée à un tel diagramme étant nécessairement, d'après la remarque 2.4c puissance extérieure de V d'exposant $rl + 2$. De plus, il est facile de vérifier que

$$p = \lambda \frac{r(r+1)}{2} + i + j, \quad q = \lambda \frac{r(r-1)}{2} + i + j - 2,$$

de sorte que les groupes $H^{p,q}(G_r(V), \wedge^2 Q \otimes (\det Q)^l)$ non nuls sont les groupes

$$H^{\lambda \frac{r(r+1)}{2} + \sigma + 1, \lambda \frac{r(r-1)}{2} + \sigma - 1}(G_r(V), \wedge^2 Q \otimes (\det Q)^l) = \mu(\sigma) \wedge^{rl+2} V,$$

où $r-1 \leq \sigma \leq 2r-2$, et où $\mu(\sigma)$ est le nombre de manières d'écrire $\sigma + 1$ comme somme de deux entiers $1 \leq i < j \leq r$, autrement dit le nombre d'entiers i tels que $\sigma - r + 1, 1 \leq i \leq \frac{\sigma}{2}$:

$$\mu(\sigma) = E\left(\frac{\sigma}{2}\right) - (\sigma - r)^+.$$

De même pour $S^2 Q$ et $p \geq \lambda \frac{r(r+1)}{2} + r + 1$ ou $p + q \geq \hat{n}$, en remplaçant $\mu(\sigma)$, pour $r \leq \sigma \leq 2r-1$, par le nombre $\nu(\sigma)$ de manières d'écrire $\sigma + 1$ comme somme de deux entiers, pas nécessairement distincts, compris entre 1 et r :

$$\nu(\sigma) = E\left(\frac{\sigma+1}{2}\right) - (\sigma - r).$$

L'existence de l'isomorphisme $\phi_{p,q}$ pour $p + q \geq \hat{n} - 1$ correspond bien sûr à l'égalité $\mu(\sigma) = \nu(\sigma + 1)$ si $\sigma \geq r$. ♣

6.3.2 Extension aux fibrés $Z^{t,k}Q$

Pour ce qui est des puissances extérieures et symétriques d'exposant $k \geq 3$, et plus généralement des fibrés $Z^{t,k}Q = \Gamma^{(k-t)} \mathbf{1}_1 + \mathbf{1}_{2,t+1} Q = \Gamma^{z_t,k} Q$, avec $0 \leq t < k$, l'existence d'un isomorphisme en degré suffisamment grand, entre groupes de cohomologie des puissances extérieures et symétriques secondes, se généralise de la façon suivante:

Proposition 6.3.2 ([De1]) *Pour tout fibré vectoriel E et tout fibré en droites L sur une variété complexe compacte X de dimension n , on peut définir un complexe canonique*

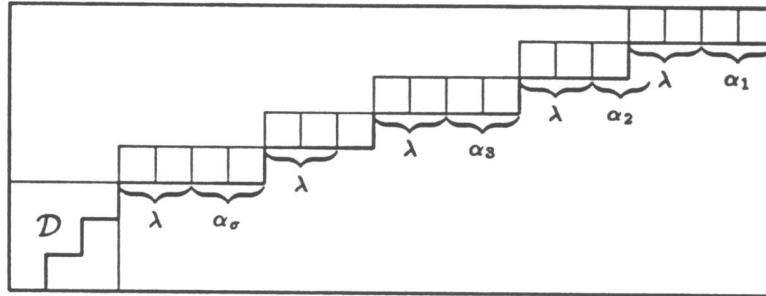
$$\dots \rightarrow H^{p,q}(X, Z^{t,k}E \otimes L) \rightarrow H^{p+1,q+1}(X, Z^{t-1,k}E \otimes L) \rightarrow \dots$$

Si E est ample et L nef, ou E nef et L ample, et si la suite spectrale de Borel-Le Potier associée au fibré en droites $Q^{k\mathbf{1}_1} \otimes \pi^ L$ sur $\mathbb{P}(E^*)$ dégénère en E_2 , où $\pi : \mathbb{P}(E^*) \rightarrow X$ est le fibré en espaces projectifs des hyperplans de E , alors ce complexe est exact en degré $p + q + t \geq n + r$.*

Sur la grassmannienne, lorsque E est le fibré quotient universel Q et $L = (\det Q)^l$, avec $l \geq 1$, on peut donner de ce résultat une interprétation diagrammatique analogue à celle qui a été développée au paragraphe précédent.

Supposons pour simplifier que $d \geq rl + k$, de sorte que $n \geq \hat{n} = r(\lambda r + k)$ (\hat{n} est la plus petite dimension des grassmanniennes de sous-espaces de codimension r d'espaces vectoriels complexes de dimension supérieure à $rl + k$). Si \mathcal{D} est un 0-diagramme l -admissible de dimensions $(r - \sigma) \times (d - r - \tau)$, avec $\sigma \geq k$ et $\tau \geq \sigma\lambda + k$, défini par un poids v tel que $v_1 = d - r - \tau$ et $v_1 - v_2 < \lambda$, on considèrera les diagrammes l -admissibles $\mathcal{D}(\alpha)$ suivants, où α est un $(r - \sigma)$ -uplet d'entiers naturels tel que $|\alpha| = k$:

Exemple:



Un diagramme $\mathcal{D}(\alpha)$ pour $\sigma = 5$, $\alpha = (2, 1, 2, 1, 2)$

Un premier problème, très simple, est de déterminer à quelle condition un diagramme $\mathcal{D}(\alpha)$ est un $z_{t,k}$ -diagramme:

Lemme 6.3.1 *Le diagramme $\mathcal{D}(\alpha)$ est un $z_{t,k}$ -diagramme l -admissible si et seulement si α possède au moins $t + 1$ composantes non nulles.*

Preuve: Il suffit de vérifier qu'il est possible de construire un tableau numéroté de base \hat{u} , où $\hat{u}_i = (\sigma + 1 - i)\lambda + \alpha_1 + \dots + \alpha_{\sigma-i}$, $1 \leq i \leq \sigma$, associant un facteur $\Gamma^{\hat{u} + \chi(\alpha)}W$ au produit tensoriel $\Gamma^{\hat{u}}W \otimes Z^{t,k}W$, où W est un espace vectoriel complexe de dimension σ (les composantes de \hat{u} sont en effet, à une constante près, les σ dernières composantes de $u' = (d - r)\mathbf{1} - \chi(u)$, où le poids u définit le diagramme $\mathcal{D}(\alpha)$). Un tel tableau doit contenir $k - t$ fois l'entier 1, et une fois chacun des entiers $2, \dots, t + 1$: il obéit à la règle de Littlewood-Richardson si et seulement si les entiers $2, \dots, t + 1$ figurent sur des lignes distinctes et en ordre croissant, et si la première ligne numérotée ne contient que l'entier 1. En particulier, il admet au moins $t + 1$ lignes numérotées, qui correspondent à $t + 1$ composantes non nulles de α .

Réciproquement, la condition donnée est suffisante, puisque chacun des tableaux numérotés obtenus en plaçant les entiers $2, \dots, t + 1$ en ordre croissant, chacun dans une des

lignes numérotées du diagramme autre que la première, et des 1 partout ailleurs, obéit manifestement à la règle de Littlewood-Richardson. ♣

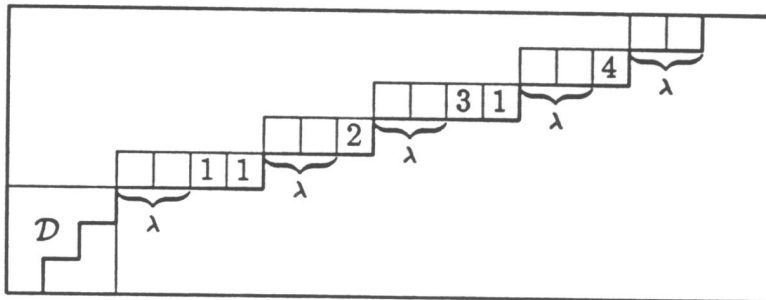
Le diagramme $\mathcal{D}(\alpha)$ étant en général de multiplicité plus grande que un, on notera $\mathcal{D}(\alpha, \mu)$ le couple formé du diagramme $\mathcal{D}(\alpha)$ et du tableau numéroté μ auquel correspond ce diagramme.

On considèrera plus particulièrement, pour chaque entier $0 \leq t \leq k-1$, l'ensemble \mathcal{T}_t des tableaux dont la dernière ligne numérotée comprend exactement une case numérotée, contenant l'entier $t+1$. Si $\mu \in \mathcal{T}_t$, on définira le tableau μ^+ de la façon suivante:

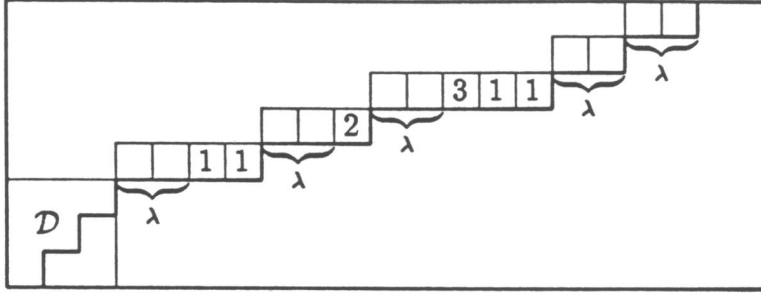
- si i_0 est l'indice de la dernière ligne numérotée de μ , la i_0 -ième ligne de μ^+ ne contient pas de case numérotée;
- la $i_0 - 1$ -ième ligne de μ^+ s'obtient à partir de celle de μ en plaçant une case numérotée de l'entier 1, immédiatement à gauche des éventuelles cases numérotées de μ sur cette ligne;
- les autres lignes de μ^+ sont les mêmes que les lignes correspondantes de μ .

μ^+ correspond à un poids $\alpha^+ = \alpha - \mathbf{1}_{i_0} + \mathbf{1}_{i_0-1}$. De plus, les poids supérieurs des composantes associées aux diagrammes $\mathcal{D}(\alpha)$ et $\mathcal{D}(\alpha^+)$ sont les mêmes, tandis que si le premier est de bidegré (p, q) , le second est de bidegré $(p+1, q+1)$.

Exemple:



Un $Z^{3,6}$ -diagramme
du type $\mathcal{D}(\alpha, \mu)$,
avec $\alpha = (0, 1, 2, 1, 2)$



Son $Z^{2,6}$ -diagramme
image $\mathcal{D}(\alpha^+, \mu^+)$,
avec $\alpha^+ = (0, 0, 3, 1, 2)$

Les entiers qui apparaissent ici sont ceux qui numérotent le tableau μ , tableau dont la base s'obtient simplement en renversant le diagramme $\mathcal{D}(\alpha)$ (voir la remarque 2.4b).

Proposition 6.3.3 *La correspondance $\mathcal{D}(\alpha, \mu) \rightarrow \mathcal{D}(\alpha^+, \mu^+)$, où $\mu \in \mathcal{T}_t$, induit un morphisme*

$$\phi_{p,q}^t : H^{p,q}(G_r(V), Z^{t,k}Q \otimes (\det Q)^l) \rightarrow H^{p+1,q+1}(G_r(V), Z^{t-1,k}Q \otimes (\det Q)^l),$$

et le complexe ainsi défini est exact en degré $p + q \geq \hat{n} + (k-2)(r-1) - t(t-1) + 1$.

Preuve: D'après le lemme précédent, si $\mathcal{D}(\alpha)$ est un $z_{t,k}$ -diagramme l -admissible, alors $\mathcal{D}(\alpha^+)$ est un $z_{t-1,k}$ -diagramme l -admissible. Plus précisément, il est facile de vérifier que si le tableau $\mu \in \mathcal{T}_t$ obéit à la règle de Littlewood-Richardson, alors il en est de même du tableau μ^+ . On définira donc le morphisme $\phi_{p,q}^t$ comme un multiple non nul de l'identité entre composantes des groupes de départ et d'arrivée respectivement associées aux diagrammes $\mathcal{D}(\alpha, \mu)$ et $\mathcal{D}(\alpha^+, \mu^+)$, où $\mu \in \mathcal{T}_t$, et comme l'application nulle sur les autres composantes de $H^{p,q}(G_r(V), Z^{t,k}Q \otimes (\det Q)^l)$.

Si $\mathcal{D} = (u, c)$ définit un $z_{t,k}$ -diagramme l -admissible avec $u_r < \lambda + c_r$, les inégalités $u_m - u_{m+1} \leq \lambda + c_m$ et les contraintes imposées à c par la règle de Littlewood-Richardson impliquent que le bidegré (p, q) de \mathcal{D} est inférieur à celui du diagramme $\mathcal{D}' = (u', c')$ défini par $c' = \chi[(k-t)\mathbf{1}_1 + \mathbf{1}_{2,t+1}]$, et

$$u'_r = \lambda + c'_r - 1, \quad u'_m - u'_{m+1} = \lambda + c'_m \quad \text{si } m < r,$$

(voir la remarque 4.3); par conséquent,

$$\begin{aligned} p &\leq \lambda \frac{r(r+1)}{2} + (k-t-1)r + (r-1) + \cdots + (r-t) \\ &= \lambda \frac{r(r+1)}{2} + (k-1)r - \frac{t(t+1)}{2}, \\ q &\leq \lambda \frac{r(r-1)}{2} + (k-t-1)(r-1) + (r-2) + \cdots + (r-t-1) \\ &= \lambda \frac{r(r-1)}{2} + (k-1)(r-1) - \frac{t(t+1)}{2}, \end{aligned}$$

et, en particulier, $p + q \leq \hat{n} + (k-1)(r-1) - r - t(t+1)$. Lorsque cette inégalité n'est pas vérifiée, les seuls $z_{t,k}$ -diagrammes l -admissibles sont donc de la forme $\emptyset(\alpha)$ (c'est-à-dire

définis par un diagramme $\mathcal{D} = \emptyset$, lui-même associé à un poids nul), en bidegré

$$p = \lambda \frac{r(r+1)}{2} + \sum_{i=1}^r i\alpha_i, \quad q = \lambda \frac{r(r-1)}{2} + \sum_{i=1}^r (i-1)\alpha_i.$$

De plus, le noyau de $\phi_{p,q}^t$ est alors la somme des composantes du groupe de cohomologie $H^{p,q}(G_r(V), Z^{t,k}Q \otimes (\det Q)^l)$ associées à des diagrammes $\emptyset(\alpha, \mu)$ tels que $\mu \notin \mathcal{T}_t$. Or, cette condition équivaut à ce que la dernière ligne numérotée de μ , qui d'après la règle de Littlewood-Richardson ne peut contenir les entiers $2, \dots, t$, contienne au moins une fois l'entier 1: ce qui est équivalent au fait que μ soit de la forme ν^+ , où $\emptyset(\beta, \nu)$ est un $z_{t+1,k}$ -diagramme l -admissible, sauf si la dernière ligne numérotée de μ est précisément la dernière ligne de μ . Mais dans ce cas, le bidegré (p, q) associé est inférieur à celui du diagramme (u', c') , où $u'_m - u'_{m+1} = \lambda + c'_m$, et $c' = \chi[(k-t)\mathbf{1}_1 + \mathbf{1}_{2,t+1}r]$, en conséquence de quoi

$$\begin{aligned} p &\leq \lambda \frac{r(r+1)}{2} + (k-t)r + (r-1) + \dots + (r-t+1) + 1 \\ &= \lambda \frac{r(r+1)}{2} + (k-1)r - \frac{t(t-1)}{2} + 1, \\ q &\leq \lambda \frac{r(r-1)}{2} + (k-t)(r-1) + (r-2) + \dots + (r-t) \\ &= \lambda \frac{r(r-1)}{2} + (k-1)(r-1) - \frac{t(t-1)}{2}, \end{aligned}$$

et $p + q \leq \hat{n} + (k-2)(r-1) - t(t-1)$. Le complexe défini par les morphismes $\phi_{p,q}^t$ est donc exact en degré

$$p + q > \hat{n} + (k-2)(r-1) - t(t-1). \clubsuit$$

Notons, incidemment, que la preuve de la proposition précédente permet d'expliciter les groupes $H^{p,q}(G_r(V), Z^{t,k}Q \otimes (\det Q)^l)$ pour $p > \lambda \frac{r(r+1)}{2} + (k-1)r - \frac{t(t+1)}{2}$, ou $p + q \geq \hat{n} + k(r-1) - 2r - t(t+1)$. En effet, sous cette hypothèse, les seuls diagrammes à considérer sont les $\emptyset(\alpha, \mu)$ pour lesquels, comme on l'a vu

$$p = \lambda \frac{r(r+1)}{2} + \sum_{i=1}^r i\alpha_i, \quad q = \lambda \frac{r(r-1)}{2} + \sum_{i=1}^r (i-1)\alpha_i = p - \lambda r - k.$$

La remarque 2.4c implique que la composante associée à un tel diagramme est une puissance extérieure de V d'exposant $rl + k$. Reste à déterminer la multiplicité de cette puissance extérieure, autrement dit, pour $p = \lambda \frac{r(r+1)}{2} + \sigma$, le nombre de $Z^{t,k}$ -diagrammes $\emptyset(\alpha, \mu)$ tels que $\sum_{i=1}^r i\alpha_i = \sigma$.

Or la somme $\sum_{i=1}^r i\alpha_i$ n'est autre que la somme des indices des lignes des cases numérotées du tableau μ : notons donc $i_1 \geq \dots \geq i_k$ ces indices, et définissons la partition $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m)$ de k par les inégalités

$$i_{\pi_1 + \dots + \pi_j + 1} = \dots = i_{\pi_1 + \dots + \pi_{j+1}} > i_{\pi_1 + \dots + \pi_{j+1} + 1}.$$

Pour qu'il existe un tableau admissible μ correspondant à cette partition π , il suffit d'après le lemme précédent que $m > t$, auquel cas il existe exactement C_{m-1}^t tableaux

correspondant à π , à savoir autant que de façons de placer les entiers $2, \dots, t+1$, en ordre croissant, chacun à l'extrémité droite de l'une des $(m-1)$ -dernières lignes numérotées du tableau. On obtient donc le résultat suivant:

Proposition 6.3.4 *Si $p > \lambda \frac{r(r+1)}{2} + (k-1)r - \frac{t(t+1)}{2}$, ou $p+q \geq \hat{n} + k(r-1) - 2r - t(t+1)$, les seuls groupes de cohomologie $H^{p,q}(G_r(V), Z^{t,k}Q \otimes (\det Q)^l)$ non nuls sont les groupes*

$$H^{\lambda \frac{r(r+1)}{2} + \sigma, \lambda \frac{r(r-1)}{2} + \sigma - k}(G_r(V), Z^{t,k}Q \otimes (\det Q)^l) = \rho_{t,k}(\sigma) \wedge^{r+l+k} V,$$

avec $(k-1)r - \frac{t(t+1)}{2} < \sigma \leq kr - \frac{t(t+1)}{2}$. La multiplicité $\rho_{t,k}(\sigma)$ est donnée par la somme

$$\rho_{t,k}(\sigma) = \sum_{m=t+1}^k C_{m-1}^t \sum_{\pi \in (\mathbb{N}^*)^m, |\pi|=k} \nu^\pi(\sigma),$$

où $\nu^\pi(\sigma)$ est le nombre de partitions (i_1, \dots, i_k) de σ de la forme

$$r \geq i_1 = \dots = i_{\pi_1} > i_{\pi_1+1} = \dots = i_{\pi_1+\pi_2} > \dots > i_{\pi_1+\dots+\pi_{m-1}+1} = \dots = i_k.$$

La valeur du degré au-delà de laquelle la proposition 6.3.3 garantit l'exactitude du complexe

$$\dots \rightarrow H^{p,q}(G_r(V), Z^{t,k}Q \otimes (\det Q)^l) \rightarrow H^{p+1,q+1}(G_r(V), Z^{t-1,k}Q \otimes (\det Q)^l) \rightarrow \dots$$

est pour $k \geq 4$, en tout cas lorsque $d = rl + k$, c'est-à-dire $n = \hat{n}$, supérieure à celle que donne le résultat de J.P.Demailly, sous l'hypothèse de la dégénérescence en E_2 de la suite spectrale de Borel-Le Potier. On s'intéressera donc de plus près à l'exactitude de ce complexe.

Pour cela, notons tout d'abord qu'en vertu de la remarque 2.4c, les diagrammes qui contribuent à un groupe $H^{p,q}(G_r(V), Z^{t,k}Q \otimes (\det Q)^l)$ pour une puissance extérieure de V sont nécessairement de la forme $\emptyset(\alpha, \mu)$: ce qui implique que la multiplicité de $\wedge^{r+l+k} V$ dans $H^{\lambda \frac{r(r+1)}{2} + \sigma, \lambda \frac{r(r-1)}{2} + \sigma - k}(G_r(V), Z^{t,k}Q \otimes (\det Q)^l)$ est pour chaque valeur de σ égale à $\rho_{t,k}(\sigma)$ (et que ce sont les seuls groupes de cohomologie de $Z^{t,k}Q \otimes (\det Q)^l$ à admettre une telle composante). L'exactitude du complexe qui nous intéresse implique donc, lorsque σ est assez grand, l'identité

$$\sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \rho_{k-i,k}(\sigma + i) = 0.$$

Nous allons voir que cette identité n'est pas nécessairement vérifiée.

Lemme 6.3.2 *Si $m \geq 1$ et $\sigma > (k-1)r - \sum_{i=1}^{m-1} i\pi_{i+1} + 1$, alors*

$$\nu^{(\pi_1, \dots, \pi_m, 1)}(\sigma) = \nu^{(\pi_1, \dots, \pi_m, 1)}(\sigma + 1) + \nu^{(\pi_1, \dots, \pi_m + 1)}(\sigma + 1).$$

Preuve: Soit $r \geq i_1 = \dots = i_{\pi_1} > i_{\pi_1+1} = \dots i_{\pi_1+\pi_2} > \dots \leq i_{\pi_1+\dots+\pi_m} = i_{k-1} > i_k$ une partition de σ de "forme" $(\pi_1, \dots, \pi_m, 1)$: en changeant i_k en $i_k + 1$, on obtient une partition de $\sigma + 1$, de forme $(\pi_1, \dots, \pi_m, 1)$ si $i_{k-1} - i_k \geq 2$, et de forme $(\pi_1, \dots, \pi_m + 1)$ si $i_{k-1} - i_k = 1$. De plus, toutes les partitions $r \geq j_1 \geq \dots \geq j_k$ de $\sigma + 1$ s'obtiennent de cette façon, sauf celles pour lesquelles $j_k = 1$. Mais si $j_k = 1$, on doit avoir

$$\sigma = \sum_{m=1}^k j_m \leq \pi_1 r + \pi_2(r-1) + \dots + \pi_m(r-m+1) + 1 = (k-1)r - \sum_{i=1}^{m-1} i\pi_{i+1} + 1,$$

et l'on a exclu cette éventualité. ♣

Introduisons les quantités

$$\nu_+^{m,k}(\sigma) = \sum_{\substack{\pi \in (\mathbb{N}^*)^m, \\ |\pi| = k, \pi_m > 1}} \nu^\pi(\sigma), \quad \nu_-^{m,k}(\sigma) = \sum_{\substack{\pi \in (\mathbb{N}^*)^m, \\ |\pi| = k, \pi_m = 1}} \nu^\pi(\sigma).$$

Puisque $\sum_{i=1}^{m-1} i\pi_{i+1} \geq \sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{m(m-1)}{2}$, le lemme précédent implique, lorsque σ est strictement supérieur à $(k-1)r - \frac{m(m-1)}{2} + 1$, l'identité

$$\nu_-^{m,k}(\sigma) = \nu_-^{m,k}(\sigma+1) + \nu_+^{m-1,k}(\sigma+1).$$

Supposons donc $\sigma > (k-1)(r-1)$: cette inégalité implique que pour tous les entiers i et m tels que $1 \leq i \leq k-1$, $2 \leq m \leq k$ et $i+m > k$, $\sigma+i > (k-1)r - \frac{m(m-1)}{2} + 1$, et donc que

$$\nu_-^{m,k}(\sigma+i) - \nu_-^{m,k}(\sigma+i+1) - \nu_+^{m-1,k}(\sigma+i+1) = 0.$$

Multiplions ces identités par $(-1)^{i+1} C_{m-2}^{k-i-1}$, et sommons-les: il vient successivement

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \sum_{m=k-i+1}^k C_{m-2}^{k-i-1} [\nu_-^{m,k}(\sigma+i) \\ &\quad - \nu_-^{m,k}(\sigma+i+1) - \nu_+^{m-1,k}(\sigma+i+1)] \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \sum_{m=k-i+1}^k [(C_{m-2}^{k-i-1} + C_{m-2}^{k-i}) \nu_-^{m,k}(\sigma+i) + C_{m-1}^{k-i} \nu_+^{m,k}(\sigma+i)], \end{aligned}$$

c'est-à-dire, puisque $\rho_{t,k}(\sigma) = \sum_{m=t+1}^k C_{m-1}^t [\nu_-^{m,k}(\sigma) + \nu_+^{m,k}(\sigma)]$,

$$\sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \rho_{k-i,k}(\sigma+i) = 0.$$

Cependant, si $\sigma = (k-1)(r-1)$, l'inégalité $\sigma+i > (k-1)r - \frac{m(m-1)}{2} + 1$ est vérifiée pour tous les entiers i et m tels que $1 \leq i \leq k-1$, $2 \leq m \leq k$ et $i+m > k$, excepté lorsque $i = k-1$ et $m = 2$. Les identités

$$\nu_-^{m,k}(\sigma+i) - \nu_-^{m,k}(\sigma+i+1) - \nu_+^{m-1,k}(\sigma+i+1) = 0$$

sont donc vérifiées, sauf pour $i = k - 1$ et $m = 2$. En effet, si l'on reprend la preuve du lemme précédent, $\sigma + k = (k - 1)r + 1$ admet une partition de forme $(k - 1, 1)$ comprenant l'entier 1, précisément celle dont les $k - 1$ autres composantes sont égales à r , et ceci implique que

$$\nu_{-}^{2,k}(\sigma + k - 1) - \nu_{-}^{2,k}(\sigma + k) - \nu_{+}^{1,k}(\sigma + k) = -1.$$

En sommant ces égalités comme précédemment, on obtient pour $\sigma = (k - 1)(r - 1)$ l'inégalité

$$\sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \rho_{k-i,k}(\sigma + i) \neq 0.$$

Le complexe qui nous intéresse ne peut donc être exact en degré supérieur à la valeur correspondant à $\sigma = (k - 1)(r - 1)$, c'est-à-dire en degré $p + q \geq \lambda r^2 + 2(\sigma + 1) - k = \hat{n} + (k - 2)r - 3k - 4$. Cette valeur est supérieure à $\hat{n} + r$ dès que $r \geq 4$ et $k \geq \frac{3r+4}{r-3}$: on a donc démontré le résultat suivant:

Proposition *Si $r \geq 4$ et $k \geq \frac{3r+4}{r-3}$, si $l \geq 1$ et $d = rl + k$, la suite spectrale de Borel-Le Potier associée au fibré en droites $Q^{k1} \otimes \pi^*(\det Q)^l$ sur la variété $\pi : \mathbb{P}(Q^*) \rightarrow G_r(V)$ des hyperplans du fibré quotient universel Q sur $G_r(V)$, ne dégénère pas en E_2 .*

Bibliographie

- [AN] Akizuki, Y., Nakano, S.: Note on Kodaira-Spencer's proof of Lefschetz theorems, *Proc. Jap. Acad.*, **30** (1954), 266-272.
- [Bor] Borel, A.: A spectral sequence for complex analytic bundles, in Hirzebruch, F.: *Topological methods in algebraic geometry*, Berlin- Heidelberg-New York, Springer Verlag, 1966.
- [BW] Borel, A., Weil, A.: Représentations linéaires et espaces homogènes kähleriens des groupes de Lie compacts, *Séminaire Bourbaki*, exposé n°100 par J.P.Serre, 1954.
- [B] Bott, R.: Homogeneous vector bundles, *Ann.Math.* **66**, 203-248 (1957).
- [Bou] Bourbaki, N.: *Eléments de mathématiques*, Livre 2, Chapitre 3, Algèbre multilinéaire, Hermann, Paris, 1958.
- [C] Cauchy, Mémoires sur les sommes alternées connues sous le nom de résultantes, *Oeuvres complètes*, 2^e série, vol.12, 183-201.
- [De1] Demailly, J.P.: Vanishing theorems for tensor powers of an ample vector bundle, *Invent.Math.* **91**, 203-220 (1988).
- [DPS] Demailly, J.P., Peternell, Th., Schneider, M.: Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles, *Prépublication de l'Institut Fourier* **184**, 1991.
- [D] Demazure, B.: A very simple proof of Bott's theorem, *Invent.Math.* **33**, 271-272 (1976).
- [Di] Dieudonné, J.: Schur functions and group representations, *Astérisque* **87-88** (1981).
- [FH] Fulton, W., Harris, J.: *Representation theory, a first course*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1991.
- [GH] Griffiths, P.A., Harris, J.: *Principles of algebraic geometry*, Wiley Interscience, New York, 1978.
- [Go] Godement, R.: *Théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.
- [H] Hartshorne, R.: Ample vector bundles, *Publ.Math.I.H.E.S.* **29**, 63-94 (1966).
- [Ka] Kapranov, M.: On the derived category of coherent sheaves on Grassmann manifolds, *Math.USSR Izvestiya* **24**, 183-192 (1985).
- [Kn] Knutson, D.: λ -rings and the representation theory of the symmetric group, *Lecture Notes* 308, Springer, 1973.
- [Kr] Kraft, H.: *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, Aspekter der Mathematik, Band D1, Braunschweig, Vieweg Sohn, 1985.
- [L1] Lascoux, A.: Fonctions de Schur et grassmanniennes, *C.R.Acad.Sci.Paris, Série A*, **281**, 851-854 (1975).
- [L2] Lascoux, A.: Fonctions de Schur et grassmanniennes, *C.R.Acad.Sci.Paris, Série A*, **281**, 813-815 (1975).
- [L3] Lascoux, A.: Cohomologie de la grassmannienne, preprint non publié, 1987.
- [L4] Lascoux, A.: Syzygies des variétés déterminantales, *Adv. in Math.* **30**, 202-237 (1978).
- [LS] Lascoux, A., Schützenberger, M.: The plactic ring.
- [Li] Littlemann, P.: A generalization of the Littlewood-Richardson rule, *Journal of Algebra* **130**, 328-368 (1990).
- [LP1] Le Potier, J.: Cohomologie de la Grassmannienne à valeurs dans les puissances extérieures et symétriques du fibré universel, *Math. Ann.*, **266**, 257-270 (1977).

- [Mc] Macdonald, I.G.: Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford, Clarendon Press, 1979.
- [M1] Manivel, L.: Un exemple de non dégénérescence en E_2 de la suite spectrale de Borel-Le Potier, C.R.Acad.Sci. Paris **311**, Série I, 31-36 (1990).
- [PLPS1] Peternell, Th., Le Potier, J., Schneider, M.: Direct images of sheaves of differentials and the Atiyah class, Math.Z. **196**, 75-85 (1987).
- [Sn1] Snow D.: On the ampleness of homogeneous vector bundles, Trans.Am.Math.Soc. **294**, 585-594 (1986).
- [Sn2] Snow, D.: Cohomology of twisted holomorphic forms on Grassmann manifolds and quadric hypersurfaces, Math.Ann. **276**, 159-176 (1986).
- [So] Sommese, A.J.: Submanifolds of abelian varieties, Math.Ann. **233**, 229-256 (1978).
- [W] Weyl, H.: Classical groups, Princeton University Press, Princeton, 1946.

Deuxième partie

COHOMOLOGIE DES FIBRÉS AMPLES

Introduction

Les résultats de la première partie de cette thèse vont maintenant être utilisés pour obtenir différents théorèmes d'annulation pour la cohomologie des fibrés amples.

En premier lieu, nous montrons que certains groupes de cohomologie de Dolbeault des fibrés associés au fibré quotient sur la grassmannienne d'un espace vectoriel complexe, peuvent être identifiés à des puissances extérieures de cet espace. Via la suite spectrale de Borel-Le Potier, ceci permet de démontrer le théorème d'annulation pour les puissances extérieures d'un fibré ample, qui a été énoncé dans notre introduction.

En second lieu, nous généralisons ces méthodes à des variétés de drapeaux autres que la grassmannienne, pour étendre et préciser divers théorèmes d'annulation, en particulier ceux de Jean-Pierre Demailly. Malheureusement, on ne dispose en l'occurrence pas d'un équivalent de la méthode des diagrammes, mais seulement de filtrations qui n'en fournissent qu'un palliatif incommode: c'est en particulier pour cette raison que nous n'obtiendrons là que des résultats partiels.

1 Théorèmes d'annulation pour les puissances symétriques et extérieures

1.1 Introduction

Nous avons vu au cours de la première partie, après avoir redémontré, par des méthodes diagrammatiques, le théorème de Kodaira-Nakano pour les puissances du déterminant du fibré quotient Q sur une grassmannienne $G_r(V)$, que les groupes $H^{p,q}(G_r(V), (det Q)^l)$ non nuls en degré $p + q = n = dim G_r(V)$, correspondaient à des diagrammes d'un type bien particulier. Plus généralement, nous allons montrer que si la dimension de V est assez grande, les composantes des groupes de cohomologie $H^{p,q}(G_r(V), \wedge^s Q \otimes (det Q)^l)$, l étant supposé strictement positif, correspondent en degré p suffisamment grand à des diagrammes simples (qui, d'ailleurs, ont déjà fait leur apparition au chapitre précédent), auxquels le théorème de Bott associe des puissances extérieures de V .

La suite spectrale de Borel-Le Potier associée à certains fibrés en droites homogènes sur des variétés de drapeaux permet alors d'établir le résultat suivant:

Théorème 1.1.1 *Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang d sur une variété complexe compacte X de dimension n , L un fibré en droites sur cette même variété, et supposons que E soit ample et L nef, ou E nef et L ample. Alors*

$$H^{p,q}(X, \wedge^k E \otimes L) = 0 \quad \text{si } p + q > n + \min(k, n - p + 1, n - q + 1)(d - k).$$

Ce théorème apparaît comme intermédiaire entre les deux théorèmes de Le Potier que nous avons déjà cités, d'après lesquels

$$H^{n,q}(X, \wedge^k E) = 0 \quad \text{si } q > d - k,$$

et, plus généralement,

$$H^{p,q}(X, \wedge^k E) = 0 \quad \text{si } p + q > n + k(d - k).$$

On utilisera d'autre part différentes variantes de ces méthodes pour démontrer un théorème d'annulation pour les fibrés $Z^{j,k}E$ introduits au chapitre précédent, ou pour généraliser le théorème d'annulation de Griffiths pour les fibrés $S^k E \otimes det E$, sous la forme suivante:

Théorème 1.1.2 *Sous les mêmes hypothèses,*

$$H^{p,q}(X, S^k E \otimes det E \otimes L) = 0 \quad \text{si } q > (k + 1)(n - p).$$

De même, on précisera le domaine d'annulation de la cohomologie des puissances extérieures de E tensorisées par une puissance positive de son déterminant:

Théorème 1.1.3 *Sous les mêmes hypothèses, soient k , δ et l des entiers strictement positifs, tels que $\delta(l-1) \leq d-k \leq \delta l$. Alors*

$$H^{p,q}(X, \wedge^k E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} p+q > n+k\delta, \\ p > n-\delta. \end{cases}$$

Pour démontrer ces différents théorèmes, on procédera généralement de la façon suivante:

- Dans un premier temps, on montrera que les fibrés associés au fibré E , dont on cherche à annuler la cohomologie, peuvent être réalisés comme des images directes de fibrés en droites amples sur des variétés de drapeaux associées à ce fibré vectoriel.
- Dans un second temps, on montrera que les conditions d'annulation que le théorème de Kodaira-Nakano impose à ces fibrés en droites amples, "passent à travers" les suites spectrales de Borel-Le Potier correspondantes, pour donner les théorèmes annoncés.

Dans toute cette seconde partie, on utilisera donc de manière essentielle et répétée le résultat suivant: notons $M_s(E)$ la variété de drapeaux définie sur chaque fibre de E comme au paragraphe 1.2.2 de la première partie, et θ la projection naturelle de $M_s(E)$ sur X ; sur $M_s(E)$ sont définis, comme sur une variété de drapeaux d'un espace vectoriel complexe, les fibrés en droites Q_s^c , cela pour chaque poids c compatible avec s .

Lemme 1.1.1 *Si E est nef et L ample, ou E ample et L nef, et si le poids $c \in \mathbb{N}_{\geq}^d$ est strictement décroissant relativement à s , alors le fibré en droites $Q_s^c \otimes \theta^* L$ est ample sur $M_s(E)$.*

Preuve: Si E est ample, le fibré en droites Q_s^c est ample d'après [De1]. Il en est donc de même, a fortiori, de son produit tensoriel avec le fibré nef $\theta^* L$.

Si E est seulement supposé nef, on peut d'après [PLPS1] considérer un morphisme surjectif fini $\phi : Z \rightarrow X$, tel qu'il existe sur Z une racine $|c|$ -ième de L , autrement dit un fibré en droites λ tel que

$$\phi^* L = \lambda^{|c|}.$$

Le fibré λ est ample, de même que $F = \phi^* E \otimes \lambda$, et la variété $M_s(F)$ s'identifie, en tant que fibré en variétés de drapeaux au-dessus de Z , à l'image réciproque de $M_s(E)$ par ϕ .

De plus, si l'on note $Q_s^c(F)$ le fibré en droites de poids c naturellement défini au-dessus de $M_s(F)$, l'identification précédente induit l'isomorphisme

$$Q_s^c(F) \simeq \phi^*(Q_s^c(E) \otimes \theta^*L).$$

Comme le fibré $Q_s^c(F)$ est ample d'après la première partie de cette preuve, il en est donc bien de même de $Q_s^c \otimes \theta^*L$.

1.2 Cohomologie des fibrés $\wedge^s Q \otimes (det Q)^l$

On utilisera dans cette section l'arsenal mis en place au long de la première partie de ce travail, pour déterminer la cohomologie de Dolbeault (ou du moins une partie de cette cohomologie) des puissances extérieures du fibré quotient Q sur la grassmannienne $G_r(V)$ des sous-espaces de codimension r d'un espace vectoriel V de dimension d , tensorisées par une puissance positive du fibré en droites $det Q$.

Rappelons que les composantes du $Gl(V)$ -module $H^{p,q}(G_r(V), \wedge^s Q \otimes (det Q)^l)$ sont en correspondance avec les $1_{1,s}$ -diagrammes $\mathcal{D} = (u, c)$ l -admissibles de bidegré (p, q) , où

- $u \in \mathbb{N}_{\geq}^r$ est une partition décroissante de p formée d'entiers naturels au plus égaux à $d - r$,
- \mathcal{D} est un $1_{1,s}$ -diagramme si, en vertu de la formule (\wedge) du produit tensoriel par une puissance extérieure, $c \in \{0, 1\}^r$ est de module s , et tel que $u - c$ soit décroissant,
- \mathcal{D} est l -admissible si les entiers de crochet qui lui sont associés, à savoir les entiers

$$h_{i,j}^{\mathcal{D}} = h_{i,j}^u - c_i = u_i + u_j^* - i - j + 1 - c_i,$$

où $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq d - r$, sont tous distincts de l ,

- q est égal au nombre d'entiers de crochet de \mathcal{D} supérieurs à l .

Le poids supérieur de la composante du groupe de cohomologie $H^{p,q}(G_r(V), \wedge^s Q \otimes (det Q)^l)$ associée au diagramme \mathcal{D} est alors le poids $\xi(l1 - \chi(u - c), u^*)$, où χ est la permutation de nombre d'inversions maximal et, par définition, $\xi(a) = (a - c(d))^{\geq} + c(d)$. En résumé:

La cohomologie de $\Omega_{G_r(V)}^p \otimes \wedge^s Q \otimes (det Q)^l$ est non identiquement nulle si et seulement si il existe une partition de p , et un élément de $\{0, 1\}^r$ de module s , qui définissent un $1_{1,s}$ -diagramme l -admissible.

Les entiers l et s étant fixés, on verra que la suite spectrale de Borel-Le Potier amène naturellement à s'intéresser à la plus grande valeur de p pour laquelle la cohomologie de $\Omega_{G_r(V)}^p \otimes \wedge^s Q \otimes (det Q)^l$ n'est pas nulle. Le résultat suivant sera donc essentiel:

Proposition 1.2.1 *Supposons que $d \geq k = lr + s$ et $p = \lambda \frac{r(r+1)}{2} + \pi$, avec $l = \lambda + 1 > 0$ et $\pi \geq \pi_{r,s} - k + l$, où $\pi_{r,s} = \frac{s}{2}(2r - s + 1)$. Alors*

$$H^{p,q}(G_r(V), \wedge^s Q \otimes (\det Q)^l) = \bigoplus_{\alpha=0}^l n_s(\pi + r\alpha) \delta_{q,p-r\lambda-s+\alpha} Z^{k-\alpha-1,k} V,$$

où $n_s(\pi) = \text{card}\{c \in \{0,1\}^r, |c| = s, \sum_{i=1}^r ic_i = \pi\}$, et $Z^{j,k} V = \Gamma^{(k-j)} \mathbf{1}_1 + \mathbf{1}_{2,j+1} V$.

Lorsque $r = 1$, ce résultat est vrai sans restriction sur p .

Preuve: On a remarqué dans la première partie (remarque 4.3) que si le diagramme $\mathcal{D} = (u, c)$ est l -admissible,

$$u_i - u_{i+1} \leq \lambda + c_i,$$

pour tout entier $i < r$. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux diagrammes pour lesquels cette inégalité est une égalité dès $i = r - 1$:

Lemme 1.2.1 *Supposons que $u_{r-1} - u_r = \lambda + c_{r-1}$, et que le diagramme \mathcal{D} soit l -admissible; alors*

$$\forall i < r, \quad u_i - u_{i+1} = \lambda + c_i.$$

Preuve du lemme: On procédera par récurrence sur i : supposons que $u_i - u_{i+1} = \lambda + c_i$, et soit $\beta = u_{i-1} - u_i$; considérons les entiers de crochet du diagramme $\mathcal{D} = (u, c)$ figurant sur sa $i-1$ -ième ligne, entre les colonnes d'indices $u_{i+1} + 1$ et u_{i-1} : tous les entiers compris entre $1 - c_{i-1}$ et $l + \beta + c_i - c_{i-1}$ apparaissent parmi ces nombres, excepté $\beta + 1 - c_{i-1}$. Comme $l + \beta + c_i - c_{i-1}$ est au moins égal à l (puisque si β et c_i sont nuls, c_{i-1} l'est aussi), comme par hypothèse l ne doit pas figurer parmi les entiers considérés, nécessairement $l = \beta + 1 - c_{i-1}$, c'est-à-dire $u_{i-1} - u_i = \lambda + c_{i-1}$. ♣

On dira que le diagramme $\mathcal{D} = (u, c)$ est *régulier* si les hypothèses du lemme précédent sont vérifiées. Parmi les diagrammes réguliers figurent bien entendu les diagrammes que nous avons appelés extrémaux dans la première partie (remarque 4.3), qui vérifient de plus l'égalité $u_r = \lambda + c_r$.

				$\lambda \cdots 1 - c_1$	
			$\lambda \cdots 1 - c_2$		
	$\lambda \cdots 1 - c_{r-1}$				
$u_r - c_r \cdots 1 - c_r$					

Un diagramme l -admissible régulier.

Si \mathcal{D} est l -admissible, mais pas régulier, tous les entiers de crochet de son avant-dernière ligne doivent être inférieurs à λ : en effet, l'ensemble des entiers positifs de cette

avant-dernière ligne est constitué d'une, ou de deux suites d'entiers consécutifs, entre lesquelles un seul entier manque; et si cet entier était l , le diagramme serait régulier.

Comme $h_{r-1,1}^{\mathcal{D}} = u_{r-1} + 1 - \delta_{u_r,0} - c_{r-1}$, on doit donc avoir $u_{r-1} \leq \lambda - 1 + c_{r-1}$, puisque dans le cas où u_r serait nul, l'égalité $u_{r-1} = \lambda + c_{r-1}$ équivaldrait à la régularité du diagramme. Puisque $u - c$ est par hypothèse décroissant, ceci implique que $u_r \leq \lambda - 1 + c_r$, et, d'après le début de cette preuve, que

$$u_i \leq (r - i)\lambda - 1 + c_{r-1} + \cdots + c_i$$

si $i < r$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} p = \sum_{i=1}^r u_i &\leq \lambda \left(\frac{r(r-1)}{2} + 1 \right) - r + c_r + \sum_{i=1}^{r-1} i c_i \\ &\leq \lambda \left(\frac{r(r-1)}{2} + 1 \right) + \frac{s}{2}(2r - s - 1) - r \\ &= \lambda \frac{r(r+1)}{2} + \pi_{r,s} - k + l - 1, \end{aligned}$$

car $c_r + \sum_{i=1}^{r-1} i c_i$ est maximal pour $c = \mathbf{1}_{r-s, r-1}$. Sous les hypothèses faites sur p , comme $k - l + 1 = (r - 1)\lambda + r + s \geq r$, seuls les diagrammes l -admissibles réguliers doivent donc être considérés.

Si $\mathcal{D} = (u, c)$ est un tel diagramme, on aura

$$\begin{cases} u_r = \lambda - \alpha + c_r, & 0 \leq \alpha \leq \lambda + c_r, \\ u_i - u_{i+1} = \lambda + c_i, & \text{si } i < r, \end{cases}$$

soit encore $u_i = (r + 1 - i)\lambda - \alpha + \sum_{j=i}^r c_j$ et

$$p = \lambda \frac{r(r+1)}{2} - r\alpha + \sum_{i=1}^r i c_i.$$

Les entiers de la i -ème ligne compris entre 0 et λ étant précisément, pour des raisons de régularité, les entiers $h_{i, u_{i+1}+1}^{\mathcal{D}}, \dots, h_{i, u_i}^{\mathcal{D}}$, la valeur correspondante de q est donnée par

$$p - q = \sum_{i=1}^r (u_i - u_{i+1}) = u_1 = r\lambda + s - \alpha.$$

Reste à déterminer le poids supérieur du $Gl(V)$ -module irréductible associé par le théorème de Bott au diagramme précédent. Plutôt que de renvoyer à la remarque 2.4c, on pourra calculer ce poids explicitement :

$$l\mathbf{1} - \chi(u - c) - c(r) = \sum_{i=1}^r [\alpha - (i - 1)l - \sum_{j=r+2-i}^r c_j] \mathbf{1}_i,$$

alors que

$$u^* = (\underbrace{r, \dots, r}_{\lambda - \alpha + c_r}, \underbrace{r - 1, \dots, r - 1}_{\lambda + c_{r-1}}, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{\lambda + c_1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{d - k + \alpha}),$$

de sorte que $u^* - c(d-r) - r$ est constitué de $r+1$ suites décroissantes d'entiers consécutifs, chacune n'étant séparée de la suivante que par l'absence d'un entier. Les $r-1$ premiers de ces entiers manquants étant précisément les $r-1$ dernières composantes de $l1 - \chi(u - c) - c(r)$, il vient

$$[(l1 - \chi(u - c), u^*) - c(d)]^{\geq} = (\alpha, -1, -2, \dots, -k + \alpha + 1, -k + \alpha - 1, \dots, -d),$$

et par conséquent

$$\xi(l1 - \chi(u - c), u^*) = (\alpha + 1)1_1 + 1_{2, k-\alpha}.$$

Remarquons enfin que lorsque $r = 1$, chaque diagramme est régulier, et que nous venons précisément de calculer la contribution des diagrammes réguliers en degré p . ♣

Corollaire 1.2.1 Si $d \geq k = rl + s$, si $p = \lambda \frac{r(r+1)}{2} + \pi$ avec $\pi \geq \pi_{r,s} - r + 1$, alors

$$H^{p,q}(G_r(V), \wedge^s Q \otimes (\det Q)^l) = n_s(\pi) \delta_{q, p-r\lambda-s} \wedge^k V.$$

Preuve: En effet, $(k-l) - (r-1) = (r-1)\lambda + s \geq 0$ donc la proposition précédente s'applique, et comme $\pi > \pi_{r,s} - r$, $\pi + r\alpha > \pi_{r,s}$, donc $n_s(\pi + r\alpha) = 0$, dès que $\alpha \geq 1$. La seule valeur admissible de α est donc 0, et $Z^{k-1, k} V = \wedge^k V$. ♣

Ce corollaire va nous permettre de démontrer le théorème 1.1.1.

1.3 Puissances extérieures d'un fibré ample

1.3.1 La suite spectrale de Borel-Le Potier

Soit E un fibré de rang d sur une variété complexe X compacte de dimension n , soient s et r deux entiers naturels tels que $0 \leq s < r < d$, et $l = \lambda + 1$ un entier strictement positif.

Si $0 < s < r$, soit $Y = M_{s,r}(E)$ la variété des drapeaux de E , dont la fibre au-dessus du point x de X est la variété des drapeaux de E_x de la forme

$$(0 \subset V_r \subset V_s \subset E_x), \quad \text{codim } V_r = r, \quad \text{codim } V_s = s.$$

Cette fibre étant elle-même fibrée au-dessus de $G_r(E_x)$, et de telle façon que la fibre au-dessus du sous-espace V_r de codimension r de E_x s'identifie à la grassmannienne $G_s(E_x/V_r)$, qui est de dimension $r(d-r) + s(r-s)$ (c'est un cas particulier de la formule donnée au paragraphe 1.2.2 de la première partie): Y est donc une variété complexe compacte de dimension $n + r(d-r) + s(r-s)$.

On notera π la projection naturelle de Y sur X . Soit $Q^{l+1, l}$ le fibré en droites sur Y dont la fibre au-dessus du drapeau précédent s'identifie à $(\det E_x/V_s)^{l+1} \otimes (\det V_s/V_r)^l = \det E_x/V_s \otimes (\det E_x/V_r)^l$. Si L est un fibré en droites sur X , et si les hypothèses du

théorème 1.1.1, sont vérifiées, le lemme 1.1.1 assure que le fibré en droites $Q^{l+1,l} \otimes \pi^* L$ est ample.

Rappelons que le fibré Ω_Y^P des P -formes holomorphes sur Y est filtré par les fibrés

$$F^{t,P} = \Omega_Y^{P-t} \wedge \pi^* \Omega_X^t,$$

filtration dont on a noté

$$G^{t,P} = F^{t,P} / F^{t+1,P} = \Omega_{Y/X}^{P-t} \otimes \pi^* \Omega_X^t$$

les quotients associés, où $\Omega_{Y/X}^j$ est le fibré des j -formes holomorphes sur Y relatives aux fibres de π . Le fibré $\Omega_Y^P \otimes Q^{l+1,l} \otimes \pi^* L$ admet donc de même une filtration dont les quotients seront notés

$$\mathcal{G}^{t,P} = G^{t,P} \otimes Q^{l+1,l} \otimes \pi^* L.$$

A cette filtration est associée pour tout entier P une suite spectrale de Borel-Le Potier, convergeant en degré q vers $H^{P,q}(Y, Q^{l+1,l})$, et dont les termes d'ordre un sont les groupes

$${}^P E_1^{t,q-t} = H^q(Y, \mathcal{G}^{t,P}).$$

Lorsque $s = 0$, on posera de la même façon $Y = G_r(E)$, et l'on notera Q le fibré quotient sur Y , de sorte que $(\det Q)^l \otimes \pi^* L$ est ample sous les hypothèses du théorème 1.1.1: de même que précédemment, il existe pour tout entier P une suite spectrale de Borel-Le Potier, convergeant en degré q vers $H^{P,q}(Y, (\det Q)^l \otimes \pi^* L)$, et dont les termes d'ordre un sont les groupes

$${}^P E_1^{t,q-t} = H^q(Y, \mathcal{G}^{t,P}),$$

où cette fois $\mathcal{G}^{t,P} = G^{t,P} \otimes (\det Q)^l \otimes \pi^* L$.

Pour calculer ces termes d'ordre un de la suite spectrale de Borel-Le Potier, on utilisera la suite spectrale de Leray associée aux fibrés quotients $\mathcal{G}^{t,P}$ et à la projection π . Lorsque $s \geq 1$, les fibrés images directes de ces quotients par π sont les

$$R_{\pi_*}^j \mathcal{G}^{t,P} = H^{P-t,j}(M_{s,r}(E), Q^{l+1,l} \otimes \pi^* L) \otimes \Omega_X^t,$$

et l'on pourra appliquer sur chaque fibre de E le lemme suivant:

Lemme 1.3.1 *Si Q est le fibré universel sur la grassmannienne des sous-espaces de codimension r d'un espace vectoriel complexe V , alors*

$$H^{P,q}(M_{s,r}(V), Q^{l+1,l}) = H^{P,q}(G_r(V), \wedge^s Q \otimes (\det Q)^l).$$

Preuve du lemme: Soit π_s la projection naturelle de $M_{s,r}(V)$ sur $G_r(V)$; la variété de drapeaux $M_{s,r}(V)$ s'identifie à la grassmannienne des sous-espaces de codimension s de

Q , de sorte que les fibrés images directes par π_s des fibrés quotients de la filtration de Borel-Le Potier de $\Omega_{M_s, r}^p(V) \otimes Q^{l+1, l}$ sont donnés par

$$R_{\pi_{s..}}^j(G^{t, p} \otimes Q^{l+1, l}) = H^{p-t, j}(G_s(Q), \mathcal{L}) \otimes (\det Q)^l \otimes \Omega_{G_r(V)}^t,$$

où l'on a noté \mathcal{L} le déterminant du fibré quotient sur $G_s(Q)$. Or, ce fibré n'a de cohomologie qu'en bidegré $(0, 0)$, pour lequel elle s'identifie à la s -ième puissance extérieure de Q ; on obtient donc

$$R_{\pi_{s..}}^j(G^{t, p} \otimes Q^{l+1, l}) = \delta_{j, 0} \delta_{p, t} \wedge^s Q \otimes (\det Q)^l \otimes \Omega_{G_r(V)}^p,$$

et la suite spectrale de Leray dégénère en E_2 : l'isomorphisme annoncé s'ensuit. \clubsuit

Les images directes par π des fibrés quotients de la filtration de Borel-Le Potier admettent donc indépendamment de s l'expression

$$R_{\pi_*}^j \mathcal{G}^{t, P} = H^{P-t, j}(G_r(E), \wedge^s Q \otimes (\det Q)^l \otimes L) \otimes \Omega_X^t.$$

1.3.2 Preuve du théorème principal, première partie

Soit encore E un fibré vectoriel de rang d , et L un fibré en droites, sur une variété complexe compacte X de dimension n , tels que soient vérifiées les hypothèses du théorème 1.1.1. Soit r un entier compris entre 1 et $k-1$, et soient l et s respectivement les quotient et reste de la division de k par r . Nous allons dans un premier temps établir le résultat suivant:

$$H^{p, q}(X, \wedge^k E \otimes L) = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} p \geq n - r + 1, \\ p + q > n + r(d - k). \end{cases}$$

Premier cas: $s = 0$

Soit $Y = G_r(E)$, variété complexe compacte de dimension $n + r(d - r)$, soit $\pi : Y \rightarrow X$ la projection naturelle, et $\det Q$ le déterminant du fibré quotient sur Y : sous les hypothèses faites, $(\det Q)^l \otimes \pi^* L$ est ample.

Considérons les fibrés images directes par π des fibrés quotients $\mathcal{G}^{t, P} = \Omega_{Y/X}^{P-t} \otimes \pi^* \Omega_X^t \otimes (\det Q)^l \otimes \pi^* L$ de la suite spectrale de Borel-Le Potier associée à $(\det Q)^l \otimes \pi^* L$:

$$R_{\pi_*}^j \mathcal{G}^{t, P} = H^{P-t, j}(G_r(E), (\det Q)^l \otimes L \otimes \Omega_X^t).$$

Le corollaire 1.1.1 appliqué au cas $s = 0$ (avec $\pi(r, 0) = 0$ et $n_0(\pi) = \delta_{\pi, 0}$) implique que si l'on suppose $P > n + \lambda \frac{r(r+1)}{2} - r$, de sorte que $P - t > \lambda \frac{r(r+1)}{2} - r$ si $t \leq n$,

$$R_{\pi_*}^j \mathcal{G}^{t, P} = \delta_{P-t, \lambda \frac{r(r+1)}{2}} \delta_{j, \lambda \frac{r(r-1)}{2}} \wedge^k E \otimes L \otimes \Omega_X^t;$$

la suite spectrale de Leray associée à $\mathcal{G}^{t,P}$ dégénère donc en E_2 , et

$$H^q(Y, \mathcal{G}^{t,P}) = \delta_{P-t, \lambda \frac{r(r+1)}{2}} H^{t, q - \lambda \frac{r(r-1)}{2}}(X, \wedge^k E \otimes L).$$

De même, ceci entraîne que la suite spectrale de Borel-Le Potier dégénère en E_1 , et l'on obtient l'isomorphisme, en posant $P = p + \lambda \frac{r(r+1)}{2}$ et en changeant q en $q + \lambda \frac{r(r-1)}{2}$,

$$H^{p,q}(X, \wedge^k E \otimes L) = H^{p + \lambda \frac{r(r+1)}{2}, q + \lambda \frac{r(r-1)}{2}}(Y, (\det Q)^l \otimes \pi^* L)$$

si $p \geq n - r + 1$. Le théorème d'annulation de Kodaira-Nakano implique donc que $H^{p,q}(X, \wedge^k E \otimes L) = 0$ dès que $p \geq n - r + 1$ et $p + q > \dim Y - \lambda r^2 = n + r(d - k)$.

Deuxième cas: $1 \leq s \leq r - 1$

On considérera cette fois la variété de drapeaux incomplets $Y = M_{s,r}(E)$ associée au fibré E , de dimension $n + r(d - r) + s(r - s)$, et l'on notera encore π la projection naturelle de Y sur X .

Soit p un entier naturel, soit $P = p + \lambda \frac{r(r+1)}{2} + \pi_{r,s}$; comme on l'a vu au paragraphe précédent, les fibrés images directes par l'application π des fibrés quotients $\mathcal{G}^{t,P}$ de la filtration de Borel-Le Potier de $\Omega_Y^P \otimes Q^{l+1,l} \otimes \pi^* L$ admettent l'expression

$$R_{\pi_*}^j \mathcal{G}^{t,P} = H^{P-t,j}(G_r(E), \wedge^s Q \otimes (\det Q)^l) \otimes L \otimes \Omega_X^t.$$

Si l'on suppose que $p \geq n - r + 1$, le corollaire 1.2.1 implique donc que

$$R_{\pi_*}^j \mathcal{G}^{t,P} = \delta_{j, P-t-r\lambda-s} n_s(p-t+\pi_{r,s}) \wedge^k E \otimes L \otimes \Omega_X^t,$$

soit encore, si l'on pose $t = p + \tau$, et si l'on note $\vartheta = P - p - r\lambda - s = l \frac{r(r-1)}{2} - \frac{(r-s)(r-s-1)}{2}$,

$$R_{\pi_*}^j \mathcal{G}^{p+\tau, P} = \delta_{j, \vartheta - \tau} n_s(\pi_{r,s} - \tau) \wedge^k E \otimes L \otimes \Omega_X^{p+\tau}.$$

Par conséquent, la suite spectrale de Leray associée dégénère en E_2 ,

$$H^{q+\vartheta}(Y, \mathcal{G}^{p+\tau, P}) = H^{q+\tau}(X, R_{\pi_*}^{\vartheta-\tau} \mathcal{G}^{p+\tau, P}),$$

et l'on aboutit au résultat suivant:

Lemme 1.3.2 *Si $p \geq n - r + 1$, les termes d'ordre un de la suite spectrale de Borel-Le Potier d'indice P de $Q^{l+1,l} \otimes \pi^* L$ sont les groupes*

$${}^P E_1^{p+\tau, q-p+\vartheta-\tau} = n_s(\pi_{r,s} - \tau) H^{p+\tau, q+\tau}(X, \wedge^k E \otimes L).$$

Reste à conclure par récurrence descendante sur p . Soit $p \geq n - r + 1$ et supposons que $H^{p+\tau, q+\tau}(X, \wedge^k E \otimes L) = 0$ si $\tau \geq 1$ et $q > n - p - 2\tau + r(d - k)$: d'après le lemme précédent, ceci implique que

$${}^P E_1^{p+\tau, q-p+\vartheta-\tau} = 0.$$

Cette égalité est d'autre part clairement vérifiée lorsque $\tau < 0$, puisque $n_s(\pi) = 0$ si $\pi > \pi_{r,s}$. Sous les mêmes hypothèses sur τ et q , il vient donc

$${}^P E_i^{p+\tau, q-p+\vartheta-\tau} = 0 \quad \text{si } i \geq 1.$$

Considérons les morphismes cobords de la suite spectrale de Borel-Le Potier impliquant les ${}^P E_i^{p, q-p+\vartheta}$. D'une part, les

$${}^P d_i^{p-i, q-1-p+\vartheta+i} : {}^P E_i^{p-i, q-1-p+\vartheta+i} \rightarrow {}^P E_i^{p, q-p+\vartheta}$$

sont nuls, puisque les ${}^P E_i^{p-i, q-1-p+\vartheta+i}$ le sont, pour toutes valeurs de i et q . D'autre part, les

$${}^P d_i^{p, q-p+\vartheta} : {}^P E_i^{p, q-p+\vartheta} \rightarrow {}^P E_i^{p+i, q+1-p+\vartheta-i}$$

sont nécessairement nuls pour tout $i \geq 1$, d'après ce qui précède, dès que $q \geq n - p - 2 + r(d - k)$, et dans ces conditions,

$${}^P E_\infty^{p, q-p+\vartheta} = {}^P E_1^{p, q-p+\vartheta} = H^{p, q}(X, \wedge^k E \otimes L).$$

Mais ${}^P E_\infty^{p, q-p+\vartheta}$ est un quotient d'une filtration de $H^{p, q+\vartheta}(Y, Q^{l+1, l} \otimes \pi^* L)$, qui s'annule, d'après le théorème de Kodaira-Nakano, dès que

$$P + q + \vartheta > \dim Y = n + r(d - r) + s(r - s),$$

c'est-à-dire, comme $P + \vartheta = p + r(k - r) + s(r - s)$, dès que $p + q > n + r(d - k)$.

1.3.3 Preuve du théorème principal, deuxième partie

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le résultat symétrique de celui qui vient d'être établi, et dont la preuve achèvera celle du théorème 1.1.1:

$$H^{p, q}(X, \wedge^k E \otimes L) = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} q \geq n - r + 1, \\ p + q > n + r(d - k). \end{cases}$$

Nous ne distinguerons pas les cas $s = 0$ et $s \geq 1$: Y désignera donc soit $G_r(E)$, soit $M_{s,r}(E)$. Commençons par une très légère variante du lemme 1.3.2:

Lemme 1.3.3 *Si $\tau < r$, si $\vartheta = \lambda \frac{r(r-1)}{2} + \pi_{r,s} - s$, les termes d'ordre 1 de la suite spectrale de Borel-Le Potier de $\mathcal{G}^{p+\tau, P}$ sont donnés par*

$${}^P E_1^{p+\tau, q+\vartheta-p-\tau} = H^{q+\vartheta}(Y, \mathcal{G}^{p+\tau, P}) = n_s(\pi_{r,s} - \tau) H^{p+\tau, q+\tau}(X, \wedge^k E \otimes L).$$

Preuve: les fibrés images directes par π de $\mathcal{G}^{p+\tau, P}$ sont les groupes

$$R_{\pi_*}^j \mathcal{G}^{p+\tau, P} = H^{\lambda \frac{r(r+1)}{2} + \pi_{r,s} - \tau, j}(G_r(E), \wedge^s Q \otimes (\det Q)^l) \otimes L \otimes \Omega_X^{p+\tau};$$

si $\tau < r$, le corollaire 1.1.1 donne

$$R_{\pi_*}^j \mathcal{G}^{p+\tau, P} = \delta_{j, \vartheta - \tau} n_s(\pi_{r,s} - \tau) \wedge^k E \otimes L \otimes \Omega_X^{p+\tau},$$

d'où la dégénérescence en E_2 de la suite spectrale de Leray de $\mathcal{G}^{p+\tau, P}$, et l'on conclut comme au lemme 1.3.2. \clubsuit

On procède à présent par récurrence descendante sur q : les seuls morphismes éventuellement non nuls de la suite spectrale de Borel-Le Potier qui impliquent ${}^P E_1^{p, q+\vartheta-p} = H^{p, q}(X, \wedge^k E \otimes L)$ et les ${}^P E_i^{p, q+\vartheta-p}$ sont les

$${}^P d_i^{p, q+\vartheta-p} : {}^P E_i^{p, q+\vartheta-p} \rightarrow {}^P E_i^{p+i, q+\vartheta+1-p-i}.$$

Si $1 \leq i \leq r-1$, ${}^P E_i^{p+i, q+1+\vartheta-p-i} = n_s(\pi_{r,s} - i) H^{p+i, q+i+1}(X, \wedge^k E \otimes L) = 0$, par hypothèse de récurrence, si $p+q \geq n+r(d-k)-2i$.

Si $i \geq r$, ${}^P E_1^{p+i, q+1+\vartheta-p-i} = H^{q+\vartheta+1}(Y, \mathcal{G}^{p+i, P})$ est l'aboutissement de la suite spectrale de Leray dont les termes d'ordre deux sont donnés par

$$E_2^{q+\vartheta+1-j, j} = H^{p+i, q+\vartheta+1-j}(X, H^{\lambda \frac{r(r+1)}{2} + \pi_{r,s} - i, j}(G_r(E), \wedge^s Q \otimes (\det Q)^l) \otimes L).$$

Les diagrammes réguliers apportent, d'après la preuve de la proposition 1.1.1, une contribution à $H^{\lambda \frac{r(r+1)}{2} + \pi_{r,s} - i, j}(G_r(E), \wedge^s Q \otimes (\det Q)^l)$ qui peut s'écrire

$$\bigoplus_{\alpha=0}^l n_s(\pi_{r,s} - i + r\alpha) \delta_{j, \vartheta + \alpha - i} Z^{k-\alpha-1, k} E.$$

Mais l'inégalité $q + \vartheta + 1 - j \leq n$, avec $j = \vartheta + \alpha - i$, c'est-à-dire $\alpha \geq q - n + 1 + i$, implique que $r\alpha - i \geq r(q - n + 1) + (r-1)i$. Comme on a supposé $i \geq r$, il vient $r\alpha - i \geq r(q - n + r) \geq r > 0$, et par conséquent $n_s(\pi_{r,s} - i + r\alpha) = 0$: les diagrammes réguliers ne peuvent donc contribuer à $E_2^{q+\vartheta+1-j, j}$ si $q \geq n - r + 1$. On traitera de même les diagrammes non réguliers grâce au lemme suivant:

Lemme 1.3.4 *Si $H^{p, q}(G_r(V), \wedge^s Q \otimes (\det Q)^l)$ admet une contribution d'un diagramme non régulier, alors $q \leq \vartheta - r + 1$.*

Preuve: Rappelons qu'un $1_{1,s}$ -diagramme $\mathcal{D} = (u, c)$ l -admissible est tel que

$$u_i - u_{i+1} \leq \lambda + c_i$$

pour tout entier $i \leq r-1$, et que si $l \geq 1$,

$$\text{card}\{j, h_{i,j}^c > l\} \leq u_{i+1}$$

pour tout entier $i \leq r$ si l'on convient que $u_{r+1} = 0$. Si de plus, ce diagramme n'est pas régulier, alors $\text{card}\{j, h_{r-1,j}^c > l\} = 0$ et $u_{r-1} \leq \lambda - 1 + c_{r-1}$, de sorte que $u_i \leq (r-i)\lambda - 1 + c_{r-1} + \dots + c_i$ si $i \leq r-1$, et par conséquent

$$q = \sum_{i=1}^r \text{card}\{j, h_{i,j}^c > l\} \leq \sum_{i=2}^{r-1} u_i \leq \lambda \frac{(r-1)(r-2)}{2} - (r-2) + \sum_{i=2}^{r-1} (r-i)c_i.$$

Comme $\sum_{i=2}^{r-1} (r-i)c_i \leq \pi_{r,s} - 2s$, on obtient donc

$$q \leq \vartheta - r + 1 - [(r-1)\lambda + s - 1];$$

mais $(r-1)\lambda + s - 1$ est positif, sauf éventuellement lorsque $r = 1$ (qui implique $s = 0$) ou $l = 1$, auquel cas tout diagramme l -admissible est régulier. ♣

Si un diagramme non régulier contribue à un $E_2^{q+\vartheta+1-j,j}$, le lemme qui précède implique donc que $j \leq \vartheta - r + 1$, d'où $q + \vartheta + 1 - j > n$. Par conséquent, $E_2^{q+\vartheta+1-j,j} = 0$ pour toute valeur de j , et donc $H^{q+\vartheta+1}(Y, \mathcal{G}^{p+i,P}) = 0$ si $i \geq r$.

Si $p + q \geq n + r(d-k) - 2$ et $q \geq n - r + 1$, tous les morphismes cobords ${}^P d_i^{p,q+\vartheta-p}$ de la suite spectrale de Borel-Le Potier sont donc nuls, et par conséquent

$${}^P E_1^{p,q+\vartheta-p} = H^{p,q}(X, \wedge^k E \otimes L) = {}^P E_\infty^{p,q+\vartheta-p},$$

qui est lui-même nul, d'après le théorème de Kodaira-Nakano, dès que $p+q > n+r(d-k)$. Le théorème 1.1.1 est donc démontré. ♣

Remarque 1.1: Se pose naturellement le problème de l'optimalité du théorème 1.1.1, problème auquel nous ne disposons de réponse tout à fait satisfaisante que dans le cas très restreint où $p = n - 1$ et $k = 2$, que nous isolerons dans l'énoncé suivant:

Corollaire 1.3.1 *Si E est nef et L ample, ou E ample et L nef,*

$$H^{n-1,q}(X, \wedge^2 E \otimes L) = 0 \quad \text{si} \quad q \geq 2d - 2.$$

Ce résultat est optimal: considérons en effet la grassmannienne $G_r(V)$, de dimension $n = 2r$, d'un espace vectoriel complexe V de dimension $d = r + 2$. Le diagramme défini par

$$\begin{aligned} u_r &= 1, & u_i &= 2 \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq r-1, \\ c_r &= c_{r-1} = 1, & c_i &= 0 \quad \text{si} \quad i \geq 3, \end{aligned}$$

est 1-admissible, ce dont il est facile de déduire que le fibré quotient canonique Q sur $G_r(V)$ vérifie

$$H^{n-1, n-3}(G_r(V), \wedge^2 Q \otimes \det Q) = \det V \neq 0,$$

et l'on sait que Q est nef puisque quotient d'un fibré trivial, alors que $\det Q$ est ample.

Remarquons également que le théorème de Le Potier en degré maximal est lui-même optimal, puisque l'on peut vérifier que

$$H^{n, r-k}(\mathcal{P}(V), \wedge^k(Q \otimes \det Q)) = (\det V)^k$$

n'est pas nul, alors que le fibré $E = Q \otimes \det Q$ est ample.

1.3.4 Non dégénérescence de la suite spectrale de Borel-Le Potier

Nous avons montré au dernier chapitre de la première partie, que les suites spectrales de Borel-Le Potier des fibrés en droites homogènes sur des variétés de drapeaux de fibrés vectoriels amples, ne dégénéraient pas nécessairement en E_2 . Ce qui précède va nous permettre de montrer que, plus précisément, il existe pour tout entier m des fibrés amples, tels que les suites spectrales de Borel-Le Potier associées ne dégèrent pas en E_m .

Reprenons les hypothèses et notations de la preuve du théorème 1.1.1. Alors:

Proposition 1.3.1 *Si la suite spectrale de Borel-Le Potier associée à*

$$Q^{l+1, l} \otimes \pi^* L \rightarrow M_{s, r}(E) \rightarrow X$$

(ou $(\det Q)^l \otimes \pi^ L \rightarrow G_r(E) \rightarrow X$ si $s = 0$) dégénère en E_r , alors*

$$H^{p, q}(X, \wedge^k E \otimes L) = 0 \quad \text{si } p + q > n + r(d - k).$$

Preuve: Reprenons en effet la preuve du théorème 1.1.1, et supposons que la suite spectrale de Borel-Le Potier dégénère en E_r . Si l'on procède à nouveau par récurrence descendante sur p , les morphismes cobords de la suite spectrale

$${}^P d_i^{p, q+\vartheta-p} : {}^P E_i^{p, q+\vartheta-p} \rightarrow {}^P E_i^{p+i, q+1+\vartheta-p-i},$$

sont nuls si $1 \leq i \leq r-1$ et $p+q \geq n+r(d-k)-2i$; si $p+q \geq n+r(d-k)-2$, on obtient donc en tenant compte de la dégénérescence en E_r les égalités

$$H^{p, q}(X, \wedge^k E \otimes L) = {}^P E_1^{p, q+\vartheta-p} = {}^P E_r^{p, q+\vartheta-p} = {}^P E_\infty^{p, q+\vartheta-p},$$

ce dernier terme étant nul dès que $p+q > n+r(d-k)$. ♣

Corollaire 1.3.2 *Il n'existe pas d'entier m pour lequel toute suite spectrale de Borel-Le Potier associée à un fibré en droites canonique ample sur une variété de drapeaux d'un fibré vectoriel ample dégénère en E_m .*

Preuve: Considérons un espace vectoriel complexe V de dimension $d + k$, où $k \leq d$, et Q le fibré quotient de rang d sur $G_d(V)$, qui est de dimension $n = kd$. Le diagramme défini par

$$\begin{aligned} u_i &= k, & si & 1 \leq i \leq d - k, \\ u_i &= d + 1 - i, & si & d - k + 1 \leq i \leq d, \\ c_i &= 1, & si & 1 \leq i \leq k, \\ c_i &= 0, & si & k + 1 \leq i \leq d, \end{aligned}$$

est 1-admissible; par exemple, pour $k = 5$ et $d = 7$, on obtient le diagramme suivant:

$u_1 = 5$					3	$c_7 = 0$
$u_2 = 5$					2	$c_6 = 0$
$u_3 = 5$				2	0	$c_5 = 1$
$u_4 = 4$			2	0		$c_4 = 1$
$u_5 = 3$		2	0			$c_3 = 1$
$u_6 = 2$	2	0				$c_2 = 1$
$u_7 = 1$	0					$c_1 = 1$

Un diagramme 1-admissible pour $k = 5$ et $d = 7$.

Ceci implique que

$$H^{n - \frac{k(k-1)}{2}, n - \frac{k(k+1)}{2}}(G_d(V), \wedge^k Q \otimes \det Q) \neq 0,$$

alors que Q est nef, et $\det Q$, ample. Comme

$$\left(n - \frac{k(k-1)}{2}\right) + \left(n - \frac{k(k+1)}{2}\right) = n + k(d - k),$$

comme d et k peuvent être choisis arbitrairement grands, la proposition précédente permet de conclure. ♣

Remarque 1.2: Nous venons, une nouvelle fois, de vérifier que le théorème de Le Potier pour les puissances extérieures d'un fibré ample, est optimal.

1.4 Un théorème d'annulation pour les $Z^{k-\alpha-1, k} E$

Considérons à nouveau un fibré E de rang d , et un fibré en droites L , sur une variété X complexe compacte de dimension n . Si $0 \leq s < r < d$, rappelons que nous avons noté $\mathcal{G}^{t, P}$ les quotients de la filtration de Borel-Le Potier sur $Y = M_{r, s}(E)$ (ou $Y = G_r(E)$ si

s est nul) des fibrés $\Omega_Y^P \otimes Q^{l+1,l} \otimes \pi^*L$. Nous avons établi au paragraphe 1.3.1 que les termes d'ordre deux de la suite spectrale de Leray associée à ces fibrés quotients pour la projection naturelle π de Y sur X admettaient l'expression suivante:

$$\begin{aligned} E_2^{i,j} &= H^i(X, R_{\pi_*}^j \mathcal{G}^{t,P}) \\ &= H^{t,i}(X, H^{P-t,j}(G_r(E), \wedge^s Q \otimes (\det Q)^l) \otimes L), \end{aligned}$$

où Q est le fibré quotient sur $G_r(E)$. Pour appliquer la proposition 1.1.1 aux groupes de cohomologie sur les grassmanniennes des fibres de E qui apparaissent dans cette dernière formule, il faut supposer que r soit égal à 1, ou que $P - t$ soit supérieur ou égal à $\lambda \frac{r(r+1)}{2} + \pi_{r,s} - k + l$, où $k = rl + s$, lorsque t est inférieur ou égal à n , c'est-à-dire que

$$P \geq n + \lambda \frac{r(r+1)}{2} + \pi_{r,s} - k + l.$$

Si l'on pose $P = p + \lambda \frac{r(r+1)}{2} + \pi_{r,s}$ et $t = p + \tau$, il vient, lorsque $p \geq n - k + l$,

$$E_2^{i,j} = \bigoplus_{\alpha=0}^l n_s(\pi_{r,s} - \tau + r\alpha) \delta_{j, \lambda \frac{r(r-1)}{2} + \pi_{r,s} - s + \alpha - \tau} H^{p+\tau,i}(X, Z^{k-\alpha-1,k} E).$$

On obtient donc le lemme suivant:

Lemme 1.4.1 *Soit $p \geq n - k + l$ (ou p quelconque si $r = 1$), et $P = p + \lambda \frac{r(r+1)}{2} + \pi_{r,s}$; alors pour tout entier relatif τ , les termes d'ordre deux de la suite spectrale de Leray associée au fibré quotient $\mathcal{G}^{p+\tau,P}$ sur Y sont donnés par*

$$E_2^{i,j} = n_s(\pi_{r,s} - \tau + r(\tau + j - \vartheta)) H^{p+\tau,i}(X, Z^{k-\tau-j+\vartheta-1,k} E)$$

si $\tau + j - \vartheta \leq l$, avec $\vartheta = \lambda \frac{r(r-1)}{2} + \pi_{r,s} - s$, et $E_2^{i,j} = 0$ sinon: ce qu'on peut également écrire

$$E_2^{i,j} = \bigoplus_{\gamma=0}^l n_s(\pi_{r,s} - \tau + r\gamma) \delta_{j, \vartheta + \gamma - \tau} H^{p+\tau,i}(X, Z^{k-\gamma-1,k} E).$$

Rappelons que $Z^{j,k} E = \Gamma^{(k-j)} \mathbf{1}_1 + \mathbf{1}_{2,j+1} E$, fibré qui peut s'interpréter comme étant le noyau de l'homomorphisme

$$\theta_E^{j,k} : \wedge^j E \otimes S^{k-j} E \rightarrow \wedge^{j-1} E \otimes S^{k-j+1} E$$

de contraction par l'identité $Id_E \in E^* \otimes E$.

Théorème 1.4.1 *Si E est ample et L nef, ou E nef et L ample, si α est un entier strictement positif, alors*

$$H^{p,q}(X, Z^{k-\alpha-1,k} E \otimes L) = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} p \geq n - \mu(k, \alpha) + 1 \\ q \geq q_{d,k,\alpha}(n - p + 1), \end{cases}$$

où $\mu(k, \alpha) = \frac{k-2^\alpha+1}{2^\alpha}$, $a(\alpha) = 2^\alpha$, $b(\alpha) = 2^{\alpha+1} - 1$, et

$$q_{d,k,\alpha} = a(\alpha)(d - k) + b(\alpha).$$

Preuve: On procèdera par récurrence ascendante sur α et descendante sur p , à partir du théorème 1.1.1 dont une partie peut s'énoncer sous la forme précédente avec $\mu(k, 0) = k$, $a(0) = b(0) = 1$. Donnons tout d'abord quelques propriétés très élémentaires des fonctions μ , a et b qui nous seront utiles par la suite:

Lemme 1.4.2 1. $b(\alpha) \geq 2\alpha + 1$.

$$2. a(\alpha) \geq \max_{\beta=0}^{\alpha-1} (\alpha - \beta + 1)a(\beta).$$

$$3. b(\alpha) \geq \max_{\beta=0}^{\alpha-1} (\alpha - \beta + 1)b(\beta) + \alpha - \beta.$$

$$4. \mu(k, \alpha) \leq \frac{\mu(k, \beta)}{\alpha - \beta + 1} \text{ si } 0 \leq \beta < \alpha.$$

Preuve: L'inégalité 1. est équivalente à $2^\alpha \geq \alpha + 1$, qui est toujours vérifiée si $\alpha \in \mathbb{N}$. De même, 2. et 3. équivalent à $2^{\alpha-\beta} \geq \alpha - \beta + 1$ pour $0 \leq \beta < \alpha$. Si $\phi(\alpha) = 2^\alpha - 1$, 4. peut s'écrire

$$\frac{k - \phi(\alpha)}{2^\alpha} \leq \frac{k - \phi(\beta)}{(\alpha - \beta + 1)2^\beta} \text{ si } 0 \leq \beta < \alpha,$$

et cette inégalité est vérifiée d'après ce qui précède, puisque ϕ est croissante. ♣

Soient donc $\alpha \geq 1$ et $p = n - r + 1$ avec $r \leq \mu(k, \alpha)$, et soit $p' = p - r\alpha$. Il faut, pour être en mesure d'appliquer le lemme 1.3.4 à p' , s'assurer si $r \geq 2$ que $p' \geq n - k + l$. Comme l est la partie entière de k/r , il est facile de vérifier que ceci est équivalent à

$$\alpha \leq \frac{r-1}{r^2}(k - r + 1).$$

Comme $r^2 \leq (r-1)(r+2)$ si $r \geq 2$, cette condition sur α est vérifiée si $r \leq \frac{k-2\alpha+1}{\alpha+1}$, donc a fortiori si $r \leq \mu(k, \alpha)$.

Posons donc $P = p' + \lambda \frac{r(r+1)}{2} + \pi_{r,s}$ et appliquons le lemme 1.4.1 à la valeur αr de τ : les termes d'ordre deux de la suite spectrale de Leray associée au fibré $\mathcal{G}^{p,P}$ sont donnés par

$$E_2^{i,j} = \bigoplus_{\gamma=0}^{\alpha} n_s(\pi_{r,s} - r(\alpha - \gamma)) \delta_{j, \vartheta + \gamma - \alpha r} H^{p,i}(X, Z^{k-\gamma-1, k} E \otimes L).$$

Si $j = \vartheta + \alpha - r\alpha$, on a donc

$$\begin{aligned} E_2^{q,j} &= H^{p,q}(X, Z^{k-\alpha-1,k} E \otimes L), \\ E_2^{q,j'} &= 0 \quad \text{si } j' > j, \quad q \text{ quelconque.} \end{aligned}$$

Considérons les morphismes cobords de cette suite spectrale de Leray

$$E_m^{q-m,j-1+m} \rightarrow E_m^{q,j} \rightarrow E_m^{q+m,j+1-m},$$

où $m \geq 2$. D'après ce qui précède, $E_2^{q-m,j-1+m} = 0$, donc $E_m^{q-m,j-1+m} = 0$, pour tout $m \geq 2$. De plus,

$$\begin{aligned} E_2^{q+m,j+1-m} &= \bigoplus_{\gamma=0}^{\alpha} n_s(\pi_{r,s} - r(\alpha - \gamma)) \delta_{\gamma, \alpha+1-m} H^{p,q+m}(X, Z^{k-\gamma-1} E \otimes L) \\ &= n_s(\pi_{r,s} - (m-1)r) H^{p,q+m}(X, Z^{k-\alpha+m-2,k} E \otimes L) \end{aligned}$$

est nul, par hypothèse de récurrence, dès que $q+m \geq q_{d,k,\alpha+1-m}r$, donc, en particulier, $q_{d,k,\beta}$ étant croissante relativement à β , dès que $q \geq q_{d,k,\alpha-1}r - 2$. Dans ces conditions, $E_2^{q,j} = E_{\infty}^{q,j}$, et l'on a démontré le lemme suivant:

Lemme 1.4.3 *Si $q \geq q_{d,k,\alpha-1}r - 2$, $H^{q+\vartheta-(r-1)\alpha}(Y, \mathcal{G}^{p,P})$ admet une filtration dont un des termes du module gradué associé n'est autre que $H^{p,q}(X, Z^{k-\alpha-1,k} E \otimes L)$.*

Reste à prouver que si q est assez grand,

$$H^{q+\vartheta-(r-1)\alpha}(Y, \mathcal{G}^{p,P}) = {}^P E_1^{p,q+\vartheta-(r-1)\alpha-p} = 0.$$

Les morphismes de la suite spectrale de Borel-Le Potier impliquant ce terme sont les

$${}^P E_m^{p-m,q+\vartheta-(r-1)\alpha-1+m-p} \rightarrow {}^P E_m^{p,q+\vartheta-(r-1)\alpha-p} \rightarrow {}^P E_m^{p+m,q+\vartheta-(r-1)\alpha+1-m-p}.$$

D'après le lemme 1.4.1 appliqué à la valeur $r\alpha - m$ de τ , les termes $E_2^{q'+\vartheta+\alpha+m-1-j,j}$ de la suite spectrale de Leray associée au fibré $\mathcal{G}^{p-m,P}$ admettent l'expression suivante:

$$\bigoplus_{\gamma=0}^l n_s(\pi_{r,s} + m - r(\alpha - \gamma)) \delta_{j, \vartheta+\gamma+m-r\alpha} H^{p-m,q'+\vartheta+\alpha+m-1-j}(X, Z^{k-\gamma-1,k} E \otimes L).$$

Supposons que $(\alpha - \beta - 1)r < m \leq (\alpha - \beta)r$, avec $0 \leq \beta < \alpha$, et soit $q = q' + r\alpha$; alors $E_2^{q'+\vartheta+\alpha+m-1-j,j}$ est la somme

$$\bigoplus_{\gamma=0}^{\beta} n_s(\pi_{r,s} + m - r(\alpha - \gamma)) \delta_{j, \vartheta+\gamma+m-r\alpha} H^{p-m,q+\alpha-\gamma-1}(X, Z^{k-\gamma-1,k} E \otimes L).$$

Par hypothèse de récurrence, $E_2^{q'+\vartheta+\alpha+m-1-j,j}$ est donc nul pour tout entier j si lorsque $0 \leq \gamma \leq \beta < \alpha$ et $m \leq (\alpha - \beta)r$, on a

$$\begin{cases} p - m \geq n - \mu(k, \gamma) + 1, \\ q + \alpha - \gamma - 1 \geq (n - p + 1 + m)[a(\gamma)(d - k) + b(\gamma)], \end{cases}$$

soit encore, pour tout entier $0 \leq \gamma \leq \beta < \alpha$, les fonctions a , b et μ étant croissantes,

$$\begin{cases} (\alpha - \beta + 1)r \leq \mu(k, \gamma), \\ q \geq r[(\alpha - \beta + 1)a(\beta)(d - k) + (\alpha - \beta + 1)b(\beta) + (\alpha - \beta)] + \beta - \alpha + 1. \end{cases}$$

La première de ces inégalités est vérifiée, si $r \leq \mu(k, \alpha)$, d'après l'assertion 4 du lemme 1.4.2. La seconde l'est également, d'après les assertions 2 et 3 du même lemme, dès que

$$q \geq r[a(\alpha)(d - k) + b(\alpha)] = q_{d,k,\alpha}r.$$

Dans ces conditions, ${}^P E_1^{p-m, q+\vartheta-(r-1)\alpha-1+m-p}$, donc ${}^P E_m^{p-m, q+\vartheta-(r-1)\alpha-1+m-p}$, est nul pour tout $m \geq 2$.

Toujours d'après le lemme 1.4.1, cette fois appliqué à la valeur $r\alpha + m$ de τ , le terme d'ordre deux $E_2^{q'+\vartheta+\alpha+1-j,j}$ de la suite spectrale de Leray du fibré $\mathcal{G}^{p+m,P}$ est égal à la somme

$$\bigoplus_{\gamma=0}^{\alpha} n_s(\pi_{r,s} - m - (\alpha - \gamma)r) \delta_{j, \vartheta+\gamma-m-r\alpha} H^{p+m, q+\alpha-\gamma+1}(X, Z^{k-\gamma-1, k} E \otimes L).$$

Si $m \geq r$, $p + m > n$ donc

$${}^P E_1^{p+m, q+\vartheta-(r-1)\alpha+1-p-m} = H^{q+\vartheta-(r-1)\alpha+1}(Y, \mathcal{G}^{p+m,P})$$

est nul. Si $1 \leq m < r$, c'est encore le cas d'après l'hypothèse de récurrence faite sur p cette fois, si pour tout entier γ tel que $0 \leq \gamma \leq \alpha$,

$$\begin{cases} r - m \leq \mu(k, \gamma), \\ q + \alpha - \gamma + 1 \geq q_{d,k,\gamma}(r - m). \end{cases}$$

La première de ces conditions est clairement vérifiée, puisque $\mu(k, \beta)$ est décroissante en β . La seconde l'est également, $q_{d,k,\beta}$ étant croissante en β , dès que $q \geq q_{d,k,\alpha}(r-1)-1$. Par conséquent, si $q \geq q_{d,k,\alpha}r$,

$${}^P E_1^{p, q+\vartheta-(r-1)\alpha-p} = H^{q+\vartheta-(r-1)\alpha}(Y, \mathcal{G}^{p,P}) = {}^P E_{\infty}^{p, q+\vartheta-(r-1)\alpha-p},$$

et ce dernier terme étant un quotient d'une filtration de $H^{p, q+\vartheta-(r-1)\alpha}(Y, Q^{l+1,l})$ est nul si de surcroît $P + q + \vartheta - (r-1)\alpha > \dim Y$, c'est-à-dire, puisque $P + \vartheta = p + r(k - r - \alpha) + s(r - s)$ et $\dim Y = n + r(d - r) + s(r - s)$, si

$$q \geq r(d - k + 2\alpha + 1) - \alpha;$$

ce qui est bien le cas d'après l'assertion 1 du lemme 1.4.2. Le théorème 1.4.1 est donc démontré. ♣

1.5 Une généralisation d'un théorème de Griffiths

Une variante de la preuve du théorème 1.1.1 permet, sous la forme du théorème 1.1.2, de généraliser le théorème d'annulation de Griffiths ([Gr],[Sch2]) de la cohomologie des puissances symétriques d'un fibré ample, tensorisées par son fibré déterminant:

$$H^{n,q}(X, S^k E \otimes \det E) = 0 \quad \text{si } q > 0, \quad k \geq 0,$$

lorsque E est un fibré vectoriel ample sur une variété complexe compacte de dimension n .

Le rôle de la proposition 1.1.1 sera ici tenu par le résultat suivant:

Proposition 1.5.1 *Supposons que $d = rl + s - \alpha$, avec $0 \leq \alpha \leq \lambda$ et $r\alpha \leq \lambda(r-1) + s$; soit $p = \lambda \frac{r(r+1)}{2} - r\alpha + \pi$, alors si $\pi \geq \pi_{r,s} - r + 1$,*

$$H^{p,q}(G_r(V), \wedge^s Q \otimes (\det Q)^l) = \delta_{p-q, r\lambda - \alpha + s} n_s(\pi) S^\alpha V \otimes \det V.$$

Preuve: On distinguera, comme pour la proposition 1.1.1, diagrammes réguliers et non réguliers, en remarquant tout d'abord que les premiers ne sont définis que s'ils vérifient $u_1 = u_r + (r-1)\lambda + s - c_r \leq d - r$, c'est-à-dire $u_r \leq \lambda - \alpha + c_r$. De plus, le diagramme non régulier correspondant à la plus grande valeur de p possible est défini par

$$\begin{aligned} u_r &= \lambda - 1, \\ u_i &= \lambda + (r-i-1)l, & r-s+1 \leq i \leq r-1, \\ u_i &= \lambda + (s-1)l + (r-s-i)\lambda, & 1 \leq i \leq r-s; \\ c_r &= 0, \\ c_i &= 1, & r-s \leq i \leq r-1, \\ c_i &= 0, & 1 \leq i \leq r-s-1. \end{aligned}$$

En effet, nous avons vu à l'occasion de la preuve de la proposition 1.1.1 que $u_{r-1} \leq \lambda + c_{r-1}$ si le diagramme considéré est non régulier. La décroissance de $u - c$ impose de plus $u_r \leq \lambda - 1$, et comme $u_i - u_{i+1} \leq \lambda + c_i$ si $i < r$, la valeur maximale de $p = \sum_{i=1}^r u_i$ s'obtient lorsque ces inégalités sont toutes des égalités, avec le choix des c_i ci-dessus. Cette plus grande valeur possible de p est donc

$$p = \lambda \frac{r(r+1)}{2} - r\alpha + \pi_{r,s} - r - [(r-1)\lambda + s - r\alpha],$$

de sorte que dans les hypothèses de la proposition, les diagrammes non réguliers n'ont pas à être considérés.

Un diagramme régulier est défini par

$$\begin{cases} u_r = \lambda - \beta + c_r, & \alpha \leq \beta \leq \lambda + c_r, \\ u_i - u_{i+1} = \lambda + c_i, & \text{si } i < r, \end{cases}$$

les valeurs correspondantes de p et q étant données par

$$\begin{cases} p = \lambda \frac{r(r+1)}{2} - r\beta + \sum_{i=1}^r ic_i, \\ p - q = r\lambda + s - \beta. \end{cases}$$

Sous les hypothèses faites sur p , on ne devra donc considérer que les diagrammes pour lesquels $\beta = \alpha$. La contribution d'un tel diagramme a été calculée pour la proposition 1.1.1: dans les notations de cette proposition, $k = d + \alpha$ (de sorte que $u_1 = d - r$), et l'on obtient donc $Z^{k-\alpha-1, k}V = Z^{d-1, d+\alpha}V = S^\alpha V \otimes \det V$. ♣

Preuve du théorème 1.1.2: On procédera par récurrence descendante sur p . Soit p un entier, que l'on supposera dans un premier temps tel que $n - \frac{d-2k}{k+1} \leq p \leq n - 1$, ce qui implique $d > 3k$, et soit $r = n - p + 1$; soient l et s les quotient et reste de la division de $d + k$ par r .

Pour être en mesure d'utiliser la proposition 1.5.1 avec $\alpha = k$, il faut supposer que $k \leq \lambda$ et $kr \leq (r - 1)\lambda + s$; comme $l = E(\frac{d+k}{r})$, la première de ces inégalités se réduit à

$$r \leq \frac{d+k}{k+1},$$

et est donc bien vérifiée. Puisque $(r - 1)\lambda + s = d + k - r - l + 1$, la seconde est équivalente à

$$\phi(r) = (k + 1)r^2 - (d + k + 2)r + d + k + 1 \leq 0.$$

Comme on supposé $d > 3k$, on a

$$\begin{cases} \phi(2) = 3k + 1 - d \leq 0, \\ \phi(\frac{d-k+1}{k+1}) = \frac{k}{k+1}(3k + 1 - d) \leq 0. \end{cases}$$

Sous les hypothèses faites sur p , $2 \leq r \leq \frac{d-k+1}{k+1}$, donc $\phi(r)$ est négatif.

Soit alors $Y = M_{s,r}(E)$ (ou $G_r(E)$ si s est nul), $P = p + \lambda \frac{r(r+1)}{2} - kr + \pi_{r,s}$ et, comme précédemment, $\vartheta = \lambda \frac{r(r-1)}{2} + \pi_{r,s} - s$. Considérons à nouveau les fibrés quotients $\mathcal{G}^{p+\tau, P}$ des fibrés $\Omega_Y^P \otimes Q^{l+1, l} \otimes \pi^*L$ (ou $\Omega_Y^P \otimes (\det Q)^l \otimes \pi^*L$) sur Y . Les fibrés images directes de ces fibrés quotients par la projection naturelle π de Y sur X sont donnés, d'après la proposition précédente, par

$$\begin{aligned} R_{\pi_*}^j \mathcal{G}^{p+\tau, P} &= H^{P-p-\tau, j}(G_r(E), \wedge^s Q \otimes (\det Q)^l) \otimes L \otimes \Omega_X^{p+\tau} \\ &= \delta_{j, \vartheta - (r-1)k - \tau} n_s(\pi_{r,s} - \tau) S^k E \otimes \det E \otimes L \otimes \Omega_X^{p+\tau}, \end{aligned}$$

puisque si $\tau \geq r$, $p + \tau > n$. La suite spectrale de Leray dégénère donc en E_2 , et les termes d'ordre un de la suite spectrale de Borel-Le Potier de $\Omega_Y^P \otimes Q^{l+1, l} \otimes \pi^*L$ (ou $\Omega_Y^P \otimes (\det Q)^l \otimes \pi^*L$) sont les groupes

$${}^P E_1^{p+\tau, q+\vartheta-(r-1)k-p-\tau} = H^{q+\vartheta}(Y, \mathcal{G}^{p+\tau, P}) = n_s(\pi_{r,s} - \tau) H^{p+\tau, q+\tau}(X, S^k E \otimes \det E \otimes L).$$

Les seuls morphismes cobords de la suite spectrale de Borel-Le Potier impliquant les ${}^P E_i^{p,q+\vartheta-(r-1)k-p}$ sont alors les suivants:

$${}^P E_i^{p,q+\vartheta-(r-1)k-p} \rightarrow {}^P E_i^{p+i,q+\vartheta-(r-1)k-p+1-i}.$$

Or le groupe d'arrivée du morphisme précédent provient de

$${}^P E_1^{p+i,q+\vartheta-(r-1)k-p+1-i} = n_s(\pi_{r,s} - i)H^{p+i,q+i+1}(X, S^k E \otimes \det E \otimes L)$$

qui est nul, par hypothèse de récurrence, dès que $q + i \geq (k + 1)(n - p - i)$, donc en particulier si $q \geq (k + 1)(n - p - 1) - 1$. Dans ces conditions,

$${}^P E_1^{p,q+\vartheta-(r-1)k-p} = H^{p,q}(X, S^k E \otimes \det E \otimes L) = {}^P E_\infty^{p,q+\vartheta-(r-1)k-p},$$

et ce dernier terme est nul, d'après le théorème de Kodaira-Nakano, dès que $P + q + \vartheta - (r - 1)k > \dim Y$, c'est-à-dire, puisque $P + \vartheta = p + r(d - r) + s(r - s)$, dès que

$$q > (r - 1)(k + 1).$$

Le théorème est donc démontré pour $p \geq n - \frac{d-2k}{k+1}$: mais les deux lemmes qui suivent montreront, selon une idée que je dois à Jean-Pierre Demailly, que cette condition est superflue.

Lemme 1.5.1 *Supposons que $H^{p,q}(X, \Gamma^a E \otimes L) = 0$ sous la condition $C(n, p, q, d, a)$, où $a \in \mathbb{N}_{\geq}^d$, pour tout fibré E nef de rang d , et tout fibré en droites L ample sur une variété X de dimension n .*

Alors il en est de même sous l'hypothèse E ample et L nef.

Preuve: Soient E ample de rang d , et L nef sur X de dimension n . Alors $\det E$ est ample, et il existe un entier k_0 tel que $S^{k_0} E \otimes (\det E)^{-1}$ le soit également. Soit alors $\phi : Y \rightarrow X$ un revêtement analytique fini de X , tel qu'il existe sur Y un fibré en droites M tel que

$$\phi^*(\det E) = M^{k_0}.$$

Alors $\phi^* E \otimes M^{-1}$ est ample (donc nef), de même que M et a fortiori $\lambda = \phi^* L \otimes M^{|a|}$. On a donc par hypothèse, sous la condition $C(n, p, q, d, a)$,

$$H^{p,q}(Y, \Gamma^a(\phi^* E \otimes M^{-1}) \otimes \lambda) = H^{p,q}(Y, \phi^*(\Gamma^a E \otimes L)) = 0.$$

Mais le revêtement ϕ étant fini, ceci implique que

$$H^{p,q}(X, \Gamma^a E \otimes L) = 0,$$

en vertu du lemme suivant:

Lemme 1.5.2 Soit $\phi : Y \longrightarrow X$ un morphisme surjectif fini, et E un fibré vectoriel holomorphe sur X . Alors le morphisme

$$\phi^* : H^{p,q}(X, E) \longrightarrow H^{p,q}(Y, \phi^* E)$$

est injectif.

Preuve: Considérons un élément de $H^{p,q}(X, E)$, que représente une forme u , de bidegré (p, q) , à valeurs dans E , et supposons que son image par ϕ^* soit nulle. Il existe alors une forme v sur Y , à valeurs dans $\phi^* E$, telle que $\phi^* u = d'' v$. Considérons ces formes comme des courants, et prenons leurs images directes par ϕ : on obtient, si l'on note ν le nombre de feuillettes de ϕ ,

$$\phi_* \phi^* u = \nu u = \phi_* (d'' v) = d'' (\phi_* v).$$

Ceci implique que u est dans la classe nulle pour la cohomologie des courants: or, celle-ci coïncide avec la cohomologie des formes.

Lemme 1.5.3 Supposons que $H^{p,q}(X, \Gamma^a E \otimes L) = 0$ sous la condition $C(n, p, q, a)$, où $a \in \mathbb{N}_{\geq}^d$, pour tout fibré E nef de rang $d \geq d(n, p, q, a)$, et tout fibré en droites L ample sur une variété X de dimension n .

Alors il en est de même sous l'hypothèse E nef et L ample ou E ample et L nef, sans condition sur d .

Preuve: Il suffit de remarquer que si E est nef de rang d , $E \oplus \mathcal{O}_X^{\oplus(d'-d)}$ est nef de rang d' , et que, par exemple d'après les formules de déterminants de la proposition 1.1.1 de la première partie, on peut écrire

$$\Gamma^a(E \oplus \mathcal{O}_X^{\oplus(d'-d)}) = \Gamma^a E \oplus (\oplus_{|b| < |a|} \mu(b) \Gamma^b E),$$

de sorte que $\Gamma^a E$ est un facteur de $\Gamma^a(E \oplus \mathcal{O}_X^{\oplus(d'-d)})$, fibré auquel on peut appliquer l'hypothèse. Le lemme 1.5.1 permet de conclure.

Le théorème 1.1.2 est donc démontré. ♣

Notons cependant qu'il perd beaucoup de sa portée quand augmente l'exposant de la puissance symétrique considérée. Pour pallier cet inconvénient, on pourra lorsque E est globalement engendré utiliser le lemme suivant, dû à Peternell, Le Potier et Schneider ([PLPS1]), et dont nous avons déjà fait usage dans la première partie:

Lemme 1.5.4 Soit E un fibré vectoriel sur une variété X de dimension n , globalement engendré, et tel que pour un fibré F donné, l'on ait

$$H^q(X, S^k E \otimes F) = 0 \quad \text{si } q \geq q_0 \quad \text{et } 0 \leq k \leq k_0.$$

Alors il en est de même pour $q \geq \max(q_0, n - k_0)$ et k quelconque.

De ce lemme et du théorème 1.1.2, il est facile de déduire le résultat suivant:

Théorème 1.5.1 *Si E est ample et L nef, ou si L est ample, et si E est globalement engendré, alors*

$$H^{n-p, n-q}(X, S^k E \otimes \det E \otimes L) = 0 \quad \text{si } p \leq \frac{n-2q}{q+1}, \quad k \geq 0.$$

Preuve: D'après le théorème 1.1.2,

$$H^{n-p, q}(X, S^k E \otimes \det E \otimes L) = 0 \quad \text{si } q > (k+1)p.$$

Si l'on applique le lemme précédent à E et au fibré $F = \Omega_X^{n-p} \otimes \det E \otimes L$, avec $q_0 = (k_0 + 1)p + 1$: on obtient l'annulation des groupes de cohomologie $H^{n-p, q}(X, S^k E \otimes \det E \otimes L)$ dès que $q \geq n - \frac{n-p}{p+2}$, ce qui équivaut à l'énoncé du théorème. ♣

1.6 Encore une variante

On s'intéressera ici à la situation "duale" de celle qui a fait l'objet du paragraphe 1.2: autrement dit, on suppose les entiers r et d tels que

$$r \geq \frac{\lambda}{\lambda+1}d, \quad \text{où } \lambda = l-1 \geq 0.$$

Les diagrammes que l'on voudrait distinguer sont les diagrammes symétriques par rapport à la diagonale de ceux du paragraphe 1.2. Comme, d'après la remarque 2.3 de la première partie, ajouter des unités à certaines colonnes, plutôt qu'à certaines lignes, revient à considérer la cohomologie d'un produit de $(\det Q)^l$ non plus par une puissance extérieure $\wedge^s Q$, mais par $\wedge^s S^*$, où S est le fibré tautologique sur la grassmannienne, la version "duale" de la proposition 1.1.1 sera le résultat suivant:

Proposition 1.6.1 *Supposons $l = \lambda + 1 > 0$, $r \geq \frac{\lambda}{\lambda+1}d$, et soit μ un entier strictement inférieur à $d - r = \delta$. Alors*

$$\begin{aligned} H^{\lambda \frac{\delta(\delta+1)}{2} - \frac{s(s+1)}{2} - \mu, q}(G_r(V), \wedge^s S^* \otimes (\det Q)^l) \\ = \delta_{q, \lambda \frac{\delta(\delta-1)}{2} - \frac{s(s-1)}{2} - \mu} m(\mu) \wedge^{r+s-\delta\lambda} V \otimes (\det V)^\lambda, \end{aligned}$$

où $m(\mu) = \text{card}\{c \in \{0, 1\}^\delta, |c| = s, \sum_{i=1}^\delta i c_i = \mu\}$.

Considérons alors la variété $M_{r, d-s}(V)$ des drapeaux de V de la forme

$$D = (0 \subset V_{d-s} \subset V_r \subset V),$$

V_r étant de codimension r et V_{d-s} de codimension $d-s$, et considérons le fibré en droites $Q^{l+1,1}$ dont la fibre au-dessus du drapeau précédent est $(\det V/V_r)^{l+1} \otimes \det V_r/V_{d-s} = (\det V/V_r)^l \otimes \det V/V_{d-s}$: $Q^{l+1,1}$ est ample si et seulement si $l > 0$.

La suite spectrale de Borel-Le Potier associée à $Q^{l+1,1}$ et à la projection π de $Y = M_{r,d-s}(V)$ sur la grassmannienne $X = G_r(V)$ admet pour termes d'ordre un les groupes

$${}^p E_1^{t,q-t} = H^q(Y, \mathcal{G}^{t,p}),$$

qui sont l'aboutissement de suites spectrales de Leray dont les termes d'ordre deux sont les groupes

$$E_2^{i,j} = H^{t,i}(X, H^{p-t,j}(Y/X, Q^{l+1,1})).$$

Or si $V_r \in G_r(V)$, $\pi^{-1}(V_r) \simeq G_{d-r-s}(V_r)$ est la grassmannienne des sous-espaces de codimension $d-r-s$ de V_r , et la restriction de $Q^{l+1,1}$ à cette fibre de π est le produit du fibré trivial $(\det V/V_r)^{l+1}$ par le déterminant du fibré quotient $Q = \det V_r/V_{d-s}$. La cohomologie de $Q^{l+1,1}$ relativement aux fibres de π est donc donnée par

$$\begin{aligned} H^{p-t,j}(Y/X, Q^{l+1,1})_{V_r} &= H^{p-t,j}(G_s(V_r), Q) \otimes (\det V/V_r)^{l+1} \\ &= \delta_{t,p} \delta_{j,0} \wedge^{d-r-s} V_r \otimes (\det V/V_r)^{l+1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} H^{p-t,j}(Y/X, Q^{l+1,1}) &= \delta_{t,p} \delta_{j,0} \wedge^{d-r-s} S \otimes (\det Q)^{l+1} \\ &= \delta_{t,p} \delta_{j,0} \wedge^s S^* \otimes (\det Q)^l \otimes \det V, \end{aligned}$$

puisque $\wedge^{d-r-s} S = \wedge^s S^*$ et $\det V = \det Q \otimes \det S$. Les suites spectrales de Leray et de Borel-Le Potier considérées dégénèrent donc en E_2 , et l'on obtient l'isomorphisme

$$H^{p,q}(M_{r,d-s}(V), Q^{l+1,1}) \simeq H^{p,q}(G_r(V), \wedge^s S^* \otimes (\det Q)^l) \otimes \det V.$$

Soient alors E un fibré de rang d , et L un fibré en droites, sur une variété complexe compacte X de dimension n , et soit $Y = M_{r,d-s}(E)$ la variété des drapeaux correspondants de E :

$$\dim Y = n + r(d-r) + s(d-r-s) = n + (r+s)(d-r) - s^2.$$

Soit $P = n + \lambda \frac{\delta(\delta+1)}{2} - \frac{s(s+1)}{2} - \mu$, et considérons la suite spectrale de Borel-Le potier associée au fibré en droites $Q^{l+1,1} \otimes \pi^* L$ sur Y et à la projection $\pi : Y \rightarrow X$. Ses termes d'ordre un ${}^p E_1^{t,q-t}$ sont l'aboutissement de suites spectrales de Leray dont les termes d'ordre deux sont les groupes

$$E_2^{i,j} = H^{t,i}(X, H^{p-t,j}(M_{r,d-s}(E), Q^{l+1,1}) \otimes L).$$

Posons $t = n - \tau$, et supposons que $\mu < \delta$, alors d'après la proposition précédente,

$$E_2^{i,j} = \delta_{j,\lambda \frac{\delta(\delta-1)}{2} - \frac{s(s-1)}{2} - \mu + \tau} m(\mu - \tau) H^{n-\tau,i}(X, \wedge^{r+s-\delta\lambda} E \otimes (\det E)^l \otimes L),$$

de sorte que cette suite spectrale de Leray dégénère en E_2 . On obtient ainsi l'isomorphisme

$${}^P E_1^{n-\tau, q-n+\tau} = m(\mu - \tau) H^{n-\tau, q-\lambda \frac{\delta(\delta-1)}{2} + \frac{s(s-1)}{2} + \mu - \tau} (X, \wedge^{r+s-\delta\lambda} E \otimes (\det E)^l \otimes L).$$

On en déduira aisément le théorème 1.1.3.

Preuve du théorème 1.1.3: Posons $k = r + s - \delta\lambda$, de sorte que $d - k = \delta l - s$: les inégalités $r \leq r + s \leq d$ équivalent à $0 \leq s \leq \delta$, c'est-à-dire à $\delta\lambda \leq d - k \leq \delta(\lambda + 1)$. Avec les notations précédentes, et si $p = n - \mu$, il vient

$${}^P E_1^{p, q+\lambda \frac{\delta(\delta-1)}{2} - \frac{s(s-1)}{2} - p} = H^{p, q} (X, \wedge^k E \otimes (\det E)^l \otimes L).$$

Procédons par récurrence descendante sur p : les morphismes de la suite spectrale de Borel-Le Potier impliquant ses termes de bidegré $(p, q + \lambda \frac{\delta(\delta-1)}{2} - \frac{s(s-1)}{2} - p)$ sont les

$${}^P d_h^{p, q+\lambda \frac{\delta(\delta-1)}{2} - \frac{s(s-1)}{2} - p} : {}^P E_h^{p, q+\lambda \frac{\delta(\delta-1)}{2} - \frac{s(s-1)}{2} - p} \longrightarrow {}^P E_h^{p+h, q+\lambda \frac{\delta(\delta-1)}{2} - \frac{s(s-1)}{2} - p+1-h}.$$

Le terme d'arrivée de ce morphisme provient de

$${}^P E_1^{p+h, q+\lambda \frac{\delta(\delta-1)}{2} - \frac{s(s-1)}{2} - p+1-h} = m(h) H^{p+h, q+1} (X, \wedge^k E \otimes (\det E)^l \otimes L),$$

qui est nul, par hypothèse de récurrence, si $p + q \geq n + \delta k - h$. Si $p + q > n + \delta k$, il vient

$${}^P E_1^{p, q+\lambda \frac{\delta(\delta-1)}{2} - \frac{s(s-1)}{2} - p} = {}^P E_\infty^{p, q+\lambda \frac{\delta(\delta-1)}{2} - \frac{s(s-1)}{2} - p},$$

ce dernier terme étant un quotient d'une filtration du groupe de cohomologie

$$H^{p+\lambda \frac{\delta(\delta+1)}{2} - \frac{s(s+1)}{2}, q+\lambda \frac{\delta(\delta-1)}{2} - \frac{s(s-1)}{2}} (Y, Q^{l+1,1} \otimes \pi^* L).$$

Mais sous les hypothèses du théorème, $Q^{l+1,1} \otimes \pi^* L$ est ample, et le théorème de Kodaira-Nakano implique que ce dernier groupe de cohomologie est nul si

$$(p + \lambda \frac{\delta(\delta+1)}{2} - \frac{s(s+1)}{2}) + (q + \lambda \frac{\delta(\delta-1)}{2} - \frac{s(s-1)}{2}) > \dim Y,$$

avec $\dim Y = n + (r + s)(d - r) - s^2$, c'est-à-dire, puisque $\delta = d - r$ et $r = \delta\lambda + k - s$,

$$p + q + \lambda\delta^2 - s^2 > n + (\delta\lambda + k) - s^2,$$

soit encore $p + q > n + \delta k$. ♣

Corollaire 1.6.1 Si E est ample et L nef, ou E nef et L ample, si $l > 0$ et $p > n - \frac{d-k}{l}$,

$$H^{p, q} (X, \wedge^k E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si } p + q > n + \frac{k(d-k)}{l}.$$

Il serait intéressant de savoir si ce résultat est vrai sans restriction sur p .

1.7 Un résultat concurrent

L'objet de ces quelques remarques est de montrer que l'on ne peut espérer que le théorème 1.1.1 de la deuxième partie, pour la cohomologie des puissances extérieures des fibrés amples, soit optimal: on établira en effet l'annulation de ces groupes sous des conditions qui peuvent être meilleures, à condition que l'exposant de la puissance extérieure considérée soit petit devant le rang du fibré.

Comme toujours, on commencera par des calculs de cohomologie sur des variétés de drapeaux.

Considérons la variété $M_{1,2}(V)$ des drapeaux de V constitués de sous-espaces de codimension un et deux: $D = (0 \subset V_2 \subset V_1 \subset V)$. Si a et b sont des entiers tels que $a \geq b > 0$, notons $\Lambda^{a,b}$ le fibré en droites homogène dont la fibre au-dessus du drapeau précédent est

$$\Lambda_D^{a,b} = (V/V_1)^a \otimes (V_1/V_2)^b = (V/V_1)^{a-b} \otimes (\det V/V_2)^b.$$

Si π est la projection de $M_{1,2}(V)$ sur $G_1(V)$, la fibre de π au-dessus de V_1 s'identifie à $G_1(V_1)$, et

$$\Lambda_{|\pi^{-1}(V_1)}^{a,b} \simeq \mathcal{L}^b \otimes (V/V_1)^a,$$

où l'on a noté \mathcal{L} le fibré quotient, de rang un, sur la grassmannienne $G_1(V_1)$. Or \mathcal{L}^b n'a de cohomologie qu'en bidegré $(t, 0)$, $0 \leq t < b$, pour lequel elle vaut $Z^{t,b}(V_1)$. La suite spectrale de Borel-Le Potier associée au fibré $\Lambda^{a,b}$ sur $M_{1,2}(V)$ et à la projection π a donc pour termes d'ordre un, en degré p , les groupes

$${}^p E_1^{t,q-t} = H^{t,q}(G_1(V), Q^a \otimes Z^{p-t,b} S),$$

où l'on a noté Q et S les fibrés quotient et tautologique sur la grassmannienne.

En particulier, si $b = 1$, ce groupe est nul sauf pour $t = p$, la suite spectrale de Borel-Le Potier dégénère en E_1 , et l'on obtient l'isomorphisme

$$H^{p,q}(M_{1,2}(V), \Lambda^{a,1}) = H^{p,q}(G_1(V), Q^a \otimes S) = H^q(G_1(V), Q^{a-p} \otimes \wedge^p S \otimes S).$$

Reste à appliquer le théorème de Bott pour obtenir le lemme suivant:

Lemme 1.7.1 *Si V est un espace vectoriel complexe de dimension $d \geq 3$, si $a \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$H^{p,q}(M_{1,2}(V), \Lambda^{a,1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > a, \\ \delta_{q,1} \wedge^{a+1} V & \text{si } p = a, \\ \delta_{q,0} (Z^{p+1,a+1} V \oplus \Gamma^{(a-p)} \mathbf{1}_1 + 2\mathbf{1}_2 + \mathbf{1}_{a,p+1} V) & \text{si } p < a. \end{cases}$$

Soit alors E un fibré holomorphe de rang d , L un fibré en droites sur une variété complexe compacte X de dimension n , et considérons la suite spectrale de Borel-Le Potier associée à la projection $\phi : Y = M_{1,2}(E) \longrightarrow X$, et au fibré en droites $\Lambda^{a,1} \otimes \pi^* L$ sur Y . En degré $p = n + a - \pi$, on a d'après le lemme précédent

$$\begin{aligned} {}^p E_1^{t, q-t} &= 0 \quad \text{si } t < n - \pi, \\ {}^p E_1^{n-\pi, q-n+\pi} &= H^{n-\pi, q-1}(X, \wedge^{a+1} E \otimes L). \end{aligned}$$

Les morphismes impliquant les termes de cette suite spectrale de bidegré $(n-\pi, q-n+\pi)$ sont donc les différentielles

$${}^p d_\tau^{n-\pi, q-n+\pi} : {}^p E_\tau^{n-\pi, q-n+\pi} \longrightarrow {}^p E_\tau^{n-\pi+\tau, q-n+\pi+1-\tau},$$

pour $0 < \tau \leq \pi$. Or ce dernier terme provient de

$${}^p E_1^{n-\pi+\tau, q-n+\pi+1-\tau} = H^{n-\pi+\tau, q+1}(X, Z^{a-\tau+1, a+1} E \otimes L \oplus \Gamma^\tau \mathbf{1}_1 + 2\mathbf{1}_2 + \mathbf{1}_{3, a-\tau+1} E \otimes L),$$

et l'on utilisera pour annuler ce groupe la proposition suivante:

Proposition 1.7.1 *Si E est nef et L ample, ou E ample et L nef, si $b \in \mathbb{N}_{\geq}^d$ avec $d \geq 2$,*

$$H^{p,q}(X, \Gamma^b E \otimes L) = 0 \quad \text{si } q > \sum_{i=1}^{b_1} (d - b_i^*) + (n - p)(d - 1).$$

Cette proposition implique que

$${}^p E_1^{n-\pi+\tau, q-n+\pi+1-\tau} = 0 \quad \text{si } q + 1 \geq \begin{cases} \pi d - a - 1 & \text{si } \tau < \pi, \\ \pi d - a & \text{si } \tau = \pi, \end{cases}$$

de sorte que si $q + 1 \geq \pi d - a$,

$${}^p E_1^{n-\pi, q-n+\pi} = {}^p E_\infty^{n-\pi, q-n+\pi}.$$

Si $a \geq 2$, le fibré en droites $Q^{a,1} \otimes \pi^* L$ est ample sur Y , alors qu'il est 1-ample au sens de Sommese si $a = 1$: le théorème de Kodaira-Nakano, et la généralisation qu'en a donné Sommese pour les fibrés k -amples, implique donc que

$${}^p E_\infty^{n-\pi, q-n+\pi} = 0 \quad \text{si } p + q > n + 2d - 3 + \delta_{a,1}.$$

On obtient donc le résultat suivant:

Proposition 1.7.2 Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang $d \geq 2$, L un fibré en droites sur une variété complexe compacte de dimension n , et supposons E ample et L nef, ou E nef et L ample. Alors si $k \geq 2$,

$$H^{p,q}(X, \wedge^k E \otimes L) = 0 \quad \text{si } p + q + k > n + \max(n - p, 2)(d - 1).$$

Reste, bien sûr, à démontrer la proposition précédente:

Preuve de la proposition 1.7.1: Montrons par récurrence descendante sur p que si k_1, \dots, k_m sont des entiers strictement positifs au plus égaux à d ,

$$H^{p,q}(X, \otimes_{i=1}^m \wedge^{k_i} E \otimes L) = 0 \quad \text{si } q > \sum_{i=1}^m (d - k_i) + (n - p)(d - 1).$$

La proposition s'ensuivra, puisque $\Gamma^b E$ est une composante du produit $\otimes_{i=1}^{b_1} \wedge^{b_i} E$.

Soit Z_m le produit fibré, au-dessus de X , de m exemplaires de $G_1(E)$. Notons π_i la projection du i -ème exemplaire de ce produit, sur X , et π la projection sur X de Z_m . Cette variété, de dimension $N = n + m(d - 1)$, est munie du fibré en droites

$$\mathcal{L} = \pi_1^* \mathcal{O}(k_1) \otimes \dots \otimes \pi_m^* \mathcal{O}(k_m) \otimes \pi^* L,$$

qui est ample sous les hypothèses de la proposition.

Considérons alors la suite spectrale de Borel-Le Potier associée à \mathcal{L} et à la projection π : son terme d'ordre un ${}^P E_1^{t,q-t}$ est l'aboutissement d'une suite exacte de Leray dont le terme d'ordre deux, d'après la formule de Künneth et le théorème de Bott, est

$$\begin{aligned} E_{i,j}^2 &= H^{t,i}(X, H^{P-t,j}(Z_m/X, \mathcal{L})) \\ &= \bigoplus_{\substack{j_1 + \dots + j_m = j, \\ l_1 + \dots + l_m = P-t}} H^{t,i}(X, \otimes_{i=1}^m H^{l_i, j_i}(G_1(E), \mathcal{O}(k_i)) \otimes L) \\ &= \bigoplus_{l_1 + \dots + l_m = P-t} \delta_{j,0} H^{t,i}(X, \otimes_{i=1}^m Z^{l_i, k_i} E \otimes L). \end{aligned}$$

Cette suite spectrale dégénère donc en E_2 , d'où l'isomorphisme

$${}^P E_1^{t,q-t} = \bigoplus_{l_1 + \dots + l_m = P-t} H^{t,q}(X, \otimes_{i=1}^m Z^{l_i, k_i} E \otimes L).$$

En particulier, en degré $P = p + \sum_{i=1}^m (k_i - 1)$,

$$\begin{aligned} {}^P E_1^{t,q-t} &= 0 \quad \text{si } t < p, \\ {}^P E_1^{p,q-p} &= H^{p,q}(X, \otimes_{i=1}^m \wedge^{k_i} E \otimes L). \end{aligned}$$

Les morphismes de cette suite spectrale impliquant ses termes de bidegré $(p, q - p)$ sont donc les différentielles

$${}^P d_\tau^{p,q-p} : {}^P E_\tau^{p,q-p} \longrightarrow {}^P E_\tau^{p+\tau, q-p+1-\tau}.$$

Or ce dernier terme provient, d'après ce qui précède, de

$${}^P E_1^{p+\tau, q-p+1-\tau} = \bigoplus_{\tau_1+\dots+\tau_m=\tau} H^{p+\tau, q+1}(X, \bigotimes_{i=1}^m Z^{k_i-1-\tau_i, k_i} E \otimes L);$$

de plus, $Z^{k_i-\tau_i-1, k_i} E$ est un facteur de $\wedge^{k_i-\tau_i} E \otimes E^{\otimes \tau_i}$, donc par hypothèse de récurrence,

$${}^P E_1^{p+\tau, q-p+1-\tau} = 0 \quad \text{si } q \geq \sum_{i=1}^m (d - k_i) + (n - p)d.$$

Sous cette hypothèse, le théorème de Kodaira-Nakano implique alors que

$${}^P E_1^{p, q-p} = {}^P E_\infty^{p, q-p} = 0$$

si $P + q > N$, c'est-à-dire $q > \sum_{i=1}^m (d - k_i) + (n - p)$, ce qu'il fallait vérifier. ♣

1.8 Extension à des fibrés de poids quelconques

On peut déduire du théorème 1.1.1 un énoncé pour les fibrés associés à un fibré ample autres que ses puissances extérieures. Il suffit pour cela de remarquer que si E est ample de rang d , $E^{\oplus h}$ est ample de rang hd , et que sa puissance extérieure k -ième est une somme de fibrés associés à E , portant sur tous ceux dont les poids sont de module k et de première composante inférieure ou égale à h : c'est par exemple une conséquence immédiate de la règle de Littlewood-Richardson. D'où, en appliquant le théorème 1.1.1 à $E^{\oplus a_1}$, l'énoncé suivant:

Proposition 1.8.1 *Si E est ample et L nef, ou E nef et L ample,*

$$H^{p,q}(X, \Gamma^a E \otimes L) = 0 \quad \text{si } p + q > n + \min(|a|, n - p + 1, n - q + 1)(a_1 d - |a|).$$

On pourrait également, plutôt que de se placer, comme on l'a fait jusqu'à présent, sur une variété de drapeaux associée à un fibré vectoriel, considérer un produit de telles variétés de drapeaux, pour obtenir des théorèmes d'annulation pour des produits tensoriels de puissances extérieures (éventuellement, d'ailleurs, de fibrés vectoriels distincts). On n'obtiendrait cependant pas mieux que la proposition précédente, excepté dans le cas suivant: on note toujours E un fibré de rang d sur une variété complexe compacte de dimension n , et l'on considère sur

$$Y = G_{r_1}(E) \times \dots \times G_{r_m}(E), \quad 1 \leq r_1, \dots, r_m \leq d,$$

variété compacte de dimension $n + \sum_{i=1}^m r_i(d - r_i)$, le fibré en droites

$$\mathcal{L} = \pi_1^*(\det Q_1) \otimes \dots \otimes \pi_m^*(\det Q_m) \otimes \pi^* L,$$

où Q_i désigne le fibré quotient sur la grassmannienne $G_{r_i}(E)$, π_i la projection de cette variété sur X , et π la projection de Y sur X . La formule de Künneth, et le fait que le déterminant du fibré quotient sur la grassmannienne n'ait de cohomologie qu'en bidegré $(0, 0)$, impliquent que

$$R_{\pi_*}^j(\Omega_Y^p \otimes \mathcal{L}) = \delta_{j,0} \Omega_X^p \wedge^{r_1} E \otimes \cdots \otimes \wedge^{r_m} E \otimes L,$$

d'où l'isomorphisme

$$H^{p,q}(Y, \mathcal{L}) = H^{p,q}(X, \wedge^{r_1} E \otimes \cdots \otimes \wedge^{r_m} E \otimes L).$$

Mais si E est ample et L nef, ou E nef et L ample, le fibré en droites \mathcal{L} est ample sur Y . De plus, $\Gamma^a E$ est une composante du produit tensoriel des puissances extérieures $\wedge^{a_1} E, \dots, \wedge^{a_m} E$, et le théorème de Kodaira-Nakano implique donc la

Proposition 1.8.2 *Sous les mêmes hypothèses,*

$$H^{p,q}(X, \Gamma^a E \otimes L) = 0 \quad \text{si} \quad p + q > n + \sum_{i=1}^d (d + 1 - 2i)a_i.$$

Ce résultat généralise celui que l'on a obtenu, pour les puissances symétriques du fibré quotient sur la grassmannienne, par des méthodes diagrammatiques. Notons cependant que, dans ce cas particulier, il perd beaucoup de sa portée quand augmente l'exposant de la puissance symétrique considérée. Pour pallier cet inconvénient, on pourra lorsque E est globalement engendré utiliser le lemme 1.5.4 pour obtenir le

Corollaire 1.8.1 *Soit E un fibré vectoriel de rang d , globalement engendré sur une variété X de dimension n , L un fibré en droites sur cette variété, et supposons que E est ample et L nef, ou que L soit ample. Alors*

$$H^{p,q}(X, S^k E \otimes L) = 0 \quad \text{si} \quad p > d(n - q), \quad k \geq 0.$$

Notons que ce résultat généralise le théorème 2.2 de [PLPS1]. De la même façon, le théorème 1.5.1 admet le corollaire suivant:

Corollaire 1.8.2 *Sous les mêmes hypothèses, et si $a \in \mathbb{N}_{\geq}^d$, alors*

$$H^{n-p, n-q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si} \quad p \leq \frac{n - 2q}{q + 1} \quad \text{et} \quad l \geq h(a).$$

Preuve: De même que pour les puissances extérieures, la règle de Littlewood-Richardson permet de montrer que $\Gamma^a E$ est un facteur de $S^{|a|}(E^{\oplus m})$ si et seulement si $m \geq h(a)$. Il suffit donc d'appliquer le théorème 1.5.1 au fibré vectoriel $E^{\oplus h(a)}$, et à $L \otimes (\det E)^{l-h(a)}$.

♣

1.9 Quelques remarques sur les sous-variétés de l'espace projectif

Signalons que le théorème 1.1.1 permet de généraliser très directement les théorèmes d'annulation obtenus par Schneider ([Sch3]) pour les puissances symétriques du fibré cotangent d'une variété complexe compacte X , plongée dans un espace projectif \mathbb{P}^m . Ces résultats sont une conséquence presque immédiate des suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow T_X \longrightarrow T_{\mathbb{P}^m|X} \longrightarrow N \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus(m+1)} \longrightarrow T_{\mathbb{P}^m|X} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

où N désigne le fibré normal, qui est ample et même tel que $N \otimes \mathcal{O}_X(-1)$ soit globalement engendré. En effet, la première de ces suites exactes fournit une résolution des puissances symétriques du cotangent de X , par des fibrés vectoriels dont la seconde suite exacte et le théorème 1 permettent d'annuler la cohomologie de Dolbeault. On en déduit aisément la généralisation suivante du troisième théorème de [Sch3]:

Proposition 1.9.1 *Soit X une variété complexe compacte, plongée dans un espace projectif. Alors*

$$H^{p,q}(X, S^k \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_X(m)) = 0 \quad \text{si } k > m + 1 \text{ et } p + q < \dim X - (p + 1)\text{codim} X.$$

On peut cependant s'attendre à ce que le fibré normal, dont on notera le rang $r = \text{codim} X$, obéisse à des théorèmes d'annulation plus restrictifs que la généralité des fibrés amples, phénomène dont nous allons donner quelques exemples.

Lemme 1.9.1 $H^{p,q}(X, (T\mathbb{P}^m|_X)^{\otimes t} \otimes N \otimes \mathcal{O}_X(s)) = 0$ si $s \geq 0$ et $p + q \geq n + r$, ou $s > 0$, $p = n$ et $q > 0$.

Preuve: Supposons tout d'abord $t = 0$. Pour $s \geq 0$, le résultat annoncé est une conséquence du théorème de Le Potier. Pour $s > 0$, la suite exacte

$$0 \longrightarrow T_X \otimes \mathcal{O}_X(s) \longrightarrow T\mathbb{P}^m|_X \otimes \mathcal{O}_X(s) \longrightarrow N \otimes \mathcal{O}_X(s) \longrightarrow 0$$

et le théorème de Kodaira-Nakano impliquent que $H^{n,q}(X, T\mathbb{P}^m|_X \otimes \mathcal{O}_X(s))$ s'envoie surjectivement sur $H^{n,q}(X, N \otimes \mathcal{O}_X(s))$ si $q > 0$, et la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(s) \longrightarrow \mathcal{O}_X(s+1)^{\oplus(m+1)} \longrightarrow T\mathbb{P}^m|_X \otimes \mathcal{O}_X(s) \longrightarrow 0$$

implique de même que

$$H^{n,q}(X, T\mathbb{P}^m|_X \otimes \mathcal{O}_X(s)) = 0 \quad \text{si } q > 0.$$

On conclut par récurrence sur t via les suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow (TP^m)_{|X}^{\otimes t} \otimes \mathcal{O}_X(s) &\longrightarrow (TP^m)_{|X}^{\otimes t} \otimes \mathcal{O}_X(s+1)^{\oplus(m+1)} \longrightarrow \\ &\longrightarrow (TP^m)_{|X}^{\otimes(t+1)} \otimes \mathcal{O}_X(s) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On déduira de ce lemme quelques propriétés cohomologiques simples des puissances symétriques du fibré normal:

Proposition 1.9.2 *Si $q \geq r$, on a*

$$H^{n,q}(X, S^k N \otimes N) = H^{n-1,q+1}(X, S^k N) = 0.$$

Preuve: La suite exacte qui définit le fibré normal donne lieu à des suites exactes analogues pour chacune de ses puissances symétriques:

$$0 \longrightarrow E_{k,k} = \wedge^k T_X \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_{j,k} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_{0,k} = S^k TP_{m|X} \longrightarrow S^k N \longrightarrow 0,$$

où l'on a noté $E_{j,k} = S^{k-j} TP_{m|X} \otimes \wedge^j T_X$. D'après le lemme précédent,

$$H^{n,q}(X, E_{j,k} \otimes N) = 0 \quad \text{si } q \geq r,$$

ce dont il est facile de déduire, en découpant par exemple la suite exacte précédente en suites exactes à trois termes, que si $q \geq r$,

$$H^{n,q}(X, S^k N \otimes N) = H^{n-k,q+k}(X, N),$$

ce dernier groupe étant nul d'après le théorème de Le Potier.

Le fibré $S^k N$ étant une composante de $S^{k-1} N \otimes N$, il s'ensuit que $H^{n,q}(X, S^k N) = 0$ si $q \geq r$ et $k > 0$, résultat dû à Faltings. D'autre part, la suite exacte

$$0 \longrightarrow T_X \otimes S^k N \longrightarrow TP_{|X}^m \otimes S^k N \longrightarrow S^k N \otimes N \longrightarrow 0$$

implique que si $q \geq r$,

$$H^{n-1,q+1}(X, S^k N) = H^{n,q+1}(X, TP_{|X}^m \otimes S^k N),$$

et la suite exacte du fibré tangent à l'espace projectif, conjuguée au résultat de Faltings que nous venons de redémontrer, permet aisément de montrer que ce dernier groupe de cohomologie est nul sous l'hypothèse faite sur q . ♣

On peut procéder de même dans le cas où les puissances symétriques du fibré normal sont tensorisées par le fibré $\mathcal{O}(-1)$. En effet ([PLPS1]), le fibré normal vérifie le théorème d'annulation suivant:

$$H^{p,q}(X, N(-1)) = 0 \quad \text{si } p + q \geq 2m - n - 1.$$

Les groupes $H^{n,q}(X, E_{j,k} \otimes N(-1))$ s'annulent donc pour $q \geq 2m - 2n + j - 1$, ce dont il est facile de déduire le résultat suivant:

Proposition 1.9.3 *Soit X une sous-variété de \mathbb{P}^m de dimension n , soit N son fibré normal. Alors*

- $H^{n,q}(X, S^k N \otimes \mathcal{O}_X(-1)) = 0$ si $k \geq 1, q \geq 2m - 2n - 1$;
- $H^q(X, \mathcal{O}_X(1)) = 0$ si $1 \leq q \leq 3m - 2n$.

Preuve: La première assertion résulte directement de ce qui précède, en procédant comme dans la démonstration de la proposition précédente. Pour ce qui est de la seconde, il résulte des idées de Faltings, reprises par Le Potier, Peternell et Schneider, que le groupe de cohomologie $H^q(X, \mathcal{O}_X(1)) = 0$ est nul, pour q compris entre 1 et $2n - m$, dès que

$$H^{q+1}(X, I_X^k / I_X^{k+1} \otimes \mathcal{O}_X(1)) = 0 \text{ pour } k \geq 1.$$

Or $I_X^k / I_X^{k+1} = S^k N^*$, donc le groupe de cohomologie précédent correspond dans la dualité de Serre au groupe $H^{n, n-q-1}(X, S^k N(-1))$, qui est nul pour $n - q - 1 \geq 2m - 2n - 1$, soit $q \leq 3n - 2m$. ♣

Remarque: La deuxième partie de cette proposition a été "démontrée" par Faltings sous l'hypothèse, ô combien illusoire, d'une dégénérescence en E_1 de la suite spectrale de Borel- Le Potier. Peternell, Le Potier et Schneider, corrigeant l'article de Faltings, ne purent établir proprement l'annulation des groupes $H^q(X, \mathcal{O}_X(1))$ qu'en codimension deux, pour q compris entre un et $\frac{m-5}{2}$. En codimension supérieure, Alzati et Ottaviani ([A-O]) ont démontré cette même annulation sous les conditions $1 \leq q \leq 3n - 2m$ et $n - q - 1 \leq C_{m-n+q}^{q+1}$.

On peut également démontrer des résultats du même genre pour les puissances extérieures du fibré normal.

Proposition 1.9.4 *Si $k > 0$ et $q > r - k$, on a*

$$H^{n,q}(X, \wedge^k N \otimes N) = H^{n-1, q+1}(X, \wedge^k N) = 0.$$

Preuve: Posons $Y = \mathbb{P}(E^*)$, et notons π la projection naturelle de Y sur X . Il est bien connu que si $p = n + k - 1$,

$$R_{\pi_*}^q(\Omega_{Y/X}^{p-t} \otimes \mathcal{O}_N(k)) = \delta_{q,0} \delta_{t,n} \wedge^k N,$$

ce qui permet de démontrer, en degré maximal, le théorème de Le Potier pour les puissances extérieures d'un fibré ample quelconque. Si $p = n + k - 2$, on vérifie de même que

$$R_{\pi_*}^q(\Omega_{Y/X}^{p-t} \otimes \mathcal{O}_N(k)) = \delta_{q,0}[\delta_{t,n-1} \wedge^k N \oplus \delta_{t,n} Z^{k-2,k} N].$$

Les groupes de cohomologie $H^{p,q}(Y, \mathcal{O}_N(k))$ sont donc l'aboutissement d'une suite spectrale de Borel-Le Potier dont les termes d'ordre un sont les groupes

$$\begin{aligned} {}^p E_1^{n-1,q-n} &= H^{n-1,q-1}(X, \wedge^k N), \\ {}^p E_1^{n,q-n} &= H^{n,q}(X, Z^{k-2,k} N). \end{aligned}$$

Cette suite spectrale dégénère donc en E_2 , et le théorème de Kodaira-Nakano implique l'isomorphisme

$$H^{n-1,q+1}(X, \wedge^k N) = H^{n,q+2}(X, Z^{k-2,k} N) \quad \text{si } q > r - k.$$

D'autre part, la suite exacte

$$0 \longrightarrow T_X \otimes \wedge^k N \longrightarrow T\mathcal{P}_{m|X} \otimes \wedge^k N \longrightarrow \wedge^k N \otimes N \longrightarrow 0$$

et la suite exacte du tangent à l'espace projectif impliquent, via le théorème de Le Potier pour les puissances extérieures de N , que

$$H^{n,q}(X, \wedge^k N \otimes N) = H^{n-1,q+1}(X, \wedge^k N) \quad \text{si } q > r - k.$$

Notons enfin que $\wedge^{k-1} N \otimes N = \wedge^k N \oplus Z^{k-2,k} N$, et que la cohomologie du premier terme du membre de droite de cette inégalité est nulle en bidegré (n, q) tel que $q > r - k$. On a donc finalement démontré l'identité, si $q > r - k$,

$$H^{n,q}(X, \wedge^k N \otimes N) = H^{n,q+2}(X, \wedge^{k-1} N \otimes N).$$

Cette identité implique bien, par une récurrence évidente, la première partie de la proposition, et l'identité précédente permet d'en déduire la seconde. ♣

Les deux propositions précédentes appellent naturellement les deux questions suivantes:

- Le fibré normal vérifie-t-il la conjecture de Sommese? Autrement dit, a-t-on

$$H^{p,q}(X, \wedge^k N) = 0 \quad \text{si } p + q > n + r - k?$$

- Ses puissances symétriques vérifient-elles le théorème d'annulation démontré par Faltings en degré maximal? Autrement dit, a-t-on

$$H^{p,q}(X, S^k N) = 0 \quad \text{si } p + q \geq n + r?$$

Insistons sur le fait que ces deux propriétés, que nous venons d'établir pour $p = n - 1$, ne sont pas vérifiées, en général, pour les fibrés amples (de même que les deux propositions précédentes). Enfin, notons qu'il est possible de vérifier que l'on a bien

$$H^{n-2,q+2}(X, \wedge^2 N) = 0 \quad \text{si } q > r - 2;$$

mais nous n'avons pu faire mieux.

2 Théorèmes d'annulation pour les fibrés associés à un fibré ample

2.1 Introduction

L'objet principal de ce chapitre est à la fois de préciser et de généraliser, au moins partiellement, un théorème d'annulation établi par J.P.Demailly ([De1], théorèmes 0.2 et 0.3) pour un fibré ample sur une variété complexe compacte, selon lequel:

Théorème (Demailly) *Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang d , L un fibré en droites sur une variété complexe compacte X de dimension n , tels que E soit ample et L semi-ample, ou E semi-ample et L ample. Alors si $a \in \mathbb{N}_{\geq}^d$,*

$$\begin{aligned} a. & \ H^{n,q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si } q > 0 \text{ et } l \geq h(a); \\ b. & \ H^{p,q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si } \begin{cases} p + q > n, \\ l \geq d - 1 + n - p. \end{cases} \end{aligned}$$

La première partie de cet énoncé ne semble guère pouvoir être améliorée ([De1], exemple 0.5), mais la seconde pose le problème de l'exposant optimal du déterminant de E assurant l'annulation du groupe de cohomologie de Dolbeault précédent, en fonction du bidegré (p, q) et du poids $a \in \mathbb{N}_{\geq}^d$.

Dans [De2], le théorème d'annulation précédent est démontré, lorsque E est supposé positif au sens de Griffiths (hypothèse a priori plus forte que l'amplitude), lorsque $l \geq h(a) + A(n, p, q)$, où $A(n, p, q)$ est une constante ne dépendant que de n, p et q . D'autre part, il est facile de vérifier que la borne $l \geq d - 1 + \min(n - p, n - q)$ convient si la suite spectrale de Borel-Le Potier est supposée dégénérée en E_2 pour les fibrés en droites amples définis sur les variétés de drapeaux des fibrés vectoriels considérés: la borne $l \geq h(a) + \min(n - p, n - q)$ est donc suggérée dans [De3] pour les fibrés amples, et nous avons par exemple vérifié dans la première partie de cette thèse qu'elle convenait pour le cas où E est un fibré quotient sur une grassmannienne, et L son fibré déterminant. Nous avons toutefois montré, au dernier chapitre de la première partie, que cette hypothèse de dégénérescence n'était en général pas vérifiée, ce qui complique considérablement la situation.

Notre résultat principal permet cependant de confirmer en partie la conjecture de [De3]:

Théorème 2.1.1 *Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang d , L un fibré en droites sur une variété complexe compacte X de dimension n , tels que E soit ample et L nef, ou E nef et L ample. Alors si $a \in \mathbb{N}_{\geq}^d$, et $p \geq n - 20$,*

$$H^{p,q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si } \begin{cases} l \geq h(a) + n - p, \\ p + q > n. \end{cases}$$

Nous généraliserons également la première partie du théorème de Demailly sous une forme qui englobe l'essentiel des théorèmes d'annulation connus pour les fibrés vectoriels amples en degré maximal, à savoir aussi bien celui de Griffiths pour leurs puissances symétriques ([Gr]), que celui de Le Potier pour leurs puissances extérieures ([LP1]), ou la généralisation qu'en ont donné Ein et Lazarsfeld ([EL]):

Théorème 2.1.2 *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, si a et $u \in \mathbb{N}_{\geq}^d$, si $d \geq h(a) + h(u)$, et si χ est la permutation définie par $\chi(i) = d + 1 - i$, $1 \leq i \leq d$, on a*

$$H^{n,q}(X, \Gamma^{a-\chi(u)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si } l \geq h(a) + u_1 \text{ et } q > |u|.$$

Nous donnerons d'ailleurs (Théorème 2.5.3) une version de ce théorème en degré non nécessairement maximal (mais généralement proche de n), qui admet le corollaire suivant:

Corollaire 2.1.1 *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on a*

1. $H^{p,q}(X, S^k E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$ si $\begin{cases} l \geq n - p + 1, \\ p + q > n, \end{cases}$ et $p \geq n - 20$.
2. $H^{p,q}(X, \wedge^k E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$ si $\begin{cases} l \geq n - p + k, \\ p + q > n, \end{cases}$ et $p \geq n - 20$.
3. $H^{p,q}(X, \wedge^k E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$ si $\begin{cases} l \geq n - p, \\ p + q > n + d - k, \end{cases}$ et $p \geq n - 10$.

Le premier de ces énoncés généralise le théorème de Griffiths, alors que le troisième généralise le premier théorème de Le Potier: on peut d'ailleurs voir dans ce résultat une alternative à la conjecture de Sommese ([So]), que Schneider et Demailly ([De1]) ont prouvée n'être pas vérifiée (le théorème 1 du chapitre précédent donnait d'ailleurs une autre alternative à cette conjecture, qui ne fait pas intervenir le déterminant de E). Notons que le contre-exemple de Demailly, à savoir l'existence d'un fibré ample de rang $d \geq 2$ sur une variété de dimension $n = 2d$, tel que

$$H^{n-1, n-3}(X, \wedge^2 E) \neq 0,$$

implique que la borne donnée pour l est en l'occurrence optimale pour $p = n - 1$. C'est, malheureusement, à peu près le seul cas pour lequel nous puissions nous prononcer à ce sujet.

Les méthodes utilisées dans ce chapitre sont proches de celles développées par Jean-Pierre Demailly dans [De1]. On sait par exemple, après les travaux de Bott ([B]), que chaque fibré $\Gamma^a E \otimes (\det E)^l$ se réalise si $l \geq h(a)$ comme l'image directe d'un fibré

en droites ample sur une variété de drapeaux associée à E ([Del]). Notre idée essentielle consiste à montrer qu'un fibré $\Gamma^{a-x(u)}E \otimes (\det E)^l$ apparaît, si $l \geq h(a) + u_1$, comme l'image directe du produit tensoriel d'un fibré en droite ample sur une variété de drapeaux, par une puissance extérieure de son fibré cotangent (Proposition 2.4.1). Ceci permet de relier les groupes de cohomologie que l'on souhaite annuler, à des groupes de cohomologie de Dolbeault de ce fibré en droites ample, auxquels on pourra appliquer le théorème d'annulation de Kodaira-Nakano, via une suite spectrale de Borel-Le Potier dont les termes d'ordre un seront eux-mêmes déterminés par une suite spectrale de Leray. Toute la difficulté consiste alors, pour conclure, à montrer que nos conditions d'annulation "passent à travers" les suites spectrales impliquées.

L'isomorphisme établi par la proposition 2.4.1 repose sur le calcul de certains groupes de cohomologie de Dolbeault de fibrés en droites homogènes sur des variétés de drapeaux d'un espace vectoriel complexe. Malgré le théorème de Bott, la détermination de ces groupes est malheureusement très délicate (excepté dans le cas des grassmanniennes, pour lequel on dispose des méthodes diagrammatiques développées dans la première partie de cette thèse), du fait de la structure assez opaque du fibré tangent d'une variété de drapeaux générale.

Nous avons dû faire usage des filtrations des puissances extérieures de ce fibré tangent introduites par la section 1.2.2 de la première partie de cette thèse, faire intervenir les propriétés remarquables des représentations du groupe linéaire qui ont fait l'objet de la section 1.1 de cette même partie, et utiliser le fait que ces groupes de cohomologie interviennent dans des suites spectrales de Borel-Le Potier que l'on sait par ailleurs préciser (section 2.3), pour mener ces calculs à bien, sous certaines conditions qui sont responsables des conditions artificielles que nous avons dû introduire sur p dans les énoncés qui précèdent.

Il serait bien évidemment très souhaitable de savoir expliciter en toute généralité ces groupes de cohomologie de Dolbeault des fibrés en droites homogènes sur les variétés de drapeaux. Cette généralisation du théorème de Bott reste cependant hors de notre portée.

2.2 Rappels

Soit $M_s(V)$ une variété de drapeaux, de dimension N_s , d'un espace vectoriel complexe V de dimension d , sur laquelle sont définis les fibrés vectoriels homogènes E_i , avec $1 \leq i \leq m$, de rang $s_i - s_{i-1}$: au-dessus d'un drapeau

$$D = (V_{s_m} = 0 \subset \cdots \subset V_{s_0} = V),$$

la fibre de E_i n'est autre que le quotient $V_{s_{i-1}}/V_{s_i}$.

Rappelons que le fibré $\wedge^\pi TM_s(V)$, puissance extérieure π -ième du fibré tangent de cette variété, admet une filtration, qu'on notera (\mathcal{F}^π) , équivariante sous l'action du

groupe linéaire $Gl(V)$, dont le fibré quotient gradué associé s'écrit

$$(Q_s^p)^* = \bigoplus_{\sum_{i < j} |u_{ij}| = \pi} \bigotimes_{i < j} \Gamma^{u_{ij}} E_i \otimes \Gamma^{-x(u_{ij})} E_j.$$

On utilisera cette filtration de $\wedge^\pi TM_s(V)$ pour filtrer de la même manière le fibré $\Omega_{M_s(V)}^{N_s - \pi}$ des $(N_s - \pi)$ -formes holomorphes, selon l'isomorphisme

$$\Omega_{M_s(V)}^{N_s - \pi} = K_{M_s(V)} \otimes \wedge^\pi TM_s(V).$$

Rappelons également que $K_{M_s(V)} = Q_s^{\kappa(s)}$, avec

$$\kappa(s) = \sum_{i=1}^m (s_i + s_{i-1} - d) 1_{s_{i-1}+1, s_i}.$$

La cohomologie des différents produits dont $(Q_s^p)^*$ est la somme peut être calculée par la variante suivante du théorème de Bott, qui généralise le corollaire 2.1.2 de la première partie, et se démontre exactement de la même façon (δ désigne le symbole de Kronecker):

Proposition 2.2.1 *Etant donnés des poids décroissants $a^i \in \mathbb{Z}^{s_i - s_{i-1} - 1}$, $1 \leq i \leq m$, soit $a = (a^1, \dots, a^m) \in \mathbb{Z}^d$. Alors*

$$H^q(M_s(V), \bigotimes_{i=1}^m \Gamma^{a^i} E_i) = \delta_{q, i(a)} \Gamma^{\xi(a)} V.$$

Rappelons que $i(a)$ est le nombre d'inversions de l'ordre dans le d -uplet $a - c(d)$, avec $c(d) = \sum_{i=1}^d i 1_i$, et que $\xi(a) = (a - c(d)) \geq + c(d)$. On utilisera très régulièrement le fait que $\xi(a)$ est décroissant, condition nécessaire à ce que les groupes de cohomologie précédents ne soient pas nuls, si et seulement si $a - c(d)$ est régulier, autrement dit admet des composantes deux à deux distinctes.

Enfin, on déduira des propriétés cohomologiques du quotient de la filtration (\mathcal{F}^π) de $\wedge^\pi TM_s(V)$ certaines propriétés cohomologiques de $\Omega_{M_s(V)}^{N_s - \pi}$ par l'intermédiaire du lemme usuel suivant:

Lemme 2.2.1 *Considérons une filtration (\mathcal{F}) d'un fibré \mathcal{E} sur une variété de drapeaux $M_s(V)$, et notons \mathcal{Q} le fibré quotient associé. Alors*

1. *Supposons que $H^q(M_s(V), \mathcal{Q}) = 0$ si $q \geq q_0$, alors $H^q(M_s(V), \mathcal{E}) = 0$ si $q \geq q_0$.*
2. *Supposons le fibré \mathcal{E} et la filtration (\mathcal{F}) équivariantes sous l'action de $Gl(V)$: ceci permet d'écrire*

$$\begin{cases} H^q(M_s(V), \mathcal{Q}) &= \bigoplus_v \hat{\nu}(v, q) \Gamma^v V, \\ H^q(M_s(V), \mathcal{E}) &= \bigoplus_v \nu(v, q) \Gamma^v V. \end{cases}$$

Alors si $\hat{\nu}(v, q) = 0$ lorsque $q \geq q_0(v)$, $\nu(v, q) = 0$ si $q \geq q_0(v)$.

3. Avec les notations précédentes, $\sum_q (-1)^q \nu(v, q) = \sum_q (-1)^q \hat{\nu}(v, q)$.

Preuve:

1. Si $H^q(M_s(V), \mathcal{Q}) = 0$ pour $q \geq q_0$, notons $\mathcal{G}_i = \mathcal{F}_i / \mathcal{F}_{i+1}$ les quotients de la filtration (\mathcal{F}) , de sorte que $\mathcal{Q} = \bigoplus_i \mathcal{G}_i$. Alors $H^q(M_s(V), \mathcal{G}_i) = 0$ si $q \geq q_0$ pour tout entier i , de sorte que les suites exactes longues de cohomologie associées aux suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{i+1} \longrightarrow \mathcal{F}_i \longrightarrow \mathcal{G}_i \longrightarrow 0$$

impliquent par récurrence sur i que $H^q(M_s(V), \mathcal{F}_i) = 0$ si $q \geq q_0$ pour tout i . En particulier, comme $\mathcal{F}_0 = \mathcal{E}$, $H^q(M_s(V), \mathcal{E}) = 0$ si $q \geq q_0$.

2. Si \mathcal{E} et la filtration (\mathcal{F}) sont équivariantes sous l'action de $Gl(V)$, chaque groupe de cohomologie $H^q(M_s(V), \mathcal{F}_i)$ est un $Gl(V)$ -module, et le lemme de Schur permet de reproduire le raisonnement précédent pour chaque composante isotypique.
3. Notons $\nu(\mathcal{F}, v, q)$ la multiplicité de $\Gamma^v V$ dans $H^q(M_s(V), \mathcal{F})$. Alors, de même que la somme alternée des dimensions des groupes de cohomologie d'une suite exacte longue est nulle, le lemme de Schur implique ici que

$$\sum_q (-1)^q \nu(\mathcal{F}_i, v, q) = \sum_q (-1)^q \nu(\mathcal{F}_{i+1}, v, q) + \sum_q (-1)^q \nu(\mathcal{G}_i, v, q),$$

et la somme alternée $\sum_q (-1)^q \nu(v, q)$ peut par conséquent s'écrire,

$$\sum_q (-1)^q \nu(\mathcal{F}_0, v, q) = \sum_i \sum_q (-1)^q \nu(\mathcal{G}_i, v, q) = \sum_q (-1)^q \hat{\nu}(v, q). \clubsuit$$

2.3 Un exemple de non-annulation

On met en évidence, dans ce paragraphe, certains groupes de cohomologie non nuls de fibrés vectoriels amples sur des variétés de drapeaux. Ces groupes non nuls, étant de degré maximal, nous permettront d'obtenir différentes propriétés de certains groupes de cohomologie de Dolbeault de fibrés en droites homogènes sur d'autres variétés de drapeaux.

Proposition 2.3.1 *Soit $v \in \mathbb{N}_{\geq}^d$. Alors si l et h sont des entiers compris entre 1 et $d - h(v)$, il existe une variété complexe compacte X_v , munie d'un fibré vectoriel globalement engendré E de rang d , et d'un fibré en droites ample L , qui pour chaque d -uplet $b \in \mathbb{N}_{\geq}^d$ tel que $h(b) \leq h$ vérifie les propriétés suivantes:*

1. $H^{n,q}(X_v, \Gamma^{b-x(v)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$ si et seulement si $q \neq |v|$,

2. $H^{n,q}(X_v, \Gamma^{b-\chi(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$ pour tout $q \geq 0$ si $|w| \leq |v|$ et $w \neq v$.

Remarque 2.1: Comme au lemme 1.1.3 de la première partie, l'hypothèse $h(b) \leq h \leq d - h(v)$ implique que les poids b et $-\chi(v)$ ont des composantes non nulles disjointes.

Preuve: Notons $s(v^*) = (0, s_1, \dots, s_m)$, et posons

$$\sigma = (0, d + s(v^*)) = (0, d, d + s_1, \dots, d + s_m).$$

Soit $X_v = M_\sigma(V)$, où V est un espace vectoriel complexe de dimension $d + s_m$, variété sur laquelle est défini le fibré vectoriel homogène, de rang d , $E = E_1$. Ce fibré est globalement engendré sur X_v puisque quotient d'un fibré trivial. On supposera de plus que $L = Q_\sigma^c$ est un fibré en droites homogène ample sur X_v : autrement dit, le poids c est supposé strictement décroissant relativement à σ ; ses composantes seront précisées ultérieurement.

1. Appliquons le théorème de Bott au calcul des groupes

$$H^{n,q}(X_v, \Gamma^{b-\chi(v)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = H^q(M_\sigma(V), \Gamma^{b-\chi(v)} E \otimes (\det E)^l \otimes Q_\sigma^{c+\kappa(\sigma)}).$$

Le poids du fibré canonique $K_{M_\sigma(V)}$ est ici

$$\begin{aligned} \kappa(\sigma) &= -s_m \mathbf{1}_{1,d} + \sum_{i=1}^m (d + s_{i-1} + s_i - s_m) \mathbf{1}_{d+s_{i-1}+1, d+s_i} \\ &= -s_m \mathbf{1} + \sum_{i=1}^m (d + s_{i-1} + s_i) \mathbf{1}_{d+s_{i-1}+1, d+s_i}, \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$H^{n,q}(X_v, \Gamma^{b-\chi(v)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = H^q(M_\sigma(V), \otimes_{i=1}^{m+1} \Gamma^{b^i(v)} E_i) \otimes (\det V)^{-s_m},$$

avec $b(v) = (b^1(v), \dots, b^{m+1}(v)) = (b + l\mathbf{1} - \chi(v), 0, \dots, 0) + c + \kappa(\sigma) + s_m \mathbf{1}$. Comme b et $-\chi(v)$ ont des composantes non nulles disjointes, ce poids peut s'écrire

$$\begin{aligned} b(v) &= \underbrace{(b + (l + c_d)\mathbf{1})}_{h(b)}, \underbrace{l + c_d}_{d-h(b)-t_m}, \underbrace{l + c_d - v_{t_m}}_{t_m-t_{m-1}}, \dots, \underbrace{l + c_d - v_{t_1}}_{t_1}, \\ &\quad \underbrace{d + c_{d+s_1} + s_1}_{s_1}, \dots, \underbrace{d + c_{d+s_m} + s_{m-1} + s_m}_{s_m-s_{m-1}}, \end{aligned}$$

où l'on a noté $s(v) = (0, t_1, \dots, t_m)$. Remarquons (se reporter au paragraphe 1.1.1 de la première partie) que $v_{t_i} = s_{m+1-i}$ et $v_{s_i}^* = t_{m+1-i}$, de sorte que si l'on pose

$$c_d - c_{d+s_i} = d - l + s_{i-1} + s_i - t_{m+1-i}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

c_d étant quelconque, alors

$$b(v) = (l + c_d)\mathbf{1} + \left(\underbrace{b}_{h(b)}, \underbrace{0}_{d-h(b)-t_m}, \underbrace{-s_1}_{t_m-t_{m-1}}, \dots, \underbrace{-s_m}_{t_1}, \underbrace{t_m}_{s_1}, \dots, \underbrace{t_1}_{s_m-s_{m-1}} \right).$$

On obtient donc pour $b(v) - (l + c_d - d)\mathbf{1} - c(d + s_m)$ l'expression suivante:

$$\underbrace{(b + d\mathbf{1} - c(h(b)), d - h(b) - 1, \dots, t_m}_{h(b)}, \underbrace{t_m - s_1 - 1, \dots, t_{m-1} - s_1, \dots, t_1 - s_m - 1, \dots, -s_m}_{d-h(b)-t_m}, \underbrace{t_m - 1, \dots, t_m - s_1, \dots, t_1 - s_{m-1} - 1, \dots, t_1 - s_m}_{s_1, s_m - s_{m-1}}.$$

Les s_m dernières composantes de ce poids correspondent très précisément aux espaces laissés par ses $d - h(b)$ composantes précédentes: il est donc régulier, et contient $\sum_{i=1}^m (s_i - s_{i-1})t_{m+1-i}$, c'est-à-dire $|v|$ inversions. De plus, $\xi(b(v)) = b + (l + c_d)\mathbf{1}$, et le théorème de Bott, dans sa version du paragraphe précédent, implique que

$$H^{n,q}(X_v, \Gamma^{b-\chi(v)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = \delta_{q,|v|} \Gamma^b V \otimes (\det V)^{l+c_d-s_m}.$$

L'assertion 1 est donc démontrée, à condition de vérifier que L est ample, c'est-à-dire que c est strictement décroissant relativement à σ . Et l'on a bien

$$c_{d+s_i} - c_{d+s_{i+1}} = (t_{m+1-i} - t_{m-i}) + (s_{i+1} - s_{i-1}) > 0$$

si $i \geq 1$, et, si $l \leq d - h(v)$ (puisque $t_m = v_1^* = h(v)$),

$$c_d - c_{d+s_1} = d - l + s_1 - t_m \geq d - l + 1 - h(v) > 0.$$

2. Soit $w \in N_{\geq}^d$ tel que $|w| \leq |v|$. On pourra écrire comme précédemment le poids $b(w) - (l + c_d - d)\mathbf{1} - c(d + s_m)$, où $b(w) = (b + l\mathbf{1} - \chi(w), 0, \dots, 0) + c + \kappa(\sigma) + s_m\mathbf{1}$, sous la forme

$$\underbrace{(b - c(h(b)) + d\mathbf{1}, d - h(b) - 1, \dots, w_1^*, w_1^* - 1 - w_{w_1^*}, \dots, -w_1}_{h(b)}, \underbrace{t_m - 1, \dots, t_m - s_1, \dots, t_1 - s_{m-1} - 1, \dots, t_1 - s_m}_{d-h(b)-w_1^*, w_1^*}, \underbrace{t_m - 1, \dots, t_m - s_1, \dots, t_1 - s_{m-1} - 1, \dots, t_1 - s_m}_{s_1, s_m - s_{m-1}}.$$

Si ce poids est régulier, il contient nécessairement des inversions entre ses d premières composantes (dont certaines sont négatives) et ses s_m dernières composantes (dont certaines sont positives). En particulier, il doit exister un entier i tel que $i - w_{i+1} \geq t_m$. Mais alors a fortiori $i \geq t_m$, ce qui signifie qu'au moins t_m des d premières composantes admettent des inversions avec les s_m dernières: ces composantes correspondent alors à certains espaces entre composantes successives du poids $(t_m - 1, \dots, t_1 - s_m)$. Or on a vu que les t_m premiers espaces de ce poids correspondent exactement à ceux qui sont comblés lorsque $w = v$. Une récurrence immédiate implique donc ici, si $b(w) - c(d + s_m)$ est régulier, que $w_i \geq v_i$ pour tout entier i compris entre 1 et $t_m = v_1^*$. Mais alors $|w| > |v|$ si w est distinct de v . ♣

Proposition 2.3.2 *Sous les mêmes hypothèses que pour la proposition précédente, si $n - \max(10, 20 - |v|) \leq p < n$, et $d - h(b) \geq h(v) + n - p$, alors*

$$H^{p,q}(X_v, \Gamma^{b-\chi(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$$

si $p + q \geq n + |w|$, où $w \in \mathbb{N}_{\geq}^d$ est tel que $h(b) + h(w) \leq d$.

Preuve: Soit $p < n$, et posons $\pi = n - p$, de sorte que

$$\begin{aligned} H^{p,q}(X_v, \Gamma^{b-\chi(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) \\ = H^q(X_v, \Gamma^{b-\chi(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes Q_{\sigma}^{c+\kappa(\sigma)} \otimes \wedge^{\pi} T X_v). \end{aligned}$$

Soit \mathcal{G} l'un des produits tensoriels du quotient de la filtration (\mathcal{F}^{π}) de $\wedge^{\pi} T X_v$:

$$\mathcal{G} = \bigotimes_{1 \leq i < j \leq m+1} \Gamma^{u_{ij}^*} E_i \otimes \Gamma^{-\chi(u_{ij})} E_j,$$

où chaque u_{ij} est un poids positif décroissant, et $\sum_{1 \leq i < j \leq m+1} |u_{ij}| = \pi$.

Notons de plus $\Gamma^{\beta+l\mathbf{1}} E \otimes \Gamma^{\gamma^2} E_2 \otimes \dots \otimes \Gamma^{\gamma^{m+1}} E_{m+1}$ une composante de $\Gamma^{b-\chi(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes \mathcal{G}$. Les produits tensoriels sur E, E_2, \dots, E_{m+1} s'effectuant séparément, $\Gamma^{\beta} E$ est donc une composante de $\Gamma^{b-\chi(w)} E \otimes (\bigotimes_{j=2}^{m+1} \Gamma^{u_{ij}^*} E)$: chacun des poids u_{ij}^* , étant positif, le lemme 1.1.3 de la première partie implique que la partie négative de β soit plus petite que celle de $b - \chi(w)$. Autrement dit, si l'on écrit

$$\beta = (\underbrace{\tilde{\beta}}_{\tilde{h}}, \underbrace{-\chi(\tilde{w})}_{d-\tilde{h}}),$$

où $\tilde{\beta}$ et \tilde{w} sont positifs et $\tilde{h} = h(\tilde{\beta})$, alors pour tout entier i compris entre 1 et $d - \tilde{h}$, on a $0 \leq \tilde{w}_i \leq w_i$ (et de la même façon, $\tilde{\beta}_j \geq b_j$), donc en particulier $|\tilde{w}| \leq |w|$. Notons γ le poids $(\gamma^2, \dots, \gamma^{m+1})$; le poids $(\beta + l\mathbf{1}, \gamma) + c + \kappa(\sigma) + s_m \mathbf{1}$ se déduit alors de $b(v)$ en changeant b en $\tilde{\beta}$ et w en \tilde{w} pour ce qui est de ses d premières composantes, et en ajoutant γ à ses s_m dernières composantes: on obtient ainsi l'expression

$$(l + c_d)\mathbf{1} + (\underbrace{\tilde{\beta}}_{\tilde{h}}, \underbrace{0}_{d-\tilde{h}-\tilde{w}_1^*}, -\tilde{w}_{\tilde{w}_1^*}, \dots, -\tilde{w}_1, t_m + \gamma_1, \dots, t_1 + \gamma_{s_m}).$$

On en déduit, en tenant compte des identités $t_i = v_{s_m+1-i}^*$, l'expression suivante du poids $\theta = (\beta + l\mathbf{1}, \gamma) + c + \kappa(\sigma) - (l + c_d - d - s_m)\mathbf{1} - c(d + s_m)$:

$$\begin{aligned} \theta = (\tilde{\beta} + d\mathbf{1} - c(\tilde{h}), d - \tilde{h} - 1, \dots, \tilde{w}_1^*, \tilde{w}_1^* - 1 - \tilde{w}_{\tilde{w}_1^*}, \dots, -\tilde{w}_1, \\ v_1^* + \gamma_1 - 1, \dots, v_{s_m}^* + \gamma_{s_m} - s_m). \end{aligned}$$

Lemme 2.3.1 Si $d - h \geq h(v) + \pi$, alors pour tout entier i compris entre 1 et s_m ,

$$d - \tilde{h} > v_i^* + \gamma_i - i.$$

Preuve: Rappelons que $\Gamma^{\tilde{\beta}-\chi(\tilde{w})}E \otimes \Gamma^{\gamma^2}E_2 \otimes \dots \otimes \Gamma^{\gamma^{m+1}}E_{m+1}$ est une composante de $\Gamma^{b-\chi(w)}E \otimes (\bigotimes_{1 \leq i < j \leq m+1} \Gamma^{u_{ij}^*}E_i \otimes \Gamma^{-\chi(u_{ij})}E_j)$. Or, d'après le lemme 1.1.3 de la première partie, la somme des composantes de la partie positive (respectivement négative) d'un produit tensoriel est majorée par la somme des composantes des parties positives (respectivement négatives) des poids de chacun des termes de ce produit: en l'occurrence,

$$|\tilde{\beta}| + \sum_{i=1}^{s_m} \gamma_i^+ \leq |b| + \sum_{i < j} |u_{ij}^*| = |b| + \pi,$$

où l'on a noté $\gamma_i^+ = \max(\gamma_i, 0)$. D'autre part, les inégalités $\tilde{\beta}_j \geq b_j$ impliquent que $\tilde{h} - h(b)$ ne peut excéder $|\tilde{\beta}| - |b|$. Par conséquent, pour tout entier i compris entre 1 et s_m ,

$$\tilde{h} - h(b) + \gamma_i \leq |\tilde{\beta}| - |b| + \gamma_i^+ \leq \pi,$$

et, a fortiori, si $d - h(b) \geq h(v) + \pi$,

$$d - \tilde{h} - \gamma_i \geq d - h(b) - \pi \geq h(v) = v_1^* > v_i^* - i. \clubsuit$$

Ce lemme implique que le poids θ , étant supposé régulier, ne présente aucune inversion faisant intervenir ses \tilde{h} premières composantes. Pour estimer le nombre de ses inversions, il suffira donc de distinguer celles qui se produisent entre ses s_m dernières composantes et les $d - \tilde{h}$ précédentes, que l'on appellera *inversions relatives*, et celles qui ont lieu à l'intérieur du groupe de ses s_m dernières composantes, que l'on appellera *inversions internes*.

Lemme 2.3.2 Le nombre des inversions relatives est inférieur à $|w|$.

Preuve: Ecrivons les $d - \tilde{h}$ composantes de $-\chi(\tilde{w})$ sous la forme

$$(\underbrace{0}_{x_0}, \underbrace{-1}_{x_1}, \dots, \underbrace{-\mu}_{x_\mu}).$$

On obtient alors pour les $d - \tilde{h} + s_m$ dernières composantes de θ , qui sont désormais les seules à nous intéresser, l'expression

$$(y_0 - 1, \dots, y_i - i + 1, y_i - i - 1, \dots, y_{\mu+1} - \mu, v_1^* + \gamma_1 - 1, \dots, v_{s_m} + \gamma_{s_m} - s_m),$$

où l'on a posé $y_i = x_i + \dots + x_\mu$. Si ce poids provient d'un poids régulier et admet des inversions relatives, il existe donc des entiers i_1, \dots, i_ρ , et une application injective ϕ de $\{1, \dots, \rho\}$ dans $\{1, \dots, \mu\}$, telle que si $1 \leq k \leq \rho$,

$$v_{i_k}^* + \gamma_{i_k} - i_k = y_{\phi(k)} - \phi(k).$$

Le nombre d'inversions relatives impliquant $v_{i_k}^* + \gamma_{i_k}$ est alors $y_{\phi(k)}$, et le nombre d'inversions total est par conséquent

$$\sum_k y_{\phi(k)} \leq \sum_{i=1}^{\mu} y_i = |\tilde{w}| \leq |w|. \clubsuit$$

Lemme 2.3.3 *Si $\pi > 0$, et si $\pi + |v| \leq 20$ ou $\pi \leq 10$, le nombre des inversions internes est strictement inférieur à π .*

Preuve: Le lecteur courageux pourra se reporter à l'Appendice pour la (pénible) démonstration de ce lemme essentiel.

Conclusion: D'après les deux lemmes qui précèdent et le théorème de Bott, chaque facteur \mathcal{G} du quotient de la filtration (\mathcal{F}^π) de $\wedge^\pi TX_v$ vérifie, si $n - \max(10, 20 - |v|) \leq p < n$ et $d - h \geq h(v) + \pi$,

$$H^q(X_v, \Gamma^{b-x(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes Q_\sigma^{c+\kappa(\sigma)} \otimes \mathcal{G}) = 0$$

si $q \geq |w| + \pi$; le lemme 2.2.1 implique donc que

$$H^{p,q}(X_v, \Gamma^{b-x(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$$

sous les conditions de la proposition 2.3.2, qui est donc démontrée. ♣

2.4 Cohomologie de Dolbeault des fibrés en droites sur les variétés de drapeaux

Soient $a, u \in \mathbb{N}_{\geq}^d$, avec $h(a) + h(u) \leq d$. Le premier objectif de ce paragraphe est de démontrer que si $d - h(a)$ est suffisamment grand, et si $l \geq h(a) + u_1$, il existe une variété de drapeaux $M_s(V)$ d'un espace vectoriel complexe de dimension d , et un fibré en droites Q_s^c ample sur cette variété, tels que la cohomologie de $\Omega_{M_s(V)}^p \otimes Q_s^c$ s'annule en degré p strictement supérieur à une valeur pour laquelle cette cohomologie fait précisément apparaître le $Gl(V)$ -module $\Gamma^{a-x(u)} V \otimes (\det V)^l$: c'est dans ce type de situation que la suite spectrale de Borel-Le Potier sera la plus commode à utiliser.

Supposons, pour donner une idée de ce qui va suivre, que $u = \mathbf{1}_1$, et que $M_s(V)$ et le poids c soient définis de telle manière que le poids $c + \kappa(s)$ soit égal à $a + l\mathbf{1} - \mathbf{1}_{h(a)+1}$. Pour calculer les groupes de cohomologie

$$H^{p,q}(M_s(V), Q_s^c) = H^q(M_s(V), Q_s^{c+\kappa(s)} \otimes \wedge^{n-p} TM_s(V)),$$

il s'agira, d'après le théorème de Bott et la filtration (\mathcal{F}^{n-p}) de $\wedge^{n-p} TM_s(V)$, de considérer les sommes régulières du poids $c + \kappa(s) - c(d)$ et des poids des différents facteurs du quotient de cette filtration. En l'occurrence, les $d - h(a)$ dernières composantes de $c + \kappa(s) - c(d) = a + l\mathbf{1} - \mathbf{1}_{h(a)+1} - c(d)$ peuvent être représentées selon le

schéma suivant (où elles le sont par des o, alors que celles de $l1 - c(d)$ le sont par des x, avec en l'occurrence $d - h(a) = 5$):



Celles d'indices $h(a) + 1$ et $h(a) + 2$ étant égales, le théorème de Bott implique que les groupes de cohomologie $H^{n,q}(M_s(V), Q_s^c)$ sont nuls. En degré $p = n - 1$, on devra ajouter au poids $c + \kappa(s) - c(d)$, d'après la forme du quotient de la filtration (\mathcal{F}^1) de $TM_s(V)$, des poids de la forme $1_{s_i+1} - 1_{s_j+1}$, avec $i < j$. Le seul d'entre eux qui permette d'obtenir un poids régulier est $1_{h(a)+1} - 1_d$, le poids associé étant $a + l1 - 1_d$, sans qu'aucune inversion ait été créée: on a donc démontré que

$$H^{n-1,q}(M_s(V), Q_s^c) = \delta_{q,0} \Gamma^{a-1_d} V \otimes (\det V)^l.$$

Pour généraliser ce type de résultat au cas d'un poids u quelconque, on devra faire face à deux difficultés. D'une part, les différents facteurs du quotient de la filtration (\mathcal{F}^{n-p}) de $\wedge^{n-p} TM_s(V)$ peuvent contribuer pour différentes valeurs de q : on utilisera les résultats de la section précédente pour démontrer que leur contribution totale est nulle en degré $q > 0$. D'autre part, pour déterminer cette contribution totale en degré $q = 0$, on devra recombinaison les contributions de ces différents facteurs: c'est alors le corollaire 1.1.1 de la première partie qui permettra d'aboutir.

Soient donc $a, u \in \mathbb{N}_{\geq}^d$ des poids tels que $d - h(a) \geq u_1 + u_1^*$ (ce qui implique, comme $u_1^* = h(u)$, que $h(a) + h(u) \leq d$). Si l'on note respectivement $s(a) = (\rho_0 = 0, \dots, \rho_{m-1} = h(a), \rho_m = d)$ et $s(-\chi(u^*)) = (\sigma_0 = 0, \dots, \sigma_p = u_1)$, on peut alors poser

$$\begin{aligned} s &= (s_0 = 0, s_1 = \rho_1, \dots, s_{m-1} = h(a), \\ &\quad s_m = h(a) + \sigma_1, \dots, s_{m+p-1} = h(a) + \sigma_p, s_{m+p} = d), \\ c &= a + l1 - \delta_{d-h(a)-u_1} \chi(u^*) - \kappa(s), \end{aligned}$$

où δ_t est l'opérateur de translation de t unités à gauche: cette dernière expression généralise celle que l'on a tenté de justifier pour $u = 1_1$, et $s = s(c)$.

Lemme 2.4.1 *c est strictement décroissant relativement à s , et sa dernière composante c_d est positive ou nulle si et seulement si $l \geq h(a) + u_1$.*

Preuve: Le poids $\kappa(s)$ est de la forme

$$\underbrace{(\dots)}_{h(a)}, \underbrace{2h(a) + \sigma_1 - d}_{\sigma_1}, \dots, \underbrace{2h(a) + \sigma_{p-1} + \sigma_p - d}_{\sigma_p - \sigma_{p-1}}, \underbrace{h(a) + \sigma_p}_{d - h(a) - \sigma_p};$$

en particulier, il est croissant, et strictement croissant relativement à s . De plus, $a - \delta_{d-h(a)-u_1}\chi(u^*)$ peut être scindé en deux parties décroissantes, celles de ses $h(a) + u_1$ premières et de ses $d - h(a) - u_1$ dernières composantes, de sorte que les deux parties correspondantes de c sont strictement décroissantes relativement à s . Reste à vérifier que la première domine strictement la seconde, ce qui équivaut à l'inégalité

$$c_{h(a)+u_1} = l - u_1^* - (2h(a) + \sigma_{p-1} + \sigma_p - d) > c_{h(a)+u_1+1} = l - (h(a) + u_1).$$

Comme $\sigma_{p-1} < \sigma_p = u_1$, cette inégalité est conséquence de l'hypothèse $d - h(a) \geq u_1 + u_1^*$. Enfin, $c_d = c_{h(a)+u_1+1} = l - h(a) - u_1$. \clubsuit

Proposition 2.4.1 *Supposons que $d - h(a) \geq |u| + u_1 + u_1^*$. Alors si V est un espace vectoriel complexe de dimension d ,*

1. $H^{p,q}(M_s(V), Q_s^c) = 0$ si $p > N_s - |u|$, $q \geq 0$,
2. $H^{N_s-|u|,q}(M_s(V), Q_s^c) = 0$ si $q > 0$,
3. $H^{N_s-|u|,0}(M_s(V), Q_s^c) = \Gamma^{a-\chi(u)}V \otimes (\det V)^l$.

Preuve:

1. Posons $\pi = n - p$: on peut alors écrire

$$H^{p,q}(M_s(V), Q_s^c) = H^q(M_s(V), Q_s^{a-\delta_{d-h(a)-u_1}\chi(u^*)} \otimes \wedge^\pi TM_s(V)) \otimes (\det V)^l.$$

Considérons donc une composante Γ d'un produit tensoriel \mathcal{G} du quotient de la filtration (\mathcal{F}^π) de $\wedge^\pi TM_s(V)$, que l'on peut écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \bigotimes_{1 \leq i < j \leq m+1} \Gamma^{u_{ij}} E_i \otimes \Gamma^{-\chi(u_{ij})} E_j, \\ \Gamma &= \left(\bigotimes_{i=1}^{m-1} \Gamma^{\gamma^i} E_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{j=1}^p \Gamma^{\phi^j} E_{m+j-1} \right) \otimes \Gamma^{-\chi(\rho)} E_{m+p}. \end{aligned}$$

Notons γ (respectivement ϕ) le poids $(\gamma^1, \dots, \gamma^{m-1})$ (respectivement (ϕ^1, \dots, ϕ^p) , et $a(\gamma, \phi, \rho) = a - \delta_{d-h(a)-u_1}\chi(u^*) - c(d) + (\gamma, \phi, -\chi(\rho))$. Le théorème de Bott et le lemme 2.2.1 impliquent, si la cohomologie de $\Omega_{M_s(V)}^p \otimes Q_s^c$ n'est pas identiquement nulle, qu'un au moins des poids $a(\gamma, \phi, \rho)$ doit être régulier. Les deux remarques suivantes impliquent que ce ne peut être le cas si $\pi < |u|$:

- Supposons que $a(\gamma, \phi, \rho)$ ne comprenne pas d'inversion entre ses composantes correspondant aux poids ϕ (c'est-à-dire à $-\delta_{d-h(a)-u_1}\chi(u^*)$) et $-\chi(\rho)$. Le poids ρ est décroissant: si sa dernière composante était non nulle (c'est-à-dire sa $(d - h(a) - u_1)$ -ième composante, puisque c'est le rang de E_{m+p}), on

aurait $|\rho| \geq d - h(a) - u_1$. Mais $\Gamma^{-\chi(\rho)} E_{m+p}$ provenant du produit tensoriel $\otimes_{i=1}^{m+p-1} \Gamma^{-\chi(u_i, m+p)} E_{m+p}$,

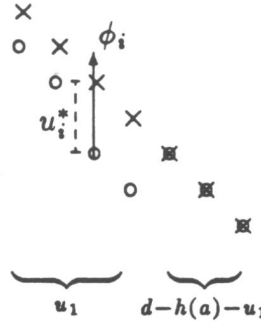
$$|\rho| = \sum_{i=1}^{m+p-1} |u_{i, m+p}| \leq \sum_{i < j} |u_{i, j}| = \pi < |u|$$

On aurait donc $d - h(a) - u_1 < |u|$, ce qui est contraire à l'hypothèse $d - h(a) \geq |u| + u_1 + u_1^*$.

Si $a(\gamma, \phi, \rho)$ est régulier, ses composantes d'indices compris entre $h(a) + 1$ et $h(a) + u_1$ doivent donc être strictement supérieures à la $(h(a) + u_1 + 1)$ -ième composante de $-c(d)$. Comme elles doivent de plus être distinctes, la i -ème selon l'ordre croissant doit dépasser cette composante d'au moins i unités: par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{u_1} (-c(d)_{h(a)+u_1+1+i}) &\leq \sum_{j=h(a)+1}^{h(a)+u_1} a(\gamma, \phi, \rho)_j \\ &= -|u| + |\phi| + \sum_{i=1}^{u_1} (-c(d)_{h(a)+u_1+1-i}), \end{aligned}$$

soit encore $|\phi| \geq |u|$. Mais si l'on note ϕ^+ (respectivement ϕ^-) le poids formé des composantes positives (respectivement de l'opposé des composantes négatives) de ϕ , alors $|\phi| = |\phi^+| - |\phi^-|$, et le lemme 1.1.3 de la première partie implique que $|\phi| \leq |\phi^+| \leq \pi$. Le poids $a(\gamma, \phi, \rho)$ ne peut donc être régulier si $\pi < |u|$. On a représenté ci-dessous la position relative des $d - h(a)$ dernières composantes de $a(\gamma, \phi, \rho)$, représentées par des o, alors que celles de $-c(d)$ le sont par des x (en l'occurrence, $u^* = (2, 2, 1, 1)$ et $u = (4, 2)$):



Remarque 2.2: Notons au passage que si $|u| = \pi$, $a(\gamma, \phi, \rho)$ ne peut être régulier que si toutes les composantes de ϕ sont positives, et de somme égale à π . Les composantes positives de γ sont alors nécessairement nulles, donc a fortiori ses composantes négatives également, puisque d'après la forme du produit tensoriel définissant \mathcal{G} , l'existence d'une composante strictement négative de γ impliquerait celle d'une composante strictement positive d'indice inférieur.

- Supposons maintenant que $a(\gamma, \phi, \rho)$ comprenne au moins une inversion entre ses composantes correspondant aux poids ϕ et $-\chi(\rho)$. Supposons qu'une de

ces inversions ait lieu entre des composantes d'indices respectifs $h(a) + i$ et $d - j$, avec $1 \leq i \leq u_1$ et $j \geq 0$. On aurait donc

$$a(\gamma, \phi, \rho)_{h(a)+i} < a(\gamma, \phi, \rho)_{d-j}.$$

Mais de même, comme on l'a noté plus haut, que la première composante de $-\chi(\rho)$ est nulle si $\pi < |u| \leq d - h(a) - u_1$, les $(d - h(a) - u_1 - |\rho|)$ premières composantes de ce poids doivent également être nulles, ce qui implique que les $a(\gamma, \phi, \rho)_m$, pour m compris entre $h(a) + u_1 + 1$ et $d - |\rho|$, forment une suite consécutive d'entiers. Le poids $a(\gamma, \phi, \rho)$ étant supposé régulier, on peut donc supposer $d - j \geq d - |\rho|$, d'où

$$a(\gamma, \phi, \rho)_{h(a)+i} < -(d - |\rho|).$$

Or $a(\gamma, \phi, \rho)_{h(a)+i} = -u_{u_1+1-i}^* - (h(a) + i) + \phi_i$, avec $\phi_i \geq -(\pi - |\rho|)$ puisque, encore d'après le lemme 1.1.3 de la première partie, la somme des composantes négatives de γ et de ϕ doit être inférieure à $\pi - |\rho|$. Donc

$$a(\gamma, \phi, \rho)_{h(a)+i} \geq -h(a) - u_1 - u_1^* - \pi + |\rho|,$$

et les deux inégalités qui précèdent sont contradictoires lorsque $\pi \leq |u| \leq d - h(a) - u_1 - u_1^*$. Le poids $a(\gamma, \phi, \rho)$ ne peut donc, sous l'hypothèse faite, être régulier si $\pi < |u|$.

2. Supposons que $\pi = |u|$. D'après la remarque précédente, si les groupes de cohomologie $H^q(M_s(V), Q_s^{a-\delta_d-h(a)-u_1}\chi(u^*) \otimes \Gamma)$ ne sont pas tous nuls, il faut que Γ soit de la forme

$$\Gamma = \bigotimes_{j=1}^p \Gamma^{\phi^j} E_{m+j-1} \bigotimes \Gamma^{-\chi(\rho)} E_{m+p},$$

les poids ϕ^1, \dots, ϕ^p étant positifs, et tels que $\sum_{i=1}^p |\phi^i| = |\rho| = \pi = |u|$. De plus, le poids $a(0, \phi, \rho)$ ne peut présenter d'inversion entre ϕ_1, \dots, ϕ_p d'une part, et $-\chi(\rho)$ d'autre part: au contraire, les poids ϕ^1, \dots, ϕ^p doivent compenser le terme en $-\chi(u^*)$ de c , ce pour quoi leurs modules sont tout justes suffisants. Ceci implique qu'il est possible d'écrire le groupe de cohomologie de Dolbeault de bidegré $(N_s - |u|, q)$ de Q_s^c sous la forme

$$H^{N_s - |u|, q}(M_s(V), Q_s^c) = \bigoplus_{|v|=|u|} \nu(v, q) \Gamma^{a-\chi(v)} V \otimes (\det V)^l.$$

Les poids ϕ^1, \dots, ϕ^p étant susceptibles de faire apparaître entre eux des inversions, les multiplicités $\nu(v, q)$ sont a priori non nulles pour $q > 0$. La proposition 2.3.1 permet cependant de démontrer le résultat suivant:

Lemme 2.4.2 *Pour tout poids $v \in \mathbb{N}_{\geq}^d$, $\nu(v, q) = 0$ si $q > 0$.*

Preuve: Soit en effet $v \in N_{\geq}^d$ tel que $|v| = |u|$. D'après la proposition 2.3.1, il existe si l est compris entre 1 et $d - h(v)$ une variété complexe compacte X_v de dimension n , un fibré vectoriel semi-ample E de rang d , et un fibré en droites L ample sur X_v , tels que

$$\begin{aligned} H^{n,q}(X_v, \Gamma^{a-x(v)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) &= 0 \quad \text{si et seulement si } q \neq |v|, \\ H^{n,q}(X_v, \Gamma^{a-x(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) &= 0 \quad \forall q \geq 0 \text{ si } |w| \leq |u| \text{ et } w \neq v. \end{aligned}$$

Considérons la suite spectrale de Borel-Le Potier d'ordre $P = n + N_s - |u|$ associée à la projection $\theta : Y = M_s(E) \rightarrow X_v$, et au fibré en droites $Q_s^c \otimes \theta^* L$ sur Y . Les seuls termes éventuellement non nuls de cette suite spectrale sont les groupes

$${}^P E_1^{n,q-n} = H^q(Y, \mathcal{G}^{n,P}) = H^{P,q}(Y, Q_s^c \otimes \theta^* L),$$

puisque l'on a vérifié que les groupes de cohomologie relatifs $H^{p,q}(M_s(E), Q_s^c)$ étaient nuls en degré $p > N_s - |u|$: elle dégénère donc en E_1 . De plus, ${}^P E_1^{n,q-n}$ est l'aboutissement d'une suite spectrale de Leray dont le terme d'ordre deux s'écrit

$$E_2^{i,j} = H^{n,i}(X_v, H^{N_s-|u|,j}(M_s(E), Q_s^c) \otimes L),$$

c'est-à-dire, d'après l'identité qui précède,

$$E_2^{i,j} = \bigoplus_{|w|=|u|} \nu(w, j) H^{n,i}(X_v, \Gamma^{a-x(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L).$$

D'après la proposition 2.3.1, on a donc $E_2^{i,j} = \delta_{i,|u|} \nu(v, j) H$, avec $H \neq 0$, ce qui implique que la suite spectrale de Leray dégénère en E_2 , et

$${}^P E_1^{n,q-n} = \nu(v, q - |u|) H.$$

Mais les multiplicités $\nu(w, q)$ ne dépendant pas de l , on peut supposer que l soit compris entre $h(a) + u_1$ et $d - |u| \leq d - h(v)$: alors $Q_s^c \otimes \theta^* L$ est ample d'après les lemmes 1.1.1 et 2.4.1, et le théorème d'annulation de Kodaira-Nakano implique que

$${}^P E_1^{n,q-n} = H^{P,q}(Y, Q_s^c \otimes \theta^* L) = 0$$

si $q > |u|$. Donc $\nu(v, q) = 0$ si $q > 0$.

3. Reste à préciser $H^{N_s-|u|,0}(M_s(V), Q_s^c)$. Considérons donc à nouveau les produits tensoriels du quotient de la filtration (\mathcal{F}^π) de $\wedge^\pi TM_s(V)$ qui sont susceptibles de contribuer à ce groupe, c'est-à-dire de la forme

$$\mathcal{G}(\phi^1, \dots, \phi^p) = \left(\bigotimes_{i=1}^p \Gamma^{\phi^i} E_{m+i-1} \right) \otimes \left(\bigotimes_{j=1}^p \Gamma^{-x(\phi^j)} E_{m+p} \right),$$

avec $\sum_{i=1}^p |\phi^i| = |u|$. Soit $\Gamma^{-x(\rho)} E_{m+p}$ une composante de $\bigotimes_{j=1}^p \Gamma^{-x(\phi^j)} E_{m+p}$. On a vu que, si $a(0, \phi, \rho)$ est régulier, le poids $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^p)$ devait compenser le

terme en $-\chi(u^*)$ de c : leurs modules sont juste suffisants à ce que les composantes de $-\delta_{d-h(a)-u_1}\chi(u^*)-c(d)+\phi$ d'indices compris entre $h(a)+1$ et $h(a)+u_1$ prennent les valeurs de celles de $-c(d)$ de mêmes indices. Mais elles peuvent le faire dans n'importe quel ordre: $a(0, \phi, \rho)$ est donc régulier si et seulement si il existe une permutation $\sigma \in \Sigma_{u_1}$ telle que pour j compris entre 1 et u_1 ,

$$(-\delta_{d-h(a)-u_1}\chi(u^*)-c(d))_{h(a)+\sigma^{-1}(j)} + \phi_{\sigma^{-1}(j)} = -c(d)_{h(a)+u_1+1} + j,$$

c'est-à-dire

$$-u_{u_1+1-j}^* + \phi_j = \sigma(j) - j.$$

Dans ces conditions, le théorème de Bott associe au poids $a(0, \phi, \rho)$ le $Gl(V)$ -module $\Gamma^{a-\chi(\rho)}V \otimes (det V)^l$, et cela en degré $q = i(\sigma)$. En conséquence,

$$H^q(M_s(V), Q_s^{c+\kappa(s)} \otimes \mathcal{G}(\phi^1, \dots, \phi^p)) = \delta_{q, i(\sigma)} \bigoplus_{\rho} m(\phi; \rho) \Gamma^{a-\chi(\rho)}V \otimes (det V)^l,$$

où $m(\phi; \rho)$ est la multiplicité de $\Gamma^{-\chi(\rho)}E_{m+p}$ dans $\bigotimes_{j=1}^p \Gamma^{-\chi(\phi^j)}E_{m+p}$. De plus, la dernière partie du lemme 2.2.1 implique que la somme alternée, dans l'anneau de Grothendieck des représentations de $Gl(V)$, de tous les $Gl(V)$ -modules ainsi obtenus,

$$\bigoplus_q (-1)^q H^q(M_s(V), \bigoplus_{|\phi|=|u|} \mathcal{G}(\phi^1, \dots, \phi^p) \otimes Q_s^{c+\kappa(s)})$$

coïncide avec la somme alternée $\bigoplus_q (-1)^q H^{N_s-|u|, q}(M_s(V), Q_s^c)$, autrement dit, d'après la proposition précédente, avec $H^{N_s-|u|, 0}(M_s(V), Q_s^c)$. Il vient

$$H^{N_s-|u|, 0}(M_s(V), Q_s^c) = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{u_1}} (-1)^{i(\sigma)} \bigoplus_{\rho} m(\phi; \rho) \Gamma^{a-\chi(\rho)}V \otimes (det V)^l.$$

Remarquons que par symétrie, si W est un espace vectoriel complexe de dimension $d - h(a) - u_1$,

$$\bigotimes_{j=1}^p \Gamma^{\phi^j} W = \bigoplus_{\rho} m(\phi; \rho) \Gamma^{\rho^*} W.$$

Par conséquent,

$$H^{N_s-|u|, 0}(M_s(V), Q_s^c) = \bigoplus_{\rho} \mu(\rho) \Gamma^{a-\chi(\rho)}V \otimes (det V)^l,$$

où les multiplicités $\mu(\rho)$ sont définies par l'identité, d'après les relations liant les poids ϕ et les permutations σ ,

$$\bigoplus_{\rho} \mu(\rho) \Gamma^{\rho^*} W = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_{u_1}} (-1)^{i(\sigma)} \bigotimes_{k=1}^p \Gamma^{\sum_{j=\sigma_p-\sigma_k+1}^{\sigma_p-\sigma_k-1} (u_{\sigma_k}^* + \sigma(j) - j) \mathbf{1}_{j-\sigma_p+\sigma_k}} W.$$

Mais le corollaire 1.1.1 de la première partie implique alors que $\mu(\rho) = 0$ si $\rho \neq u$, et que $\mu(u) = 1$. On obtient donc finalement

$$H^{N_s - |u|, 0}(M_s(V), Q_s^c) = \Gamma^{a - \chi(u)} V \otimes (\det V)^l,$$

et la proposition est démontrée. ♣

Les groupes de cohomologie $H^{N_s - |u| - \pi, q}(M_s(V), Q_s^c)$ semblent, pour $\pi > 0$, d'un calcul plus délicat encore que pour $\pi = 0$. On pourra cependant les écrire a priori sous la forme

$$H^{N_s - |u| - \pi, q}(M_s(V), Q_s^c) = \bigoplus_{\substack{b, v \in \mathbb{N}_{\geq}^d, \\ h(b) + h(v) \leq d}} \nu_{\pi}(b, v, q) \Gamma^{b - \chi(v)} V \otimes (\det V)^l.$$

Cette écriture permet simplement de distinguer les parties positive et négative des poids supérieurs des différentes composantes du $Gl(V)$ -module $H^{N_s - |u| - \pi, q}(M_s(V), Q_s^c)$. Notons que les multiplicités $\nu_{\pi}(b, v, q)$ sont indépendantes de l . Les deux propositions qui suivent sont consacrées à différentes propriétés de ces multiplicités.

Proposition 2.4.2 *Supposons que $d - h(a) \geq |u| + u_1 + u_1^* + \pi$. Alors si les multiplicités $\nu_{\pi}(b, v, q)$ ne sont pas toutes nulles lorsque q varie, les poids b et v possèdent les propriétés suivantes:*

- $|u| \leq |v| \leq |u| + \pi$,
- $h(b) \leq h(a) + \min(\pi, u_1)$,
- $h(b) + v_1 \leq h(a) + u_1 + \pi$.

Preuve: Considérons, comme pour la proposition précédente, un poids $a(\gamma, \phi, \rho)$ auquel le théorème de Bott associe une composante $\Gamma^{b - \chi(v)} V \otimes (\det V)^l$ d'un groupe de cohomologie de $\Omega_{M_s(V)}^{N_s - |u| - \pi} \otimes Q_s^c$. L'hypothèse $d - h(a) \geq |u| + u_1 + u_1^* + \pi$ implique, comme on l'a vérifié dans la preuve de cette proposition, que les $d - h(a) - u_1$ dernières composantes de $a(\gamma, \phi, \rho)$ ne participent à aucune inversion de ce poids. De plus, la dernière composante du poids ρ est nécessairement nulle, et, $a(\gamma, \phi, \rho)$ étant supposé régulier, ceci implique, pour que le terme en $-\chi(u^*)$ de c puisse être compensé, que la somme des composantes de ϕ soit au moins égale à $|u|$. Mais d'après la forme du produit tensoriel dont provient $a(\gamma, \phi, \rho)$, la somme des composantes de ϕ est inférieure à celle des composantes de ρ , puisque celles-ci proviennent en partie des composantes de ϕ , et en partie de celles de

γ . De plus, comme ces composantes ne participent à aucune inversion, les $d - h(a) - u_1$ premières composantes de v sont précisément celles de ρ , donc

$$|v| \geq |\rho| \geq |\phi| \geq |u|.$$

De plus, la dernière composante de ρ étant nulle, et comme v correspond à la partie négative de $b - \chi(v)$, on a $v = \rho$, et le lemme 1.1.3 de la première partie implique que

$$|v| = |\rho| \leq |u| + \pi.$$

Il est de plus clair que $h(b) \leq h(a) + u_1$, puisqu'au poids γ correspondent $d - h(a) - u_1$ composantes négatives ou nulles du poids $b - \chi(v)$. Le lemme 1.1.3 de la première partie implique également que la somme des composantes de ϕ (qui doivent être positives) soit au plus égale à $|u| + \pi$: une partie de cette somme, égale à $|u|$, doit compenser le terme en $-\chi(u^*)$ du poids c ; parmi les composantes de $a(\gamma, \phi, \rho)$ d'indices compris entre $h(a) + 1$ et $h(a) + u_1$, au moins $(u_1 - |\phi| + |u|)^+$ correspondent donc à des composantes nulles de $b - \chi(v)$, donc

$$h(b) \leq h(a) + |\phi| - |u| \leq h(a) + \pi.$$

Plus précisément encore, $v_1 = \rho_1$ étant donné, la forme du produit tensoriel auquel est associé le poids $a(\gamma, \phi, \rho)$, à savoir

$$\mathcal{G} = \bigotimes_{i < j} \Gamma^{u_{ij}} E_i \otimes \Gamma^{-\chi(u_{ij})} E_j,$$

implique que $\sum_{i=1}^{m-1} |u_{i,m+p}| \geq \rho_1 - u_1$. En effet, la règle de Littlewood-Richardson implique que si $\Gamma^g W$ est une composante de $\Gamma^e W \otimes \Gamma^f W$, W étant un espace vectoriel complexe de dimension quelconque, l'on ait $g_1 \leq e_1 + f_1$: en l'occurrence, la somme des rangs des fibrés E_m, \dots, E_{m+p-1} est égale à u_1 , qui majore donc la somme des premières composantes des poids $u_{i,m+p}$ pour i compris entre m et $m+p-1$. Par symétrie, la dernière composante d'un poids du produit tensoriel $\bigotimes_{i=m}^{m+p-1} \Gamma^{-\chi(u_{i,m+p})} E_{m+p}$ est donc au moins égale à $-u_1$, et la somme des composantes des poids $u_{i,m+p}$, pour i compris entre 1 et $m-1$, doit donc être au moins égale à $\rho_1 - u_1$. A fortiori, il en est de même de la somme de leurs modules.

Comme $\sum_{j>i} |u_{ij}| = |u| + \pi$, il vient $|\phi| \leq \sum_{i=1}^{m+p-1} \sum_{j>i} |u_{ij}| \leq |u| + \pi + u_1 - \rho_1$. D'où

$$h(b) \leq h(a) + |\phi| - |u| \leq h(a) + \pi + u_1 - v_1,$$

et la proposition est démontrée. ♣

Proposition 2.4.3 *Si $d - h(a) \geq |u| + u_1 + u_1^* + \pi$, si $|u| + \pi \leq 20$ ou $\pi \leq 10$, et si les poids b et v vérifient les inégalités de la proposition précédente, alors*

$$\nu_\pi(b, v, q) = 0 \quad \text{si } q > |u| + \pi - |v|.$$

Preuve: On procédera par récurrence sur π et récurrence descendante sur $|v|$.

Pour $\pi = 0$, on sait que $\nu_0(b, v, q) = \delta_{b,a} \nu(v, q)$ (on l'on considère un poids v de même module que u), donc d'après la proposition précédente $\nu_0(b, v, q) = 0$ si $q > 0$ et $d - h(a) \geq |u| + u_1 + u_1^*$.

Supposons maintenant π strictement positif, et que la proposition ait été démontrée pour les multiplicités d'indice strictement inférieur à π , et pour les multiplicités d'indice π des poids w tels que $|w| > |v|$. D'après la proposition 2.3.1, il existe une variété complexe compacte X_v , un fibré semi-ample E de rang d et un fibré en droites ample L sur X_v tels que si $1 \leq l \leq d - |u| - \pi$ (cette inégalité impliquant $l \leq d - h(v)$ d'après la proposition 2.4.2), si $b \in N_{\geq}^d$ et $h(b) \leq h = h(a) + \min(u_1, \pi)$, on ait

$$\begin{aligned} H^{n,i}(X_v, \Gamma^{b-x(v)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) &= \delta_{i,|v|} H(b), \quad \text{avec } H(b) \neq 0. \\ H^{n,i}(X_v, \Gamma^{b-x(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) &= 0 \quad \text{si } i \geq 0, \quad |w| \leq |v| \text{ et } w \neq v, \end{aligned}$$

et si $n - \max(10, 20 - |v|) \leq p < n$ et $d - h \geq h(v) + n - p$,

$$H^{p,i}(X_v, \Gamma^{b-x(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0,$$

pour $i \geq |w| + n - p$. Considérons donc la suite spectrale de Borel-Le Potier d'ordre $P = n + N_s - |u| - \pi$ associée à la projection $\theta : Y = M_s(E) \rightarrow X_v$ et au fibré en droites $Q_s^c \otimes \theta^* L$ sur Y . Son terme d'ordre un ${}^P E_1^{n-\tau, q-n+\tau}$ est l'aboutissement d'une suite spectrale de Leray dont on notera le terme d'ordre deux

$${}^\tau E_2^{i,j} = H^{n-\tau,i}(X_v, H^{N_s-|u|-\pi+\tau,j}(M_s(E), Q_s^c) \otimes L).$$

D'après la proposition 2.4.2, chaque composante de $H^{N_s-|u|-\pi+\tau,j}(M_s(E), Q_s^c)$ peut s'écrire sous la forme $\Gamma^{b-x(w)} E \otimes (\det E)^l$, avec $h(b) \leq h(a) + \min(u_1, \pi - \tau) \leq h$ et $|u| \leq |w| \leq |u| + \pi - \tau$. Il vient

$${}^\tau E_2^{i,j} = \bigoplus_{b,w} \nu_{\pi-\tau}(b, w, j) H^{n-\tau,i}(X_v, \Gamma^{b-x(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L).$$

D'autre part, l'hypothèse $|u| + \pi \leq 20$ ou $\pi \leq 10$ implique $|v| + \tau \leq 20$ ou $\tau \leq 10$, et l'inégalité $d - h(b) \geq \tau + |v|$ est conséquence de la minoration

$$d - h(a) \geq |u| + u_1 + \pi \geq \tau + (|u| + \pi - \tau) + \min(u_1, \pi - \tau).$$

On peut donc appliquer la proposition 2.3.2, selon laquelle

$$H^{n-\tau,i}(X_v, \Gamma^{b-x(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si } i \geq \tau + |w|,$$

Si $0 < \tau \leq \pi$, l'hypothèse de récurrence donne de plus

$$\nu_{\pi-\tau}(b, w, j) = 0 \quad \text{si } j > |u| + \pi - \tau - |w|.$$

On obtient ainsi

$${}^\tau E_2^{i,j} = 0 \quad \text{si } j > |u| + \pi - \tau - |w| \quad \text{ou } i > |w| + \tau - 1,$$

donc ${}^P E_1^{n-\tau, q-n+\tau} = 0$ si $q \geq |u| + \pi$. Or les seuls morphismes éventuellement non nuls de la suite spectrale de Borel-Le Potier qui en impliquent les termes de bidegré $(n, q-n)$ sont les

$${}^P d_\tau^{n-\tau, q-n+\tau-1} : {}^P E_\tau^{n-\tau, q-n+\tau-1} \rightarrow {}^P E_\tau^{n, q-n}.$$

Mais ${}^P E_\tau^{n-\tau, q-n+\tau-1}$, qui provient de ${}^P E_1^{n-\tau, q-n+\tau-1}$, est nul pour tout entier $\tau \geq 1$ dès que $q > |u| + \pi$, de sorte que sous cette hypothèse, ${}^P E_1^{n, q-n} = {}^P E_\infty^{n, q-n}$ est un quotient d'une filtration de $H^{P,q}(Y, Q_s^c \otimes \pi^* L)$. Si $l \geq h(a) + u_1$, d'après le lemme 1.1.1 et 2.4.1, et d'après le théorème d'annulation de Kodaira-Nakano, ${}^P E_1^{n, q-n}$ est donc nul dès que $q > |u| + \pi$.

D'autre part, toujours d'après les propriétés cohomologiques de X_v , E et L ,

$${}^0 E_2^{i,j} = \delta_{i,|v|} \bigoplus_b \nu_\pi(b, v, j) H(b) \bigoplus_{b, |w| > |v|} \nu_\pi(b, w, j) H^{n,i}(X_v, \Gamma^{b-x(w)} E \otimes (\det E)^l \otimes L).$$

Par hypothèse, le terme de la seconde de ces sommes correspondant au poids w est nul si $j > |u| + \pi - |w|$ ou $i > |w|$, donc en particulier si $i + j > |u| + \pi$. Les morphismes de la suite spectrale de Leray

$$d_m^{v|,j} : {}^0 E_m^{v|,j} \rightarrow {}^0 E_m^{v|+m, j+1-m}$$

sont donc nuls pour tout $m \geq 2$ dès que $j > |u| + \pi - |v| - 1$. De même, les morphismes

$$d_m^{v|-m, j+m-1} : {}^0 E_m^{v|-m, j+m-1} \rightarrow {}^0 E_m^{v|,j}$$

sont nuls si l'on a $j + m - 1 > |u| + \pi - |w|$ dès que $|w| > |v|$, donc pour tout $m \geq 2$ dès que $j > |u| + \pi - |v| - 2$. Sous ces hypothèses,

$${}^0 E_2^{v|,j} = \bigoplus_b \nu_\pi(b, v, j) H(b) = {}^0 E_\infty^{v|,j}$$

est un quotient d'une filtration de ${}^P E_1^{n, |v|+j-n}$, qui s'annule si $|v| + j > |u| + \pi$. Par conséquent,

$$\nu_\pi(b, v, j) = 0 \quad \text{si } j > |u| + \pi - |v|,$$

et la proposition est démontrée. ♣

2.5 Théorèmes d'annulation

Nous sommes à présent en mesure de démontrer nos théorèmes d'annulation pour la cohomologie des fibrés amples.

2.5.1 Cas des degrés n et $n - 1$

Considérons une variété complexe compacte X de dimension n , E un fibré vectoriel holomorphe de rang d et L un fibré en droites holomorphe sur X . Soient $a, u \in \mathbb{N}_\geq^d$ tels que $d - h(a) \geq |u| + u_1 + u_1^*$. Alors la proposition 2.4.1 implique que la suite spectrale de Borel-Le Potier d'ordre $P = n + N_s - |u|$ associée à la projection $\theta : Y = M_s(E) \rightarrow X$, et au fibré en droites $Q_s^c \otimes \theta^* L$ sur Y , où s et c sont définis comme au paragraphe précédent, admet pour termes d'ordre un les groupes

$${}^P E_1^{n,q-n} = H^{n,q}(X, \Gamma^{a-x(u)} E \otimes (\det E)^l \otimes L),$$

alors que ${}^P E_1^{p,q-p} = 0$ si $p \neq n$. Cette suite spectrale dégénère donc en E_1 , et l'on obtient ainsi la généralisation suivante d'un théorème d'isomorphisme de Demailly ([De1], 3.10), qui généralisait lui-même le théorème d'isomorphisme de Griffiths ([Gr]):

Théorème 2.5.1 *Sous les hypothèses précédentes,*

$$H^{n,q}(X, \Gamma^{a-x(u)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = H^{n+N_s-|u|,q}(M_s(E), Q_s^c \otimes \theta^* L).$$

Preuve du théorème 2.1.2: Si E est ample (respectivement nef) et L nef (respectivement ample), les lemmes 1.1.1 et 2.4.1 impliquent que $Q_s^c \otimes \theta^* L$ est ample dès que $l \geq h(a) + u_1$. Le théorème 2.1.2 est donc, sous l'hypothèse $d - h(a) \geq |u| + u_1 + u_1^*$, une conséquence du théorème précédent et du théorème d'annulation de Kodaira-Nakano. Enfin, le lemme 1.5.3 implique que cette condition sur d est superflue. ♣

On va maintenant utiliser le théorème d'isomorphisme précédent pour étendre au bidegré $(n - 1, q)$ la deuxième partie du théorème de Demailly.

Théorème 2.5.2 *Si E est ample et L nef, ou E nef et L ample, si $a \in \mathbb{N}_\geq^d$ et $p \geq n - 1$,*

$$H^{p,q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} p + q > n, \\ l \geq h(a) + \min(n - p, n - q). \end{cases}$$

Preuve: Si $u = 0$, le poids c et la suite s introduits au paragraphe 2.4 sont simplement

$$s = s(a) \quad \text{et} \quad c = a - \kappa(s(a)).$$

Les propositions 2.4.1, 2.4.2 et 2.4.3 impliquent que si $d - h(a) \geq 1$, les groupes de cohomologie de Dolbeault relatifs de bidegré $(N_{s(a)}, q)$ et $(N_{s(a)} - 1, q)$ de $Q_{s(a)}^c$ sur $M_{s(a)}(E)$ peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} H^{N_{s(a)},q}(M_{s(a)}(E), Q_{s(a)}^c) &= \delta_{q,0} \Gamma^a E \otimes (\det E)^l, \\ H^{N_{s(a)}-1,q}(M_{s(a)}(E), Q_{s(a)}^c) &= \bigoplus_{h(b) \leq h(a)} \delta_{q,0} \lambda(b) \Gamma^{b-1} E \otimes (\det E)^l \\ &\quad \bigoplus_{h(b) \leq h(a)} (\delta_{q,0} \mu(b) + \delta_{q,1} \nu(b)) \Gamma^b E \otimes (\det E)^l. \end{aligned}$$

En fait, la première de ces identités est une application triviale du théorème de Bott. Pour ce qui est de la seconde, les groupes de cohomologie $H^{N_{s(a)}-1,q}(M_{s(a)}(E), Q_{s(a)}^c)$ se calculent en considérant les poids

$$c + \kappa(s(a)) + 1_{s_i+1} - 1_{s_j} = a + 1_{s_i+1} - 1_{s_j}, \quad i < j.$$

Le poids a étant évidemment strictement décroissant relativement à $s(a)$, il est clair qu'un tel poids, s'il est régulier, ne peut être que décroissant. En distinguant les poids pour lesquels $s_j = d$ ou $s_j \leq h(a)$, on peut donc en fait écrire

$$H^{N_{s(a)}-1,q}(M_{s(a)}(E), Q_{s(a)}^c) = \delta_{q,0} \bigoplus_{h(b) \leq h(a)} (\lambda(b)\Gamma^{b-1}E \oplus \mu(b)\Gamma^b E) \otimes (\det E)^l.$$

Considérons alors la suite spectrale de Borel-Le Potier d'ordre $P = n + N_{s(a)} - 1$ associée à θ et au fibré $Q_{s(a)}^c \otimes \theta^* L$ sur Y . D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} {}^P E_1^{n-1,q-n+1} &= H^{n-1,q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l \otimes L), \\ {}^P E_1^{n,q-n+1} &= \bigoplus_{h(b) \leq h(a)} H^{n,q+1}(X, (\lambda(b)\Gamma^{b-1}E \oplus \mu(b)\Gamma^b E) \otimes (\det E)^l \otimes L), \end{aligned}$$

alors que ${}^P E_1^{p,q-p} = 0$ si p est distinct de n et $n-1$. Le seul morphisme éventuellement non nul impliquant les termes de cette suite spectrale de bidegré $(n-1, q-n+1)$ est donc

$${}^P d_1^{n-1,q-n+1} : {}^P E_1^{n-1,q-n+1} \rightarrow {}^P E_1^{n,q-n+1}.$$

Mais d'après le théorème de Demailly,

$$H^{n,q+1}(X, \Gamma^b E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si } q \geq 0 \text{ et } l \geq h(a),$$

alors que d'après le théorème 2.1.2,

$$H^{n,q+1}(X, \Gamma^{b-1}E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si } q > 0 \text{ et } l > h(a).$$

En conséquence, ${}^P E_1^{n,q-n+1} = 0$ dès que $l \geq h(a) + 1$ et $q \geq 1$, ou bien entendu si $q = n$. Dans ces conditions, ${}^P E_1^{n-1,q-n+1} = {}^P E_\infty^{n-1,q-n+1}$ est un quotient d'une filtration de $H^{n+N_{s(a)}-1,q}(Y, Q_{s(a)}^c \otimes \theta^* L)$ qui est nul, d'après le théorème de Kodaira-Nakano, lorsque $l \geq h(a)$ et $q \geq 2$. On obtient donc bien

$$H^{n-1,q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0$$

si $l \geq h(a) + 1$ et $q \geq 2$, ou $l \geq h(a)$ et $q = n$. Ceci, compte tenu du théorème 2.1.2, achève la démonstration du théorème 2.5.2. \clubsuit

2.5.2 Cas général

On peut généraliser les théorèmes précédents à des groupes de cohomologie de plus bas degré.

Théorème 2.5.3 *Si E est ample et L nef, ou E nef et L ample, si $p \geq n - \max(10, 20 - |u|)$,*

$$H^{p,q}(X, \Gamma^{a-x(u)} E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} l \geq h(a) + u_1 + n - p, \\ p + q > n + |u|. \end{cases}$$

Preuve: On procèdera par récurrence sur $\pi = n - p$, en supposant dans un premier temps que $p \geq n - \pi(a, u)$, avec

$$\pi(a, u) = \min\left(\frac{1}{3}(d - h(a) - 2|u|), \max(10, 20 - |u|)\right).$$

En reprenant les notations de la proposition 2.4.1, considérons la suite spectrale de Borel-Le Potier d'ordre $P = n + N_s - |u| - \pi$ associée à la projection $\theta : Y = M_s(E) \rightarrow X$ et au fibré $Q_s^c \otimes \theta^* L$ sur Y . D'après cette proposition,

$${}^P E_1^{n-\pi, q-n+\pi} = H^{n-\pi, q}(X, \Gamma^{a-x(u)} E \otimes (\det E)^l \otimes L),$$

et ${}^P E_1^{n-\rho, q-n+\rho} = 0$ si $\rho > \pi$. Considérons les morphismes

$${}^P d_\tau^{n-\pi, q-n+\pi} : {}^P E_\tau^{n-\pi, q-n+\pi} \rightarrow {}^P E_\tau^{n-\pi+\tau, q-n+\pi+1-\tau},$$

avec $1 \leq \tau \leq \pi$. Le groupe de cohomologie ${}^P E_1^{n-\pi+\tau, q-n+\pi+1-\tau}$ est l'aboutissement d'une suite spectrale de Leray dont les termes d'ordre deux sont donnés par

$${}^\tau E_2^{i,j} = H^{n-\pi+\tau, i}(X, H^{N_s-|u|-\tau, j}(M_s(E), Q_s^c) \otimes L).$$

Les hypothèses $d - h(a) \geq 2|u| + 3\pi$ et $\pi > 0$ permettent d'appliquer les propositions 2.4.2 et 2.4.3, selon lesquelles

$${}^\tau E_2^{i,j} = \bigoplus_{b,v} \nu_\tau(b, v, j) H^{n-\pi+\tau, i}(X, \Gamma^{b-x(v)} E \otimes (\det E)^l \otimes L),$$

avec, si $\nu_\tau(b, v, j) > 0$, les inégalités suivantes:

- $|u| \leq |v| \leq |u| + \tau$,
- $h(b) \leq h(a) + \min(u_1, \tau)$,
- $h(b) + v_1 \leq h(a) + u_1 + \tau$,
- $j \leq |u| + \tau - |v|$.

Les inégalités qui précèdent impliquent que $d - h(b) \geq 2|v| + 3(\pi - \tau)$: ${}^\tau E_2^{i,j}$ est donc nul, par hypothèse de récurrence, si $l \geq h(b) + v_1 + \pi - \tau$, et dès que $i > \pi - \tau + |v|$ ou $j > |u| + \tau - |v|$ pour chaque poids v , donc en particulier si $l \geq h(a) + u_1 + \pi$ et $i + j > |u| + \pi$. Par conséquent,

$${}^P E_1^{n-\pi+\tau, q-n+\pi+1-\tau} = 0 \quad \text{si } l \geq h(a) + u_1 + \pi \text{ et } q \geq |u| + \pi.$$

On obtient donc

$${}^P E_1^{n-\pi, q-n+\pi} = {}^P E_\infty^{n-\pi, q-n+\pi},$$

qui est un quotient d'une filtration de $H^{n+N_*-|u|-\pi, q}(Y, Q_\bullet^c \otimes \theta^* L)$, donc nul, d'après le théorème d'annulation de Kodaira-Nakano, dès que $q > |u| + \pi$. Le théorème est donc démontré pour $p \geq n - \pi(a, u)$, et le lemme 1.5.3 implique que la partie de cette condition qui porte sur d est superflue. ♣

Preuve du théorème 2.1.1: Il suffit d'appliquer le théorème précédent à $u = 0$. ♣

Preuve du corollaire 2.1.1: L'assertion 1 s'obtient en appliquant le théorème 10 à $a = k1_1$ et $u = 0$, de même que 2 pour $a = 1_{1,k}$ et $u = 0$, et 3 pour $a = 0$ et $u = 1_{1,d-k}$. ♣

Corollaire 2.5.1 *Sous les mêmes hypothèses,*

$$H^{p,q}(X, E^{\otimes k} \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \quad \text{si } \begin{cases} l \geq n - p + k, \\ p + q > n, \end{cases} \quad \text{et } p \geq n - 20.$$

Preuve: C'est une conséquence du théorème 2.1.1, et du fait que chaque puissance tensorielle $E^{\otimes k}$ est somme de fibrés associés de la forme $\Gamma^a E$ avec $|a| = k$, donc en particulier $h(a) \leq k$. ♣

Remarque 2.3: Encore une fois, on peut raisonnablement imaginer que tous les théorèmes précédents sont vrais sans les restrictions qu'on a dû faire sur p , et qui ne lui permet pas de s'écarter trop de n . Cette restriction semble plutôt le fait des méthodes utilisées dans cet article, et nous n'avons pas su nous en débarrasser. L'idéal serait sans doute de pouvoir, dans tous les cas, expliciter les groupes de cohomologie de Dolbeault des fibrés en droites canoniques sur les variétés de drapeaux d'un espace vectoriel complexe, comme on sait le faire sur la grassmannienne. Malgré certains travaux, déjà anciens, de Kostant ([Ko1] et [Ko2]), cela semble cependant un problème difficile.

2.6 Fibrés de rang deux

On conclura ce chapitre par quelques remarques sur la cohomologie des fibrés amples de rang deux. Si $E \rightarrow X$ est un fibré vectoriel de rang deux sur une variété complexe

compacte de dimension n , si $Y = \mathbb{P}(E^*)$ et si $\pi : Y \rightarrow X$ est la projection naturelle, la filtration de Borel-Le Potier de Ω_Y^{p+1} se réduit à la suite exacte

$$0 \rightarrow \pi^* \Omega_X^{p+1} \rightarrow \Omega_Y^{p+1} \rightarrow \pi^* \Omega_X^p \otimes \Omega_{Y/X}^1 \rightarrow 0.$$

Considérons un poids positif et décroissant $a = (k + l, l)$, avec $k > 0$ et $l \geq 0$, de sorte que

$$Q^a = \mathcal{O}_E(k) \otimes \pi^*(\det E)^l.$$

Le théorème de Bott implique que

$$\begin{aligned} R_{\pi_*}^q Q^a &= \delta_{q,0} S^k E \otimes (\det E)^l, \\ R_{\pi_*}^q (\Omega_{Y/X}^1 \otimes Q^a) &= \delta_{q,0} S^{k-2} E \otimes (\det E)^{l+1}, \end{aligned}$$

et, par conséquent, la suite exacte précédente, tensorisée par Q^a , a pour image par π la suite exacte

$$0 \rightarrow \Omega_X^{p+1} \otimes S^k E \otimes (\det E)^l \rightarrow \pi_*(\Omega_Y^{p+1} \otimes Q^a) \rightarrow \Omega_X^p \otimes S^{k-2} E \otimes (\det E)^{l+1} \rightarrow 0.$$

Notons également que d'après ce qui précède,

$$R^q(\Omega_Y^{p+1} \otimes Q^a) = 0 \text{ si } q > 0,$$

ce qui implique, si L est un fibré en droites sur X , l'isomorphisme

$$H^q(X, \pi_*(\Omega_Y^{p+1} \otimes Q^a) \otimes L) = H^{p,q}(Y, Q^a \otimes \pi^* L).$$

La suite exacte précédente induit donc la suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{p+1,q}(Y, Q^a \otimes \pi^* L) &\rightarrow H^{p,q}(X, S^{k-2} E \otimes (\det E)^{l+1} \otimes L) \rightarrow \\ &\rightarrow H^{p+1,q+1}(X, S^k E \otimes (\det E)^l \otimes L) \rightarrow H^{p+1,q+1}(Y, Q^a \otimes \pi^* L) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Le théorème de Kodaira-Nakano implique donc la proposition suivante:

Proposition 2.6.1 *Si E est ample et L nef, ou E nef et L ample, si $k > 0$, $l \geq 0$ et $p + q > n$, alors*

$$H^{p,q}(X, S^{k-2} E \otimes (\det E)^{l+1} \otimes L) = H^{p+1,q+1}(X, S^k E \otimes (\det E)^l \otimes L).$$

Le théorème de Demailly et le théorème de Le Potier (qui, en l'occurrence, est plus fort que notre théorème 2.5.3) sont, puisque $S^k E$ est de rang $k + 1$, respectivement équivalents à

$$\begin{aligned} H^{p,q}(X, S^k E \otimes (\det E)^l \otimes L) &= 0 \text{ si } p + q > n, \quad l > n - p, \\ H^{p,q}(X, S^k E \otimes (\det E)^l \otimes L) &= 0 \text{ si } p + q > n + k, \quad l \geq 0. \end{aligned}$$

Si l'on suppose E globalement engendré, on peut obtenir les conditions d'annulation suivantes, qui sont indépendantes de k :

Théorème 2.6.1 Soient E un fibré de rang deux globalement engendré, L un fibré en droites ample sur une variété complexe compacte X de dimension n . Alors le groupe de cohomologie $H^{p,q}(X, S^k E \otimes (\det E)^l \otimes L)$, où $k > 0$ et $l \geq 0$, est nul pour $p + q > n$ sous l'une des conditions suivantes:

1. $l > \min(n - p, n - q)$,
2. $p > 2(n - q)$,
3. $l \geq n - p - \delta$ et $p - q < \frac{1}{2}(n - 3\delta)$, avec $\delta \geq 0$,
4. $l \geq \frac{1}{3}(p - 1)$,
5. $p > \frac{2}{3}n$ et $q \geq p$ (ou $p \geq \frac{2}{3}n$ et $q > p$).

Preuve: On démontre 1 par récurrence en utilisant la proposition précédente, qui traduit la dégénérescence en E_2 de la suite spectrale de Borel-Le Potier ([De1]), alors que 2 se déduit du théorème de Le Potier et du lemme 1.5.4. Quant à 3, il est équivalent pour $p = n - \delta$ au théorème de Le Potier, et se déduit par récurrence sur δ de la proposition précédente. Si l'on utilise à nouveau le lemme 1.5.4, 3 implique l'annulation des groupes considérés pour

$$l > \frac{1}{3}[p - 2(p + q - n)],$$

ce qui entraîne 4. Enfin, 5 est conséquence de 3 appliqué à $\delta = \frac{n}{3}$ et $\delta = \frac{n-1}{3}$. ♣

Remarque 2.4: La dernière assertion de ce théorème est à rapprocher de la première assertion de la proposition 2.3.1 de la première partie, qui traduisait une propriété évidente des diagrammes associés aux groupes de cohomologie des fibrés associés au fibré quotient sur la grassmannienne. Il serait intéressant de savoir s'il s'agit là d'une propriété générale de la cohomologie des fibrés amples ou globalement engendrés: autrement dit, les fibrés E et L vérifiant par exemple les conditions du théorème précédent, mais E étant de rang quelconque, quel est le plus petit entier $\mu(n, a)$ tel que pour $l \geq 0$,

$$H^{p,q}(X, \Gamma^a E \otimes (\det E)^l \otimes L) = 0 \text{ si } q > p \geq \mu(n, a)?$$

Appendice: démonstration du lemme 2.3.3

Rappelons qu'il s'agit de majorer le nombre d'inversions strictes de l'ordre parmi les $v_1 = s_m$ dernières composantes d'un poids de la forme

$$(*, \dots, *, v_1^* + \gamma_1 - 1, \dots, v_{s_m}^* + \gamma_{s_m} - s_m),$$

où le poids $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{s_m})$ est constitué des s_m dernières composantes du poids d'un facteur d'un produit tensoriel

$$\mathcal{G} = \bigotimes_{1 \leq i < j \leq m+1} \Gamma^{u_{ij}^*} E_i \otimes \Gamma^{-\chi(u_{ij})} E_j,$$

avec $\sum_{i < j} |u_{ij}| = \pi$. La forme de ce produit tensoriel implique, si l'on pose $\mu_i = v_i^* - i$ pour $1 \leq i \leq s_m$, que:

- $\alpha 1$. la suite $(\mu_i)_{1 \leq i \leq s_m}$ est strictement décroissante;
- $\alpha 2$. si $\mu_{i-1} - \mu_i = 1$, alors $\gamma_{i-1} \geq \gamma_i$;
- $\alpha 3$. si $\gamma_i \geq 0$, alors $\sum_{j > i} \gamma_j^- \geq \gamma_i$;
- $\alpha 4$. $\sum_i \gamma_i^+ \leq \sum_j \gamma_j^- \leq \pi$.

En effet, $\alpha 1$ est une évidence, $\alpha 2$ provient du fait que si $\mu_{i-1} - \mu_i = 1$, alors $v_{i-1}^* = v_i^*$, ce qui implique que (γ_{i-1}, γ_i) est une partie d'un poids γ^k d'un fibré associé à un fibré E_k , poids qui est nécessairement décroissant. L'assertion $\alpha 3$ est conséquence du fait qu'à chaque poids u_{ij}^* participant à un γ^k correspond le poids $-\chi(u_{ij})$, de même module, participant à un γ^l , avec $l > k$. Enfin, l'égalité $\sum_{i < j} |u_{ij}| = \pi$, et le fait que les poids positifs u_{ij}^* ne participent pas à γ , impliquent $\alpha 4$.

On supposera que les entiers de la suite $(\mu_i + \gamma_i)_{1 \leq i \leq s_m}$ sont deux à deux distincts (si ce n'était pas le cas, la contribution du facteur considéré au groupe de cohomologie correspondant serait nulle d'après le théorème de Bott), et l'on notera $N_\mu(\gamma)$ le nombre d'inversions strictes de cette suite. Il existe alors un entier ι tel que si $\pi > 0$ et $\pi + |v| \leq \iota$, l'on ait

$$N_\mu(\gamma) < \pi.$$

On se propose, dans cet appendice, de montrer que $\iota \geq 20$ (cette estimation étant d'ailleurs probablement très mauvaise). Ce sera la conséquence de la suite de lemmes suivante:

Lemme A Notons n_γ le nombre d'entiers γ_i non nuls, et Γ_+ (respectivement Γ_-) le nombre d'entiers $\gamma_i > 1$ (respectivement $\gamma_i < -1$) tels que $\gamma_j \geq 0$ si $j < i$ (respectivement $\gamma_j \leq 0$ si $j > i$). Alors

$$N_\mu(\gamma) \leq \sum_{i=1}^{s_m} |\gamma_i| - n_\gamma - \Gamma_+ - \Gamma_-.$$

Preuve: Posons $\mu_i^+ = \mu_i + \gamma_i^+$, et notons $N_\mu^+(\gamma)$ le nombre d'inversions larges de la suite $(\mu_i^+)_{1 \leq i \leq s_m}$. Si $j < i$ et $\mu_j^+ \leq \mu_i^+$, alors $\mu_j \leq \mu_i^+ = \mu_i + \gamma_i^+$, donc $j \geq i - \gamma_i^+$ puisque la suite $(\mu_k)_{1 \leq k \leq s_m}$ est strictement décroissante: en particulier, $\gamma_i > 0$. De plus, si $\mu_{i-\gamma_i}^+ \geq \mu_i^+$, alors nécessairement $\mu_j = \mu_i + i - j$ si $i - \gamma_i \leq j \leq i$. Mais $\alpha 2$ implique alors que la suite $(\gamma_j)_{i-\gamma_i \leq j \leq i}$ est décroissante, ce qui est contradictoire. Il vient

$$\text{Card}\{j < i, \mu_j^+ \leq \mu_i^+\} \leq (\gamma_i^+ - 1)^+.$$

D'autre part, si l'entier i est tel que $\gamma_i \geq 2$ et $\gamma_j \geq 0$ si $j < i$, alors $\mu_j^+ = \mu_j + \gamma_j$ si $j \leq i$, et comme par hypothèse ces entiers sont distincts deux à deux,

$$\text{Card}\{j < i, \mu_j^+ \leq \mu_i^+\} \leq \gamma_i - 2.$$

On obtient donc la majoration

$$N_\mu^+(\gamma) \leq \sum_{i=1}^{s_m} (\gamma_i^+ - 1)^+ - \Gamma_+.$$

De même, si l'on note $N_\mu^-(\gamma)$ le nombre d'inversions de la suite $(\mu_i + \gamma_i)_{1 \leq i \leq s_m}$ par rapport à la suite $(\mu_i^+)_{1 \leq i \leq s_m}$, on obtiendra, en raisonnant de manière analogue, l'inégalité

$$N_\mu^-(\gamma) \leq \sum_{i=1}^{s_m} (\gamma_i^- - 1)^+ - \Gamma_-.$$

D'où l'estimation annoncée, puisque l'inégalité $N_\mu(\gamma) \leq N_\mu^+(\gamma) + N_\mu^-(\gamma)$ implique

$$N_\mu(\gamma) \leq \sum_{i=1}^{s_m} (|\gamma_i| - 1)^+ - \Gamma_+ - \Gamma_- = \sum_{i=1}^{s_m} |\gamma_i| - n_\gamma - \Gamma_+ - \Gamma_-.$$

Remarque A1: Plus généralement, on aura la même majoration si Γ_+ (respectivement Γ_-) désigne le nombre d'entiers $\gamma_i > 1$ (respectivement $\gamma_i < -1$) ne donnant pas plus de $|\gamma_i| - 2$ inversions: ce que l'on supposera dans ce qui suit.

Notons également que si $\gamma_i > 1$ donne $\gamma_i - 1$ inversions, la démonstration qui précède implique que $\mu_{i-1} - \mu_i = 2$, $\mu_{j-1} - \mu_j = 1$ si $i - \gamma_i + 1 < j < i$, et $\gamma_{i-\gamma_i+1}^+ = 0$. Mais dans ce cas, $\mu_i + \gamma_i = \mu_{i-\gamma_i+1}$, autrement dit $\mu_i^+ = \mu_{i-\gamma_i+1}^+$. Les entiers $(\mu_j + \gamma_j)_{1 \leq j \leq s_m}$ étant supposés distincts deux à deux, ceci implique que $\gamma_{i-\gamma_i+1} < 0$, donc d'après $\alpha 2$ que $\gamma_j < 0$ si $i - \gamma_i < j < i$. Autrement dit, si γ_i ne participe pas à Γ_+ , ses prédécesseurs participeront à n_γ , puisqu'ils doivent être non nuls. C'est essentiellement sur ce jeu que reposeront les preuves des lemmes qui vont suivre.

Remarque A2: Les inégalités de $\alpha 4$ peuvent être strictes, si les poids u_{ij}^* et $-\chi(u_{ki})$, après produit tensoriel, donnent des poids dont la somme des composantes positives

(respectivement négatives) est strictement inférieure à celle des poids de départ: on dira qu'il y a eu compensation. Un tel phénomène rend plus efficace l'estimation du lemme A, et l'on se permettra, au lemme C, de supposer qu'il n'a pas lieu: c'est a priori la situation la moins favorable.

Lemme B Si $\max_i |\gamma_i| \leq 3$, alors $N_\mu(\gamma) < \pi$.

Preuve: Pour chaque entier i compris entre 1 et s_m , notons n_i le nombre d'inversions, avec des composantes d'indices aussi bien inférieurs que supérieurs (à la différence du lemme précédent: chaque inversion sera donc comptée deux fois), impliquant l'entier $\mu_i + \gamma_i$. Supposons par exemple $\gamma_i \geq 0$: si $\max_j |\gamma_j| \leq 3$, $\alpha 2$ implique que

- si $\mu_i + \gamma_i < \mu_j + \gamma_j$ avec $j > i$, alors nécessairement $j = i + 1$, $\mu_i - \mu_{i+1} = 2$, $\gamma_i = 0$ et $\gamma_{i+1} = 3$;
- si $\mu_i + \gamma_i > \mu_j + \gamma_j$ avec $j < i$, alors $j \geq i - \gamma_i - 1$, et si cette inégalité est une égalité, on doit avoir $\mu_{i-1} - \mu_i = 2$, $\mu_j - \mu_{i-1} = i - j - 1$ et $\gamma_j = \dots = \gamma_{i-1} = -3$.

Par conséquent, $n_i \leq \gamma_i + 2$. De plus,

- si $n_i = \gamma_i + 2$, alors nécessairement $\mu_{i-1} - \mu_i = \mu_i - \mu_{i+1} = 2$, $\gamma_{i-1} = -3$, $\gamma_i = 0$ et $\gamma_{i+1} = 3$, de sorte que les entiers $(\mu_j + \gamma_j)_{i-1 \leq j \leq i+1}$ forment une suite d'entiers consécutifs qui ne peuvent participer à aucune autre inversion, avec

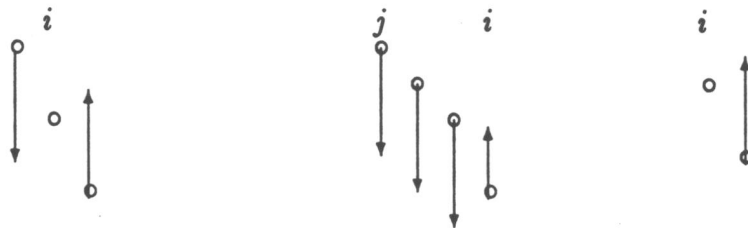
$$n_{i-1} + n_i + n_{i+1} = 6 = |\gamma_{i-1}| + |\gamma_i| + |\gamma_{i+1}|.$$

- si $n_i = \gamma_i + 1$, alors soit $\gamma_i = 0$, $\mu_i - \mu_{i+1} = 2$ et $\gamma_{i+1} = 3$, auquel cas les entiers $\mu_i + \gamma_i$ et $\mu_{i+1} + \gamma_{i+1}$ ne peuvent participer à aucune autre inversion, et

$$n_i + n_{i+1} = 2 < |\gamma_i| + |\gamma_{i+1}| = 3;$$

soit $\gamma_j = \dots = \gamma_{i-1} = -3$ avec $j = i - \gamma_i - 1$, auquel cas les entiers $(\mu_k + \gamma_k)_{j \leq k \leq i}$ sont consécutifs, ne peuvent participer à aucune autre inversion, et

$$n_j + \dots + n_i = 1 + \dots + 1 + (\gamma_i + 1) = 2\gamma_i + 2 < |\gamma_j| + \dots + |\gamma_i| = (\gamma_i + 1) \times 3 + \gamma_i = 4\gamma_i + 3.$$



Configurations pour lesquelles $n_i > \gamma_i$.

On peut donc définir une partition de $\{1, \dots, s_m\}$ en sous-ensembles $(I_k)_{1 \leq k \leq \sigma}$ tels que

$$\sum_{i \in I_k} n_i \leq \sum_{i \in I_k} |\gamma_i|,$$

d'où $N_\mu(\gamma) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s_m} n_i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s_m} |\gamma_i|$: et cette estimation peut se préciser, en raisonnant comme au lemme précédent, en

$$N_\mu(\gamma) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s_m} |\gamma_i| - \Gamma_+ - \Gamma_-.$$

D'après $\alpha 4$, le membre de droite de cette inégalité est au plus égal à π , et l'égalité ne peut avoir lieu que si $\sum_i \gamma_i^+ = \sum_j \gamma_j^- = \pi$ et $\Gamma_+ = \Gamma_- = 0$. Mais d'après $\alpha 3$, le dernier entier γ_i non nul est nécessairement négatif, et si $\Gamma_- = 0$, il doit être égal à -1 . Mais alors il ne peut participer à aucune inversion, autrement dit $n_i = 0 < |\gamma_i|$. L'inégalité précédente ne peut donc être une égalité, et $N_\mu(\gamma) < \pi$.

Lemme C *Si la suite $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq s_m}$ ne contient pas plus de trois termes strictement négatifs (ou strictement positifs), et si $\pi \leq 10$, alors $N_\mu(\gamma) < \pi$.*

Preuve: Supposons (cf la remarque A2) qu'il ne se produise aucune compensation entre les poids des différents termes du produit tensoriel \mathcal{G} , dont provient γ , et par exemple qu'il existe exactement trois termes strictement négatifs: disons γ_{i_1} , γ_{i_2} et γ_{i_3} , avec $i_1 < i_2 < i_3$. La forme du produit tensoriel \mathcal{G} implique alors que les γ_j positifs ou nuls sont:

- nuls au-delà de i_3 ,
- au plus égaux à un entre i_2 et i_3 ,
- au plus égaux à deux entre i_1 et i_2 ,
- au plus égaux à trois en deçà de i_1 .

En effet, si par exemple i_1 et i_2 d'une part, i_2 et i_3 d'autre part, ne sont pas consécutifs, γ_{i_1} , γ_{i_2} et γ_{i_3} correspondent nécessairement à des puissances symétriques d'exposants $|\gamma_{i_1}|$, $|\gamma_{i_2}|$ et $|\gamma_{i_3}|$ de fibrés $E_{k_1}^*$, $E_{k_2}^*$ et $E_{k_3}^*$. Celles-ci ne peuvent provenir que de produits tensoriels de puissances symétriques, et les termes positifs de γ doivent donc provenir de produits tensoriels de puissances extérieures: et un produit tensoriel de m puissances extérieures donne des poids dont les composantes ne peuvent excéder m .

En conséquence, ces termes positifs ou nuls ne peuvent admettre d'inversions entre eux que lorsque

$$\gamma_{i-1} = 0, \quad \gamma_i = 3, \quad \mu_{i-1} - \mu_i = 2.$$

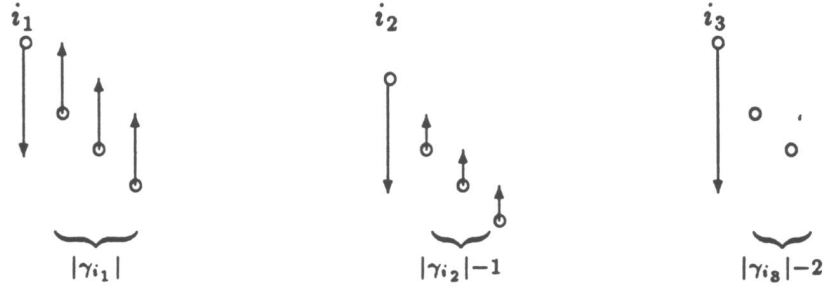
Les trois unités d'un tel entier γ_i doivent alors provenir chacune d'un des trois γ_{i_k} . Si l'on note ν le nombre de telles inversions, ceci implique que

$$\nu \leq \min(|\gamma_{i_1}|, |\gamma_{i_2}|, |\gamma_{i_3}|).$$

D'autre part, les nombres d'inversions associées à $\mu_{i_1} + \gamma_{i_1}, \mu_{i_2} + \gamma_{i_2}, \mu_{i_3} + \gamma_{i_3}$, sont respectivement majorés par $|\gamma_{i_1}|, |\gamma_{i_2}| - 1$ et $(|\gamma_{i_3}| - 2)^+$ (ces valeurs maximales correspondant au schéma ci-dessous). Il vient

$$N_\mu(\gamma) \leq |\gamma_{i_1}| + |\gamma_{i_2}| - 1 + (|\gamma_{i_3}| - 2)^+ + \nu.$$

Si $\gamma_{i_3} = -1$, on obtient $N_\mu(\gamma) \leq |\gamma_{i_1}| + |\gamma_{i_2}| < \pi$. Si $\gamma_{i_3} \leq -2$, alors $N_\mu(\gamma) \leq |\gamma_{i_1}| + |\gamma_{i_2}| + |\gamma_{i_3}| + \nu - 3 \leq \pi + \nu - 3$, et si ces inégalités étaient des égalités $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}$ et γ_{i_3} seraient respectivement dans les configurations suivantes:



D'après $\alpha 4$, ceci impliquerait que $\pi \geq \sum_j \gamma_j^+ \geq 2|\gamma_{i_1}| + |\gamma_{i_2}| - 1 + 3\nu$. Si l'on suppose de plus $N_\mu(\gamma) \geq \pi$, il vient

- soit $N_\mu(\gamma) = \pi + \nu - 3$, d'où $\nu \geq 3$ et $\pi \geq 2 \times 1 + 3 \times 3 = 11$ d'après l'inégalité précédente,
- soit $N_\mu(\gamma) \leq \pi + \nu - 4$, d'où $\nu \geq 4$ et $\pi \geq 3\nu \geq 12$,

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\pi \leq 10$.

Lemme D Si $\pi \leq 10$, alors $N_\mu(\gamma) < \pi$.

Preuve: Supposons $N_\mu(\gamma) \geq \pi$ et $\pi \leq 10$. D'après le lemme précédent, la suite $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq s_m}$ a au moins quatre termes strictement positifs et quatre strictement négatifs. De plus, le lemme B implique que $\max_i |\gamma_i| \geq 4$: il existe donc un entier i_0 tel que, par exemple, $\gamma_{i_0} \geq 4$. La forme du produit tensoriel définissant \mathcal{G} implique alors

- soit qu'au moins γ_{i_0} entiers γ_j , pour $j > i_0$, soient strictement négatifs;
- soit, s'il y a eu compensation par des poids positifs, et si seulement $\gamma_{i_0} - \delta$ entiers γ_j , pour $j > i_0$, sont strictement négatifs, que

$$\sum_j \gamma_j^+ \leq \sum_i \gamma_i^- \leq \pi - \delta.$$

Si $n_\gamma = 8$, on a exactement quatre γ_i non nuls de chaque signe, $\gamma_{i_0} = 4$ et le lemme A implique que

$$\pi \leq N_\mu(\gamma) \leq 2(\pi - \delta) - 8 - \Gamma_+ - \Gamma_-,$$

donc $2\delta + \Gamma_+ + \Gamma_- \leq \pi - 8 \leq 2$, et par conséquent $\delta \leq 1$. Il existe donc au plus un entier γ_j strictement négatif pour $j < i_0$. Mais alors, γ_{i_0} ne peut donner plus de $\gamma_{i_0} - 2$ inversions (puisque s'il en donnait $\gamma_{i_0} - 1$, les entiers γ_j , avec $i_0 - \gamma_{i_0} < j < i_0$, devraient être strictement négatifs), donc $\Gamma_+ > 0$, $\delta = 0$ et $\pi \geq 9$.

Si l'on avait $\sum_j \gamma_j^- < \pi$, le lemme A et $\alpha 4$ impliqueraient que $N_\mu(\gamma) \leq 2\pi - 10 - \Gamma_+ - \Gamma_- < \pi$: comme on a fait l'hypothèse contraire, $\sum_j \gamma_j^- = \pi \geq 9$, et cette somme étant somme de quatre termes non nuls, il existe un entier $\gamma_{j_0} \leq -3$. Si l'on raisonne comme pour Γ_+ il vient $\Gamma_- > 0$, et le lemme A implique que $\pi = 10$.

Dans ce cas, soit l'on a trois $\gamma_j \leq -3$, donc $\Gamma_- \geq 2$ et $N_\mu(\gamma) < \pi$, soit trois γ_j sont égaux à -2 , et le quatrième à -4 . Chacun des γ_j égaux à -2 doit alors donner une inversion dans la preuve du lemme A, ce qui implique que $\gamma_{j+1} = 1$: mais alors $\sum_{i=1}^m \gamma_i^+ < \pi$, donc $N_\mu(\gamma) < \pi$.

Enfin, si $n_\gamma \geq 9$, on montre comme précédemment que $\Gamma_+ + \Gamma_- \geq 2$, d'où $N_\mu(\gamma) \leq 2\pi - 11 < \pi$.

Lemme E Si $|v| \leq 9$, alors $N_\mu(\gamma) \leq 10$.

Preuve: La propriété $\alpha 2$ implique, comme on a noté $s(v^*) = (0 = s_0 < \dots < s_m = v_1)$, que

$$N_\mu(\gamma) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq m} (s_i - s_{i-1})(s_j - s_{j-1})$$

(on ne peut avoir d'inversions entre composantes correspondant à un même fibré E_i , autrement dit comprises entre des entiers $s_{i-1} + 1$ et s_i). Si l'on note $n(v^*)$ le membre de droite de cette inégalité, il suffit donc de montrer que pour tout poids v de module inférieur ou égal à 9, $n(v) \leq 10$.

Il est clair que $n(v) \leq C_{v_1}^2$: c'est donc le cas si $v_1^* \leq 5$, et l'on peut donc supposer que v a au moins six termes non nuls. Notons ν_i le nombre de composantes de v égales à i . On a

$$9 \geq |v| \geq \nu_1 + 2(\nu_1^* - \nu_1),$$

ce qui implique que $\nu_1 \geq 2\nu_1^* - 9 \geq 3$. Comme v est de module au plus égal à 9, il vient $\sum_{j \geq 3} \nu_j \leq 2$. Enfin,

- si cette somme vaut deux, alors $v = (33111)$ et $n(v) = 6$,

- si elle vaut un, $\nu_1 + 2\nu_2 \leq 6$ et

$$n(v) = \nu_1 \nu_2 + \nu_1 + \nu_2 \leq 6 + 5\nu_2 - 2\nu_2^2 \leq 9,$$

- si elle est nulle, $\nu_1 + 2\nu_2 \leq 9$ et

$$n(v) = \nu_1 \nu_2 \leq \nu_2(9 - \nu_2) \leq 10.$$

Conclusion: Supposons $\pi + |v| \leq 20$: si $\pi \leq 10$, le lemme D implique que $N_\mu(\gamma) < \pi$. Si $\pi > 10$, alors $|v| \leq 9$ et le lemme E implique que $N_\mu(\gamma) \leq 10 < \pi$. Le lemme 2.3.3 est donc démontré.

Bibliographie

- [AN] Akizuki, Y., Nakano, S.: Note on Kodaira-Spencer's proof of Lefschetz theorems, Proc. Jap. Acad., **30** (1954), 266-272.
- [AO] Alzati, A., Ottaviani, G.: Small codimension subvarieties of \mathbb{P}^n , Bolletino U.M.I (7), **2-A** (1988), 81-89.
- [De1] Demailly, J.P.: Vanishing theorems for tensor powers of an ample vector bundle, Invent.Math. **91**, 203-220 (1988).
- [De2] Demailly, J.P.: Théorèmes d'annulation pour la cohomologie des puissances tensorielles d'un fibré positif, C.R.Acad.Sci.Paris, Sér.I Math., **305**, 419-422 (1987).
- [De3] Demailly, J.P.: Vanishing theorems for tensor powers of a positive vector bundle, Proceedings of the conference "Geometry and Analysis on manifolds" held in Katata-Kyoto (august 1987), edited by T.Sunada, Lecture Notes in Mathematics n° 1339, Springer-Verlag, 1988.
- [EL] Ein, L., Lazarsfeld, R.: A theorem on the syzygies of smooth projective varieties of arbitrary dimension, preprint.
- [F] Faltings, G.: Verschwindungssätze und Untermannigfaltigkeiten kleiner Kodimension des projectiven Raums, J. reine und angew. Math. **326** (1981), 136-151.
- [GH] Griffiths, P.A., Harris, J.: Principles of algebraic geometry, Wiley Interscience, New York, 1978.
- [Gr] Griffiths, P.A.: Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles, in *Global analysis, papers in honor of K.Kodaira*, Princeton Univ.Press, Princeton, 1969, 185-251.
- [H] Hartshorne, R.: Ample vector bundles, Publ.Math.I.H.E.S. **29**, 63-94 (1966).
- [Ko1] Kostant, B.: Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem, Annals of Math. **74**, 329-387 (1961).
- [Ko2] Kostant, B.: Lie algebra cohomology and generalized Schubert cells, Annals of Math. **77**, 72-144 (1962).
- [LP1] Le Potier, J.: Cohomologie de la Grassmannienne à valeurs dans les puissances extérieures et symétriques du fibré universel, Math.Ann., **266**, 257-270 (1977).
- [LP2] Le Potier, J.: Annulation de la cohomologie à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe positif de rang quelconque, Math.Ann. **218**, 35-53 (1975).
- [M2] Manivel, L.: Un théorème d'annulation pour les puissances extérieures d'un fibré ample, J. reine und angew. Math. **422** (1991), 91-116.
- [PLPS1] Peternell, Th., Le Potier, J., Schneider, M.: Direct images of sheaves of differentials and the Atiyah class, Math.Z. **196**, 75-85 (1987).
- [PLPS2] Peternell, Th., Le Potier, J., Schneider, M.: Vanishing theorems, linear and quadratic normality, Invent.Math. **87**, 573-586 (1987).
- [Sch1] Schneider, M.: Ein einfacher Beweis des Verschwindungssatzes für positive holomorphe Vektorraumbündel, Manuscr.Math. **11**, 95-101 (1974).
- [Sch2] Schneider, M.: Some remarks on vanishing theorems for holomorphic vector bundles, Math.Z. **186**, 135-142 (1984).

- [Sch3] Schneider, M.: Symmetric differential forms as embedding obstructions and vanishing theorems, preprint.
- [ShS] Shiffman, B., Sommese, A.J.: Vanishing theorems on complex manifolds, Prog. in Math. **56**, Birkhäuser, 1985.
- [So] Sommese, A.J.: Submanifolds of abelian varieties, Math. Ann. **233**, 229-256 (1978).

Troisième partie

UN PROBLÈME DE PROLONGEMENT
DES SECTIONS D'UN FIBRÉ EN DROITES

Introduction

Dans cette dernière partie, nous montrons comment les techniques d'analyse "à la Hörmander" peuvent aller au-delà des résultats géométriques que permettent d'obtenir les théorèmes d'annulation auxquels nous nous sommes jusqu'ici consacrés.

En l'occurrence, il s'agit de prolonger, à partir d'une sous-variété, les sections d'un fibré en droites, à une variété par exemple projective. On sait qu'un tel prolongement est possible si ce fibré en droites est suffisamment positif. Lorsque la sous-variété considérée est le lieu des zéros d'une section d'un fibré vectoriel hermitien, nous en donnons des conditions effectives, soit d'amplitude, soit de courbure.

1 Introduction et résultats

1.1 Le théorème principal

Le problème du prolongement de fonctions holomorphes avec contrôle de croissance, d'une sous-variété d'une variété complexe, à cette variété tout entière, a donné lieu depuis une dizaine d'années à un certain nombre de travaux dont la plupart des résultats semblent pouvoir être étendus très naturellement aux cas où ce sont des sections holomorphes de fibrés hermitiens, possédant éventuellement certaines propriétés de positivité, que l'on cherche à prolonger. Nous donnons ici, en particulier, une généralisation en codimension quelconque d'un théorème dû, dans un cas très particulier, à Ohsawa et Takegoshi ([O-T]), généralisation qui peut être énoncée de la façon suivante:

Théorème 1 *Soient X une variété de Stein de dimension n , E un fibré de rang d sur X , s une section holomorphe de E génériquement transverse à la section nulle, et*

$$Y = \{x \in X, s(x) = 0, \wedge^d ds(x) \neq 0\}.$$

Soit $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ le fibré en espaces projectifs des droites du fibré E : s définit à la fois une section de $\mathbb{P}(E)$ au-dessus de $X \setminus s^{-1}(0)$, et une section, que l'on notera σ , de l'image réciproque sur $X \setminus s^{-1}(0)$ du fibré en droites tautologique $\mathcal{O}_{E^}(-1)$ sur $\mathbb{P}(E)$.*

On suppose $\mathcal{O}_{E^}(-1)$ muni d'une métrique hermitienne, et X d'une $(1,1)$ -forme positive fermée Ω telle que*

$$\pi^* \Omega \geq ic(\mathcal{O}_{E^*}(-1)) \quad \text{sur } \mathbb{P}(E).$$

Soit alors L un fibré en droites hermitien sur X tel qu'il existe un réel strictement positif α pour lequel

$$\frac{1}{d} \pi^* ic(L) \geq \alpha \pi^* \Omega + ic(\mathcal{O}_{E^*}(-1)).$$

Supposons de plus E muni d'une métrique hermitienne telle que $|s| \leq \kappa |\sigma|$, où κ est un réel strictement positif, et munissons $L \otimes (\det E)^{-1}$ de la métrique hermitienne associée.

Alors pour toute fonction ξ plurisousharmonique sur X , tout réel strictement positif β et toute section holomorphe g sur Y de $K_Y \otimes L \otimes (\det E)^{-1}$ telle que

$$i^{(n-d)^2} \int_Y e^{-\xi} \{g, g\} < +\infty,$$

il existe une section holomorphe G sur X de $K_X \otimes L$, telle que $G|_Y = g \wedge (\wedge^d ds)$, et

$$i^{n^2} \int_X \frac{e^{-\xi} \{G, G\}}{|\sigma|^{2d-2} (1 + |\sigma|^2)^{1+\beta}} \leq M i^{(n-d)^2} \int_Y e^{-\xi} \{g, g\},$$

où M est une constante numérique ne dépendant que de d , α , β et κ .

Remarque 1: Etant donné un fibré holomorphe hermitien E sur une variété de Stein X , il existe toujours une $(1,1)$ -forme positive fermée Ω sur X telle que sur $\mathbb{P}(E)$,

$$\pi^*\Omega \geq ic(\mathcal{O}_{E^*}(-1)),$$

à condition bien sûr de supposer que la métrique hermitienne considérée sur $\mathcal{O}_{E^*}(-1)$ admette une courbure négative sur les fibres de π , ce que l'on peut toujours faire. En effet, sous cette condition, soit ϕ une fonction strictement plurisousharmonique exhaustive sur X , et χ une fonction convexe croissante sur \mathbb{R}^+ . Alors $\Omega = id'd''(\chi \circ \phi)$ convient si χ est suffisamment croissante. Plus précisément, si $X_n = \phi^{-1}([0, n])$, $\overline{X_{n+1}} \setminus X_n$ est compact par hypothèse, donc il existe des réels m_n , $n \in \mathbb{N}$, tels que

$$ic(\mathcal{O}_{E^*}(-1)) \leq m_n \pi^* id'd''\phi \quad \text{sur} \quad \overline{X_{n+1}} \setminus X_n,$$

et comme $id'd''(\chi \circ \phi) = i(\chi'' \circ \phi)d'\phi \wedge d''\phi + i(\chi' \circ \phi)d'd''\phi \geq i(\chi' \circ \phi)d'd''\phi$, il suffit de supposer que pour tout entier n , $\chi'(n) \geq m_n$, ce qui est toujours possible.

De la même façon, étant donnée une section g sur Y de $K_Y \otimes L \otimes (det E)^{-1}$, on peut munir L d'une métrique dont la courbure vérifie l'hypothèse de l'énoncé précédent, et pour laquelle g soit intégrable sur Y relativement au poids $e^{-\xi}$.

Remarque 2: Le résultat précédent s'étend directement au cas des formes différentielles D'' -fermées de bidegré $(0, q)$: si X est munie d'une métrique kählérienne ω , on obtient les estimations L^2 suivantes, qui ne sont cependant plus intrinsèques:

$$\int_X \frac{e^{-\xi} |G|^2 dV_X}{|\sigma|^{2d-2} (1 + |\sigma|^2)^{1+\beta}} \leq M \int_Y e^{-\xi} |g|^2 dV_Y,$$

où dV_X et dV_Y désignent les éléments de volume kählériens de X et Y . On obtiendrait ainsi des résultats d'extension pour les q -formes D'' -fermées en degré $q \geq 0$ quelconque.

On a noté $\{ , \}$ l'accouplement sesquilinéaire naturellement défini sur les formes à valeurs dans un fibré en droites hermitien \mathcal{L} , et à valeurs dans les formes scalaires, de la façon suivante: soit U un ouvert de trivialisatation de \mathcal{L} , et λ une section de \mathcal{L} ne s'annulant pas sur U ; si $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\tau}$ sont des formes à valeurs dans \mathcal{L} , qui sur U s'écrivent

$$\tilde{\sigma} = \sigma \otimes \lambda \quad \text{et} \quad \tilde{\tau} = \tau \otimes \lambda,$$

alors $\{\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}\}_U = |\lambda|^2 \sigma \wedge \bar{\tau}$.

Rappelons également que la connexion de Chern D de \mathcal{L} est l'unique connexion dont la partie de type $(0,1)$ s'identifie sur toute trivialisatation holomorphe de \mathcal{L} à l'opérateur d'' , et hermitienne, c'est-à-dire telle que pour toutes formes $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\tau}$ à valeurs dans \mathcal{L} ,

$$d\{\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}\} = \{D\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}\} + (-1)^{deg \tilde{\sigma}} \{\tilde{\sigma}, D\tilde{\tau}\}.$$

1.2 Cas d'une variété projective

Soit NY le fibré normal à Y , que définit la suite exacte

$$0 \rightarrow TY \rightarrow TX|_Y \rightarrow NY \rightarrow 0,$$

et considérons la suite exacte duale tensorisée par E

$$0 \rightarrow NY^* \otimes E|_Y \rightarrow T^*X \otimes E|_Y \rightarrow T^*Y \otimes E|_Y \rightarrow 0.$$

La différentielle ds est une section de $T^*X \otimes E|_Y$ qui, s étant nulle sur Y , s'identifie en fait à une section de $NY^* \otimes E|_Y$: la supposer de rang d implique qu'elle définit un isomorphisme des fibrés NY et $E|_Y$. De plus, $\wedge^d ds$ apparaît comme une section holomorphe sur Y du fibré en droites $(\det E) \otimes (\det NY)^{-1} = K_X \otimes K_Y^{-1} \otimes \det E$. Si g est une section holomorphe sur Y d'un fibré en droites hermitien L , et si s est partout transverse à la section nulle, il existe donc une unique section holomorphe \tilde{g} sur Y du fibré $K_Y \otimes L \otimes K_X^{-1} \otimes (\det E)^{-1}$ telle que $g = \tilde{g} \otimes \wedge^d ds$.

En utilisant la propriété classique du complémentaire d'un diviseur ample d'une variété projective, d'être une variété de Stein, on peut ainsi obtenir, pour une variété projective, la surjectivité des morphismes de restriction des sections d'un fibré en droites à une sous-variété définie par une section d'un fibré holomorphe partout transverse à la section nulle, sous des hypothèses de courbure que nous affaiblirons en une hypothèse purement algébrique:

Corollaire 1 *Soient X une variété projective, E un fibré holomorphe de rang d sur X , s une section holomorphe de E partout transverse à la section nulle, et $Y = s^{-1}(0)$. Soit $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ le fibré des droites de E , $\mathcal{O}_{E^*}(-1)$ le fibré en droites tautologique sur $\mathbb{P}(E)$, et $\mathcal{O}_{E^*}(d)$ la d -ième puissance tensorielle de son dual.*

Alors si L est un fibré en droites holomorphe sur X tel que $\pi^(L \otimes K_X^*) \otimes \mathcal{O}_{E^*}(d)$ soit ample sur $\mathbb{P}(E)$, le morphisme de restriction $H^q(X, L) \rightarrow H^q(Y, L)$ est surjectif pour tout entier $q \geq 0$.*

Preuve: Supposons X et L munis de métriques hermitiennes, et munissons $\mathcal{O}_{E^*}(d)$ d'une métrique telle que pour la métrique associée, $\pi^*(L \otimes K_X^*) \otimes \mathcal{O}_{E^*}(d)$ admette une courbure strictement positive.

Soit X' le complémentaire dans X d'un diviseur ample: si t est une section holomorphe sur X du fibré en droites ample associé à ce diviseur, $-\log |t|$ est une fonction strictement plurisousharmonique exhaustive sur X' , qui est donc une variété de Stein.

Soit H est un fibré en droites ample sur X , muni d'une métrique hermitienne de courbure strictement positive: l'hypothèse faite sur $\mathcal{O}_{E^*}(d)$ implique que la courbure de $\mathcal{O}_{E^*}(-1)$ est négative sur les fibres de π , donc qu'il existe un entier positif k tel que

$$\pi^*(kic(H)) \geq ic(\mathcal{O}_{E^*}(-1)).$$

Comme $\pi^*ic(L \otimes K_X^*) + ic(\mathcal{O}_{E^*}(d))$ est strictement positive sur $\mathbb{P}(E)$, qui est compact, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\frac{1}{d}\pi^*ic(L \otimes K_X^*) \geq \alpha\pi^*(kic(H)) + ic(\mathcal{O}_{E^*}(-1)).$$

On peut donc appliquer sur X' le théorème 1, et toute $(0, q)$ -forme D'' -fermée sur $Y \cap X'$ à valeurs dans L se prolonge à X' , avec estimations L^2 . Enfin, le prolongement obtenu étant D'' -fermé et localement L^2 en dehors d'un sous ensemble analytique de X , en l'occurrence $X - X'$, se prolonge lui même en une forme D'' -fermée sur X tout entière ([De1], lemme 6.9).

Remarque 3: Lorsque E est nef (au sens où le fibré en droites $\mathcal{O}_E(1)$ sur $\mathbb{P}(E^*)$ est numériquement effectif), on peut également, pour $q > 0$, démontrer la surjectivité du morphisme $H^q(X, L) \rightarrow H^q(Y, L)$ au moyen du complexe de Koszul associé à s :

$$0 \rightarrow \wedge^d E^* \rightarrow \cdots \rightarrow E^* \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow i_* \mathcal{O}_Y \rightarrow 0,$$

où i est l'injection de Y dans X . Si l'on note S_1, \dots, S_{d-1} les faisceaux noyaux des morphismes de ce complexe tensorisé par L , celui-ci se réduit aux suites exactes courtes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow S_1 \rightarrow \mathcal{O}_X \otimes L \rightarrow i_* \mathcal{O}_Y \otimes L \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow S_{i+1} \rightarrow \wedge^i E^* \otimes L \rightarrow S_i \rightarrow 0, \quad 1 \leq i \leq d-2, \\ 0 \rightarrow \wedge^d E^* \otimes L \rightarrow \wedge^{d-1} E^* \otimes L \rightarrow S_{d-1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Il suffit, pour établir la surjectivité du morphisme de restriction $H^q(X, L) \rightarrow H^q(Y, L)$, de vérifier que $H^{q+1}(X, S_1) = 0$. Mais l'hypothèse selon laquelle $\pi^*(L \otimes K_X^*) \otimes \mathcal{O}_{E^*}(d)$ est ample sur $\mathbb{P}(E)$ implique que $\mathcal{L} = L \otimes K_X^* \otimes (det E)^{-1}$ est lui-même ample sur X . Si E est nef, une légère variante d'un théorème de Le Potier ([LP]) donne

$$H^k(X, \wedge^i E^* \otimes L) = H^{n,k}(X, \wedge^{d-i} E \otimes \mathcal{L}) = 0$$

si $k > i$. Il s'ensuit que $H^k(X, S_i) = H^{k+1}(X, S_{i+1})$ si $k > i$, donc, par une récurrence immédiate, que $H^{q+1}(X, S_1) = 0$ si $q > 0$.

Cependant, la surjectivité du morphisme de restriction en degré zéro ne semble pas pouvoir être démontrée de cette manière; notons que le résultat de Le Potier est optimal: si X est l'espace projectif d'un espace vectoriel complexe V de dimension $n+1$, E le fibré quotient sur X , de rang $d = n$, alors E est nef puisque quotient d'un fibré trivial, son fibré déterminant est ample, et l'on peut vérifier que

$$H^{n,n-k}(X, \wedge^k E \otimes (det E)^k) = (det V)^k \neq 0.$$

Le groupe $H^1(X, S_1)$ peut donc a priori ne pas s'annuler, le corollaire précédent impliquant cependant que l'image par l'homomorphisme cobord de $H^0(Y, L)$ dans ce groupe est nulle.

Le théorème qui précède sera démontré en trois temps: on établit d'abord pour les sections d'un fibré hermitien sur une variété kählérienne des estimations proches de celles qui permettent d'obtenir des théorèmes d'existence de prolongements L^2 ; on munit ensuite les ensembles de sous-niveaux de X relatifs à une fonction exhaustive strictement plurisousharmonique donnée, de métriques kählériennes complètes; on montre enfin que les hypothèses faites sur les fibrés impliqués permettent, sur ces ensembles de sous-niveau, de ramener les estimations précédentes à celles qui impliquent effectivement l'existence de prolongements.

Je tiens, enfin, à remercier Jean Pierre Demailly de m'avoir proposé ce travail, et pour ses remarques toujours très pertinentes.

2 Preuve du théorème principal

2.1 Une estimation générale

L'objet de ce paragraphe est de donner une version adéquate, pour un fibré hermitien, des estimées de Donnelly-Fefferman-Xavier ([D-F],[D-X]), telles qu'elles ont été utilisées par Ohsawa et Takegoshi ([O-T]): les méthodes de ces derniers auteurs se transposent ici directement.

Lemme 1 *Soit F un fibré en droites hermitien sur une variété X munie d'une métrique kählérienne, soit $\phi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$; on munit l'espace des formes à support compact $C_c^{n,q}(X, F)$ du produit hermitien*

$$(u, v)_\phi = \int_X e^{-\phi} \{u, *v\},$$

où $*$ est l'opérateur de Hodge relatif à la métrique considérée sur X . On suppose données sur X des fonctions $\eta \in C^\infty(X, \mathbb{R}^{+*})$ et $\gamma \in C^0(X, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in X, \quad \gamma(x) \geq \max(|d''\eta(x)|, \eta^{\frac{1}{2}}(x)).$$

Alors $\forall u \in C_c^{n,q}(X, F)$,

$$2(\|\gamma \delta_\phi'' u\|_\phi^2 + \|\gamma D'' u\|_\phi^2) \geq (\eta[ic(F) + id'd''\phi, \Lambda]u, u)_\phi - ([id'd''\eta, \Lambda]u, u)_\phi - \|u\|_\phi^2,$$

où δ_ϕ'' est l'adjoint formel de D'' pour le produit hermitien défini ci-dessus.

Preuve: Si l'on multiplie la métrique de F par $e^{-\phi}$, le fibré hermitien F_ϕ obtenu admet pour courbure

$$ic(F_\phi) = ic(F) + id'd''\phi,$$

ce qui permet de se ramener au cas où $\phi = 0$. Soient alors δ' et δ'' les adjoints formels des opérateurs d' et d'' pour le produit hermitien $(\ , \)_0$ défini sur les formes à valeurs dans F . Les opérateurs de Laplace-Beltrami

$$\begin{aligned}\Delta'' &= D''\delta'' + \delta''D'', \\ \Delta' &= D'\delta' + \delta'D',\end{aligned}$$

sont liés par la relation de Bochner-Kodaira-Nakano

$$\Delta'' - \Delta' = [ic(F), \Lambda]. \quad (1)$$

On effectue alors les transformations suivantes:

$$\begin{aligned}D''\eta\delta'' + \delta''\eta D'' &= [D'', \eta]\delta'' + \eta[D'', \delta''] + [\delta'', \eta]D'' \\ &= (d''\eta)\delta'' + \eta\Delta'' - (d''\eta)^*D'',\end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}D'\eta\delta' + \delta'\eta D' &= [D', \eta]\delta' + \eta[D', \delta'] + [\delta', \eta]D' \\ &= (d'\eta)\delta' + \eta\Delta' - (d'\eta)^*D'.\end{aligned} \quad (3)$$

En soustrayant ces égalités, et en tenant compte de l'identité (1), on obtient

$$\begin{aligned}&D''\eta\delta'' + \delta''\eta D'' - D'\eta\delta' - \delta'\eta D' \\ &= \eta[ic(F), \Lambda] + (d''\eta)\delta'' + (d'\eta)^*D' - (d''\eta)^*D'' - (d'\eta)\delta'.\end{aligned} \quad (4)$$

De plus, l'identité de Jacobi permet d'écrire

$$[D'', [d'\eta, \Lambda]] - [d'\eta, [\Lambda, D'']] + [\Lambda, [D'', d'\eta]] = 0, \quad (5)$$

c'est-à-dire

$$-[D'', (d''\eta)^*] = -[id'd''\eta, \Lambda] + [\delta', d'\eta]. \quad (6)$$

Si $u \in C_c^{n,q}(X, F)$, $(d'\eta)u = 0$, et (6) implique que

$$((d'\eta)\delta'u, u) = ([id'd''\eta, \Lambda]u, u) - (D''u, (d''\eta)u) - (u, (d''\eta)\delta''u). \quad (7)$$

Appliquons à présent l'identité (4) à la forme u , en remarquant par exemple que

$$(D''\eta\delta''u, u) = \|\eta^{\frac{1}{2}}\delta''u\|^2,$$

et que $D'u = 0$ pour des raisons de dimension: il vient

$$\begin{aligned} \|\eta^{\frac{1}{2}}\delta''u\|^2 + \|\eta^{\frac{1}{2}}D''u\|^2 - \|\eta^{\frac{1}{2}}\delta'u\|^2 &= (\eta[ic(F), \Lambda]u, u) + ((d''\eta)\delta''u, u) \\ &\quad - (D''u, (d''\eta)u) - ((d''\eta)\delta'u, u), \end{aligned} \quad (8)$$

donc d'après (7),

$$\begin{aligned} \|\eta^{\frac{1}{2}}\delta''u\|^2 + \|\eta^{\frac{1}{2}}D''u\|^2 &\geq (\eta[ic(F), \Lambda]u, u) - ([id'd''\eta, \Lambda]u, u) \\ &\quad + ((d''\eta)\delta''u, u) + (u, (d''\eta)\delta''u). \end{aligned} \quad (9)$$

De plus il est clair que la somme des deux derniers termes de l'inégalité qui précède, à savoir $2\operatorname{Re}((d''\eta)\delta''u, u)$, est en valeur absolue majorée par $2\|(d''\eta)\delta''u\| \times \|u\| \leq \|(d''\eta)\delta''u\|^2 + \|u\|^2$. Si γ majore à la fois $\eta^{\frac{1}{2}}$ et $|d''\eta|$, on déduit donc finalement de (9) l'estimation

$$\begin{aligned} &(\eta[ic(F), \Lambda]u, u) - ([id'd''\eta, \Lambda]u, u) \\ &\leq \|\eta^{\frac{1}{2}}\delta''u\|^2 + \|\eta^{\frac{1}{2}}D''u\|^2 + \|(d''\eta)\delta''u\|^2 + \|u\|^2 \\ &\leq 2(\|\gamma\delta''u\|^2 + \|\gamma D''u\|^2) + \|u\|^2, \end{aligned} \quad (10)$$

ce qui n'est autre que l'inégalité annoncée.

2.2 Un prolongement C^∞

La variété X étant de Stein, il existe une fonction ϕ régulière, exhaustive, strictement plurisousharmonique sur X telle que les ensembles de sous-niveaux

$$X_c = \{x \in X, \phi(x) < c\},$$

soient relativement compacts dans X . Remarquons de plus, comme Ohsawa et Takegoshi, que l'on peut supposer que $Y = s^{-1}(0)$, autrement dit que $\wedge^d ds$ ne s'annule pas sur Y , quitte à se placer dans le complémentaire d'une hypersurface H contenant le lieu des zéros de $\wedge^d ds$, et à effectuer ensuite un prolongement à travers H comme au corollaire 1, ce que les estimations L^2 permettent de faire.

Soit $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ le fibré en espaces projectifs des droites du fibré E . La section s définit au dessus de $X \setminus Y$ une section de ce fibré, dont l'image Σ a pour adhérence $\Sigma \cup \pi^{-1}(Y)$, ainsi qu'une section de la restriction à Σ du fibré en droites tautologique $\mathcal{O}_{E^*}(-1)$. On notera $\hat{\sigma}$ cette restriction, de sorte que si $y \in \Sigma$,

$$\hat{\sigma}(y) = (y, s \circ \pi(y)) \in \mathcal{O}_{E^*}(-1)_y,$$

et l'on notera $\sigma = s^*\hat{\sigma}$ son image réciproque sur $X \setminus Y$.

Soit alors χ une fonction décroissante de classe C^∞ de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} , telle que $\chi = 1$ sur $[0, \frac{1}{2}]$, $\chi = 0$ sur $[1, +\infty[$, et $|\chi'| \leq 3$. La variété X étant de Stein, la

section $g \wedge (\wedge^d ds)$ de $K_X \otimes L$ sur Y admet un prolongement holomorphe G à X tout entière, et l'on posera

$$\begin{aligned} G_\epsilon &= \chi(\epsilon^{-2}|\sigma|^2)G \in C_{n,0}^\infty(X \setminus Y, L), \\ v_\epsilon &= D''G_\epsilon = \epsilon^{-2}\chi'(\epsilon^{-2}|\sigma|^2)\{\sigma, D\sigma\} \wedge G \in C_{n,1}^\infty(X \setminus Y, L), \end{aligned}$$

où l'on a noté D la connexion de Chern associée sur $X \setminus Y$ à la métrique hermitienne donnée sur $\mathcal{O}_{E^*}(-1)$.

2.3 Une métrique kählérienne complète sur $X_c \setminus Y$

Pour être en mesure d'utiliser la théorie de Hodge L^2 , nous aurons besoin de disposer sur $X_c \setminus Y$ d'une métrique kählérienne complète, qui sera donnée par une expression de la forme

$$\omega_{\delta,\gamma} = id'd''[-\delta \log(c - \phi) + \gamma \rho(\log |\sigma|^2) + \beta \log(1 + |\sigma|^2)] + \beta \Omega,$$

où δ et γ sont des réels strictement positifs, et ρ une fonction de classe C^∞ convexe et croissante sur \mathbb{R} .

Lemme 2 *Si $\pi^*\Omega \leq ic(\mathcal{O}_{E^*}(-1))$ sur $\mathbb{P}(E)$, on peut choisir la fonction ρ de telle sorte que lorsque $0 < \gamma \leq \delta$, $\omega_{\delta,\gamma}$ définisse une métrique kählérienne complète sur $X_c \setminus Y$, avec*

$$|\{D\sigma, \sigma\}|_{\delta,\gamma} \leq \beta^{-\frac{1}{2}}|\sigma|(1 + |\sigma|^2). \quad (11)$$

Preuve:

• $\omega_{\delta,\gamma}$ **définit une métrique kählérienne**

En effet, la connexion de Chern D de $s^*\mathcal{O}_{E^*}(-1)$ étant hermitienne, l'identité de Schwarz

$$i\{\sigma, \sigma\}\{D\sigma, D\sigma\} \geq i\{D\sigma, \sigma\} \wedge \{\sigma, D\sigma\}$$

implique la minoration

$$\begin{aligned} id'd'' \log(1 + |\sigma|^2) &= (1 + |\sigma|^2)^{-1}i(\{D\sigma, D\sigma\} - \{is^*c(\mathcal{O}_{E^*}(-1))\sigma, \sigma\}) \\ &\quad - (1 + |\sigma|^2)^{-2}i\{D\sigma, \sigma\} \wedge \{\sigma, D\sigma\} \\ &\geq |\sigma|^{-2}(1 + |\sigma|^2)^{-2}i\{D\sigma, \sigma\} \wedge \{\sigma, D\sigma\} \\ &\quad - (1 + |\sigma|^2)^{-1}\{is^*c(\mathcal{O}_{E^*}(-1))\sigma, \sigma\}, \end{aligned} \quad (12)$$

de sorte que l'inégalité $\pi^*\Omega \leq ic(\mathcal{O}_{E^*}(-1))$ implique que sur $X \setminus Y$,

$$\Omega + id'd'' \log(1 + |\sigma|^2) \geq 0. \quad (13)$$

Si $\mu = \log |\sigma|^2$, on aura de plus, ρ étant supposée convexe,

$$id'd''(\rho \circ \mu) = (\rho' \circ \mu)id'd''\mu + (\rho'' \circ \mu)id'\mu \wedge d''\mu \geq (\rho' \circ \mu)id'd''\mu. \quad (14)$$

D'après l'équation de Lelong-Poincaré,

$$id'd''\mu + is^*c(\mathcal{O}_{E^*}(-1)) = 0 \quad \text{sur } X \setminus Y;$$

ϕ étant strictement plurisousharmonique, et X_c relativement compact dans X , il existe donc un réel $m_c > 0$ tel que $id'd''\mu \geq -m_c id'd''\phi$ sur $X_c \setminus Y$. Mais alors, si c_0 est la valeur minimale de ϕ sur X ,

$$id'd''\log(c - \phi) \geq i(c - c_0)^{-1}id'd''\phi, \quad (15)$$

et d'après (13), (14) et (15),

$$\omega_{\delta,\gamma} \geq [\delta(c - c_0)^{-1} - \gamma m_c \|\rho'\|_\infty]id'd''\phi. \quad (16)$$

Si $0 < \gamma \leq \delta$, il suffit donc, ϕ étant strictement plurisousharmonique, que soit vérifiée l'inégalité $\|\rho'\|_\infty < m_c^{-1}(c - c_0)^{-1} = M_c^{-1}$ pour que $\omega_{\delta,\gamma}$ définisse une métrique kählérienne sur $X_c \setminus Y$. (12) implique alors que

$$\omega_{\delta,\gamma} \geq \beta|\sigma|^{-2}(1 + |\sigma|^2)^2 i\{D\sigma, \sigma\} \wedge \{\sigma, D\sigma\}, \quad (17)$$

d'où l'estimation (11).

• **$\omega_{\delta,\gamma}$ définit une métrique complète**

Dans les conditions précédentes, (13) et (14) impliquent que

$$\begin{aligned} \omega_{\delta,\gamma} &\geq \delta(c - \phi)^{-2}id'\phi \wedge d''\phi + \gamma(\rho'' \circ \mu)id'\mu \wedge d''\mu \\ &\geq \delta id'(c - \phi)^{-1} \wedge d''(c - \phi)^{-1} + \gamma id'(\tau \circ \mu) \wedge d''(\tau \circ \mu), \end{aligned}$$

où $\tau(t) = \int_0^t \sqrt{\rho''(u)}du$. Comme $(c - \phi)^{-1}$ tend vers l'infini à la frontière de X_c , $\omega_{\delta,\gamma}$ est complète au voisinage de cette frontière. Pour qu'elle le soit également le long de Y , il suffit que $\tau \circ \mu$ tende vers l'infini le long de Y , c'est-à-dire que

$$\int_{-\infty}^0 \sqrt{\rho''(u)}du = +\infty.$$

On pourra, par exemple, poser

$$\rho(u) = \frac{1}{3M_c}(u - \log|u|) \quad \text{si } u \leq -1.$$

2.4 Fonctions auxiliaires

Introduisons à présent une fonction convexe croissante $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R})$, telle que

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t-1 & \text{si } t \geq 2, \end{cases}$$

et $\lambda'' \leq \frac{2}{3}$. Si μ_ϵ est un réel strictement positif, on définit une fonction $\eta_\epsilon \in C^\infty(X \setminus Y, \mathbb{R}^{+*})$ en posant

$$\eta_\epsilon(x) = \mu_\epsilon + \lambda(-\log(|\sigma(x)|^2 + \epsilon^2)).$$

D'après les hypothèses faites sur λ , on a $\eta_\epsilon(x) = \mu_\epsilon$ si $|\sigma(x)| \geq 1$, et comme

$$d''\eta_\epsilon = -\lambda'(-\log(|\sigma|^2 + \epsilon^2))(|\sigma|^2 + \epsilon^2)^{-1}\{\sigma, D\sigma\}, \quad (18)$$

l'inégalité (11) implique que

$$(|\sigma|^2 + \epsilon^2)|d''\eta_\epsilon|_{\delta, \gamma} \leq \beta^{-\frac{1}{2}}\lambda'(-\log(|\sigma|^2 + \epsilon^2))\frac{|\sigma|}{(|\sigma|^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}}(1 + |\sigma|^2) \leq 2\beta^{-\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

De plus, $\eta_\epsilon \leq \mu_\epsilon + 1$ si $|\sigma|^2 + \epsilon^2 \geq e^{-2}$, alors que si $|\sigma|^2 + \epsilon^2 \leq e^{-2}$,

$$(|\sigma|^2 + \epsilon^2)\eta_\epsilon \leq \max_{0 \leq \tau \leq e^{-2}} \tau(\mu_\epsilon - \log \tau - 1) = e^{-2}(\mu_\epsilon + 1). \quad (20)$$

Si l'on définit la fonction $\gamma_\epsilon \in C^0(X \setminus Y, \mathbb{R})$ par

$$\gamma_\epsilon = \max[(\mu_\epsilon + 1)^{\frac{1}{2}}, \theta_\epsilon(|\sigma|^2 + \epsilon^2)^{-\frac{1}{2}}], \quad (21)$$

avec $\theta_\epsilon = \max(2\beta^{-\frac{1}{2}}, e^{-1}(\mu_\epsilon + 1)^{\frac{1}{2}})$, les inégalités (19) et (20) impliquent que

$$\gamma_\epsilon \geq \max(|d''\eta_\epsilon|_{\delta, \gamma}, \eta_\epsilon^{\frac{1}{2}}), \quad (22)$$

ce qui permettra d'utiliser le lemme 1. Il sera de plus utile de remarquer que

$$\frac{|\sigma\gamma_\epsilon|^2}{1 + |\sigma|^2} = \max\left[\frac{|\sigma|^2}{1 + |\sigma|^2}(\mu_\epsilon + 1), \frac{|\sigma|^2}{|\sigma|^2 + \epsilon^2} \frac{\theta_\epsilon^2}{1 + |\sigma|^2}\right]$$

est majoré par $\theta'_\epsilon = \max(\theta_\epsilon^2, \mu_\epsilon + 1) = \max(4\beta^{-1}, \mu_\epsilon + 1)$.

2.5 Conclusion

Soit $\xi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ une fonction plurisousharmonique, et posons

$$\phi_{\delta, \gamma} = \xi + \log |\sigma|^{2d} - \delta \log(c - \phi) + \gamma \rho(\log |\sigma|^2) + \beta \log(1 + |\sigma|^2).$$

Cette fonction $\phi_{\delta,\gamma}$ est de classe C^∞ sur $X_c \setminus Y$, et

$$id' d'' \phi_{\delta,\gamma} = \omega_{\delta,\gamma} + id' d'' \xi + id' d'' \log |\sigma|^{2d} - \beta \Omega. \quad (23)$$

Le lemme 2 et l'inégalité (22) permettent d'appliquer le lemme 1 au fibré hermitien $F = L$ sur la variété $X_c \setminus Y$ munie de la métrique kählérienne $\omega_{\delta,\gamma}$, pour les fonctions $\phi = \phi_{\delta,\gamma}$, $\gamma = \gamma_\epsilon$ et $\eta = \eta_\epsilon$: pour toute forme à support compact $u \in C_{n,1}^\infty(X_c \setminus Y, L)$,

$$2(||\gamma_\epsilon D'' u||_{\phi_{\delta,\gamma}}^2 + ||\gamma_\epsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} u||_{\phi_{\delta,\gamma}}^2) \geq \\ ([\eta_\epsilon(ic(L) + id' d'' \phi_{\delta,\gamma}, \Lambda_{\delta,\gamma})u, u]_{\phi_{\delta,\gamma}} - ([id' d'' \eta_\epsilon, \Lambda_{\delta,\gamma}]u, u)_{\phi_{\delta,\gamma}} - ||u||_{\phi_{\delta,\gamma}}^2),$$

donc en vertu de (23), et du fait que sur les formes de bidegré $(n, 1)$, $[\omega_{\delta,\gamma}, \Lambda_{\delta,\gamma}] = Id$,

$$2(||\gamma_\epsilon D'' u||_{\phi_{\delta,\gamma}}^2 + ||\gamma_\epsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} u||_{\phi_{\delta,\gamma}}^2) \geq \\ ((\eta_\epsilon - 1)u, u)_{\phi_{\delta,\gamma}} - ([id' d'' \eta_\epsilon, \Lambda_{\delta,\gamma}]u, u)_{\phi_{\delta,\gamma}} \\ + ([\eta_\epsilon(ic(L) + id' d'' \xi - \beta \Omega + id' d'' \log |\sigma|^{2d}), \Lambda_{\delta,\gamma}]u, u)_{\phi_{\delta,\gamma}}. \quad (24)$$

Commençons par estimer le second terme du membre de droite de cette inégalité. En appliquant l'opérateur id' à l'identité (18), et en posant $\tau = |\sigma|^2 + \epsilon^2$, on obtient l'expression

$$id' d'' \eta_\epsilon = [\lambda'(-\log \tau) + \lambda''(-\log \tau)]\tau^{\frac{1}{2}} i\{D\sigma, \sigma\} \wedge \{\sigma, D\sigma\} \\ - \lambda'(-\log \tau)\tau^{-1} i(\{D\sigma, D\sigma\} + \{\sigma, s^* c(\mathcal{O}_{E^*}(-1))\sigma\}),$$

ce dont l'identité de Schwarz $i\{D\sigma, \sigma\} \wedge \{\sigma, D\sigma\} \leq (\tau - \epsilon^2)i\{D\sigma, D\sigma\}$ permet de déduire, λ étant croissante, que

$$id' d'' \eta_\epsilon \leq \tau^{-2}[-\epsilon^{-2}(\tau - \epsilon^2)^{-1}\lambda'(-\log \tau) + \lambda''(-\log \tau)]i\{D\sigma, \sigma\} \wedge \{\sigma, D\sigma\} \\ + \tau^{-1}\lambda'(-\log \tau)\{is^* c(\mathcal{O}_{E^*}(-1))\sigma, \sigma\}.$$

Les propriétés de la fonction λ vont nous permettre d'estimer chacun des termes du membre de droite de cete inégalité. Tout d'abord, comme $0 \leq \lambda' \leq 1$, et $\pi^* \Omega \geq ic(\mathcal{O}_{E^*}(-1))$, on a

$$\tau^{-1}\lambda'(-\log \tau)\{is^* c(\mathcal{O}_{E^*}(-1))\sigma, \sigma\} \leq \Omega. \quad (25)$$

D'autre part, $\lambda''(-\log \tau)$ étant majorée par $\frac{2}{3}$, et nulle si $\tau \geq 1$ ou $\tau \leq e^{-2}$, l'inégalité (17) implique

$$\tau^{-2}\lambda''(-\log \tau)i\{D\sigma, \sigma\} \wedge \{\sigma, D\sigma\} \leq \lambda''(-\log \tau)\tau^{-2}(\tau - \epsilon^2)(1 + \tau - \epsilon^2)^2\beta^{-1}\omega_{\delta,\gamma} \\ \leq \frac{8e^4}{3}\beta^{-1}\omega_{\delta,\gamma}. \quad (26)$$

De la même façon, comme $\lambda'(-\log \tau) = 1$ si $\tau \leq e^{-2}$, et $0 \leq \lambda' \leq 1$,

$$[1 - \lambda'(-\log \tau)]\epsilon^2\tau^{-2}(\tau - \epsilon^2)^{-1}i\{D\sigma, \sigma\} \wedge \{\sigma, D\sigma\} \\ \leq [1 - \lambda'(-\log \tau)]\epsilon^2(1 + \frac{1 - \epsilon^2}{\tau})^2\beta^{-1}\omega_{\delta,\gamma} \\ \leq \epsilon^2(1 + e^2)^2\beta^{-1}\omega_{\delta,\gamma}. \quad (27)$$

Si l'on suppose

$$\mu_\epsilon \geq 1 + [\frac{8e^4}{3} + \epsilon^2(1 + e^2)^2]\beta^{-1},$$

les inégalités (25), (26) et (27) permettent de déduire de (24) que

$$\begin{aligned} & 2(||\gamma_\epsilon D'' u||_{\phi_{\delta,\gamma}}^2 + ||\gamma_\epsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} u||_{\phi_{\delta,\gamma}}^2) \\ & \geq ([\epsilon^2|\sigma|^{-2}(|\sigma|^2 + \epsilon^2)^{-2}i\{D\sigma, \sigma\} \wedge \{\sigma, D\sigma\}, \Lambda_{\delta,\gamma}]u, u)_{\phi_{\delta,\gamma}} \\ & \quad + ([\eta_\epsilon(ic(L) - \beta\Omega - ids^*c(\mathcal{O}_{E^*}(-1))) - \Omega, \Lambda_{\delta,\gamma}]u, u)_{\phi_{\delta,\gamma}}. \end{aligned}$$

Mais par hypothèse, $ic(L) - \beta\Omega - ids^*c(\mathcal{O}_{E^*}(-1)) \geq (d\alpha - \beta)\Omega$ et Ω est positive, de sorte que si l'on suppose $d\alpha > \beta$, ce que l'on a loisir de faire, et $\mu_\epsilon(d\alpha - \beta) \geq 1$, le dernier terme du membre de droite de l'inégalité précédente est positif. Dans ces conditions, on obtient pour toute forme $u \in C_{n,1}^\infty(X_c \setminus Y, L)$ la minoration

$$\begin{aligned} & 2(||\gamma_\epsilon D'' u||_{\phi_{\delta,\gamma}}^2 + ||\gamma_\epsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} u||_{\phi_{\delta,\gamma}}^2) \\ & \geq ([\epsilon^2|\sigma|^{-2}(|\sigma|^2 + \epsilon^2)^{-2}i\{D\sigma, \sigma\} \wedge \{\sigma, D\sigma\}, \Lambda_{\delta,\gamma}]u, u)_{\phi_{\delta,\gamma}}. \quad (28) \end{aligned}$$

Rappelons que si $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ est une base locale de $T^*(X_c \setminus Y)$, orthonormée relativement à $\omega_{\delta,\gamma}$, si $u = \sum_k u_k(\zeta_1 \wedge \dots \wedge \zeta_n) \wedge \overline{\zeta_k}$ est une forme de type $(n, 1)$, et $\theta = i \sum_j \theta_j \zeta_j \wedge \overline{\zeta_j}$, où $\theta_j \in \mathbb{R}$, une $(1, 1)$ -forme réelle et diagonale relativement à $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, on a

$$([\theta, \Lambda_{\delta,\gamma}]u, u) = \sum_k \theta_k |u_k|^2.$$

Il est facile d'en déduire, en utilisant l'inégalité de Schwarz et l'expression de v_ϵ , que pour toute forme $u \in C_{n,1}^\infty(X_c \setminus Y, L)$,

$$\begin{aligned} & |\int_{X_c \setminus Y} e^{-\phi_{\delta,\gamma}} \{v_\epsilon, *u\}|^2 \\ & \leq \int_{X_c \cap \text{supp } \chi'(\epsilon^{-2}|\sigma|^2)} e^{-\phi_{\delta,\gamma}} |\sigma|^2 |G|_{\delta,\gamma}^2 dV_{\delta,\gamma} \\ & \quad \times (\epsilon^{-4}|\sigma|^{-2} \chi'(\epsilon^{-2}|\sigma|^2) i\{D\sigma, \sigma\} \wedge \{\sigma, D\sigma\}, \Lambda_{\delta,\gamma}]u, u)_{\phi_{\delta,\gamma}}, \end{aligned}$$

où $dV_{\delta,\gamma}$ est l'élément de volume riemannien sur $X_c \setminus Y$ associé à la métrique $\omega_{\delta,\gamma}$. Comme sur le support de $\chi'(\epsilon^{-2}|\sigma|^2)$, on a $(|\sigma|^2 + \epsilon^2) \leq 2\epsilon^2$, l'inégalité (29) implique alors que

$$|\int_{X_c \setminus Y} e^{-\phi_{\delta,\gamma}} \{v_\epsilon, *u\}|^2 \leq C(c, \epsilon, \delta, \gamma) (||\gamma_\epsilon D'' u||_{\phi_{\delta,\gamma}}^2 + ||\gamma_\epsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} u||_{\phi_{\delta,\gamma}}^2),$$

avec, puisqu'on a supposé $\chi' \leq 3$,

$$C(c, \epsilon, \delta, \gamma) = 72\epsilon^{-2} \int_{X_c \cap \text{supp } \chi'(\epsilon^{-2}|\sigma|^2)} e^{-\phi_{\delta,\gamma}} |\sigma|^2 |G|_{\delta,\gamma}^2 dV_{\delta,\gamma}.$$

Remarquons que l'expression $|G|_{\delta,\gamma}^2 dV_{\delta,\gamma}$ est indépendante de la métrique utilisée sur $X_c \setminus Y$: on pourra donc la remplacer par l'expression $|G|^2 dV$ associée à une métrique hermitienne fixée sur X , restreinte en l'occurrence à $X_c \setminus Y$.

• **Estimation de $C(c, \epsilon, \delta, \gamma)$**

Pour estimer la constante $C(c, \epsilon, \delta, \gamma)$, il sera commode d'utiliser l'existence d'une rétraction holomorphe r d'un voisinage tubulaire U de Y , sur Y (cf par exemple [Del]). On peut alors supposer que ϵ est suffisamment petit pour que, si l'on note Δ_ϵ le disque fermé des nombres complexes de module inférieur à ϵ , l'on ait

$$|\sigma|^{-1}(\Delta_\epsilon) \cap X_c \subset r^{-1}(Y \cap X_{c+1}). \quad (29)$$

Munissons E d'une métrique hermitienne telle que $|s| \leq \kappa|\sigma|$, avec $\kappa > 0$: $L \otimes (\det E)^{-1}$ est alors muni d'une métrique hermitienne, et l'on peut supposer ϵ suffisamment petit pour que, si $y \in X_c \cap \text{supp } \chi'(\epsilon^{-2}|\sigma|^2)$, l'on ait

$$e^{-\xi(y)}|G(y)|^2 \leq e^{-\xi(r(y))}|\wedge^d ds(r(y))|^2(|g(r(y))|^2 + \alpha_c), \quad (30)$$

où α_c est un réel strictement positif donné. Le théorème de Fubini implique alors, en vertu de (30) et (31), que

$$\begin{aligned} C(c, \epsilon, \delta, \gamma) &\leq 72(1 + o(\epsilon))\epsilon^{-2} \int_{Y \cap X_{c+1}} e^{-\xi(x)}(|g(x)|^2 + \alpha_c) dV_Y \\ &\quad \times \int_{r^{-1}(x) \cap \text{supp } \chi'(\epsilon^{-2}|\sigma|^2)} e^{\delta \log(c-\phi) + \gamma \rho(\log |\sigma|^2)} |\sigma|^{2-2d} |\wedge^d ds \circ r|^2 dV_{r^{-1}(x)}, \end{aligned}$$

où dV_Y et $dV_{r^{-1}(x)}$ sont les éléments de volume induits sur Y et sur les fibres de r , puisque sur X_c , au voisinage de Y , leur produit s'identifie à ϵ près à l'élément dV_X .

Si c et ϵ sont fixés, on peut supposer δ et γ suffisamment petits pour que sur $X_c \cap \text{supp } \chi'(\epsilon^{-2}|\sigma|^2)$,

$$e^{\delta \log(c-\phi) + \gamma \rho(\log |\sigma|^2)} \leq 2.$$

De plus, l'hypothèse $|s| \leq \kappa|\sigma|$ implique que

$$\begin{aligned} I_c(x) &= \int_{r^{-1}(x) \cap \text{supp } \chi'(\epsilon^{-2}|\sigma|^2)} |\sigma|^{2-2d} |\wedge^d ds \circ r|^2 dV_{r^{-1}(x)} \\ &\leq \kappa^{2d-2} \int_{r^{-1}(x) \cap |s|^{-1}(\Delta_{\kappa\epsilon})} |s|^{2-2d} |\wedge^d ds \circ r|^2 dV_{r^{-1}(x)}. \end{aligned}$$

Or $|\wedge^d ds \circ r|^2$ s'identifie à ϵ près au jacobien de la transformation des coordonnées transverses sur les fibres de r , en celles données par les composantes de s sur ces fibres (qui constituent bien un système de coordonnées au voisinage de y , dans la mesure où s est supposée transverse sur Y). Par conséquent, si ϵ est assez petit,

$$I_c(x) \leq 2\kappa^{2d-2} \int_{z \in \mathbb{C}^d, |z| \leq \kappa\epsilon} |z|^{2-2d} dV(z) = 2\kappa^{2d} \mu(d) \epsilon^2,$$

où $\mu(d) = \int_{z \in \mathbb{C}^d, |z| \leq 1} |z|^{2-2d} dV(z)$. Si α_c est supposé assez petit pour que

$$\alpha_c \int_{Y \cap X_{c+1}} dV_Y \leq 2^{-c},$$

on obtient donc finalement, pour $\epsilon \leq \epsilon(c)$ et $0 < \gamma \leq \delta \leq \delta(c, \epsilon)$ suffisamment petits,

$$C(c, \epsilon, \delta, \gamma) \leq C(c) = 144\kappa^d \mu(d) [i^{(n-d)^2} \int_{Y \cap X_{c+1}} e^{-\xi} \{g, g\} + 2^{-c}],$$

et l'on a démontré que pour toute forme $u \in C_{n,1}^\infty(X_c \setminus Y, L)$,

$$\left| \int_{X_c \setminus Y} e^{-\phi_{\delta,\gamma}} \{v_\epsilon, *u\} \right|^2 \leq C(c) (\|\gamma_\epsilon D'' u\|_{\phi_{\delta,\gamma}}^2 + \|\gamma_\epsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} u\|_{\phi_{\delta,\gamma}}^2).$$

• **Existence d'un prolongement**

Il existe donc une forme $w \in L_{n,0}^2(X_c \setminus Y, L, \phi_{\delta,\gamma})$, d'après les théorèmes usuels de prolongement L^2 , telle que $D''(\gamma_\epsilon w) = v_\epsilon$, $\gamma_\epsilon w \in C_{n,0}^\infty(X_c \setminus Y, L)$, et

$$i^{n^2} \int_{X_c \setminus Y} e^{-\phi_{\delta,\gamma}} \{w, w\} \leq C(c).$$

Rappelons brièvement l'argument: D'' et $\delta''_{\phi_{\delta,\gamma}}$ sont des opérateurs non bornés fermés sur $L_{n,1}^2(X_c \setminus Y, L, \phi_{\delta,\gamma})$, à domaine dense, et toute forme $u \in \text{Dom} \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}}$ peut s'écrire $u = u_1 + u_2$, avec $u_1 \in \text{Ker} D''$, $u_2 \in (\text{Ker} D'')^\perp = \overline{\text{Im} \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}}} \subset \text{Ker} \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}}$. On a donc, comme $v_\epsilon \in \text{Ker} D''$,

$$|(v_\epsilon, u)_{\phi_{\delta,\gamma}}|^2 = |(v_\epsilon, u_1)_{\phi_{\delta,\gamma}}|^2 \leq C(c) \|\gamma_\epsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} u_1\|_{\phi_{\delta,\gamma}}^2 = C(c) \|\gamma_\epsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} u\|_{\phi_{\delta,\gamma}}^2.$$

La forme linéaire $\gamma_\epsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} u \in \gamma_\epsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} \text{Dom} \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} \mapsto (u, v_\epsilon)_{\phi_{\delta,\gamma}}$ est donc continue, et peut d'après le théorème de Hahn-Banach se prolonger en une forme linéaire continue de même norme sur $L_{n,0}^2(X_c \setminus Y, L, \phi_{\delta,\gamma})$: le théorème de représentation de Riesz implique en conséquence l'existence d'une forme $w \in L_{n,0}^2(X_c \setminus Y, L, \phi_{\delta,\gamma})$ telle que $\|w\|_{\phi_{\delta,\gamma}}^2 \leq C(c)$, et

$$\forall u \in \text{Dom} \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}}, \quad (\gamma_\epsilon \delta''_{\phi_{\delta,\gamma}} u, w)_{\phi_{\delta,\gamma}} = (u, v_\epsilon)_{\phi_{\delta,\gamma}},$$

c'est-à-dire, γ_ϵ étant réelle, $D''(\gamma_\epsilon w) = v_\epsilon$.

On peut de plus supposer que $\gamma_\epsilon w \in (\text{Ker} D'')^\perp$, ce qui implique, Δ'' étant elliptique, que $\gamma_\epsilon w \in C_{n,0}^\infty(X_c \setminus Y, L)$: c'est alors la solution de norme minimale de l'équation précédente.

Si l'on fait tendre δ et γ vers zéro, on peut extraire des formes w obtenues comme précédemment une sous-suite faiblement convergente, d'où l'existence d'une forme $\gamma_\epsilon w_{c,\epsilon} \in C_{n,0}^\infty(X_c \setminus Y, L)$ telle que $D''(\gamma_\epsilon w_{c,\epsilon}) = v_\epsilon$, et

$$i^{n^2} \int_{X_c \setminus Y} e^{-\xi} \frac{\{w_{c,\epsilon}, w_{c,\epsilon}\}}{|\sigma|^{2d}(1+|\sigma|^2)^\beta} \leq 144(1+o(\epsilon)) \kappa^d \mu(d) [i^{(n-d)^2} \int_{Y \cap X_c} e^{-\xi} \{g, g\} + 2^{-c}].$$

La différence $G_\epsilon - \gamma_\epsilon w_{c,\epsilon}$ est donc une $(0, 1)$ -forme D'' -fermée sur $X_c \setminus Y$ et localement L^2 au voisinage de Y , donc se prolonge en une forme D'' -fermée $G_{c,\epsilon}$ sur X_c ([De1], lemme 6.9) à valeurs dans $K_X \otimes L$. De plus, comme $|\sigma|^{-2d}$ n'est pas localement intégrable sur Y , la convergence de l'intégrale de gauche de l'inégalité précédente implique que $w_{c,\epsilon}$ se prolonge par zéro sur $Y \cap X_c$, donc que

$$G_{c,\epsilon}|_{Y \cap X_c} = g \wedge (\wedge^d ds).$$

Enfin,

$$i^{n^2} \int_{X_c} e^{-\xi} \frac{\{G_{c,\epsilon}, G_{c,\epsilon}\}}{|\sigma|^{2d-2}(1+|\sigma|^2)^{1+\beta}} \leq 2i^{n^2} [\int_{X_c} e^{-\xi} \frac{\{G_\epsilon, G_\epsilon\}}{|\sigma|^{2d-2}(1+|\sigma|^2)^{1+\beta}} + \int_{X_c} e^{-\xi} \frac{|\sigma\gamma_\epsilon|^2}{1+|\sigma|^2} \frac{\{w_{c,\epsilon}, w_{c,\epsilon}\}}{|\sigma|^{2d}(1+|\sigma|^2)^\beta}],$$

où, comme on l'a montré plus haut,

$$\frac{|\sigma\gamma_\epsilon|^2}{1+|\sigma|^2} \leq \theta'_\epsilon,$$

avec $\theta'_\epsilon = \max(4\beta^{-1}, \mu_\epsilon + 1)$.

Reste à faire tendre c vers $+\infty$, et à extraire des $G_{c,\epsilon}$ une sous-suite faiblement convergente pour obtenir l'existence d'une forme $G \in H^0(X, K_X \otimes L)$, telle que $G|_Y = g \wedge (\wedge^d ds)$, et

$$i^{n^2} \int_X e^{-\xi} \frac{\{G, G\}}{|\sigma|^{2d-2}(1+|\sigma|^2)^{1+\beta}} \leq M i^{(n-d)^2} \int_Y e^{-\xi} \{g, g\},$$

où $M = 288\kappa^d \mu(d)\theta'_0$ ne dépend que de d , α , β et κ .

Remarque 4: Si l'on considère une forme g sur Y de bidegré (n, q) avec $q > 0$, la seule modification à apporter à ce qui précède provient du fait que sur les formes de type $(n, q+1)$, $[\omega_{\delta,\gamma}, \Lambda_{\delta,\gamma}] = (q+1)Id$: il faut donc simplement supposer que

$$\mu_\epsilon \geq \frac{1}{q+1} + [\frac{8e^4}{3} + \epsilon^2(1+e^2)^2]\beta^{-1}.$$

Notons également que la régularité des formes $\gamma_\epsilon w$ obtenues comme précédemment ne peut se déduire, comme on aurait pu le faire pour $q = 0$, de l'ellipticité de D'' , mais que c'est bien l'ellipticité de l'opérateur Δ'' qui permet de conclure.

3 Généralisations et applications

3.1 Prolongement des sections d'un fibré hermitien

Plutôt que de se donner une métrique sur le fibré en droites tautologique $\mathcal{O}_{E^*}(-1)$ sur $\mathbb{P}(E)$, dont la courbure vérifie relativement à celle du fibré en droites L des hypothèses qui sont, comme le fait apparaître le corollaire 1, essentiellement algébriques, on peut se contenter d'une métrique sur le fibré E lui-même, avec des conditions de positivité au sens de Griffiths, a priori moins commodes. On peut par exemple démontrer, presque exactement comme le théorème 1, mais en utilisant s à la place de σ , le résultat suivant:

Théorème 2 Soient X une variété de Stein de dimension n , E un fibré hermitien de rang d sur X , s une section holomorphe de E génériquement transverse à la section nulle, et

$$Y = \{x \in X, s(x) = 0, \wedge^d ds(x) \neq 0\}.$$

Soit Ω une $(1,1)$ -forme positive fermée sur X telle que

$$\Omega \otimes Id_E \geq_G ic(E),$$

et L un fibré en droites hermitien sur X tel qu'il existe un réel strictement positif α pour lequel

$$ic(L) \geq \alpha\Omega - id'd'' \log |s|^{2d}.$$

Alors pour toute fonction ξ plurisousharmonique sur X , tout réel strictement positif β et toute section holomorphe g sur Y de $K_Y \otimes L \otimes (det E)^{-1}$ telle que

$$i^{(n-d)^2} \int_Y e^{-\xi} \{g, g\} < +\infty,$$

il existe une section holomorphe G sur X de $K_X \otimes L$, telle que $G|_Y = g \wedge (\wedge^d ds)$, et

$$i^{n^2} \int_X \frac{e^{-\xi} \{G, G\}}{|s|^{2d-2}(1+|s|^2)^{1+\beta}} \leq M i^{(n-d)^2} \int_Y e^{-\xi} \{g, g\},$$

où M est une constante numérique ne dépendant que de d , α et β .

Rappelons qu'un fibré hermitien E est dit semi-positif au sens de Griffiths, $E \geq_G 0$, si la courbure de sa connexion de Chern définit sur les tenseurs décomposables de chaque fibre de $TX \otimes E$ une forme hermitienne positive: si (e_1, \dots, e_d) est un repère orthonormé local de E sur un ouvert Ω de X muni de coordonnées (z_1, \dots, z_n) , ce tenseur de courbure peut s'écrire

$$c(E) = \sum c_{jk\lambda\mu} dz_j \wedge d\bar{z}_k \otimes e_\lambda^* \otimes e_\mu,$$

avec $\bar{c}_{jk\lambda\mu} = c_{kj\mu\lambda}$; la forme hermitienne associée n'est autre que

$$\Theta_E = \sum c_{jk\lambda\mu} (dz_j \otimes e_\lambda^*) \otimes \overline{(dz_k \otimes e_\mu^*)}.$$

Remarque 5: On pourra prendre $\Omega = 0$ si E est semi-négatif au sens de Griffiths, et $\Omega = ic(det E)$, en vertu de l'inégalité de Schwarz, si E est semi-positif. Dans les deux cas, on peut ainsi se ramener à des conditions portant uniquement sur les courbures des fibrés hermitien E et L : en effet, il est facile de vérifier que sur $X \setminus s^{-1}(0)$,

$$id'd'' \log |s|^{2d} \geq -d \frac{\{ic(E)s, s\}}{|s|^2},$$

de sorte que, d'une part, $id'd'' \log |s|^{2d}$ est localement minorée sur X et, d'autre part, la condition du théorème résulte de l'inégalité

$$ic(L) \otimes Id_E \geq_G \alpha\Omega \otimes Id_E + dic(E).$$

3.2 Prolongement des jets de sections

Soit encore X une variété de Stein, dont une sous-variété Y est définie comme le lieu des zéros d'une section holomorphe, transverse à la section nulle, d'un fibré vectoriel E de rang d . Le faisceau \mathcal{O}_X admet comme sous-faisceaux les puissances \mathcal{I}_Y^k du faisceau d'idéaux de Y , dont les quotients successifs sont à support sur Y , et s'identifient aux puissances symétriques du fibré conormal: c'est-à-dire, en l'occurrence, aux puissances symétriques de la restriction de E^* à Y .

Soit donc g une section holomorphe sur Y du fibré $K_Y \otimes L \otimes (\det E)^{-1} \otimes S^k E^*$, où L est un fibré en droites sur X . Le produit extérieur $g \wedge (\wedge^d ds)$ définit une section de $K_X \otimes L \otimes S^k E^*$ sur Y , dont on peut, X étant de Stein, se donner un prolongement holomorphe \tilde{g} à X .

Soit alors $\tilde{G} = \langle \tilde{g}, s^{\otimes k} \rangle$: cette section holomorphe de $K_X \otimes L$ sur X s'annule à l'ordre k sur Y , et définit sur Y un jet qui s'identifie à \tilde{g} . Il est donc possible d'utiliser les mêmes méthodes qu'au second paragraphe pour prolonger le jet \tilde{g} avec estimées L^2 . Plus précisément, il suffit d'ajouter un terme $\log|\sigma|^{2k}$ au poids $\phi_{\delta, \gamma}$ introduit en 2.5 pour obtenir l'extension suivante du théorème 1.1.1:

Théorème 3.2.1 *Sous les mêmes hypothèses sur X , E , Y , que pour le théorème 1.1.1, soit L un fibré en droites hermitien sur X , tel qu'il existe un réel strictement positif α pour lequel*

$$\frac{1}{d+k} \pi^* ic(L) \geq \alpha \pi^* \Omega + ic(\mathcal{O}_{E^*}(-1)).$$

Alors pour toute fonction ξ plurisousharmonique sur X , tout réel strictement positif β et toute section holomorphe g sur Y de $K_Y \otimes L \otimes (\det E)^{-1} \otimes S^k E^$ telle que*

$$i^{(n-d)^2} \int_Y e^{-\xi} \{g, g\} < +\infty,$$

il existe une section holomorphe G sur X de $K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}_Y^k$, définissant sur Y le jet $g \wedge (\wedge^d ds)$, et telle que

$$i^{n^2} \int_X \frac{e^{-\xi} \{G, G\}}{|\sigma|^{2d+2k-2} (1 + |\sigma|^2)^{1+\beta}} \leq M i^{(n-d)^2} \int_Y e^{-\xi} \{g, g\},$$

où M est une constante numérique ne dépendant pas de g .

Dans le cas d'une variété projective, on peut envisager la situation beaucoup plus générale où Y est le lieu des zéros d'une section holomorphe s , ds étant de rang $d = \text{codim}_X Y$ en tout point de Y , d'un fibré holomorphe E de rang $r \geq d$. La différentielle ds fait alors du fibré normal à Y un sous fibré de $E|_Y$, et $\wedge^d ds$ définit un sous-fibré en droites \mathcal{L} de $\wedge^d E|_Y$ isomorphe à $K_X \otimes K_Y^{-1}$.

Une section holomorphe g de $L \otimes S^k N^*$ provient ainsi d'une section \tilde{g} de $L \otimes S^k E^*$ qui s'étend en $\tilde{G} \in H^0(X, L \otimes S^k E^*)$, et $\langle \tilde{G}, s^{\otimes k} \rangle$ s'identifie sur Y au jet défini par g .

On peut alors construire à partir de \tilde{G} un prolongement de \tilde{g} avec estimées L^2 , sous la même hypothèse de positivité qu'au théorème précédent, L étant simplement changé en $L \otimes K_X^*$. Dans le cas d'une variété projective, on en déduit, comme au corollaire 1.2.1, l'énoncé suivant:

Théorème 3.2.2 *Soient X une variété projective, E un fibré vectoriel holomorphe de rang r sur X , s une section holomorphe de E , et $Y = s^{-1}(0)$. On suppose de ds est en tout point de Y de rang $d = \text{codim}_X Y$, $d \geq r$.*

Soit L un fibré en droites ample sur X , α un réel positif tel que $\mathcal{O}_{E^}(1) + \alpha\pi^*L$ soit semi-positif sur $\mathbb{P}(E)$, et supposons qu'il existe un rationnel β tel que $K_X = L^\beta$. Alors le morphisme naturel*

$$H^0(X, L^j) \longrightarrow H^0(X, L^j \otimes \mathcal{O}_X / \mathcal{I}_Y^{k+1})$$

est surjectif pour $j > \alpha(d + k) + \beta$.

3.3 Plongement de Plücker et pléthysme

Pour conclure ce chapitre, et montrer qu'il n'est pas tout à fait sans rapport avec le reste de cette thèse, on appliquera les résultats du paragraphe précédent au problème du *pléthysme*: on entend par là le problème de la décomposition en composantes irréductibles de $Gl(V)$ -modules de la forme $\Gamma^a(\Gamma^b V)$.

Par exemple, la décomposition des puissances symétriques des puissances extérieures n'est pas sans rapport avec le plongement de Plücker des grassmanniennes. Soit en effet $G_k(V)$ la grassmannienne des sous-espaces de codimension k d'un espace vectoriel complexe V de dimension d . Le déterminant $\det Q$ du fibré quotient est très ample, et définit le plongement de Plücker de $G_k(V)$ dans $G_1(\wedge^k V)$, $\wedge^k V$ étant l'espace des sections holomorphes de $\det Q$. De plus, l'image de la grassmannienne dans cet espace projectif est donné par des équations homogènes de degré deux, et de degré au plus un en chacune des coordonnées homogènes.

L'image de la grassmannienne par le plongement de Plücker peut ainsi être définie comme le lieu des zéros d'une section holomorphe d'un fibré $E = \mathcal{O}_{G_1(\wedge^k V)}(2)^{\oplus M}$ (où M est en général beaucoup plus grand que la codimension m de $G_k(V)$ dans $G_1(\wedge^k V)$), partout de rang m sur $G_k(V)$.

Le fibré normal N du plongement de Plücker est homogène pour l'action du groupe linéaire, de sorte que les espaces de sections $H^0(G_k(V), S^i N^* \otimes (\det Q)^l)$ sont munis de structures de $Gl(V)$ -modules. L'espace des sections holomorphes de $\mathcal{O}_{G_1(\wedge^k V)}(l)$ (fibré dont la restriction à $G_k(V)$ est $(\det Q)^l$ étant la puissance symétrique l -ième de $\wedge^k V$, le lemme de Schur et le corollaire 4.0.1 ont pour conséquence le résultat suivant:

Proposition 3.3.1 *Soit V un espace vectoriel complexe de dimension d , Q le fibré quotient sur la grassmannienne $G_k(V)$, et N le fibré normal, de rang m , associé au plongement de Plücker de cette grassmannienne, dont on note $n = k(d - k)$ la dimension.*

Alors, si les entiers l et j sont tels que $l \geq 2j + n - m$, il existe un morphisme surjectif

$$S^l(\wedge^k V) \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^j H^0(G_k(V), S^i N^* \otimes (\det Q)^l) \longrightarrow 0.$$

Notons également que l'espace des sections holomorphes de $'G_1(\wedge^k V)(l)$ étant filtré selon l'ordre d'annulation sur $G_k(V)$, $S^l(\wedge^k V)$ apparaît comme un sous-module de la somme

$$\bigoplus_{i \geq 0} H^0(G_k(V), S^i N^* \otimes (\det Q)^l),$$

celui de ces groupes d'indice i étant nul pour $2i \leq l$.

Le fibré normal N sur $G_k(V)$ peut être décrit commodément à l'aide des fibrés quotient et tautologique:

Proposition 3.3.2 *Le fibré normal à la grassmannienne $G_k(V)$ pour son plongement de Plücker admet une filtration $Gl(V)$ -équivariante, dont le fibré quotient gradué associé est la somme directe*

$$\mathcal{N} = \bigoplus_{j=2}^k \wedge^j Q \otimes \wedge^j S^*.$$

Preuve: Soit V_k un sous-espace de codimension k de V , et notons π la projection de V sur V/V_k : l'image de V_k par le plongement de Plücker est l'hyperplan \mathcal{V}_k de $\wedge^k V$, noyau de la forme linéaire $\wedge^k \pi : \wedge^k V \longrightarrow \wedge^k(V/V_k)$.

L'action transitive des groupes linéaires de V et de $\wedge^k V$ sur $G_k(V)$ et $G_1(\wedge^k V)$ respectivement, induit les descriptions suivantes de leurs fibrés tangents:

$$\begin{aligned} TG_k(V)|_{V_k} &= Hom(V, V)/\{u, u(V_k) \subset V_k\} &= Hom(V_k, V/V_k), \\ TG_1(\wedge^k V)|_{\mathcal{V}_k} &= Hom(\wedge^k V, \wedge^k V)/\{U, U(\mathcal{V}_k) \subset \mathcal{V}_k\} &= Hom(\mathcal{V}_k, \wedge^k V/\mathcal{V}_k). \end{aligned}$$

L'injection canonique i de $TG_k(V)|_{V_k}$ dans $TG_1(\wedge^k V)|_{\mathcal{V}_k}$ est définie de la façon suivante: si $u \in Hom(V_k, V/V_k)$ est représenté par $\tilde{u} \in Hom(V, V)$, alors

$$i(u) = \wedge^k(\pi \circ u)|_{\mathcal{V}_k}.$$

Or la restriction de $TG_1(\wedge^k V)$ à $G_k(V)$ peut-être filtrée de la façon suivante. Pour tout entier j compris entre 0 et $k + 1$, posons $F_j = \wedge^j V_k \wedge (\wedge^{k-j} V)$: on définit ainsi une filtration de $\wedge^k V$,

$$\wedge^k V = F_0 \supset \mathcal{V}_k = F_1 \supset \cdots \supset F_{k+1} = 0,$$

donc une filtration de $TG_1(\wedge^k V)_{|V_k}$ en posant

$$\mathcal{F}_j = \{U \in \text{Hom}(\mathcal{V}_k, \wedge^k V / \mathcal{V}_k), U|_{F_{j+1}} = 0\},$$

où j est compris cette fois entre 0 et k .

Notons que $\mathcal{F}_1 = i(TG_k(V))$. En effet, si $\tilde{u} \in \text{Hom}(V, V)$, alors $\tilde{u}(F_j) \subset F_{j-1}$ pour tout entier j , donc $\wedge^k \pi \wedge^k \tilde{u}|_{F_2} = 0$, ce qui donne une inclusion: et l'égalité des dimensions implique l'égalité. La filtration

$$\mathcal{F}_0 = 0 \subset \mathcal{F}_1 = i(TG_k(V)) \subset \cdots \subset \mathcal{F}_k = TG_1(\wedge^k V)_{|G_k(V)}$$

de $TG_1(\wedge^k V)_{|G_k(V)}$ a donc pour image une filtration du fibré normal dont les quotients successifs sont les fibrés

$$\mathcal{N}_j = \mathcal{F}_j / \mathcal{F}_{j-1} = \text{Hom}(\wedge^j S \otimes \wedge^{k-j} Q, \wedge^k Q) = \text{Hom}(\wedge^j S, \wedge^j Q),$$

où j est compris entre 2 et k . ♣

La proposition précédente permet a priori de calculer les groupes de cohomologie $H^0(G_k(V), S^i N^* \otimes (\det Q)^l)$. En effet, si $2i \leq l$, il est facile de vérifier, à l'aide du théorème de Bott, que $H^q(G_k(V), S^i N^* \otimes (\det Q)^l) = 0$ si $q > 0$, ce qui implique que

$$H^0(G_k(V), S^i N^* \otimes (\det Q)^l) = H^0(G_k(V), S^i N^* \otimes (\det Q)^l).$$

Pour prendre un exemple précis, supposons que $k = 3$ et $d = 6$. La grassmannienne $G_3(V)$, de dimension 9, est alors plongée dans un espace projectif de dimension 19, donc $n = 9$, $m = 10$, et

$$\begin{aligned} \bigoplus_{2i < l} H^0(G_k(V), S^i N^* \otimes (\det Q)^l) &\subset S^l(\wedge^3 V) \\ &\subset \bigoplus_{2i \leq l} H^0(G_k(V), S^i N^* \otimes (\det Q)^l). \end{aligned}$$

Si $l = 2k + 1$, les sommes qui encadrent $S^{2k+1}(\wedge^3 V)$ coïncident. De plus, \mathcal{N} s'écrit simplement

$$\mathcal{N} = (\mathcal{O}_{G_k(V)} \oplus Q^* \otimes S) \otimes (\det Q)^2 \otimes (\det V)^{-1},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} S^i N^* &= \bigoplus_{j=0}^i S^j(Q \otimes S^*) \otimes (\det Q)^{-2i} \otimes (\det V)^i, \\ &= \bigoplus_{|u| \leq i} \Gamma^u Q \otimes \Gamma^{-x(u)} S \otimes (\det Q)^{-2i} \otimes (\det V)^i. \end{aligned}$$

Le théorème de Bott permet d'en déduire que si $l \geq 2i$,

$$H^0(G_k(V), S^i N^* \otimes (\det Q)^l) = \bigoplus_{|u| \leq i} \Gamma^{(u+(l-i)\mathbf{1}, i\mathbf{1}-x(u))} V.$$

On peut en déduire sans difficulté la décomposition suivante des puissances extérieures impaires de $\wedge^3 V$:

Proposition 3.3.3 *Soit V un espace vectoriel complexe de dimension 6. Alors*

$$S^{2k+1}(\wedge^3 V) \otimes (\det V)^{-k} = \bigoplus_{\substack{\alpha + \beta + \gamma + \delta \leq k, \\ \alpha \geq \beta \geq \gamma}} \Gamma(\alpha + \delta + 1, \beta + \delta + 1, \gamma + \delta + 1, -\gamma - \delta, -\beta - \delta, -\alpha - \delta) V.$$

Exemple: Pour $k = 2$, la décomposition précédente s'écrit

$$\begin{aligned} S^5(\wedge^3 V) = & \Gamma^5 \mathbf{1}_{1,3} V \oplus \Gamma^{(5,4,4,1,1,0)} V \oplus \Gamma^{(5,3,3,2,2,0)} V \\ & \oplus [\Gamma^3 \mathbf{1}_{1,3} V \oplus \Gamma^{(3,2,2,1,1,0)} V \oplus \Gamma^{(3,3,2,1,0,0)} V] \otimes \det V \\ & \oplus \wedge^3 V \otimes (\det V)^2. \end{aligned}$$

On peut vérifier l'égalité des dimensions des deux membres de cette identité: $42504 = 14112 + 19600 + 5292 + 980 + 540 + 1960 + 20$. Malheureusement, cette méthode ne permet pas d'obtenir directement la totalité des composantes des puissances symétriques paires de $\wedge^3 V$.

Bibliographie

- [AV] Andreotti A., Vesentini E.: Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds, Publ. IHES, **25**, 313-362 (1965).
- [De4] Demailly J.P.: Scindage holomorphe d'un morphisme de fibrés vectoriels semi-positifs avec estimations L^2 , Lecture Notes in Math., **919**, 77-107 (1982), Springer, Berlin, Heidelberg, New-York, 1982.
- [De5] Demailly J.P.: Estimations L^2 pour l'opérateur d'' d'un fibré vectoriel semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète, Ann.sci.Ec.Norm.Sup, **15**, 457-511 (1982).
- [DF] Donnelly H., Fefferman C.: L^2 -cohomology and index theorem for the Bergman metric, Ann. Math. **118**, 593-618 (1983).
- [DX] Donnelly H., Xavier F.: On the differential form spectrum of negatively curved Riemann manifolds, Am. Math. J. **106**, 169-185 (1984).
- [GH] Griffiths P., Harris J.: Principles of algebraic geometry, Wiley, New-York 1978.
- [Hö] Hörmander L.: An introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand, Princeton 1966.
- [LP1] Le Potier, J.: Cohomologie de la grassmannienne à valeurs dans les puissances extérieures et symétriques du fibré universel, Math. Ann., **266**, 257-270 (1977).
- [M3] Manivel, L.: Un théorème de prolongement L^2 des sections d'un fibré hermitien, à paraître aux Math. Zeitschrift.
- [O1] Ohsawa T.: Vanishing theorems on complete Kähler manifolds, Publ. RIMS Kyoto Univ. **20**, 21-38 (1984).
- [O2] Ohsawa T.: On the extension of holomorphic functions 2, Publ.RIMS.Kyoto Univ., **24**, 265-275, (1988).
- [OT] Ohsawa T., Takegoshi K.: On the extension of L^2 holomorphic functions, Math. Z. **195**, 197-204 (1987).

TABLE DES MATIERES

Introduction	5
A COHOMOLOGIE SUR LA GRASSMANNIENNE	11
1 Préliminaires	14
1.1 Représentations du groupe linéaire	14
1.1.1 Construction de Weyl et foncteurs de Schur	14
1.1.2 Dualités	16
1.1.3 Décomposition des puissances tensorielles	17
1.1.4 Formules de Pieri	18
1.1.5 Formules de déterminants	19
1.1.6 Formule de Cauchy	21
1.1.7 La règle de Littlewood-Richardson	24
1.1.8 Cas de poids non positifs	26
1.2 Variétés de drapeaux	28
1.2.1 Grassmanniennes et formule de Cauchy	28
1.2.2 Variétés de drapeaux générales	29
1.2.3 Amplitude et k -amplitude	31
1.2.4 Amplitude des fibrés homogènes sur les variétés de drapeaux . . .	32
2 La méthode des diagrammes	34
2.1 Cohomologie de Dolbeault des fibrés associés au fibré quotient universel .	34
2.2 Tableaux et diagrammes	38
2.3 Premières applications	43
2.3.1 Une propriété générale	43
2.3.2 Puissances symétriques et extérieures	44
2.3.3 Multiplicités des puissances extérieures	49
2.3.4 Petites puissances du déterminant	51
3 Propriétés d'hérédité	54
3.1 Cas des puissances du déterminant	54
3.2 Accroissement des dimensions	55
3.3 Accroissement des écarts entre composantes	57
4 Majoration du bidegré	62
4.1 Une preuve diagrammatique du théorème de Kodaira	62
4.2 Extension aux puissances symétriques	69
5 Majoration de l'exposant	74
5.1 Quelques résultats élémentaires	75
5.2 Une estimation de $l^{p,q}(a)$	76
5.3 Cas d'un bidegré $p + q > n$	79

6	Non dégénérescence en E_2 de la suite spectrale de Borel-Le Potier	85
6.1	La suite spectrale de Borel-Le Potier	85
6.1.1	Définition	85
6.1.2	Non dégénérescence en E_1	86
6.1.3	Dégénérescence en E_2 sur les variétés de drapeaux	86
6.2	Un exemple de non dégénérescence	87
6.3	Transformation de diagrammes et dégénérescence de la suite spectrale de Borel-Le Potier	92
6.3.1	Cas des puissances symétriques et extérieures secondes	92
6.3.2	Extension aux fibrés $Z^{t,k}Q$	95
	Bibliographie	103
B	THEOREMES D'ANNULATION POUR LES FIBRES AMPLES	105
1	Théorèmes d'annulation pour les puissances symétriques et extérieures	108
1.1	Introduction	108
1.2	Cohomologie des fibrés $\wedge^s Q \otimes (\det Q)^l$	110
1.3	Puissances extérieures d'un fibré ample	113
1.3.1	La suite spectrale de Borel-Le Potier	113
1.3.2	Preuve du théorème principal, première partie	115
1.3.3	Preuve du théorème principal, deuxième partie	117
1.3.4	Non dégénérescence de la suite spectrale de Borel-Le Potier	120
1.4	Un théorème d'annulation pour les $Z^{k-\alpha-1,k}E$	121
1.5	Une généralisation d'un théorème de Griffiths	126
1.6	Encore une variante	130
1.7	Un résultat concurrent	133
1.8	Extension à des fibrés de poids quelconques	136
1.9	Quelques remarques sur les sous-variétés de l'espace projectif	138
2	Théorèmes d'annulation pour les fibrés associés à un fibré ample	142
2.1	Introduction	142
2.2	Rappels	144
2.3	Un exemple de non-annulation	146
2.4	Cohomologie de Dolbeault des fibrés en droites sur les variétés de drapeaux	151
2.5	Théorèmes d'annulation	161
2.5.1	Cas des degrés n et $n - 1$	162
2.5.2	Cas général	164
2.6	Fibrés de rang deux	165
	Appendice	168

Bibliographie	174
C PROLONGEMENT DES SECTIONS D'UN FIBRE	177
1 Introduction et résultats	180
1.1 Le théorème principal	180
1.2 Cas d'une variété projective	182
2 Preuve du théorème principal	184
2.1 Une estimation générale	184
2.2 Un prolongement C^∞	186
2.3 Une métrique kählérienne complète sur $X_c \setminus Y$	187
2.4 Fonctions auxiliaires	188
2.5 Conclusion	189
3 Généralisations et applications	194
3.1 Prolongement des sections d'un fibré hermitien	194
3.2 Prolongement des jets de sections	196
3.3 Plongement de Plücker et pléthysme	197
Bibliographie	201

Théorèmes d'annulation pour la cohomologie des fibrés vectoriels amples (Vanishing theorems for the cohomology of ample vector bundles)

Manivel Laurent ; Demailly Jean-Pierre (Directeur de thèse) ;
Université de Grenoble 1, Saint-Martin-d'Hères, France

Travaux Universitaires - Thèse nouveau doctorat
1992 [Note(s) : [205 p.]] (bibl.: 55 ref.) (Année de soutenance : 1992)
(Discipline : Mathématiques) (No : 92 GRE1 0079)

Résumé

Nous établissons différentes généralisations des théorèmes d'annulation connus pour la cohomologie de Dolbeault des fibrés vectoriels holomorphes amples sur les variétés complexes projectives. Nous suivons pour cela la démarche classique, qui consiste, via des arguments de suite spectrale, à se ramener à des fibrés en droites sur des variétés de drapeaux du fibré vectoriel considéré. La cohomologie des fibrés homogènes sur les variétés de drapeaux intervient ainsi de manière essentielle. La première partie de cette thèse mène donc une étude approfondie du cas de la grassmannienne, pour lequel le théorème de Bott et la formule de Cauchy permettent des calculs explicites. Nous déduisons de nos résultats des théorèmes d'annulation pour les puissances extérieures et symétriques d'un fibré ample, le premier prolongeant deux énoncés de Le Potier, le second étendant le théorème de Griffiths en bidegré quelconque. Nous montrons au passage que la suite spectrale de Borel-Le Potier ne dégénère uniformément en aucun degré.

Pour ce qui concerne la cohomologie des images d'un fibré ample par des représentations plus générales du groupe linéaire, nous donnons un théorème d'annulation, en degré maximal, pour une représentation dont le poids dominant admet des composantes négatives. La suite spectrale de Borel-Le Potier nous permet d'en déduire une réponse partielle à une conjecture de Jean-Pierre Demailly.

Dans la dernière partie de cette thèse, nous appliquons les estimations L^2 de Hörmander à l'étude d'un problème de prolongement, sous des hypothèses de positivité, des sections d'un fibré en droites définies sur une sous-variété d'une variété de Stein ou projective, lorsque cette sous-variété est le lieu des zéros d'une section holomorphe d'un fibré hermitien .

Mots-clés anglais / English Keywords

Linear group ; Representation ; Line bundle ; Vector bundle ; Ample bundle ; Dolbeault cohomology ; Grassmannian ; Flag manifold ; Young diagram ; Borel-Le Potier spectral sequence ; Vanishing theorem.

Mots-clés français / French Keywords

Groupe linéaire ; Représentation ; Fibré linéaire ; Fibré vectoriel ; Fibré ample ; Cohomologie de Dolbeault ; Grassmannienne ; Variété de drapeaux ; Diagramme de Young ; Suite spectrale de Borel-Le Potier ; Théorème d'annulation.

Mathematical Subject Classification

14F05, 14M15, 32D15