THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER

préparée à l'Institut Fourier (Grenoble)
laboratoire de mathématiques
associé au C.N.R.S.

NOMBRES DE LELONG ET
NOMBRES DE MILNOR D'UNE SINGULARITÉ ISOLÉE

Marianne LAUBER

Soutenue à Grenoble le 10 février 1993 devant le jury

Président :	*Monique LEJEUNE-JALABERT (UJF)*
Examinateurs :	*Jean-Pierre DEMAILLY, Dir. thèse (UJF)*
	Rémi LANGEVIN (Université de Dijon)
	François LOESER (Université de Paris VI)
	Pierre MAZET (Université de Paris VI)

SOMMAIRE

Mes remerciements s'adressent avant tout à Jean-Pierre Demailly qui a dirigé cette thèse avec une grande patience. Pour cela, ainsi que pour toute la connaissance mathématique qu'il m'a communiquée, je le remercie très chaleureusement.

Je remercie Monique Lejeune qui a bien voulu accepter de présider le jury de cette thèse, après m'avoir dévoilé bien des mystères de la géométrie algébrique.

Pierre Mazet a dirigé mes tous premiers pas dans la recherche et a accepté d'être rapporteur. Je l'en remercie sincèrement.

Je remercie François Lœser, dont les travaux ont beaucoup inspiré la dernière partie de cette thèse, de s'être intéressé à mon travail en acceptant d'être également rapporteur.

Je remercie enfin Rémi Langevin, lui aussi à l'origine des résultats de cette thèse, d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens à remercier tout particulièrement Bernard Teissier pour les entretiens qu'il m'a si courtoisement accordés dans la phase finale de mon travail.

Et bien sûr toute ma reconnaissance va à Myriam Charles et à Arlette Guttin-Lombard, car sans elles la présentation de cette thèse serait bien triste.

INTRODUCTION

Le théorème de Thie établit une relation entre le nombre de Lelong du courant d'intégration sur un ensemble analytique A en un point x de A, et la multiplicité de A en ce point [Th]. J-P. Demailly a généralisé dans [De 2] la notion de nombre de Lelong, en définissant le nombre de Lelong d'un courant T de bidegré (p,p) relativement à un poids plurisousharmonique continu φ par la relation :

$$\nu(T,\varphi) := \int_{\varphi^{-1}(-\infty)} T \wedge \left(\frac{i}{\pi} d'd''\varphi\right)^p .$$

Lorsque $\varphi(z) = \log|z-x|$ on sait que $\nu(T,\varphi)$ coïncide avec le nombre de Lelong classique $\nu(T,x)$ de T au point x, et lorsque $\varphi = \log\max|z_j - x_j|^{1/a_j}$, on obtient le nombre de Lelong directionnel au point x dans la direction $(a_1,\ldots,a_n)$, introduit par C.O. Kiselman dans [Ki 1]. On aimerait, grâce à cette généralisation, étendre le résultat du théorème de Thie, et établir de manière plus générale des relations entre les nombres de Lelong généralisés et les différentes notions de multiplicité définies en algèbre locale, plus particulièrement les nombres de Milnor.

Le chapitre 1 est consacré à des rappels sur les différentes définitions et sur les propriétés générales des nombres de Lelong généralisés.

Au chapitre 2, nous proposons une généralisation des nombres de Lelong microlocaux introduits par L. Abrahamsson dans [Ab]. Étant donné une courbe lisse γ sur une variété complexe lisse X, et x un point de γ, nous considérons l'éclatement $\varphi_p : \widetilde{X}_p \longrightarrow X$ obtenu en effectuant p éclatements ponctuels successifs aux points des transformées strictes de γ situés au-dessus de x, et nous notons $\tilde{x}_p$ le dernier point ainsi obtenu. Nous définissons alors le nombre de Lelong microlocal d'ordre p d'une fonction plurisousharmonique u suivant γ au point x comme le nombre de Lelong du courant $\frac{i}{\pi}d'd''(u\circ\varphi_p)$ de $\widetilde{X}_p$ au point $\tilde{x}_p$. Nous montrons ensuite que ce nombre est égal au minimum des nombres $\nu(\frac{i}{\pi}d'd''u_{|C}, x)$ lorsque C décrit l'ensemble des courbes dont le jet d'ordre p coïncide avec celui de γ en x. Par ailleurs, nous démontrons que ce nombre s'exprime comme le nombre de Lelong généralisé du courant $\frac{i}{\pi}d'd''u$ relativement au poids $\varphi(z) = \frac{1}{2}\log(|z_1|^2 + \cdots |z_{n-1}|^2 + |z_n|^{2p})$, où $(z_1,\ldots,z_n)$ est un système de coordonnées locales centré en x tel que $\gamma = \{z_1 = \cdots = z_{n-1} = 0\}$.

Nous abordons au chapitre 3 notre principal objectif, à savoir relier les nombres de Lelong généralisés et les nombres de Milnor sous certaines hypothèses. Pour cela, nous montrons tout d'abord, comme le suggérait J-P. Demailly dans [De 1], que si $F = (F_1,\ldots,F_N)$ est un morphisme de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^N$ définissant 0, le nombre de Lelong du courant $T = 1$ relativement au poids $\varphi = \log|F|$ est égal à la multiplicité géométrique de l'idéal engendré par n combinaisons linéaires génériques du système $(F_1,\ldots,F_N)$. Il en résulte naturellement que le nombre de Milnor $\mu^{(n)}$ du germe en 0 d'une fonction f holomorphe de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$ à singularité isolée en 0 est égal au nombre de Lelong du courant $T = 1$ pour le poids $\varphi = \log|df|$. Ce chapitre se termine par la définition des nombres $\mu^{(j)}$, $0 \leqslant j \leqslant n$, nombres de Milnor d'une section de $f^{-1}(0)$

par un plan de dimension j passant par 0 générique dans la grassmannienne $G(j,n)$ des j-plans de $\mathbb{C}^n$ passant par 0.

Enfin, le chapitre 4 utilise les relations fondamentales établies au chapitre 3 pour donner une nouvelle démonstration, plus analytique, des formules intégrales obtenues en 1979 par R. Langevin [La]. Ces formules ont été généralisées en 1984 par F. Loeser [Lo] au moyen de la théorie des variétés polaires. Les formules intégrales en question relient les formes de Chern $c_{N-j}(T_f)$ associées aux fibres d'une fonction f holomorphe de $\mathbb{C}^{N+1}$ dans $\mathbb{C}$ à singularité isolée en 0 aux nombres de Milnor par la relation :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to 0}\int_{f^{-1}(t)\cap\{|z|<\varepsilon\}} c_{N-j}(T_f)\wedge\Big(\frac{i}{\pi}d'd''\log|z|\Big)^j = (-1)^{N-j}\big(\mu^{(N+1-j)}+\mu^{(N-j)}\big).$$

Le cas $j=0$ est dû à R. Langevin [La].

Dans un premier temps, nous montrons comment ramener la formule du cas général au cas particulier où j vaut 0. Ceci se fait d'une part grâce à la formule de Crofton

$$\Big(\frac{i}{\pi}d'd''\log|z|\Big)^j = \int_{g\in\mathbb{U}(N+1)}[g(S)]d\mu(g)$$

où $S\in G(N+1-j,N+1)$ et où $d\mu$ désigne la mesure de Haar normalisée du groupe unitaire $\mathbb{U}(N+1)$ de $\mathbb{C}^{N+1}$. Nous utilisons d'autre part le fait que pour S générique dans $G(p,N+1)$ où $1\leqslant p\leqslant N$, on a $|df|\sim|df_{|S}|$ au voisinage de 0 dans S. Ce résultat est dû à B. Teissier [Te 2] et nous reprenons ici sa démonstration. L'idée est d'utiliser un éclatement normalisé suivant l'idéal jacobien de f et l'idéal jacobien de sa restriction à S, en introduisant les paramètres décrivant S comme variables supplémentaires. On est alors ramené à comparer des idéaux principaux sur l'éclatement normalisé.

Dans la seconde partie du chapitre 4, nous démontrons la formule de R. Langevin

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to 0}\int_{f^{-1}(t)\cap\{|z|<\varepsilon\}} c_N(T_f) = (-1)^N\big(\mu^{(N+1)}+\mu^{(N)}\big),$$

en interprétant les deux membres de la formule comme des nombres de Lelong généralisés avec poids. En effet, le terme de gauche est égal à

$$(-1)^N\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|z|<\varepsilon}\Big(\frac{i}{\pi}d'd''\log|f|\Big)\wedge\Big(\frac{i}{\pi}d'd''\log|df|\Big)^N,$$

qui est, au coefficient $(-1)^N$ près, le nombre de Lelong du courant $\frac{i}{\pi}d'd''\log|f|$ relativement au poids $\log|df|$. Or B. Teissier montre dans [Te 2] que $|f(z)|\sim|z|\,|df(z)|$ au voisinage de $z=0$ sur toute courbe d'une partie générique de l'ensemble des courbes polaires associées à f. Ce résultat nous permet d'écrire l'égalité

$$\nu\Big(\frac{i}{\pi}d'd''\log|f|,\log|df|\Big) = \nu\Big(\frac{i}{\pi}d'd''\log|z|\,|df|,\log|df|\Big).$$

Celle-ci est équivalente à l'égalité cherchée, grâce à un résultat obtenu au chapitre 3 que nous pouvons reformuler

$$\mu^{(j)} = \nu\bigg(\Big(\frac{i}{\pi}d'd''\log|z|\Big)^{N+1-j},\log|df|\bigg),$$

et que nous appliquons pour $j=N$ et $j=N+1$.

CHAPITRE I

RAPPELS SUR LES NOMBRES DE LELONG GÉNÉRALISÉS

Dans ce premier chapitre, nous redonnons la définition des nombres de Lelong généralisés introduits par J-P. Demailly [De 2], ainsi que certains des résultats les concernant qui nous serviront dans les chapitres suivants.

Les démonstrations sont données dans [De 2] ; nous ne les répéterons pas ici.

1. Nombres de Lelong généralisés

Soit X une variété de Stein de dimension pure n, T un courant positif fermé sur X de bidegré (p, p).

Soit $\varphi : X \to [-\infty, +\infty[$ une fonction plurisousharmonique (psh) continue. On suppose de plus que φ est semi-exhaustive, c'est-à-dire qu'il existe R tel que pour tout $r < R$, $\{x \in X, \varphi(x) < r\} \subset\subset X$. Pour tout $r < R$, on pose

$$\nu(T, \varphi, r) = \frac{1}{(\pi)^{n-p}} \int_{B(r)} T \wedge \left(id'd'' \max(\varphi, s)\right)^{n-p}$$

où $B(r) = \{z \in X, \varphi(z) < r\}$. La quantité $\nu(T, \varphi, r)$ ne dépend pas du choix de $s < r$ en vertu de la formule de Stokes et du fait que T est d-fermé.

Notons que $\nu(T, \varphi, r)$ est également donné par la définition équivalente suivante [De 2] :

$$\nu(T, \varphi, r) = \frac{1}{(2\pi e^r)^{n-p}} \int_{B(r)} T \wedge (id'd'' e^{2\varphi})^{n-p}$$

qui permet d'appliquer plus simplement certains résultats classiques.

Observons que $\nu(T, \varphi, r)$ est une fonction croissante de $r < R$. En effet, pour $r_1 < r_2 < R$,

$$\nu(T, \varphi, r_2) - \nu(T, \varphi, r_1) = \frac{1}{(\pi)^{n-p}} \int_{\{r_1 \leqslant \varphi < r_2\}} T \wedge (id'd''\varphi)^{n-p} \geqslant 0$$

en prenant $s < r_1$.

DÉFINITION 1.1. — *On appelle nombre de Lelong généralisé de T relativement au poids φ la limite*

$$\nu(T, \varphi) := \lim_{r \to -\infty} \nu(T, \varphi, r) .$$

Remarques.

1) On retrouve en particulier le nombre de Lelong classique, noté $\nu(T, x)$, en considérant sur un ouvert X de $\mathbb{C}^n$ la fonction psh $\varphi(z) = \log|z - x|$.

2) Si u est une fonction psh définie au voisinage d'un point x de $\mathbb{C}^n$, le courant $T = \frac{i}{\pi} d'd''u$ associé à u est un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$. On définit ainsi le nombre de Lelong de u en x comme le nombre de Lelong (classique) du courant T en x, et on le note $\nu(u,x) := \nu(T,x)$.

Nous nous servirons dans la suite essentiellement des deux théorèmes suivants relatifs aux nombres de Lelong généralisés. Nous renvoyons à l'article [De 2] pour leur démonstration.

THÉORÈME 1.1 (Théorème de comparaison [De 2]). — *Soient φ et ψ : $X \to [-\infty, +\infty[$ deux fonctions* psh *continues semi-exhaustives. On suppose que*

$$\ell := \lim_{\varphi \to -\infty} \sup \frac{\psi}{\varphi} < +\infty \ .$$

Alors $\nu(T,\psi) \leqslant \ell^{n-p} \nu(T,\varphi)$, l'égalité ayant lieu lorsque $\ell = \lim \frac{\psi}{\varphi}$.

THÉORÈME 1.2 (Théorème de Siu généralisé [De 2]). — *Soient X et Y des espaces analytiques complexes, X étant de Stein. Soit T un courant positif fermé sur X. Soit $\varphi : X \times Y \to [-\infty, +\infty[$ une fonction* psh *continue. On suppose que φ est semi-exhaustive par rapport à X et que $e^{\varphi(x,y)}$ est localement hölderienne en y sur $X \times Y$. Alors les ensembles de niveau*

$$E_c = \{y \in Y, \nu\big(T, \varphi(\cdot, y)\big) \geqslant c\}$$

sont des sous-ensembles analytiques de Y.

Nous utiliserons également les deux résultats suivants, qui sont particuliers aux nombres de Lelong classiques d'un courant de bidegré $(1,1)$.

THÉORÈME 1.3 (Lelong [Le], Siu [Si]). — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et u une fonction* psh *sur Ω. Si $x \in \Omega$, on note $u|_{L+\{x\}}$ la restriction de u à la droite affine $L+\{x\}$. On a alors*

$$\nu(u,x) = \inf_{L \in \mathbb{P}_{n-1}} \nu(u|_{L+\{x\}}, x) \quad \forall x \in \Omega \ ,$$

l'égalité étant réalisée hors d'un sous-ensemble localement polaire de $\mathbb{P}_{n-1}$.

THÉORÈME 1.4 (Kiselman [Ki 2]). — *Soit $F : \Omega \to \Omega'$ une application holomorphe d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ dans un ouvert Ω' de $\mathbb{C}^m$ et soit u une fonction* psh *sur Ω'. On a pour tout $x \in \Omega$ l'inégalité*

$$\nu(u \circ F, x) \geqslant \nu\big(u, F(x)\big) \ .$$

2. Cas où φ est le logarithme de la norme d'une application analytique

Dans ce paragraphe, nous considérons un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, T un courant positif fermé défini sur Ω, et $F_1, \ldots, F_N$ N fonctions holomorphes sur Ω qui s'annulent simultanément en un point z_0 de Ω. Nous allons nous intéresser aux propriétés du nombre de Lelong de T relatif au poids

$$\varphi(z) := \log |F| = \frac{1}{2} \log \sum_{j=1}^{N} |F_j(z)|^2 .$$

Supposons qu'il existe un voisinage ω de z_0 relativement compact dans Ω tel que

$$R := \inf_{z \in \partial\omega} \varphi(z)$$

soit fini, $\partial\omega$ désignant le bord de ω. Par conséquent, l'ensemble analytique

$$\{z \in \omega, F_1(z) = \cdots = F_N(z) = 0\}$$

est compact dans ω, donc fini. Il en résulte que $N \geqslant n$. On peut de plus supposer, sans restreindre la généralité du problème, que z_0 est le seul zéro commun à toutes les fonctions $(F_j)_{j=1,\ldots,N}$ contenu dans $\overline{\omega}$, quitte éventuellement à restreindre ω. Le nombre de Lelong étant une propriété locale, nous supposerons en outre que $z_0 = 0$.

Considérons à présent $f_1, \ldots, f_N$ les germes en 0 des fonctions $F_1, \ldots, F_N$, et I l'idéal de $\mathcal{O}_n$ qu'ils engendrent. On désigne par $\mathcal{O}_n$ l'anneau des germes en 0 des fonctions holomorphes de $\mathbb{C}^n$. Par hypothèse, la variété définie par l'idéal I est le point $\{0\}$. On dira alors que I définit 0, ou encore que $f_1, \ldots, f_N$ définissent 0. Rappelons qu'un élément f de $\mathcal{O}_n$ est entier sur I s'il existe un entier k, et pour tout $j = 1, \ldots, k$ un élément $a_j \in I^j$ tels que

$$f^k + a_1 f^{k-1} + \cdots + a_k = 0 .$$

La clôture intégrale de I dans $\mathcal{O}_n$, notée $\overline{I}$, est par définition l'ensemble des éléments de $\mathcal{O}_n$ entiers sur I. L'ensemble $\overline{I}$ est un idéal et peut se définir aussi $[B - S]$ par

$$(*) \qquad \overline{I} = \{g \in \mathcal{O}_n, \exists C > 0 \quad |g|^2 \leqslant C \sum_{j=1}^{N} |f_j|^2\} .$$

Soit $(g_1, \ldots, g_p)$ un système générateur quelconque de $\overline{I}$. Par la caractérisation (*) de $\overline{I}$, il existe un voisinage ω' de 0 contenu dans ω, $G_1, \ldots, G_p$ des fonctions holomorphes représentant $g_1, \ldots, g_p$ sur ω', et des constantes C et C' tels que sur ω' :

$$C' \sum_{j=1}^{N} |F_j|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{p} |G_j|^2 \leqslant C \sum_{j=1}^{N} |F_j|^2 .$$

Si nous posons $\varphi' = \frac{1}{2} \log \sum_{j=1}^{p} |G_j|^2$, le théorème de comparaison 1.1 nous donne la relation

$$\nu(T, \varphi) = \nu(T, \varphi') .$$

Dans le cas particulier où $T = 1$, nous introduisons la définition suivante :

DÉFINITION 1.2. — *Le nombre de Lelong généralisé* $\nu(1, \varphi)$ *sera noté* $\nu(I)$.

La propriété d'invariance des nombres de Lelong énoncée ci-dessus entraîne alors la conséquence suivante, qui nous permettra d'interpréter au chapitre 3 le nombre $\nu(I) = \nu(1, \varphi)$ comme une multiplicité géométrique.

PROPOSITION 1.5. — *Le nombre* $\nu(I)$ *ne dépend que de la clôture intégrale* $\overline{I}$ *de l'idéal* I. *On a donc*

$$\nu(I) = \nu(\overline{I}) .$$

CHAPITRE II

NOMBRES DE LELONG MICROLOCAUX ITÉRÉS

Dans ce chapitre, indépendant des deux suivants, nous reprenons de manière plus géométrique la définition des nombres de Lelong microlocaux de L. Abrahamsson [Ab], ce qui nous permet d'itérer le procédé de construction. Nous définissons ainsi, pour une fonction psh u sur une variété analytique complexe lisse X, un nombre de Lelong microlocal d'ordre p de u suivant un germe de courbe lisse γ passant par x, en effectuant p éclatements ponctuels successifs de X aux points origine des transformées strictes de γ. Nous montrons alors que ce nombre est égal à la valeur inférieure des $\nu(u|_C, x) = \nu\big((\frac{i}{\pi}d'd''u)|_C, x\big)$, C appartenant au jet d'ordre p de γ en x, et qu'il s'exprime à l'aide d'un nombre de Lelong généralisé avec poids.

1. Définition du nombre de Lelong microlocal d'ordre p

Soit u une fonction psh sur une variété analytique complexe lisse X de dimension n. Soient γ une courbe lisse de X et x un point de γ. Soit Ω un voisinage de x muni d'un système de coordonnées locales $(z_1, \dots, z_n)$ tel que $x = 0$. On note $\widetilde{X}_1$ l'éclatement de X au-dessus de 0 et $\alpha_1 : \widetilde{X}_1 \to X$ la projection canonique.

Rappelons que $\alpha_1 : \widetilde{X}_1 \setminus \alpha_1^{-1}(0) \to X \setminus \{0\}$ est un isomorphisme et que $\alpha_1^{-1}(0) \simeq \mathbb{P}_{n-1}$. De plus $\widetilde{X}_1$ est décrit au voisinage de $\alpha_1^{-1}(0)$ par :

$$\widetilde{\Omega}_1 = \big\{(z,\eta) \in \Omega \times \mathbb{P}_{n-1},\ z_i\eta_j = z_j\eta_i,\ 1 \leqslant i,j \leqslant n\big\}$$

où $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ sont les coordonnées homogènes de η.

Sur chaque carte $\widetilde{U}_i = \big\{(z,\eta) \in \widetilde{\Omega}_1,\ \eta_i \neq 0\big\}$, $i = 1, \dots, n$, de $\widetilde{\Omega}_1$, on définit un système de coordonnées locales $(w_1, \dots, w_n)$ par :

$$w_i = z_i, \quad w_j = \frac{\eta_j}{\eta_i}, \quad j \neq i\ .$$

Dans ce système de coordonnées, la restriction de α_1 à $\widetilde{U}_i$ est donnée par :

$$(w_1, \dots, w_n) \longmapsto (w_1 w_i, \dots, w_i, \dots, w_n w_i)\ .$$

γ étant une courbe lisse, la transformée stricte $\tilde{\gamma}_1$ de γ par cet éclatement ne rencontre $\alpha_1^{-1}(0)$ qu'en un seul point, noté $\tilde{\gamma}_1(0)$, qui correspond à la tangente de γ au point 0.

DÉFINITION 2.1.1. — *Le nombre de Lelong microlocal d'ordre 1 de u suivant γ en 0 est défini par*

$$\nu_1(u, 0, \gamma) := \nu\big(u \circ \alpha_1, \tilde{\gamma}_1(0)\big)\ .$$

Ce nombre ne dépend que du jet d'ordre 1 de γ en 0, jet noté $[\gamma]_1$, car si $\gamma' \in [\gamma]_1$, γ et γ' ont même tangente en 0, *i.e.* $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_1(0)$. Si de plus γ et γ' ont

un contact d'ordre $\geqslant p$ en 0, c'est-à-dire si γ' appartient au jet d'ordre p de γ en 0, noté $[\gamma]_p$, alors $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_1'$ ont un contact d'ordre $\geqslant p-1$ en $\tilde{\gamma}_1(0)$. En effet, dans un système de coordonnées locales $(z_1,\dots,z_n)$ adéquat, γ et γ' peuvent être paramétrées respectivement par

$$\begin{aligned}\gamma &: t \longmapsto (0,\dots,0,t)\ ,\\ \gamma' &: t \longmapsto \big(g_1(t),\dots,g_{n-1}(t),t+g_n(t)\big)\ ,\end{aligned}$$

où g_j est une fonction holomorphe s'annulant à un ordre $\geqslant p$+1 en 0. Dans la carte $\widetilde{U}_n = \{\eta_n \neq 0\}$, $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_1'$ sont alors paramétrées par

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_1 &: t \longmapsto (0,\dots,0,t)\ ,\\ \tilde{\gamma}_1' &: t \longmapsto \Big(\frac{g_1(t)}{t+g_n(t)},\dots,\frac{g_{n-1}(t)}{t+g_n(t)},t+g_n(t)\Big)\ ,\end{aligned}$$

et $\dfrac{g_j(t)}{t+g_n(t)}$ est holomorphe et s'annule à un ordre $\geqslant p$ en 0.

Cette définition du nombre de Lelong microlocal d'ordre 1 correspond à celle de L. Abrahamsson ([Ab]) lorsque X est un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et γ une droite de $\mathbf{C}^n$ passant par x. Dans [Ab] il est montré que

$$\nu_1(u,x,\gamma) = \inf_{C\in[\gamma]_1} \nu(u|_C,x)\ ,$$

relation que nous établirons dans un cas plus général au paragraphe 2. Par ailleurs, ce nombre s'identifie selon [Ab] à un nombre de Lelong généralisé de Kiselman ([Ki 1], voir la définition au paragraphe 4).

Le procédé d'éclatement ponctuel que nous avons considéré peut être répété plusieurs fois. Nous notons, pour $p \geqslant 2$, $\widetilde{X}_p$ l'éclatement de $\widetilde{X}_{p-1}$ au-dessus de $\tilde{\gamma}_{p-1}(0)$ et $\alpha_p : \widetilde{X}_p \longrightarrow \widetilde{X}_{p-1}$ la projection canonique. Nous notons également, toujours par analogie avec le premier éclatement, $\tilde{\gamma}_p$ la transformée stricte de $\tilde{\gamma}_{p-1}$ par cet éclatement, et $\tilde{\gamma}_p(0)$ l'unique point où $\tilde{\gamma}_p$ rencontre $\alpha_p^{-1}(\tilde{\gamma}_{p-1}(0))$. Si $\gamma' \in [\gamma]_p$, alors $\tilde{\gamma}_p(0) = \tilde{\gamma}_p'(0)$ puisque l'ordre de contact de γ et γ' en 0 diminue au plus d'une unité à chaque éclatement.

DÉFINITION 2.1.2. — *Le nombre de Lelong microlocal d'ordre p de u suivant γ en 0 est défini par :*

$$\nu_p(u,0,\gamma) := \nu\big(u\circ\alpha_1\circ\cdots\circ\alpha_p, \tilde{\gamma}_p(0)\big)\ .$$

Ce nombre, comme nous venons de le voir, ne dépend que de $[\gamma]_p$.

2. Nombres de Lelong microlocaux et courbes tangentes à γ

Notre étude étant locale, nous pouvons nous placer dans un voisinage Ω de x muni d'un système de coordonnées locales $(z_1, \ldots, z_n)$ tel que $x = 0$ et $\gamma : t \mapsto (0, \ldots, 0, t)$. $\tilde{\gamma}_1$ est alors paramétrée par $t \mapsto (0, \ldots, 0, t)$ dans le système de coordonnées locales de $\widetilde{U}_n$ défini au paragraphe 1, et $\tilde{\gamma}_1(0) = 0$. Comme de plus $\alpha_1|_{\widetilde{U}_n} = F$ avec

$$F : (w_1, \ldots, w_n) \longmapsto (w_1 w_n, \ldots, w_{n-1} w_n, w_n) ,$$

on obtient la relation

$$\nu_1(u, 0, \gamma) = \nu(u \circ F, 0) .$$

En étudiant le comportement local à chaque éclatement ponctuel successif, on obtient, en itérant ce procédé :

$$\nu_p(u, 0, \gamma) = \nu(u \circ F^p, 0) .$$

Or, pour toute fonction psh v on sait (théorème 1.3) que

$$(1) \qquad \nu(v, 0) = \inf_{L \in \mathbb{P}_{n-1}} \nu(v|_L, 0) ,$$

l'égalité étant réalisée hors d'un sous-ensemble localement polaire de $\mathbb{P}_{n-1}$, et plus généralement (théorème 1.4) que

$$(2) \qquad \nu(v \circ h, 0) \geqslant \nu(v, 0)$$

pour toute fonction holomorphe $h : \omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ telle que $h(0) = 0$, où ω est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{C}$. Si $\gamma' \in [\gamma]_p$, il existe une telle fonction $h : \omega \to \mathbb{C}^n$ telle que $\gamma' = F^p \circ h$: γ' étant de la forme $t \mapsto (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ avec $\gamma_i(t) = O(t^{p+1})$ pour $i = 1, \ldots, n-1$, et $\gamma_n(t) = t + O(t^{p+1})$, il suffit en effet de prendre $h = (\frac{\gamma_1}{\gamma_n^p}, \ldots, \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n^p}, \gamma_n)$. Donc d'après (2)

$$\nu(u|_{\gamma'}, 0) = \nu(u \circ F^p \circ h, 0) \geqslant \nu(u \circ F^p, 0) = \nu_p(u, 0, \gamma) .$$

De plus, d'après (1), on obtient l'égalité pour presque toutes les courbes de $[\gamma]_p$ de la forme

$$(3) \qquad \gamma' : t \longmapsto (a_1 t^{p+1}, \ldots, a_{n-1} t^{p+1}, t), \quad (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$$

ces courbes étant les images de droites par F^p. Par conséquent, on obtient

PROPOSITION 2.2.1. — $\nu_p(u, 0, \gamma) = \inf_{\gamma' \in [\gamma]_p} \nu(u|_{\gamma'}, 0)$.

3. Lien avec les nombres de Lelong généralisés avec poids

On se place ici encore dans un système de coordonnées locales $(z_1, \dots, z_n)$ tel que $x = 0$ et $\gamma = \{z_1 = \cdots = z_{n-1} = 0\}$. Soient f_p l'application holomorphe définie par

$$f_p(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n^{p+1})$$

et $\varphi_p = \log|f_p|$ la fonction psh associée. Nous allons montrer que

$$\nu(u, \varphi_p) = \nu_p(u, 0, \gamma).$$

Considérons la fonction $f_{p*}u(z) = \sum_{w \in f_p^{-1}(z)} u(w)$, où la somme est comptée avec multiplicités. Comme f_p est une application propre, $f_{p*}u$ est une fonction psh et vérifie la relation $d'd''f_{p*}u = f_{p*}d'd''u$. Par conséquent,

$$\nu(u, \varphi_p) = \nu(f_{p*}u, 0) = \inf_{L \in \mathbb{P}_{n-1}} \nu(f_{p*}u|_L, 0) .$$

Si L est une droite paramétrée par $t \mapsto (a_1 t, \dots, a_n t)$, $f_p^{-1}(L)$ est une courbe C paramétrée par

$$\tau \mapsto (a_1 \tau^{p+1}, \dots, a_{n-1}\tau^{p+1}, a_n^{1/p+1}\tau) .$$

En particulier $C \in [\gamma]_p$ et vérifie la relation (3) lorsque $a_n \neq 0$; de plus

$$\begin{aligned}\nu(f_{p*}u|_L, 0) &= \lim_{r \to 0} \int_{L \cap B(0,r)} \frac{i}{\pi} d'd'' f_{p*}u \\ &= \lim_{\rho \to 0} \int_{C \cap B(0,\rho)} \frac{i}{\pi} d'd''u = \nu(u|_C, 0) .\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\nu(u, \varphi_p) &= \inf_{L \in \mathbb{P}_{n-1}, a_n \neq 0} \nu(f_{p*}u|_L, 0) \\ &= \inf_{L \in \mathbb{P}_{n-1}, a_n \neq 0} \nu(u|_{f_p^{-1}(L)}, 0) = \nu_p(u, 0, \gamma)\end{aligned}$$

d'après le paragraphe 2.

4. Conclusion

Soit γ une courbe lisse de X passant par x et $(z_1, \dots, z_n)$ un système de coordonnées locales en x tel que $x = 0$ et $\gamma = \{z_1 = \cdots = z_{n-1} = 0\}$. Le nombre de Lelong microlocal d'ordre p de u suivant γ en x ne dépend que du jet $[\gamma]_p$ d'ordre p de γ en 0 et se calcule par les expressions équivalentes :

$$\begin{aligned}\nu_p(u, 0, \gamma) &= \nu\big(u \circ \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_p, \tilde{\gamma}_p(0)\big) \\ &= \inf_{\gamma' \in [\gamma]_p} \nu(u|_{\gamma'}, 0) \\ &= \nu\Big(u, \frac{1}{2}\log\big(|z_1|^2 + \cdots + |z_{n-1}|^2 + |z_n^{p+1}|^2\big)\Big) .\end{aligned}$$

C.O. Kiselman introduit dans [Ki 1] un nombre de Lelong généralisé, défini pour une fonction psh v sur un ouvert D de $\mathbb{C}^n$, x un point de D et $a \in]0,+\infty[^n$ par

$$\nu(v,x,a) = \lim_{r\to-\infty} \frac{1}{r}\theta_{x,ra}(v)$$

où $\theta_{x,ra}(v)$ est la mesure de moyenne uniforme sur le polycercle

$$\{z \in \mathbb{C}^n, \quad |z_i - x_i| = e^{ra_i}, \quad i = 1,\dots,n\} \ .$$

Ce nombre est lié aux nombres de Lelong généralisés avec poids par la relation ([De 2]) :

$$\nu(v,0,a) = a_1 \cdots a_n \nu\Big(v, \log\big(|z_1|^{\frac{1}{a_1}} + \cdots + |z_n|^{\frac{1}{a_n}}\big)\Big) \ .$$

On en déduit le résultat suivant qui améliore celui de L. Abrahamsson ([Ab]) :

$$\nu_p(u,0,\gamma) = (p+1)\nu\big(u,0,(1,\dots,1,\frac{1}{p+1})\big) = \nu\big(u,0,(p+1,\dots,p+1,1)\big) \ .$$

CHAPITRE III

LIEN ENTRE
LES NOMBRES DE LELONG GÉNÉRALISÉS
ET LES NOMBRES DE MILNOR

1. Nombres de Lelong généralisés et multiplicités

Nous nous replaçons dans ce paragraphe sous les hypothèses du paragraphe 1.2. Nous avons alors la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1. — *Soient $F_1, \dots, F_N$ N fonctions holomorphes au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$, définissant 0. Soit φ la fonction plurisousharmonique définie au voisinage de 0 par :*

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \log \sum_{j=1}^{N} |F_j|^2 .$$

Soit I l'idéal engendré par les germes en 0 des fonctions $F_1, \dots, F_N$. Il existe n combinaisons linéaires génériques $G_1, \dots, G_n$ de $F_1, \dots, F_N$ telles que l'idéal J engendré par leurs germes en 0 vérifie les inclusions $J \subset I \subset \overline{J}$. On a donc $\nu(1, \varphi) = \nu(I) = \nu(J)$.

De plus, si λ désigne la multiplicité géométrique de J, c'est-à-dire le degré du revêtement ramifié $G : \omega \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ où ω est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$, on a l'égalité

$$\nu(J) = \lambda .$$

Démonstration. — 1. Nous allons démontrer la première partie de cette proposition, à savoir l'existence de n fonctions génériques, en précisant un peu le résultat.

LEMME 3.1.1. — *Soit $I = (f_1, \dots, f_N)$ un idéal de $\mathcal{O}_{n,0}$, avec $N>n$. Il existe $g_1, \dots, g_n$ n combinaisons linéaires de $f_1, \dots, f_N$ telles que l'idéal $J = (g_1, \dots, g_n)$ vérifie $J \subset I \subset \overline{J}$. Si $g_j = a_j \cdot f = \sum_{k=1}^{N} a_{jk} f_k$, où $a_j \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ pour $j = 1, \dots, n$, les coefficients $([a_1], \dots, [a_n])$ peuvent être choisis arbitrairement dans le complémentaire d'un sous-ensemble analytique propre de $(\mathbb{P}_{N-1})^n$.*

Démonstration. — On reproduit ici la démonstration de ce lemme donnée par J.P. Demailly dans [De 3].

On suppose que $f_1, \dots, f_N$ sont définies sur un voisinage Ω de 0 et on note $f = (f_1, \dots, f_N)$. On considère les sous-ensembles analytiques de $\Omega \times (\mathbb{P}_{N-1})^n$ suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{(z, [\omega_1], \dots, [\omega_n]) \in \Omega \times (\mathbb{P}_{N-1})^n, \quad \omega_j \cdot f(z) = 0\} \\ A^* &= \text{réunion des composantes irréductibles de } A \\ &\qquad \text{qui ne sont pas contenues dans } f^{-1}(0) \times (\mathbb{P}_{N-1})^n \end{aligned}$$

Soit $z \notin f^{-1}(0)$. La fibre

$$\begin{aligned} A_z &= \{([\omega_1], \dots, [\omega_n]) \in (\mathbf{P}_{N-1})^n, \quad \omega_j \cdot f(z) = 0\} \\ &= A_z^* \end{aligned}$$

est un produit de n hyperplans de $\mathbf{P}_{N-1}$. Par conséquent, $A \cap \big((\Omega \setminus f^{-1}(0)) \times (\mathbf{P}_{N-1})^n\big)$ est un fibré de base $\Omega \setminus f^{-1}(0)$ et de fibres $(\mathbf{P}_{N-2})^n$. Comme A^* est l'adhérence dans $\Omega \times (\mathbf{P}_{N-1})^n$ de cet ensemble, sa dimension est

$$\dim A^* = n + n(N-2) = n(N-1) = \dim(\mathbf{P}_{N-1})^n .$$

Il en résulte que la fibre $A_0^* = A^* \cap \big(\{0\} \times (\mathbf{P}_{N-1})^n\big)$ est un sous-ensemble analytique propre de $\{0\} \times (\mathbf{P}_{N-1})^n$.

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbf{C}^N \setminus \{0\})^n$, tel que $\big([a_1], \dots, [a_n]\big) \notin A_0^*$. Pour des raisons de compacité, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A^* \cap \big(\overline{B}(0,\varepsilon) \times (\mathbf{P}_{N-1})^n\big)$ est disjoint du voisinage $B(0,\varepsilon) \times \prod_{j=1}^n B(a_j, \varepsilon)$ de $\big(0, [a_1], \dots, [a_n]\big)$. Pour $z \in B(0,\varepsilon)$, il existe j, $1 \leqslant j \leqslant n$ tel que

$$|a_j \cdot f(z)| \geqslant \varepsilon |f(z)|,$$

car sinon il existerait pour tout $j = 1, \dots, n$, un élément $h_j \in \mathbf{C}^N$ tel que $|h_j| < \varepsilon$ et $a_j \cdot f(z) = h_j \cdot f(z)$. Comme $f(z) \neq 0$, on aurait alors

$$\big(z, [a_1 - h_1], \dots, [a_n - h_n]\big) \in A^* \cap \big(B(0,\varepsilon) \times (\mathbf{P}_{N-1})^n\big)$$

ce qui contredit ce qui précède.

On obtient ainsi

$$\varepsilon |f(z)| \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j \cdot f(z)| \leqslant \big(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j|\big) |f(z)| .$$

Les fonctions $g_j = a_j \cdot f$ répondent à la question et $\big([a_1], \dots, [a_n]\big)$ peut être pris quelconque dans $(\mathbf{P}_{N-1})^n \setminus pr_2(A_0^*)$ où pr_2 est la projection canonique de $\Omega \times (\mathbf{P}_{N-1})^n$ sur $(\mathbf{P}_{N-1})^n$. ∎

Soient $f_1, \dots, f_N$ les germes en 0 des fonctions $F_1, \dots, F_N$. Ces fonctions définissent 0 par hypothèse, donc $N \geqslant n$. Si $N > n$, le lemme appliqué à $I = (f_1, \dots, f_N)$ nous assure de l'existence de n germes de fonctions holomorphes $g_1, \dots, g_n$ tels que $J = (g_1, \dots, g_n) \subset I \subset \overline{J}$. Cette double inclusion implique l'égalité des clôtures intégrales $\overline{I} = \overline{J}$ et donc des nombres de Lelong $\nu(I) = \nu(J)$ (Proposition 1.2).

On note $G_1, \dots, G_n$ des fonctions représentant $g_1, \dots, g_n$ sur un voisinage ω de 0. Ces fonctions – holomorphes – définissent 0 par construction.

2. Nous allons à présent montrer que le nombre de Lelong généralisé relativement au poids

$$\psi(z) = \frac{1}{2} \log \sum_{j=1}^{n} |G_j|^2 = \log |G|$$

est égal à la multiplicité géométrique de $G = (G_1, \dots, G_n)$.

LEMME 1.2. — *Soient X et Y deux espaces topologiques localement compacts, a un point de X et $\varphi : X \to Y$ une application continue telle que $\varphi^{-1}\varphi(a)$ soit compact. Il existe alors des voisinages ouverts U de $\varphi^{-1}\varphi(a)$, V de $\varphi(a)$, tels que $\varphi : U \to V$ soit définie et propre.*

Démonstration. — $\varphi^{-1}\varphi(a)$ étant compact dans X localement compact, il existe U' voisinage ouvert de $\varphi^{-1}\varphi(a)$ relativement compact dans X.

Posons $FrU' = \overline{U}' \setminus U'$ où $\overline{U}'$ désigne l'adhérence de U' dans X. FrU' est un compact de X donc $\varphi(FrU')$ est un compact de Y par continuité de φ.

Notons V le complémentaire de $\varphi(FrU')$ dans Y : c'est un voisinage ouvert de $\varphi(a)$ par choix de U'.

Soit $U = \varphi^{-1}(V) \cap U'$; U est un voisinage ouvert de $\varphi^{-1}\varphi(a)$. $\varphi : U \to V$ est une application bien définie. Il reste à montrer qu'elle est propre. φ étant continue, il suffit pour cela de vérifier que l'image réciproque d'un compact est un compact. Considérons donc K compact de V. On a

$$\varphi^{-1}(K) \cap U \subset \varphi^{-1}(K) \cap \overline{U}'$$

qui est compact. Nous allons montrer qu'en fait $\varphi^{-1}(K) \cap U = \varphi^{-1}(K) \cap \overline{U}'$.

Soit $b \in \varphi^{-1}(K) \cap \overline{U}'$. $\varphi(b) \in \varphi\varphi^{-1}(K) \subset K \subset V$, donc $b \in \varphi^{-1}(V)$ et $b \notin FrU'$ par définition de V, donc $b \in \varphi^{-1}(V) \cap U' = U$, d'où $\varphi^{-1}(K) \cap U = \varphi^{-1}(K) \cap \overline{U}'$. ∎

L'application $G : \omega \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ étant analytique et définissant 0, il existe par le lemme 3.1.2 des voisinages ouverts U' et V' de 0 dans $\mathbb{C}^n$ tels que $G : U' \to V'$ soit propre.

Soit $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset V'$ et $U = U' \cap G^{-1}\big(B(0, r)\big)$. $G : U \to B(0, r)$ est un revêtement ramifié de degré noté λ (*cf.* [GR]). Notons Y l'ensemble de ramification de G, de sorte que

$$G : U \setminus G^{-1}(Y) \to B(0, r) \setminus Y$$

est un revêtement étale. En effectuant le changement de variable suivant au voisinage de 0 :

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) = \big(G_1(z), \dots, G_n(z)\big),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\nu(1,\psi,r) &= \frac{1}{(2\pi r)^n}\int_{U\cap\{|G|^2<r\}} (id'd''|G|^2)^n \\
&= \frac{1}{(2\pi r)^n}\int_{(U\smallsetminus G^{-1}(Y))\cap\{|G|^2<r\}} (id'd''|G|^2)^n \\
&= \frac{1}{(2\pi r)^n}\lambda\int_{B(0,r)\smallsetminus Y} (id'd''|\omega|^2)^n \\
&= \lambda\frac{1}{(2\pi r)^n}\int_{B(0,r)} (id'd''|\omega|^2)^n \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 3.1. ■

2. Nombres de Milnor

DÉFINITION 3.2 (voir par exemple [Te 1]). — *Soit $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe admettant une singularité isolée en 0.*

Le nombre de Milnor $\mu^{(n)}$ de f en 0 est la multiplicité de l'idéal de $\mathcal{O}_n$ engendré par les dérivées partielles $(f'_1, \dots, f'_n)$, avec la notation $f'_j = \frac{\partial f}{\partial z_j}$.

PROPOSITION 3.2.1. — *Soit $f : \omega \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie sur un voisinage ω de 0, à singularité isolée en 0. On a alors*

$$\mu^{(n)} = \nu(1, \log|df|)$$

Démonstration. — Le résultat découle immédiatement de la Définition 3.2 et de la Proposition 3.1, les fonctions $f'_1, \dots, f'_n$ définissant 0 puisque c'est une singularité isolée de f. ■

On considère dans la suite de ce paragraphe $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie sur un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{C}^n$.

Nous allons définir $\mu^{(p)}$ comme le nombre de Milnor d'une section de $f^{-1}(0)$ par un plan générique de dimension p passant par 0, et pour cela nous vérifierons tout d'abord qu'une telle définition a bien un sens.

PROPOSITION 3.2.2. — *Les plans $S \in G = G(p,n)$ tels que $f|_S$ admet une singularité isolée en 0, forment une partie générique de G.*

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$ un réel tel que $|f| + |df| \neq 0$ sur $B_\varepsilon^* = B(0,\varepsilon)\smallsetminus\{0\}$. Considérons $V = \{(x,S) \in B_\varepsilon^* \times G, x \in S f(x) = 0, df|_S(x) = 0\}$

et la projection $\pi : V \longrightarrow G$.
$(x,S) \longrightarrow S$

Si l'on démontre que la dimension de V, $\dim V$, est strictement inférieure à $\dim G = p(n-p)$, alors par le théorème de Sard, $\pi(V)$, et par suite

$$\{S \in G, f|_S \text{ a une singularité non isolée en } 0\}$$

est de mesure nulle dans G.

1. Réduction au cas où f est un polynôme de Weierstrass. Le problème étant invariant par multiplication par une fonction holomorphe inversible, nous supposerons dans la suite de la démonstration que f est un polynôme de Weierstrass en z_n, de la forme

$$f(z) = z_n^s + \sum_{p=0}^{s-1} a_p(z')z_n^p$$

où s désigne l'ordre de f en 0 et où a_p est holomorphe au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{n-1}$.

2. Si $n=2$, alors $p=1$ et $G(1,2)$ est l'ensemble des droites de $\mathbb{C}^2$ passant par 0. $L \in G(1,2)$ admet donc une singularité isolée en 0 dès que $f|_L \not\equiv 0$ au voisinage de 0. Si f_s désigne la partie homogène de plus petit degré s de f, f_s, définie comme application sur $G(1,2)$ contient l'ensemble $\{L \in G(1,2) \quad f|_L \equiv 0$ au voisinage de $0\}$.

Comme $f_s \not\equiv 0$, $f_s^{-1}(0)$ est une réunion finie de points. On obtient donc le lemme pour $n=2$.

3. Supposons $n \geqslant 3$. f admettant une singularité isolée en 0 est donc irréductible.

Posons $Z_f = \{z \in U \setminus \{0\}, f(z) = 0, df(z)\cdot z = 0\}$. Nous allons nous intéresser à la dimension de Z_f, puis à celle de V. Remarquons tout d'abord que

$$\begin{cases} f(z) = 0 \\ df(z)\cdot z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z_n^s + \sum_{p=0}^{s-1} a_p(z')z_n^p = 0 \\ z_n^s + \sum_{p=0}^{s-1} \left(\frac{1}{s} d_{z'}a_p(z')\cdot z' + \frac{p}{s} a_p(z')\right) z_n^p = 0 \end{cases}$$

Si Z_f est une hypersurface, confondue avec $f^{-1}(0) \setminus \{0\}$ en vertu de l'hypothèse d'irréductibilité, les deux polynômes en z_n ci-dessus ont mêmes racines pour z' fixé, et sont donc égaux :

$$\forall p = 0 \cdots s-1, \forall z' \quad d_{z'}a_p(z')\cdot z' = (s-p)a_p(z')$$

i.e. a_p est homogène de degré $s-p$. Z_f n'est donc une hypersurface que si f est s-homogène.

a. Premier cas : f n'est pas homogène.

Z_f est donc de codimension 2. Tout couple (x,S) de V vérifie $x \in S \subset \operatorname{Ker} df(x)$, et $f(x) = 0$, donc $x \in Z_f$, c'est-à-dire x est sur une surface de dimension $n-2$. Pour x fixé dans $Z_f \cap B_\varepsilon^*$, les plans S tels que $(x,S) \in V$ vérifient les inclusions :

$$\mathbb{C}x \subset S \subset \operatorname{Ker} df(x)$$

i.e.

$$\{0\} \subset S' \simeq S/\mathbb{C}x \subset \operatorname{Ker} df(x)/\mathbb{C}x. \qquad (*)$$

Puisque $x \in B_\varepsilon^*$ et $f(x) = 0$, $\operatorname{Ker} df(x)$ est de dimension $n-1$. Par conséquent la fibre de V au-dessus de x équivaut à l'ensemble des plans de dimension $p-1$ passant par 0 dans $\mathbb{C}^{n-2}$ c'est-à-dire $G(p-1, n-2)$.

Ainsi V est un fibré au-dessus de $Z_f \cap B_\varepsilon^*$ qui est de dimension $n-2$, et la dimension de chaque fibre est $(n-p-1)(p-1)$.

Donc $\dim V = n-2+(n-p-1)(p-1) = (n-p)p-1 < \dim G$.

b. Deuxième cas : f est s-homogène.

Si $(x,S) \in V$, alors pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $|\lambda x| < \varepsilon$, $(\lambda x, S) \in V$. Nous allons donc, plutôt que V, considérer

$$\widetilde{V} = \left\{(\tilde{x}, S) \in \mathbb{P}_{n-1} \times G \,;\, (x,S) \in V \quad \text{si} \quad x \in \tilde{x} \cap B_\varepsilon^*\right\}$$

• $\{\tilde{x} \in \mathbb{P}_{n-1} \,,\, f|_{\tilde{x}} = 0\}$ est une hypersurface de $\mathbb{P}_{n-1}$;

• pour $\tilde{x}$ fixé dans cette hypersurface, $\{S, (\tilde{x}, S) \in \widetilde{V}\} \simeq G(p-1, n-2)$ par le même raisonnement qu'en a.

$\widetilde{V}$ est un fibré au-dessus de $\{\tilde{x}, f|_{\tilde{x}} = 0\}$, et

$$\dim \widetilde{V} = n-2+(n-p-1)(p-1) = (n-p)p-1 < \dim G.$$

De plus, $\pi(V) = \tilde{\pi}(\widetilde{V})$ où $\tilde{\pi} : \widetilde{V} \longrightarrow G.$ ■

$$(\tilde{x}, S) \longrightarrow S$$

Remarque. — On désigne par F le fibré canonique au-dessus de $G = G(p,n)$:

$$F = \{(x,S) \in \mathbb{C}^n \times G \quad x \in S\}\ .$$

L'ensemble V défini dans la démonstration précédente s'écrit aussi

$$V = \left\{(x,S) \in B_\varepsilon \times G \quad x \in S \,;\, f(x) = 0 \,;\, df|_S(x) = 0\right\} \smallsetminus \{(0,S) \in F\}\ .$$

$\overline{V}$ est donc un sous-ensemble analytique de F, comme adhérence de la différence de deux sous-ensembles analytiques, et $A = \overline{V} \cap \{(0,S), S \in G\}$ est également un sous-ensemble analytique de F. $\pi(A)$ est donc un sous-ensemble algébrique de G, contenu dans $\pi(V)$, qui est, comme nous l'avons vu, de mesure nulle dans G.

Notons W le complémentaire de $\pi(A)$ dans G : c'est un ouvert de Zariski dense dans G, contenu dans l'ensemble $\{S \in G \quad f|_S \text{ admet une singularité isolée en } 0\}$.

PROPOSITION-DÉFINITION 3.2.3. — *Le nombre de Milnor d'une section de $f^{-1}(0)$ par un plan S de dimension p passant par 0 ne dépend pas de S pour S générique dans $G = G(p,n)$. Ce nombre est noté $\mu^{(p)}$.*

Démonstration. — On considère W défini dans la remarque précédente. W est un ouvert de Zariski dense dans G, et pour tout S de W, $f|_S$ admet une singularité isolée en 0. Pour tout $S \in W$, on définit

$$\mu^{(p)}(S) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_\varepsilon \cap S} \left(\frac{i}{\pi} d'd'' \log |df_{|S}|\right)^p .$$

Cette définition est cohérente en vertu de la Proposition 3.2.1. Nous allons montrer que $\mu^{(p)}(S)$ est un nombre indépendant de S hors d'un sous-ensemble analytique de W.

Soit $(z_1, \dots, z_n)$ un système de coordonnées sur $\mathbb{C}^n$, et U la carte de G suivante :

$$U = \left\{S \in G \quad S = \{z_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ji} z_i \quad p+1 \leqslant j \leqslant n\}\right\} .$$

L'application g_S :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^p & \longrightarrow & S \\ (z_1, \dots, z_p) & \longmapsto & (z_1, \dots, z_p, \sum_{i=1}^{p} a_{p+1,i} z_i, \dots, \sum_{i=1}^{p} a_{n,i} z_i) \end{array}$$

est un isomorphisme et de plus $S \in U \to g_S$ est une fonction holomorphe de S. Pour $S \in W \cap U$,

$$\begin{aligned} \mu^{(p)}(S) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{g_S(\mathbb{C}^p \cap B_\varepsilon)} \left(\frac{i}{\pi} d'd'' \log |df_{|S}|\right)^p \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{(\mathbb{C}^p \cap B_\varepsilon)} \left(\frac{i}{\pi} d'd'' \log |df_{|S} \circ g_S|\right)^p \end{aligned}$$

et $df|_S \circ g_S = d(f|_S \circ g_S)$ car g_S est linéaire, or $|d(f|_S \circ g_S)(z)|^2$ s'exprime sous la forme $\sum_{j=1}^{p} |g_j(z, S)|^2$ où $g_j(z, S)$ fonction holomorphe de $z \in \mathbb{C}^p$ et de $S \in W \cap U$ car les fonctions $f|_S, g_S$ et $S \to g_S$ elles-mêmes le sont. Posons

$$g(z, S) = \big(g_1(z, S), \dots, g_p(z, S)\big).$$

$\varphi(g, S) = \log |g(z, S)|$ est une fonction plurisousharmonique continue de $\mathbb{C}^p \times (W \cap U)$ dans $[-\infty, +\infty[$, exhaustive relativement à $\mathbb{C}^p$, et $|g| = e^\varphi$ est localement hölderienne en S sur $\mathbb{C}^p \times (W \cap U)$.

On peut donc appliquer le théorème de Siu généralisé (théorème 1.2) à la fonction φ pour le courant $T = 1$, et comme $\mu^{(p)}(S) = \nu(1, \varphi_S)$, les ensembles de niveau $E_c = \{S \in W \cap U, \mu^{(p)}(S) \geqslant c\}$ sont des sous-ensembles analytiques de $W \cap U$ pour tout c. Posons $c_0 = \inf_{S \in W \cap U} \mu^{(p)}(S)$. c_0 est un entier strictement positif, car $\mu^{(p)}(S)$ l'est quel que soit S, et c_0 est atteint. De plus, $E_{c_0} = W \cap U$, et E_{c_0+1} est un sous-ensemble analytique propre de $U \cap W$. Donc pour tout $S \in (W \cap U) \setminus E_{c_0+1}$ $\mu^{(p)}(S) = c_0$, et $(W \cap U) \setminus E_{c_0+1}$ est un ouvert dense de U. Deux cartes de G se rencontrant sur un ouvert de G, on en déduit que $\mu^{(p)}(S)$ prend l'unique valeur c_0 en dehors d'un ensemble négligeable dans G. ∎

CHAPITRE IV

UNE NOUVELLE DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE LANGEVIN-LOESER

La relation entre les nombres de Milnor et de Lelong généralisés obtenue au chapitre précédent va nous permettre de donner une démonstration plus analytique du théorème suivant dû à F. Loeser [Lo] :

THÉORÈME 4.0. — *Pour $N \in \mathbb{N}^*$, si $f : (\mathbb{C}^{N+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ est un germe de morphisme analytique à singularité isolée en 0, alors pour i variant de 0 à N, on a l'égalité*

$$(i) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{t \to 0} \int_{B_\varepsilon \cap f^{-1}(t)} c_{N-i}(T_f) \wedge \omega^i = (-1)^{N-i} \left(\mu^{(N+1-i)} + \mu^{(N-i)}\right)$$

où ω désigne la $(1,1)$ forme $\omega = \frac{i}{\pi} d'd'' \log |z|$, B_ε la boule de rayon ε centrée en 0, et $c_{N-i}(T_f)$ la $(N-i)$ème forme de Chern du fibré tangent relatif aux fibres lisses $f^{-1}(t)$, muni de la structure hermitienne induite par celle de $\mathbb{C}^{N+1}$.

Cette égalité avait été démontrée à l'origine par R. Langevin [La] dans le cas $i = 0$.

Pour redémontrer ce résultat, nous montrerons tout d'abord que la démonstration de l'égalité *(i)* se ramène à celle de l'égalité (0). Nous établirons alors le résultat pour $i = 0$.

A. Réduction du cas général du théorème au cas $i = 0$

1. Calcul de la p-ième classe de Chern.

• Définition de la p-ième classe de Chern.

Si E est un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur une variété complexe, on note $c(E)$ la courbure de la connexion de Chern de E. Rappelons que

$$ic(E) \in C^{\infty}_{1,1}\left(X, \mathrm{Herm}(E, E)\right).$$

DÉFINITION [G-H].

• *La p-ième forme de Chern $C_p(E)$ du tenseur de courbure $c(E)$ de E est définie par*

$$C_p(E) = P^p\left(\frac{i}{2\pi} c(E)\right)$$

où P^p désigne le p-ième polynôme invariant élémentaire sur les matrices carrées A d'ordre n sur $\mathbb{C}$ (voir [G-H]) :

$$P^p(A) = \mathrm{trace}(\Lambda^p A).$$

• *La p-ième classe de Chern $C_p(E)$ est définie par*

$$C_p(E) = \left[P^p\left(\frac{i}{2\pi}c(E)\right)\right]$$

• On se place désormais sous les hypothèses du théorème 0 : on considère $f : U \subset \mathbb{C}^{N+1} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe d'un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{C}^{N+1}$, à singularité isolée en 0.

Pour t valeur non critique, T_f est un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur $f^{-1}(t)$.

PROPOSITION 4.1. — *Pour t non critique, les formes de Chern de T_f sont données par*

$$c_p(T_f) = \left(-\frac{i}{\pi}d'd''\log|df|\right)^p$$

pour p variant de 1 à N.

Démonstration.

$$0 \to T_f \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{C}^{N+1} \overset{g=df}{\to} \mathbb{C} = \mathbb{C}^{N+1}/T_f \to 0$$

est une suite exacte de fibrés holomorphes au-dessus de $X_t := f^{-1}(t)$, qui est lisse puisque t est non critique. La norme induite sur $\mathbb{C}$ est donnée par

$$||u||^2 = \frac{|u|^2}{|df|^2} \quad \text{pour } u \in \mathbb{C}.$$

Les courbures des 3 fibrés sont liés par les relations classiques ([Gr] ou [De 3]) :

(1) $$c(\mathbb{C}) = c(\mathbb{C}^{N+1})|_{\mathbb{C}} + \beta \wedge \beta^* \quad \text{où} \quad \beta \in C^\infty_{1,0}(X_t, \mathrm{Hom}(T_f, \mathbb{C}))$$

(2) $$c(T_f) = c(\mathbb{C}^{N+1})|_{T_f} + \beta^* \wedge \beta \qquad \beta^* \in C^\infty_{0,1}(X_t, \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, T_f)),$$

β étant déterminé par exemple par la relation

(3) $$d''g^* = -j \circ \beta^*$$

avec $g^* : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{N+1}$ homomorphisme adjoint de $g = df$.

Première étape :

La matrice hermitienne représentant la métrique induite sur $\mathbb{C}$ est

$$H = \frac{1}{|df|^2} = e^{-\log|df|^2}$$

donc

$$\begin{aligned} ic(\mathbb{C}) &= id'd''\log|df|^2 \\ &= i\beta \wedge \beta^* \end{aligned}$$

par (1) puisque $ic(\mathbb{C}^{N+1}) = 0$.

Deuxième étape : Notons

- $(\frac{\partial}{\partial z_j})_{j=1-N+1}$ la base canonique de $\mathbb{C}^{N+1} = T\mathbb{C}^{N+1}$ et (dz_j) sa base duale.
- $f_k = \frac{\partial f}{\partial z_k}, \overline{f}_k = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}_k} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}}$.

Pour $X \in \mathbb{C}^{N+1}$, $u \in \mathbb{C}$, g^* est définie par

$$\langle g(X), u\rangle_{\mathbb{C}} = \langle X, g^* u\rangle_{\mathbb{C}^{N+1}}$$

donc

$$g^* = \sum_{k=1}^{N} \frac{\overline{f}_k}{|df|^2} \otimes \frac{\partial}{\partial z_k}$$

et

$$d''g^* = \sum_{k=1}^{N} d''\left(\frac{\overline{f}_k}{|df|^2}\right) \otimes \frac{\partial}{\partial z_k}$$

donc par (3)

$$j \circ \beta^* = -d''g^* = -\sum_{k=1}^{N+1} d''\left(\frac{\overline{f}_k}{|df|^2}\right) \otimes \frac{\partial}{\partial z_k}$$

dont l'homomorphisme adjoint est

$$\beta \circ j^* = -|df|^2 \sum_{j=1}^{N+1} d'\left(\frac{f_j}{|df|^2}\right) \otimes dz_j.$$

Ainsi

$$j \circ \beta^* \wedge \beta \circ j^* = |df|^2 \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant N+1} d''\left(\frac{\overline{f}_k}{|df|^2}\right) \wedge d'\left(\frac{f_j}{|df|^2}\right) \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} \otimes dz_j.$$

Quitte à effectuer un changement de base adapté au scindage orthogonal de la suite de fibrés, on voit facilement que

$$\begin{aligned}
\operatorname{trace}(j \circ \beta^* \wedge \beta \circ j^*) &= \operatorname{trace}(\beta^* \wedge \beta) \\
&= |df|^2 \sum_{k=1}^{N+1} d''\left(\frac{\overline{f}_k}{|df|^2}\right) \wedge d'\left(\frac{f_k}{|df|^2}\right) \\
&= -\sum_{k=1}^{N+1} d'(f_k) \wedge d''\left(\frac{\overline{f}_k}{|df|^2}\right), \text{ car } \sum_{k=1}^{N+1} f_k d''\left(\frac{\overline{f}_k}{|df|^2}\right) = 0 \\
&= -d'd'' \log |df|^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$c_1(T_f) = \operatorname{trace}\left(\frac{i}{2\pi} c(T_f)\right) = \operatorname{trace}\left(\frac{i}{2\pi}\beta^* \wedge \beta\right)$$

(par (2)), c'est-à-dire

$$c_1(T_f) = -\frac{i}{2\pi} d'd'' \log |df|^2.$$

Troisième étape :

L'égalité $d'd''\log|df|^2 = |df|^2 \sum_{k=1}^{N+1} d'\left(\frac{f_k}{|df|^2}\right) \wedge d''\left(\frac{\overline{f}_k}{|df|^2}\right)$ nous donne la relation

$$(d'd''\log|df|^2)^p =$$

$$= |df|^{2p} p! \sum_{\substack{K=(k_1,\dots,k_p)\\ |K|=p}}' d'\left(\frac{f_{k_1}}{|df|^2}\right) \wedge d''\left(\frac{\overline{f}_{k_1}}{|df|^2}\right) \wedge \cdots \wedge d'\left(\frac{f_{k_p}}{|df|^2}\right) \wedge d''\left(\frac{\overline{f}_{k_p}}{|df|^2}\right).$$

Par ailleurs

$$(j\circ\beta^* \wedge \beta\circ j^*)^p = |df|^{2p} \sum_{\substack{K,J\\ |J|=|K|=p}} d''\left(\frac{\overline{f}_{k_1}}{|df|^2}\right) \wedge d'\left(\frac{f_{j_1}}{|df|^2}\right) \wedge \cdots$$

$$\cdots \wedge d''\left(\frac{\overline{f}_{k_p}}{|df|^2}\right) \wedge d'\left(\frac{f_{j_p}}{|df|^2}\right) \otimes \frac{\partial}{\partial z_{k_1}} \otimes dz_{j_1} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial z_{k_p}} \otimes dz_{j_p}$$

d'où

$$\begin{aligned} c_p(T_f) &= \operatorname{trace}\left(\Lambda^p\left(\frac{i}{2\pi}\beta^* \wedge \beta\right)\right) \\ &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^p |df|^{2p} p! \sum_{\substack{K\\ |K|=p}}' d''\left(\frac{\overline{f}_{k_1}}{|df|^2}\right) \wedge d'\left(\frac{f_{k_1}}{|df|^2}\right) \wedge \cdots \wedge d''\left(\frac{f_{k_p}}{|df|^2}\right) \wedge d'\left(\frac{f_{k_p}}{|df|^2}\right) \\ &= \left(-\frac{i}{2\pi} d'd''\log|df|^2\right)^p \end{aligned}$$

■

2. Une formule de Crofton.

PROPOSITION 4.2.1. — *Soit S un plan de dimension p passant par 0 dans $\mathbb{C}^{N+1}$, $\mathrm{U}(N+1)$ le groupe unitaire de $\mathbb{C}^{N+1}$, muni de la mesure de Haar normalisée $d\mu$. Alors les deux courants suivants sont égaux :*

$$\left(\frac{i}{\pi} d'd''\log|z|\right)^p = \int_{g\in \mathrm{U}(N+1)} [g(S)]\,d\mu(g).$$

Nous allons tout d'abord démontrer un résultat plus général.

PROPOSITION 4.2.2. — *Il n'existe, à un coefficient multiplicatif strictement positif près, qu'un unique courant positif fermé de bidegré (p,p) invariant par rotations et homothéties.*

Les deux courants considérés dans la proposition 4.2.1 sont invariants par rotations et homothéties. Ils seront donc égaux s'ils ont même masse sur des boules centrées en 0.

Démonstration de la proposition 4.2.2.

1. Soit T un courant de bidegré (p,p) sur $\mathbb{C}^{N+1}$, G le groupe des similitudes complexes sur $\mathbb{C}^{N+1}$ (groupe engendré par les endomorphismes unitaires et les homothéties), muni d'une mesure de Haar $d\mu$. On définit sur $\mathbb{C}^{N+1}$ le courant de bidegré (p,p)

$$\widetilde{T} = \int_{g\in G} (g^*T)\varphi(g)d\mu(g)$$

où φ est une fonction C^∞ sur G à support compact dans un voisinage de l'identité de G, et de masse 1 sur G, *i.e.*

$$\int_{g\in G} \varphi(g)d\mu(g) = 1.$$

LEMME. — *$\widetilde{T}$ est un courant C^∞ sur $\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$.*

Démonstration. — Considérons $x \neq 0$ un point de $\mathbb{C}^{N+1}$. Les composantes de $\widetilde{T}$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^{N+1}$ sont données en x par

$$\widetilde{T}_{IJ}(x) = \int_{g\in G} \sum_{\substack{K,L\\ |K|=|L|p}}{}' T_{KL}\big(g(x)\big)\alpha_{IJKL}\big(dg(x)\big)\varphi(g)d\mu(g)$$

où les $\alpha_{IJKL}\big(dg(x)\big)$ sont des polynômes en les dérivées premières de g au point x. Ce sont donc des fonctions C^∞ de x.

Considérons $\Phi : G \times \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$, l'action de G sur $\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$ telle que $\Phi(g,y) = g(y)$. L'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi_x : & G & \longrightarrow & \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} \\ & g & \longmapsto & \Phi_x(g) = \Phi(g,x) = g(x) \end{array}$$

est une submersion. Les fibres $F_{x,y}$ de Φ_x sont de la forme $F_{x,y} = g_0H_x$, où H_x est le groupe d'isotropie de x, et g_0 un élément de G tel que $g_0(x) = y$. La mesure de Haar normalisé sur $F_{x,y}$, notée $\alpha_{x,y}$, dépend de manière C^∞ des variables x et y.

De plus, pour une fonction u intégrable sur G, on a par le théorème de Fubini

$$\int_G u(g)\varphi(g)d\mu(g) = \int_{\mathbb{C}^{N+1}\setminus\{0\}} \frac{d\lambda(y)}{|y|^{2(N+1)}} \int_{F_{x,y}} u(g)\varphi(g)d\alpha_{x,y}(g)$$

λ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{2(N+1)}$, $\frac{d\lambda}{|y|^{2(N+1)}}$ est la mesure image de μ par Φ_x. En particulier

$$(*)\quad \widetilde{T}_{IJ}(x) = \int_{\mathbb{C}^{N+1}\setminus\{0\}} \sum_{\substack{K,L\\ |K|=|L|=p}} T_{KL}(y)\frac{d\lambda(y)}{|y|^{2(N+1)}} \int_{F_{x,y}} \alpha_{IJKL}\big(dg(x)\big)\varphi(y)d\alpha_{x,y}(g).$$

Lorsque l'on dérive partiellement en x le terme de droite de (*) on ne fait porter la dérivation que sur le terme

$$\int_{F_{x,y}} \alpha_{IJKL}\big(dg(x)\big)\varphi(g)d\alpha_{x,y}(g),$$

qui dépend de manière C^∞ de x d'après ce qui précède. L'intégrale double ainsi obtenue est finie puisque φ est à support compact par hypothèse, et qu'ainsi l'intégration se fait sur des domaines compacts.

Par conséquent les dérivées partielles en x de $\widetilde{T}_{IJ}$ sont des mesures d'ordre nul.

Ceci étant vrai pour tout x de $\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$, $\widetilde{T}$ est bien un courant C^∞ sur $\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$. ■

2. Soit T un courant positif de bidegré (p,p) invariant par rotations et homothéties.

a) un tel courant existe, il suffit de prendre $\left(\frac{i}{\pi} d'd'' \log |z|\right)^p$.

b) T est nécessairement C^∞ sur $\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{T} &= \int_{g\in G} (g^*T)\varphi(g)d\mu(g) = \int_{g\in G} (g^{-1})_* T\varphi(g)d\mu(g) \\ &= T\int_{g\in G} \varphi(g)d\mu(g) = T \end{aligned}$$

et $\widetilde{T}$ est C^∞ sur $\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$ par le lemme.

c) Il suffit de connaître la forme du courant en un point pour connaître sa forme générale, en raison de l'invariance par rotations et homothéties. Plaçons nous en $z^0 = (z_1, 0, \dots, 0)$. En ce point, T est de la forme

$$T = idz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \alpha + idz_1 \wedge \beta + d\overline{z}_1 \wedge \gamma + \delta$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ne dépendent pas de z_1. On a $\beta = \overline{i\gamma}$ puisque T est réel.

Comme T est invariant par rotations, notamment par celles qui laissent l'axe $\mathbb{C}e_1$ invariant, T est de la forme

$$T = \lambda i dz_1 \wedge d\overline{z_1} \wedge \sum_{\substack{1\notin I\\ |I|=p-1}}{}' i^{(p-1)^2} dz_I \wedge d\overline{z}_I + \mu i^{p^2} \sum_{\substack{1\notin J\\ |J|=p}}{}' dz_J \wedge d\overline{z}_J$$

λ et μ sont des fonctions de z_1, dont on peut préciser la forme à l'aide de l'invariance par homothéties :

$$\lambda(z_1) = |k|^{2p}\lambda(kz_1), \mu(z_1) = |k|^{2p}\mu(kz_1)$$

pour k variant dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Posons $\lambda = \lambda(1), \mu = \mu(1)$. Au point $(z_1, 0, \dots, 0)$, T est décrit par

$$T = \frac{\lambda}{|z_1|^{2p}} i^{p^2} \sum_{\substack{1\in I\\ |I|=p}}{}' dz_I \wedge d\overline{z}_I + \frac{\mu}{|z_1|^{2p}} i^{p^2} \sum_{\substack{1\notin I\\ |I|=p}}{}' dz_I \wedge d\overline{z}_I$$

avec λ et μ dans $\mathbb{R}_*^+$ puisque T est positif.

Il résulte de cette expression que les courants positifs invariants par rotations et homothéties sont les combinaisons linéaires à coefficients > 0 des courants

$$(id'd'' \log |z|^2)^p \quad \text{et} \quad \frac{(id'd''|z|^2)^p}{|z|^{2p}}.$$

La condition supplémentaire T fermé impose

$$T = \lambda(id'd'' \log|z|^2)^p \quad \lambda \in \mathbf{R}_*^+.$$

■

Démonstration de la proposition 4.2.1. — Les courants $(\frac{i}{\pi}d'd''\log|z|)^p$ et $\int_{g\in \mathrm{U}(N+1)}[g(S)]d\mu(g)$, invariants par rotations et homothéties, sont égaux à un coefficient multiplicatif près, en vertu de la proposition 4.2.2. Ce coefficient vaut 1, car les deux courants ont même nombre de Lelong en 0, à savoir 1. ■

3. Applications de ces formules.

Dans tout ce paragraphe, nous fixons ε choisi assez petit. Nous allons dans un premier temps exprimer la limite quand t tend vers 0 des intégrales

$$\int_{f^{-1}(t)\cap B_\varepsilon} c_{N-i}(T_f) \wedge \omega^i$$

à l'aide du courant $\frac{i}{\pi}d'd''\log|f|$. Pour cela il faut tout d'abord régulariser les courants $\frac{i}{\pi}d'd''\log|df|$ et $\omega = \frac{i}{\pi}d'd''\log|z|$ pour éviter leur singularité en 0, sans pour autant modifier la valeur des intégrales considérées. Ceci est possible comme le montre le lemme suivant :

LEMME 4.3.1. — *Soient X une variété de Stein de dimension pure n et T un courant positif fermé de bidegré $(n-p, n-p)$ sur X. Soit V un ouvert relativement compact dans X et $\varphi, \psi : X \to [-\infty, +\infty[$ deux fonctions* psh *finies et continues qui coïncident dans un voisinage du bord de V. Alors*

$$\int_V T \wedge \left(\frac{i}{\pi}d'd''\varphi\right)^p = \int_V T \wedge \left(\frac{i}{\pi}d'd''\psi\right)^p.$$

Démonstration. — Ce lemme est une conséquence immédiate du théorème de Stokes. En effet, comme T est fermé, le courant

$$\theta = \left(T \wedge d''\varphi \wedge \left(\frac{i}{\pi}d'd''\varphi\right)^{p-1} - T \wedge d''\psi \wedge \left(\frac{i}{\pi}d'd''\psi\right)^{p-1}\right)$$

a pour dérivée au sens des courants

$$d\theta = T \wedge \left(\frac{i}{\pi}d'd''\varphi\right)^p - T \wedge \left(\frac{i}{\pi}d'd''\psi\right)^p.$$

Donc, comme θ est un courant à support compact dans V,

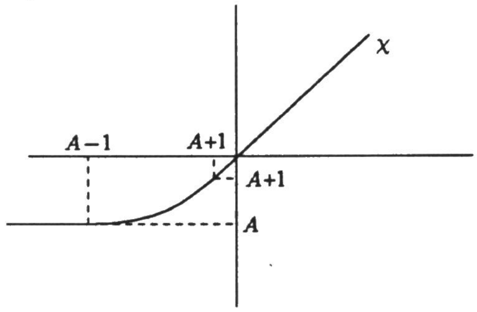
$$\int_V T \wedge \left(\left(\frac{i}{\pi}d'd''\varphi\right)^p - \left(\frac{i}{\pi}d'd''\psi\right)^p\right) = \frac{i}{\pi}\int_V d\theta = 0.$$

■

Nous allons à présent régulariser $\log|z|$ et $\log|df|$. Considérons χ une fonction de classe C^∞ convexe croissante sur $\mathbf{R}$ telle que

$$\begin{aligned} \chi(x) &= x \quad \text{pour} \quad x > A+1 \\ &= A \quad \text{pour} \quad x \leqslant A-1 \end{aligned}$$

où $A \in]-\infty, 0[$ est choisi de telle sorte que $\chi(\log|z|) = \log|z|$ et $\chi(\log|df|) = \log|df|$ au voisinage du bord de B_ε.



Pour t non critique nous avons par la proposition 4.1.

$$(1)\quad (-1)^{N-i}\int_{f^{-1}(t)\cap B_\varepsilon} c_{N-i}(T_f)\wedge\omega^i =$$
$$= \int_{B_\varepsilon\cap f^{-1}(t)} \left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|df|\right)^{N-i}\wedge\left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|z|\right)^i.$$

Sur $f^{-1}(t)$, $\log|df|$ et $\log|z|$ sont des fonctions psh continues et finies. On applique alors le lemme 4.3.1 successivement à $T = \left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|df|\right)^{N-i}$ et $\varphi(z) = \log|z|$, $\psi(z) = \chi(\log|z|)$ puis à $T = \left(\frac{i}{\pi}d'd''\chi(\log|z|)\right)^i$ et $\varphi(z) = \log|df|$, $\psi(z) = \chi(\log|df|)$ pour $V = f^{-1}(t)\cap B_\varepsilon$. On obtient ainsi

$$(2)\quad \int_{B_\varepsilon\cap f^{-1}(t)} \left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|df|\right)^{N-i}\wedge\left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|z|\right)^i =$$
$$= \int_{B_\varepsilon\cap f^{-1}(t)} \left(\frac{i}{\pi}d'd''\chi(\log|df|)\right)^{N-i}\wedge\left(\frac{i}{\pi}d'd''\chi(\log|z|)\right)^i.$$

D'autre part, t étant non critique, l'équation de Lelong-Poincaré nous donne l'égalité

$$(3)\qquad [f^{-1}(t)] = \frac{i}{\pi}d'd''\log|f-t|.$$

Les égalités (1), (2) et (3) nous permettent d'écrire pour t non critique

$$(4)\quad (-1)^{N-i}\int_{f^{-1}(t)\cap B_\varepsilon} c_{N-i}(T_f)\wedge\omega^i =$$
$$= \int_{B_\varepsilon}\left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|f-t|\right)\wedge\left(\frac{i}{\pi}d'd''\chi(\log|df|)\right)^{N-i}\wedge\left(\frac{i}{\pi}d'd''\chi(\log|z|)\right)^i.$$

Cette dernière intégrale va nous permettre de passer à la limite en $t = 0$.

PROPOSITION 4.3.1. — *Pour ε fixé assez petit,*

$$\lim_{t\to 0}\int_{B_\varepsilon}\frac{i}{\pi}d'd''\log|f-t|\wedge\left(\frac{i}{\pi}d'd''\chi(\log|df|)\right)^{N-i}\wedge\left(\frac{i}{\pi}d'd''\chi(\log|z|)\right)^i =$$
$$= \int_{B_\varepsilon}\left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|f|\right)\wedge\left(\frac{i}{\pi}d'd''\chi(\log|df|)\right)^{N-i}\wedge\left(\frac{i}{\pi}d'd''\chi(\log|z|)\right)^i$$

LEMME 4.3.2. — *Soit V un ouvert de $\mathbb{C}^{N+1}$, α une $(N+1-k, N+1-k)$ forme continue positive sur V. Soit U un ouvert relativement compact de V. Alors la fonction $T \mapsto \int_U T \wedge \alpha$ est semi continue inférieurement sur le cône des (k,k)-courants positifs muni de la topologie faible, et $T \mapsto \int_{\overline{U}} T \wedge \alpha$ est semi continue supérieurement sur ce même cône.*

Démonstration. — Notons $\mathbf{1}_U$ la fonction caractéristique de U. Soit $(\theta_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ une suite croissante vers $\mathbf{1}_U$ de fonctions C^∞ positives sur Y à support dans U.

On sait que les topologies faibles définies par les formes test C^∞ d'une part et les formes test continues d'autre part induisent la même topologie sur le cône des courants positifs. Pour tout ν, $T \mapsto \int_U \theta_\nu T \wedge \alpha$ est, par conséquent, une fonction continue et

$$\int_U T \wedge \alpha = \lim_{\nu \to +\infty} \uparrow \int_U \theta_\nu T \wedge \alpha \ ,$$

donc $T \mapsto \int_U T \wedge \alpha$ est semi continue inférieurement. On démontre de même que $T \mapsto \int_{\overline{U}} T \wedge \alpha$ est semi continue supérieurement. ∎

Remarque. — Le lemme signifie notamment que si T est un (k,k)-courant positif et T_j une suite de courants positifs convergeant faiblement vers T, on a

$$\int_U T \wedge \alpha \leqslant \liminf_{j \to +\infty} \int_U T_j \wedge \alpha \leqslant \limsup_{j \to +\infty} \int_{\overline{U}} T_j \wedge \alpha \leqslant \int_{\overline{U}} T \wedge \alpha.$$

LEMME 4.3.3. — *On a $\int_{\partial B_\varepsilon} \| id'd'' \log|f| \| = 0$ où $\partial B_\varepsilon = \overline{B}_\varepsilon \setminus B_\varepsilon$ désigne le bord de B_ε.*

Démonstration. — $\{f = 0\}$ n'est pas contenu dans ∂B_ε, et ceci quel que soit $\varepsilon > 0$, car $f^{-1}(0)$ n'est pas compact. Donc $\partial B_\varepsilon \cap f^{-1}(0)$ est un ensemble analytique réel de dimension réelle $2N - 1$. ∎

Démonstration de la proposition 4.3.1. — En vertu des lemmes 4.3.2 et 4.3.3, il suffit de démontrer que $\frac{i}{\pi} d'd'' \log|f - t|$ converge au sens des courants vers $\frac{i}{\pi} d'd'' \log|f|$ quand t tend vers 0. Pour cela il suffit en fait de montrer la convergence dans $\mathbb{L}^1$ de $\log|f - t|$ vers $\log|f|$, car cette convergence implique la convergence au sens des courants. La dérivation étant continue au sens des courants, il en résulte alors la convergence souhaitée.

La proposition 4.3.1 découle donc du lemme suivant

LEMME 4.3.4. — *On a $\log|f - t| \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \log|f|$ dans $\mathbb{L}^1$.*

Démonstration. — La famille $(\log|f - t|)$ convergeant ponctuellement vers $\log|f|$, il nous suffit de démontrer qu'elle est équiintégrable sur B_ε. Nous avons donc

à montrer sur un voisinage D de 0 dans $\mathbb{C}$ l'existence pour tout $\eta > 0$ d'une constante $A > 0$ telle que

$$\forall t \in D \quad \int_{|\log|f-t||>A} |\log|f-t||dv \leqslant \eta$$

où $dv = \left(\frac{i}{2}\right)^{N+1} dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_{N+1} \wedge d\overline{z}_{N+1}$ désigne la forme volume sur $\mathbb{C}^{N+1}$.

On pose, pour $(z,t) \in B_\varepsilon \times \mathbb{C}$, $g(z,t) := f(z) - t$. g est une fonction holomorphe en (z,t). Supposons, quitte à faire un changement de variable, que l'application $z_1 \mapsto f(z_1, 0, \ldots, 0)$ n'est pas identiquement nulle au voisinage de 0. Par le théorème de préparation de Weierstrass, il existe un voisinage D de 0 dans $\mathbb{C}$ tel que sur $B_\varepsilon \times D$ g s'écrive

$$g(z,t) = u(z,t)P(z,t)$$

où u est une fonction holomorphe inversible sur $B_\varepsilon \times D$, et P un polynôme de Weierstrass en z_1. Comme u est inversible, il suffit de montrer que $(\log|P(z,t)|)_{t\in D}$ est équiintégrable sur B_ε pour montrer l'équiintégrabilité de $(\log|f(z) - t|)_{t\in D}$ sur B_ε.

Si $z \in \mathbb{C}^{N+1}$, $z = (z_1, \ldots, z_{N+1})$, nous convenons d'écrire $z = (z_1, z')$ avec $z' = (z_2, \ldots, z_{N+1})$. $P(z,t)$ se factorise sous la forme

$$P(z,t) = \prod_{j=1}^{m} \left(z_1 - \omega_j(z',t)\right)$$

les racines $\omega_j(z',t)$ étant éventuellement confondues et rangées dans un ordre quelconque. Nous allons dans un premier temps majorer à l'aide d'un réel donné $A > 1$ les intégrales

$$I_t(A) = \int_{B_\varepsilon \cap \{z, |P(z,t)| < e^{-A}\}} |\log|P(z,t)||dv$$

indépendamment de $t \in D$, ce qui nous permettra de montrer l'équiintégrabilité de $\left(\log|P(z,t)|\right)_{t\in D}$. Remarquons tout d'abord que pour $t \in D$,

$$(1) \qquad I_t(A) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \int_{\{z\in B_\varepsilon, |P(z,t)|<e^{-A}\}} |\log|z_1 - \omega_j(z',t)||dv$$

et que

$$U_t := \{z \in B_\varepsilon, |P(z,t)| < e^{-A}\} \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{kt}$$

où l'on a posé pour $k = 1, \ldots, m$ et $t \in D$

$$U_{kt} := \{z \in B_\varepsilon \quad |z_1 - \omega_k(z',t)| < \alpha\}$$

avec $\alpha = e^{-A/m}$. Pour $j \in [[1,m]]$ et $t \in D$, on a

$$(2) \quad \int_{U_t} |\log|z_1 - \omega_j(z',t)||dv \leqslant \sum_{k=1}^{m} \int_{U_{k,t}} |\log|z_1 - \omega_j(z',t)||dv \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \int_{z'\in B'_\varepsilon} dv' \int_{z_1 \in D\left(\omega_k(z',t),\alpha\right)} |\log|z_1 - \omega_j(z',t)||dv_1$$

où dv'(resp. dv_1) désigne la forme volume sur $\mathbb{C}^N$(resp. $\mathbb{C}$), $B'_\varepsilon := \{z' \in \mathbb{C}^N, |z'| < \varepsilon\}$ la boule de centre 0 et de rayon ε dans $\mathbb{C}^N$, et $D(\omega, \rho)$ le disque complexe de centre ω et de rayon ρ. Deux cas se présentent pour $(z', t) \in B'_\varepsilon \times D$:

a) si $|\omega_j(z', t) - \omega_k(z', t)| < 2\alpha$, alors

$$(3) \quad \int_{D(\omega_k(z',t),\alpha)} \big|\log|z_1 - \omega_j(z',t)|\big| dv_1 \leqslant \int_{D(\omega_j(z',t),3\alpha)} \big|\log|z_1 - \omega_j(z',t)|\big| dv_1 =$$

$$= \int_{D(0,3\alpha)} \big|\log|z_1|\big| dv_1 = 9\pi\alpha^2\Big(\frac{1}{2} - \log 3\alpha\Big).$$

b) si $|\omega_j(z', t) - \omega_k(z', t)| \geqslant 2\alpha$.

$\omega_j(z', t)$ est une racine de $P(z, t) = z_1^m + \sum_{j=1}^{m} a_j(z', t) z_1^{m-j}$. Or si ω est une racine de $Q(\omega) = \omega^m + a_1\omega^{m-1} + \cdots a_m \in \mathbb{C}[\omega]$, ω vérifie l'inégalité

$$|\omega| \leqslant 2 \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |a_j|^{1/j}$$

car sinon $|Q(\omega)\omega^{-m}| \geqslant 1 - (2^{-1} + \cdots 2^{-m}) = 2^{-m}$, ce qui est absurde. Comme pour $j \in [[1, m]], a_j(z', t) = O(|z'| + |t|)$, on peut supposer, quitte à restreindre D et ε, que pour tout $j \in [[1, m]]$, tout $(z', t) \in B'_\varepsilon \times D$,

$$|\omega_j(z', t)| < 1/3.$$

En supposant A choisi assez grand pour que $\alpha < \frac{1}{3}$, on obtient

$$(3') \quad \int_{D(\omega_k(z',t),\alpha)} \big|\log|z_1 - \omega_j(z',t)|\big| dv_1 \leqslant |\log\alpha| \pi\alpha^2.$$

Il résulte donc de (1), (2), (3) et (3') que pour $t \in D$

$$(4) \quad I_t(A) \leqslant m^2 9\pi\alpha^2\Big(\frac{1}{2} + |\log 3\alpha|\Big),$$

l'inégalité étant vérifiée dès que $\alpha = e^{-A/m} < 1/3$.

Pour $\eta > 0$ donné, on choisit A de telle sorte que $\alpha = e^{-A/m} < 1/3$ et $m^2 9\pi\alpha^2(\frac{1}{2} + |\log 3\alpha|) < \eta$.

L'inégalité (4) nous donne alors

$$I_t(A) \leqslant \eta \quad \forall t \in D.$$

Ceci démontre l'équiintégrabilité de $\big(\log|P(z,t)|\big)_{t \in D}$ et par suite de $\big(\log|f(z)| - t\big)_{t \in D}$ sur B_ε. ■

PROPOSITION 4.3.2. — *En posant $p = N + 1 - i$, on a l'égalité pour tout i variant de 0 à N :*

$$\int_{B_\varepsilon} \Big(\frac{i}{\pi} d'd'' \log|f|\Big) \wedge \Big(\frac{i}{\pi} d'd''\chi(\log|df|)\Big)^{N-i} \wedge \Big(\frac{i}{\pi} d'd''\chi(\log|z|)\Big)^i =$$

$$= \int_{S \in G(p, N+1)} d\mu(S) \int_{S \cap B_\varepsilon} \Big(\frac{i}{\pi} d'd'' \log|f|\Big) \wedge \Big(\frac{i}{\pi} d'd''\chi(\log|df|)\Big)^{p-1}.$$

Avant de démontrer cette proposition, il nous faut tout d'abord préciser le sens accordé pour S générique dans $G(p, N+1)$ à l'intégrale

$$\int_{S\cap B_\varepsilon} \frac{i}{\pi} d'd'' \log|f| \wedge \left(\frac{i}{\pi} d'd''\chi(\log|df|)\right)^{p-1}.$$

Soit $X_\varepsilon = \{(x,S) \in B_\varepsilon \times G(p,N+1) \quad x \in S\}$ le fibré tautologique de $G(p, N+1)$. On note $\alpha : X_\varepsilon \to B_\varepsilon$ et $\beta : X_\varepsilon \to G(p, N+1)$ les projections canoniques associées. Le courant $T = \left(\frac{i}{\pi} d'd'' \log|f|\right) \wedge \left(\frac{i}{\pi} d'd''\chi(\log|df|)\right)^{p-1}$ admet pour potentiel le courant $U = \log|f|\left(\frac{i}{\pi} d'd''\chi(\log|df|)\right)^{p-1}$, qui est le produit d'une fonction psh et d'une forme C^∞ positive sur B_ε. Le courant $\alpha^* U$ est défini sur X_ε et donné par l'expression

$$\alpha^* U := \log|f \circ \alpha| \alpha^* \left(\frac{i}{\pi} d'd''\chi(\log|df|)\right)^{p-1}.$$

$\alpha^*\left(\frac{i}{\pi} d'd''\chi(\log|df|)\right)^{p-1}$ est une forme C^∞ sur X_ε et $\log|f\circ\alpha|$ une fonction psh sur X_ε ; $\alpha^* U$ est donc un courant à coefficients $\mathbb{L}^1_{\mathrm{loc}}$ sur X_ε. Nous pouvons donc appliquer le slicing de Federer [Fe] à la submersion β, ce qui nous permet de définir pour presque tout $S \in G(p, N+1)$ les courants

$$U_S := (\alpha^* U)|_{\beta^{-1}(S)}$$

et

$$T_S := \frac{i}{\pi} d'd'' U_S.$$

Par ailleurs si l'on définit le courant $\alpha^* T := \frac{i}{\pi} d'd''\alpha^* U$, T_S s'écrit aussi pour S générique

$$T_S = (\alpha^* T)|_{\beta^{-1}(S)}.$$

En effet, comme le slicing commute avec la différentielle,

$$\begin{aligned} T_S = \frac{i}{\pi} d'd'' U_S &= \frac{i}{\pi} d'd''(\alpha^* U|_{\beta^{-1}(S)}) \\ &= \left(\frac{i}{\pi} d'd''\alpha^* U\right)|_{\beta^{-1}(S)} \\ &= (\alpha^* T)|_{\beta^{-1}(S)} \end{aligned}$$

pour S générique.

Nous sommes à présent en mesure de démontrer la proposition :

Démonstration de la proposition 4.3.2. — On définit pour $\nu \in \mathbb{N}$ la fonction C^∞ psh $u_\nu := \frac{1}{2}\log\left(|f|^2 + \frac{1}{\nu}\right)$ et les courants $U_\nu := u_\nu\left(\frac{i}{\pi} d'd''\chi(\log|df|)\right)^{p-1}$, $T_\nu = id'd'' U_\nu$. La suite $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions C^∞ psh qui converge vers $u := \log|f|$ dans B_ε. De même $(\alpha^* u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions psh C^∞ qui converge vers $\alpha^* u$ sur X_ε. Elle converge en particulier au sens des courants, en considérant $\alpha^* U_\nu$ comme un courant de bidegré $(0,0)$, ce qui est possible puisque $\alpha^* u_\nu$ est localement intégrable. Par conséquent $\alpha^* U_\nu$ converge vers $\alpha^* U$ et $\alpha^* T_\nu$ vers $\alpha^* T$, la convergence étant considérée au sens des courants. Par

ailleurs, comme $U_\nu \to U$ au sens des courants, $T_\nu \to T$ au sens des courants. Donc

$$(1)\qquad \int_{B_\varepsilon} T \wedge \left(\frac{i}{\pi} d'd''\chi(\log|z|)\right)^{N+1-p} = \lim_{\nu\to+\infty} \int_{B_\varepsilon} T_\nu \wedge \left(\frac{i}{\pi} d'd'' \log|z|\right)^{N+1-p} =$$

$$= \lim_{\nu\to+\infty} \int_{S\in G(p,N+1)} d\mu(S) \int_{S\cap B_\varepsilon} T_\nu|_S .$$

La dernière égalité est l'application de la formule de Crofton (proposition 4.2.1), après accouplement avec la forme T_ν de classe C^∞. Or si ω est la métrique de Kähler standard sur $G(p, N+1)$ et θ la forme $\theta := K\omega^{p(N+1-p)}$ où K est une constante choisie de telle sorte que $\int_{G(p,N+1)} \theta = 1$, alors $d\mu = \theta$. De plus pour $\nu \in \mathbb{N}$ et $S \in G(p, N+1)$

$$T_\nu|_S = \left(\frac{i}{\pi} d'd'' U_\nu\right)|_S = \frac{i}{\pi} d'd''(U_\nu|_S) \ ;$$

on obtient donc par définition du slicing

$$(2)\qquad \lim_{\nu\to+\infty} \int_{S\in G} d\mu(S) \int_S T_\nu|_S = \lim_{\nu\to+\infty} \int_{X_\varepsilon} \alpha^* T_\nu \wedge \beta^*\theta.$$

Pour achever la démonstration, on applique le lemme 4.3.2 à la suite de courants positifs $(\alpha^* T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$: pour $0 < \varepsilon' < \varepsilon$,

$$(3)\qquad \int_{S\in G} d\mu(S) \int_{S\cap B_{\varepsilon'}} T_S = \int_{X_{\varepsilon'}} \alpha^* T \wedge \beta^*\theta \leqslant \lim_{\nu\to+\infty} \int_{X_{\varepsilon'}} \alpha^* T_\nu \wedge \beta^*\theta \leqslant$$

$$\leqslant \int_{X_\varepsilon} \alpha^* T \wedge \beta^*\theta = \int_{S\in G} d\mu(S) \int_{S\cap B_\varepsilon} T_S .$$

En faisant tendre ε' vers ε dans (3) on obtient grâce aux égalités (1) et (2) l'égalité à démontrer :

$$\int_{S\in G} d\mu(S) \int_{S\cap B_\varepsilon} T_S = \int_{B_\varepsilon} T \wedge \left(\frac{i}{\pi} d'd''\chi \log|df|\right)^{p-1} . \qquad \blacksquare$$

Pour simplifier l'écriture, nous convenons de sous entendre la fonction χ dans toutes les écritures d'intégrales qui suivront.

4. Réduction de l'égalité (i) au cas $i = 0$.

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que le terme de gauche de (i) peut s'écrire sous la forme :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{t\to 0} \int_{B_\varepsilon \cap f^{-1}(t)} c_{N-i}(T_f) \wedge \left(\frac{i}{\pi} d'd'' \log|z|\right)^i =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} (-1)^{N-i} \int_{S\in G(p,N+1)} d\mu(S) \int_{S\cap B_\varepsilon} \frac{i}{\pi} d'd'' \log|f| \wedge \left(\frac{i}{\pi} d'd'' \log|df|\right)^{p-1}$$

où l'on a posé $p = N + 1 - i$ comme dans le paragraphe précédent.

Proposition 4.4.1.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S\in G(p,N+1)} d\mu(S)\int_{S\cap B_\varepsilon}\Big(\frac{i}{\pi}d'd''\log|f|\Big)\wedge\Big(\frac{i}{\pi}d'd''\log|df|\Big)^{p-1} =$$
$$= \int_{S\in G} d\mu(S)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S\cap B_\varepsilon}\Big(\frac{i}{\pi}d'd''\log|f|\Big)\wedge\Big(\frac{i}{\pi}d'd''\log|df|\Big)^{p-1}.$$

Démonstration. — Le résultat découle immédiatement du théorème de convergence monotone puisque

$$\Big(S\to\int_{S\cap B_\varepsilon}\Big(\frac{i}{\pi}d'd''\log|f|\Big)\wedge\Big(\frac{i}{\pi}d'd''\log|df|\Big)^{p-1}\Big)_\varepsilon$$

est une famille croissante de fonctions positives. ■

Par ailleurs, B. Teissier montre dans [Te 1] la

Proposition 4.4.2. — *Soit $f:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{C}^{N+1}$, à singularité isolée en 0. Pour tout $p=1,\dots,N$, il existe un ouvert dense W_p de la grassmannienne $G(p,N+1)$ tel que pour tout $S\in W_p$,*

$$|df(z)|\sim|df_{|S}(z)|$$

quand z tend vers 0 dans S.

Démonstration [Te 1]. — Soit $(z_0,\dots,z_N)$ un système de coordonnées sur $\mathbb{C}^{N+1}$. Rappelons (*cf.* chapitre 1, paragraphe 2) que la clôture intégrale $\overline{I}$ d'un idéal I de $\mathcal{O}_{N+1}$ engendré par $(f_1,\dots,f_n)$ est un idéal qui se définit aussi par :

$$\overline{I}=\Big\{g\in\mathcal{O}_{N+1}/\exists C>0,\ |g|^2\leqslant C\sum_{j=1}^{n}|f_j|^2\Big\}.$$

Démontrer la proposition 4.4.2. revient donc à montrer que pour S générique dans $G(p,N+1)$, l'idéal jacobien de la restriction de f à S a même clôture intégrale dans $\mathcal{O}_{S,0}$ que la restriction à S de l'idéal jacobien de f, *i.e.* que

$$\overline{j(f\cdot\mathcal{O}_{S,0})}=\overline{j(f)\cdot\mathcal{O}_{S,0}}$$

où $j(f)$ désigne l'idéal de $\mathcal{O}_{N+1}$ engendré par $(\frac{\partial f}{\partial z_0},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_N})$.

Premier cas : $p=N$

Nous redonnons la démonstration de B. Teissier [Te 1]. Il suffit de démontrer la proposition sur une carte de $\mathbb{P}_N=G(N,N+1)$.

D'après la proposition 3.2.2., il existe un ouvert de Zariski W dense dans $\mathbb{P}_N$ tel que pour tout $a\in W$ et $S=\{\sum_{j=0}^{N}a_jz_j=0\}$, $f_{|S}$ admet une singularité isolée en 0.

On note Y l'intersection de W et de l'ouvert affine $\mathbf{C}^N$ de $\mathbf{P}_N$, muni de coordonnées $(a_1, \ldots, a_N)$ et formé des hyperplans d'équation $z_0 - \sum_{j=1}^{N} a_j z_j = 0$. Pour $g \in \mathcal{O}_{N+1}$, on note g_a la fonction holomorphe $(z_1, \ldots, z_N) \mapsto g\big(\sum_{i=1}^{N} a_i z_i, z_1, \ldots, z_N\big)$.

Remarquons que pour un hyperplan S d'équation $z_0 = \sum_{j=1}^{N} a_j z_j$, on a pour tout $j = 1, \ldots, N$:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} f_a = a_j \left(\frac{\partial f}{\partial z_0}\right)_a + \left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\right)_a,$$

ce qui nous donne $j(f \cdot \mathcal{O}_{S,0}) \subset j(f) \cdot \mathcal{O}_{S,0}$ et donc $\overline{j(f \cdot \mathcal{O}_{S,0})} \subset \overline{j(f) \cdot \mathcal{O}_{S,0}}$. Le but de la démonstration est de montrer l'inclusion inverse, et plus précisément d'étudier le comportement de $\left(\frac{\partial f}{\partial z_0}\right)_a$. Pour cela nous allons nous placer sur un espace plus adéquat que $Y \times \mathbf{C}^N$. Considérons donc sur $Y \times \mathbf{C}^N$, muni des coordonnées $(a_1, \ldots, a_N, z_1, \ldots, z_N)$, l'idéal

$$\mathcal{S} = (z_1, \ldots, z_N) \cdot \mathcal{O}_{Y \times \mathbf{C}^N}$$

qui définit $Y \times \{0\}$, et les deux idéaux

$$\mathcal{I}_1 = \left(\frac{\partial}{\partial z_1} f_a, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_N} f_a\right) \cdot \mathcal{O}_{Y \times \mathbf{C}^N},$$
$$\mathcal{I}_2 = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial z_0}\right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial z_N}\right)_a\right) \cdot \mathcal{O}_{Y \times \mathbf{C}^N},$$

définis sur un voisinage V de $Y \times \{0\}$. On a les inclusions évidentes $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2 \subset \mathcal{S}$, et $\mathcal{I}_1$ contient une puissance de $\mathcal{S}$ au voisinage de tout point de $Y \times \{0\}$. Soient $\pi : Z_0 \longrightarrow V$ la modification définie par $\mathcal{S} \cdot \mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2$, $n : Z \longrightarrow Z_0$ la normalisation de Z_0 et $w : Z \longrightarrow Y \times \mathbf{C}^N$ l'application composée

$$Z \xrightarrow{n} Z_0 \xrightarrow{\pi} V \hookrightarrow Y \times \mathbf{C}^N.$$

On note D le diviseur exceptionnel associé à w.

$$\begin{array}{ccc} D & \hookrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow w \\ Y \times \{0\} & \hookrightarrow & Y \times \mathbf{C}^N . \\ \searrow & & \swarrow \\ & Y & \end{array}$$

On sait alors qu'il existe un ouvert analytique dense U de Y tel que $|D|_{|U} \longrightarrow U$ soit plat, où $|D| = |w^{-1}(Y \times \{0\})|$ désigne le support réduit du diviseur D.

Nous allons montrer que pour un hyperplan $S = \{z_0 = \sum_{j=1}^{N} a_j z_j\}$ correspondant à un point $a \in U$,

$$\overline{j(f \cdot \mathcal{O}_{S,0})} = \overline{j(f) \cdot \mathcal{O}_{S,0}}\ ,$$

en montrant le résultat plus fort suivant :

$$\overline{\mathcal{I}_{1,\{a\}\times\{0\}}} = \overline{\mathcal{I}_{2,\{a\}\times\{0\}}},$$

i.e. que les germes de $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ en $\{a\} \times \{0\}$ ont même clôture intégrale. Par construction de w, il suffit pour cela de montrer que, pour tout $z \in w^{-1}(\{a\} \times \{0\})$,

$$\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{O}_{Z,z} = \mathcal{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{Z,z}.$$

Comme $\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{O}_Z$ et $\mathcal{I}_2 \cdot \mathcal{O}_Z$ sont inversibles, on obtient le résultat cherché en montrant que ces deux idéaux ont un générateur commun, et pour cela, il suffit de montrer que $\mathcal{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$ n'est pas engendré par $\left(\frac{\partial f}{\partial z_0}\right)_a \circ w$ à l'exclusion de tous les autres $\left(\left(\frac{\partial f}{\partial z_0}\right)_a \circ w\right)_{i=1\cdots N}$.

Ceci va résulter du lemme suivant :

LEMME. — *Pour $a \in U$, on a en tout point $z \in w^{-1}(\{a\} \times \{0\})$*

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_i} f_a\right) \mathcal{O}_{Z,z} \in \mathcal{S} \cdot \mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{O}_{Z,z}.$$

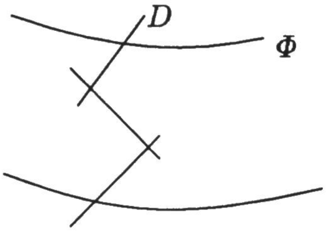
Démonstration du lemme. — On note $Y' \subset Z$ le sous-espace défini par $\mathcal{S} \cdot \mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{O}_Z$. Puisque $\mathcal{I}_1$ contient une puissance de $\mathcal{S}$ au voisinage de tout point de $Y \times \{0\}$, on a $|Y'| = w^{-1}(Y \times \{0\}) = |D|$. Comme $\mathcal{S} \cdot \mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{O}_Z$ est inversible et Z normal, il suffit de montrer l'inclusion sur un ouvert dense de chaque composante irréductible de $|Y'|_{|U} = |w^{-1}(U \times \{0\})|$. Or, sur chaque composante irréductible de $|w^{-1}(U \times \{0\})|$, il existe un ouvert dense qui vérifie en chacun de ses points z :

1. Z est lisse en z.

2. $|w^{-1}(Y \times \{0\})|$ est lisse sur Y en z, et donc lisse.

3. Le lieu des zéros de $f_a \cdot \mathcal{O}_Z$ est contenu dans $|D|$ au voisinage de z.

En effet, Z est normal donc non singulier en codimension 1, et $|D|_{|U} \to U$ étant plat, l'ensemble de ses points de lissité induit un ouvert dense sur chaque composante irréductible de $|D|_{|U}$. Enfin, si Φ désigne la transformée stricte du lieu des zéros de $(a, z) \mapsto f\left(\sum_{j=1}^{N} a_j z_j, z_1, \ldots, z_N\right)$ par w, $\Phi \cap D$ est nulle part dense dans D, *i.e.* l'ensemble des points où le lieu des zéros de $f_a \cdot \mathcal{O}_Z$ ne coïncide pas avec $|D|$ induit un fermé analytique strict sur chaque composante irréductible.



En un tel point z, on peut choisir sur Z des coordonnées locales holomorphes $(a'_1, \ldots, a'_N, b_1, \ldots, b_{N-1}, \pi)$ telles que

i) $a'_i = a_i \circ w \quad i = 1, \ldots, N$.

ii) $\mathcal{S} \cdot \mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{O}_{Z,z} = \pi^\nu \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$ (noter que $\mathcal{S} \cdot \mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$ est inversible).

iii) $f_a \circ w = A(a'_1, \ldots, a'_N, b_1, \ldots, b_{N-1}, \pi)\pi^\mu$, où A est inversible dans $\mathcal{O}_{Z,z}$.
De ii), on déduit :

iv) $z_i \circ w = \zeta_i(a'_1, \ldots, a'_N, b_1, \ldots, b_{N-1}, \pi)\pi^k$, avec $k \leqslant \nu$.

Comme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a'_i} f_a \circ w &= \frac{\partial A}{\partial a'_i}\pi^\mu \\ &= \sum_{j=1}^{N} \Big(\frac{\partial}{\partial z_i} f_a\Big) \circ w \, \frac{\partial}{\partial a'_i}(z_j \circ w) + \Big(\frac{\partial}{\partial a_i} f_a\Big) \circ w\end{aligned}$$

et $\frac{\partial}{\partial a'_i}(z_j \circ w) \in \mathcal{S} \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$, d'où $\sum_{j=1}^{N}(\frac{\partial}{\partial z_j} f_a) \circ w \frac{\partial}{\partial a'_i}(z_j \circ w) \in \mathcal{S} \cdot \mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$, il suffit, pour démontrer que $(\frac{\partial}{\partial a_i} f_a) \circ w \in \mathcal{S} \cdot \mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$, de montrer que $\frac{\partial A}{\partial a'_i}\pi^\mu \in \mathcal{S} \cdot \mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$. Pour cela, il suffit de montrer que $\mu \geqslant \nu$. Or, pour a fixé, f_a est entier sur $(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} f_a, \ldots, z_N \frac{\partial}{\partial z_N} f_a) \cdot \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_N\}$. En particulier, si W désigne le sous-espace de Z défini par $a'_1 = \ldots = a'_N = 0$, $(f_{(0)} \circ w)\mathcal{O}_{W,z}$ doit être entier sur l'idéal π^ν. $\mathcal{O}_{W,z}$, qui est intégralement clos puisque inversible sur un espace lisse, donc normal. Il faut donc que $A(0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_{N-1}, \pi)\pi^\mu$ appartienne à l'idéal $\pi^\nu \cdot \mathbb{C}\{b_1, \ldots, b_{N-1}, \pi\}$. Comme A est inversible, il faut donc nécessairement que $\mu \geqslant \nu$. ∎

Nous pouvons à présent montrer que $(\frac{\partial f}{\partial z_0})_a \circ w$ n'engendre pas $\mathcal{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$ à l'exclusion de tout autre $(\frac{\partial f}{\partial z_j})_a \circ w$, $j \geqslant 1$. En effet on aurait sinon pour $j = 1 \cdots N$

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial z_j}\Big)_a \circ w = \lambda_i \Big(\frac{\partial f}{\partial z_0}\Big)_a \circ w$$

avec $\lambda_i \in \mathfrak{M}_{Z,z}$, et donc

$$\Big(\frac{\partial}{\partial z_j} f_a\Big) \circ w = (a'_j + \lambda_j)\Big(\frac{\partial f}{\partial z_0}\Big)_a \circ w$$

puisque $\frac{\partial}{\partial z_j} f_a = a_j (\frac{\partial f}{\partial z_0})_a + (\frac{\partial f}{\partial z_j})_a$. En multipliant par $z_i \circ w$, $i = 1, \ldots, N$, on obtient

$$\Big(z_i \frac{\partial}{\partial z_j} f_a\Big) \circ w = (a'_i + \lambda_j)\Big(\frac{\partial}{\partial a_i} f_a\Big) \circ w$$

puisque $\frac{\partial}{\partial a_i} f_a = z_i(\frac{\partial f}{\partial z_0})_a$. D'après le lemme, $(\frac{\partial}{\partial a_i} f_a)\circ w \in \mathcal{S}\cdot\mathcal{I}_1\cdot\mathcal{O}_{Z,z}$. Or $\mathcal{S}\cdot\mathcal{I}_1\cdot\mathcal{O}_{Z,z}$ est engendré par l'un des $(z_i\frac{\partial}{\partial z_j} f_a)\circ w$ (lemme de Nakayama), et il faudrait donc que l'un des $(a'_j + \lambda_j)$ soit inversible, d'où la contradiction cherchée puisque $\lambda_j \in \mathfrak{M}_{Z,z}$. L'idéal $\mathcal{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$ est donc engendré par un des $(\frac{\partial f}{\partial z_i})_a \circ w$, $1 \leqslant i \leqslant N$, par exemple $(\frac{\partial f}{\partial z_1})_a \circ w$. Nous pouvons alors écrire

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial z_j}\Big)_a \circ w = \mu_j \Big(\frac{\partial f}{\partial z_1}\Big) \circ w$$

avec $\mu_1 = 1$. On en déduit que

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial z_j} f_a\Big) \circ w = (a'_j \mu_0 + \mu_j)\Big(\frac{\partial f}{\partial z_1}\Big) \circ w$$

et $a'_1\mu_0+\mu_1 = a'_1\mu_0+1$ est inversible. L'idéal $\mathcal{I}_1\cdot\mathcal{O}_{Z,z}$ est donc engendré par $(\frac{\partial}{\partial z_1} f_a)\circ w$, d'où $\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{O}_{Z,z} = \mathcal{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$. Ceci démontre la proposition lorsque $p = N$.

Deuxième cas : cas général

On raisonne par récurrence descendante sur p.

Soit $1 \leqslant p \leqslant N-1$. Nous supposons qu'il existe un ouvert W_{p+1} dense dans $G' = G(p+1, N+1)$ tel qu'en tout point $S' \in W_{p+1}$, $|df_{|S'}| \sim |df|$ sur S' en 0. Nous notons N_{p+1} le complémentaire de W_{p+1}. Par hypothèse, N_{p+1} est un ensemble négligeable de G'. Nous allons montrer que

$$W_p = \{S \in G \quad |df_{|S}| \sim |df| \text{ sur } S \text{ en } 0\}$$

– où $G = G(p, N+1)$ – est le complémentaire dans G d'un ensemble N négligeable dans G.

Pour cela, considérons la variété de drapeaux

$$D = \{(S, S') \in G \times G', S \subset S'\}$$

et appelons π(resp. π') sa projection naturelle sur G (resp. G') :

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ G & & G' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (S,S') \arrow[dl, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\ S & & S' \end{tikzcd}$$

Soit

$$\begin{aligned} \widetilde{N} &= \{(S, S') \in D, S \in N(S') \text{ ou } S' \in N'\} \\ &= \{(S, S') \in D, S \in N(S')\} \cup (\pi')^{-1}(N') \end{aligned}$$

où $N(S')$ est le complémentaire de l'ensemble des hyperplans S de S' tels que $|df_{|S}| \sim |df_{|S'}|$ sur S en 0. Nous allons montrer que N est négligeable dans G en montrant au préalable que $\widetilde{N}$ l'est dans D. Vérifions tout d'abord que N, ou plus simplement W_p, est bien mesurable dans G. Or

$$W_p = \bigcup_{\substack{\rho\in\mathbb{Q}^{+*} \\ c\in\mathbb{N}^*}} \Big(\bigcap_{\substack{\varepsilon\in\mathbb{Q}^{+*} \\ \varepsilon<\rho}} U_{\rho,c,\varepsilon}\Big)$$

où

$$U_{\rho,c,\varepsilon} = \{S \in G \quad \forall z \in S \cap C(\varepsilon,\rho),\ |df(z)| \leqslant c|df_{|S}(z)|\}$$

et

$$C(\varepsilon,\rho) = \{z \in \mathbb{C}^{N+1} \quad \varepsilon < |z| < \rho\}.$$

$U_{\rho,c,\varepsilon}$ étant fermé, W_p et donc N sont mesurables dans G.

Vérifions à présent que $\widetilde{N}$ est un ensemble mesurable de mesure nulle. D'une part $(\pi')^{-1}(N')$ est mesurable de mesure nulle, puisque N' l'est par hypothèse de récurrence. D'autre part $\widetilde{N}_2 = \{(S,S') \in D, S \in N(S')\}$ est mesurable, ce qui se montre en utilisant le même type d'arguments que pour N. De plus $\widetilde{N}_2$ est négligeable. En effet, en tout point $(S,S') \in D$, on peut trouver un voisinage ouvert U de (S,S') et un ouvert V de G' tels que $U \simeq V \times \mathbb{P}^*_{p+1}$. En utilisant un recouvrement fini de D par de tels ouverts (D étant compact), on obtient, grâce au théorème de Fubini, que $\widetilde{N}_2$ est négligeable puisque les ensembles $N(S')$ le sont d'après le premier cas de la démonstration. Pour relier les mesures de N et $\widetilde{N}$, on fait les deux constatations suivantes :

1. $\pi^{-1}(N) \subset \widetilde{N}$. En effet si $S \in N$, $|df|$ n'est pas équivalent à $|df_{|S}|$ sur S en 0. On ne pourra donc pas avoir à la fois $|df| \sim |df_{|S'}|$ sur S' en 0 et $|df_{|S}| \sim |df_{|S'}|$ sur S en 0 pour tout $S' \in G'$. Par conséquent $\pi^{-1}(N)$ est de mesure nulle dans D.

2. Il existe $C > 0$ tel que

$$\text{mesure}\left(\pi^{-1}(N)\right) \geqslant C\,\text{mesure}(N)\cdot\text{mesure (fibres)}.$$

En effet, deux mesures sur la variété D déduites de la mesure de Lebesgue sont équivalentes, et de plus les fibres au-dessus d'un point S de G sont toutes équivalentes à $\mathbb{P}_{N+1-p}$, ce qui nous permet d'utiliser le théorème de Fubini.

La combinaison de ces deux résultats nous permet de conclure que la mesure de N est nulle. Ceci achève la démonstration de la proposition. ∎

Par le théorème de comparaison 1.1, on obtient donc pour tout $S \in W_p$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_\varepsilon\cap S}\left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|f|\right)\wedge\left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|df|\right)^{p-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_\varepsilon\cap S}\left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|f|\right)\wedge\left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|df_{|S}|\right)^{p-1}.$$

Compte tenu des propositions 4.1, 4.3.1, 4.3.2 et 4.4.1, on obtient ainsi pour $i = 0,\dots,N$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to 0}\int_{B_\varepsilon\cap f^{-1}(t)} c_{N-i}(T_f)\wedge\left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|z|\right)^{i} =$$
$$(-1)^{N-i}\int_{S\in G(N+1-i,N+1)} d\mu(S)\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S\cap B_\varepsilon}\left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|f|\right)\wedge\left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|df_{|S}|\right)^{N-i}\right).$$

En considérant de plus la proposition 3.2.3, on voit alors qu'il suffit de démontrer le théorème 4.0 dans le cas $i = 0$.

B. Démonstration du théorème 4.0

Compte tenu de la partie A de ce chapitre, il nous suffit de vérifier l'égalité (0) pour avoir une démonstration complète du théorème 4.0. Nous voulons donc montrer dans cette partie que pour une fonction holomorphe $f : U \subset \mathbb{C}^{N+1} \to \mathbb{C}$ définie sur un voisinage ouvert U de 0 et à singularité isolée en 0, on a l'égalité

$$(0) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to 0}\int_{B_\varepsilon\cap f^{-1}(t)} c_N(T_f) = (-1)^N\left(\mu^{(N+1)}+\mu^{(N)}\right),$$

égalité que l'on peut encore écrire

$$(0_1) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_\varepsilon}\left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|f|\right)\wedge\left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|df|\right)^N = \mu^{(N+1)}+\mu^{(N)}.$$

D'après le paragraphe 2 du chapitre 3,

$$(1) \qquad \mu^{(N+1)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_\varepsilon}\left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|df|\right)^{N+1}$$

et

$$\mu^{(N)} = \int_{S\in G(N,N+1)}\mu^{(N)}(S)d\mu(S) = \mu^{(N)}(S)$$

pour S parcourant un ouvert dense W_0 de $G(N, N+1)$, complémentaire d'un ensemble de mesure nulle, où

$$\begin{aligned}\mu^{(N)}(S) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S\cap B_\varepsilon}\left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|df|_{|S}\right)^N\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S\cap B_\varepsilon}\left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|df|\right)^N\end{aligned}$$

la deuxième égalité étant vérifiée pour $S \in W_0 \cap W_N = W$ d'après la proposition 4.4.2 et le théorème de comparaison 1.1. Donc en appliquant la formule de Crofton (proposition 4.2.1),

$$(2) \qquad \mu^{(N)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_\varepsilon}\left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|z|\right)\wedge\left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|df|\right)^N.$$

De même si $S \in W$ est donné dans $(z_0, \ldots, z_N)$ par l'équation $z_0 = 0$, l'équation de Lelong-Poincaré donne

$$(2_S) \qquad \mu^{(N)}(S) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_\varepsilon}\left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|z_0|\right)\wedge\left(\frac{i}{\pi}d'd''\log|df|\right)^N.$$

Considérons à présent le morphisme

$$\begin{aligned}F : U &\longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}\\ z &\longmapsto \left(f_0'(z), \ldots, f_N'(z)\right).\end{aligned}$$

L'hypothèse de singularité isolée entraîne que F est un morphisme propre à fibres finies. Par suite, quitte à rétrécir U, le morphisme F définit un revêtement ramifié de U sur un ouvert $V \subset \mathbb{C}^{N+1}$. Rappelons que si u est une fonction psh sur U, la fonction image directe $F_* u$ définie par

$$F_* u(w) = \sum_{z \in F^{-1}(w)} u(z), \quad w \in V$$

où la somme est comptée avec multiplicités, est une fonction psh qui vérifie en outre $id'd''F_* u = F_* id'd''u$. Ainsi

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_\varepsilon} \frac{i}{\pi} d'd'' \log|f| \wedge \Big(\frac{i}{\pi} d'd'' \log|df|\Big)^N \\
&\qquad = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_\varepsilon} F_* \Big(\frac{i}{\pi} d'd'' \log|f|\Big) \wedge \Big(\frac{i}{\pi} d'd'' \log|z|\Big)^N \\
&\qquad = \nu\Big(\frac{i}{\pi} d'd'' F_* \log|f|, 0\Big) \\
&\qquad = \min_{L \in \mathbb{P}_N} \nu\Big(\Big(\frac{i}{\pi} d'd'' F_* \log|f|\Big)_{|L}, 0\Big).
\end{aligned}$$

La dernière égalité résulte du théorème 1.3. Le minimum est atteint pour L générique dans $\mathbb{P}_N$. On obtient de même grâce à (1) et (2)

$$\begin{aligned}
\mu^{(N+1)} &= \min_{L \in \mathbb{P}_N} \nu\Big(\frac{i}{\pi} d'd'' F_* \log|df|_{|L}, 0\Big) \\
\mu^{(N)} &= \min_{L \in \mathbb{P}_N} \nu\Big(\frac{i}{\pi} d'd'' F_* \log|z|_{|L}, 0\Big)
\end{aligned}$$

et pour S hyperplan d'équation $z_0 = 0$, $S \in W$,

$$\mu^{(N)}(S) = \min_{L \in \mathbb{P}_N} \nu\Big(\Big(\frac{i}{\pi} d'd'' F_* \log|z_0|\Big)_{|L}, 0\Big).$$

Les minima étant atteint à chaque fois sur un ouvert dense de $\mathbb{P}_N$, il nous suffit donc pour montrer (0_1) et par suite (0) de démontrer la

PROPOSITION 4.B.1. — *Il existe un ouvert de Zariski Ω dense dans $\mathbb{P}_N$ tel que pour tout $L \in \Omega$ on ait*

$$(0_L) \quad \nu\Big(\frac{i}{\pi} d'd'' F_* \log|f|_{|L}, 0\Big) = \nu\Big(\frac{i}{\pi} d'd'' F_* \log|df|_{|L}, 0\Big) + \nu\Big(\frac{i}{\pi} d'd'' F_* \log|z|_{|L}, 0\Big)$$

Démonstration. — Pour $L \in \mathbb{P}_N$, $F^{-1}(L)$ est une courbe de U, appelée courbe polaire associée à f. Si Γ^α, $\alpha = 1, \dots, q$, sont les composantes irréductibles de $F^{-1}(L)$, paramétrées au voisinage de 0 par

$$\gamma^\alpha : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \Gamma^\alpha \subset \mathbb{C}^{N+1}$$

où D est un disque ouvert de $\mathbb{C}$ centré en 0, on a pour g fonction holomorphe définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{N+1}$:

$$
(3)\qquad \begin{aligned}
\nu\Big(\frac{i}{\pi}d'd''F_*\log|g|_{|L},0\Big) &= \sum_{\alpha=1}^{q}\nu\Big(\frac{i}{\pi}d'd''F_*\log|g\circ\gamma^\alpha|,0\Big)\\
&= \sum_{\alpha=1}^{q}\nu_0(g\circ\gamma^\alpha)
\end{aligned}
$$

où $\nu_0(g\circ\gamma)$ est la multiplicité de $g\circ\gamma$ en 0. On obtient le même résultat si g est analytique à valeur dans $\mathbf{C}^p$, en définissant $\nu_0(g\circ\gamma) = \min_{j=1,\dots,p}\nu_0(g_j\circ\gamma)$.

La proposition 4.B.1 va résulter essentiellement de la proposition suivante, due à B. Teissier, dont nous reprenons les arguments de démonstration.

PROPOSITION 4.B.2. — *Il existe un ouvert de Zariski Ω dense dans $\mathbf{P}_N$ tel que pour tout $L\in\Omega$, le nombre $q(L)$ de composantes irréductibles de la courbe polaire $F^{-1}(L)$ soit un nombre q indépendant de L. Pour toute fonction holomorphe g, il existe un ouvert de Zariski Ω_g dense dans $\mathbf{P}_N$ et contenu dans Ω tel que le q-uplet $\big(\nu_0(g\circ\gamma^\alpha)\big)_{\alpha=1,\dots,q}$ ne dépende pas de $L\in\Omega_g$.*

Démonstration [Te 2]. — Pour $a\in\mathbf{P}_N$, on note $[a]$ la droite complexe passant par 0 associée. On note Z l'éclatement de l'idéal jacobien $j(f)$ de $\mathcal{O}_{N+1}$ engendré par $(f'_0,\dots,f'_N)$. Cet éclatement peut être décrit par

$$Z := \operatorname{adh}\{(z,a)\in(U\smallsetminus\{0\})\times\mathbf{P}_N,\quad F(z)\in[a]\}$$

où $\operatorname{adh}\{\cdot\}$ désigne l'adhérence dans $U\times\mathbf{P}_N$. On désigne par π et G les première et deuxième projections canoniques de Z :

$$
\begin{array}{ccccccc}
Z & \xrightarrow{G} & \mathbf{P}_N & \qquad\qquad & (z,a) & \longmapsto & a.\\
\pi\big\downarrow & & & & \big\downarrow & & \\
U & & & & z & &
\end{array}
$$

G est le morphisme de Gauss associé à f. Il réalise Z comme famille des courbes polaires de f paramétrée par $\mathbf{P}_N$. Soit $n:\overline{Z}\to Z$ la normalisation de Z, et $\overline{\pi}:\overline{Z}\xrightarrow{n}Z\xrightarrow{\pi}U$ le morphisme composé. Si Δ désigne le diviseur exceptionnel de π, et D celui de $\overline{\pi}$, on a $\Delta=\{0\}\times\mathbf{P}_N$ et on sait que, en dehors d'un sous-ensemble analytique A de D, $n:D\to\Delta$ est un revêtement étale. De plus, $\overline{Z}$ étant normal, l'ensemble S des singularités de $\overline{Z}$ est un sous-ensemble analytique de $\overline{Z}$ de codimension $\geqslant 2$ dans $\overline{Z}$. S est contenu dans D puisque $\overline{Z}$ est le normalisé de l'éclatement π. L'ensemble $S\cup A$ est donc un sous-ensemble analytique de $\overline{Z}$ inclus dans D et de codimension $\geqslant 2$ dans $\overline{Z}$, donc de codimension $\geqslant 1$ dans D. L'ensemble

$$\Omega_1 = \mathbf{P}_N\smallsetminus G\circ n(S\cup A)$$

est donc un ouvert de Zariski dense de $\mathbf{P}_N$.

Dans [Te 3], B. Teissier montre qu'il existe un ouvert de Zariski Ω dense dans $\mathbf{P}_N$ contenu dans Ω_1, tel que

1) pour $a \in \Omega$, la restriction aux fibres

$$n_a : \overline{Z}_a \to Z_a$$

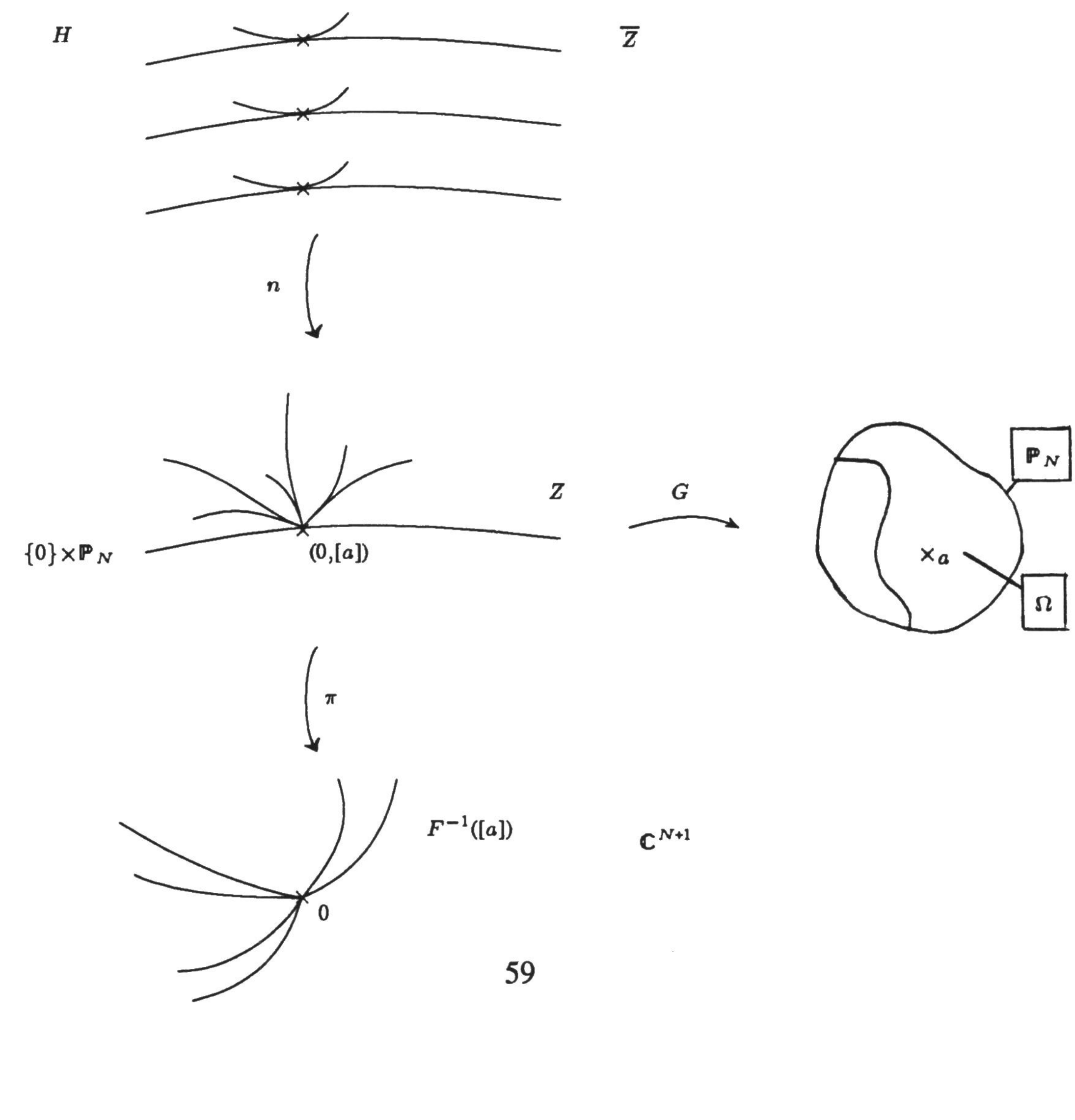
est une normalisation de Z_a, et $\overline{Z}_a$ est une courbe non singulière au voisinage de D.

2) pour $a \in \Omega$ et pour $x \in D \cap \overline{Z}_a$, il existe un voisinage V_a de a dans Ω, W_x de x dans $\overline{Z}$ tels que

$$W_x \simeq V_a \times \overline{Z}_a.$$

Notons $H = (G \circ n)^{-1}(\Omega) \cap D$. Si $D_1, \dots, D_q$ désignent les composantes irréductibles de D, celles de H sont définies par $H_i = H \cap D_i$ pour $i = 1, \dots, q$, et H_i est un ouvert analytique dense de D_i pour $i = 1, \dots, q$.

Comme $D \to \Delta$ est un isomorphisme local hors de $S \cup A$, on obtient par 1) que pour $a \in \Omega$ et i, $1 \leqslant i \leqslant q$, $H_i \cap \overline{Z}_a$ est réduit à un point, par lequel passe une unique composante irréductible $\overline{\Gamma}_i$ de la courbe $\overline{Z}_a$. $\overline{\Gamma}_i$ est une courbe non singulière, qui est transverse à D_i d'après 2). Il en résulte que pour $a \in \Omega$, il correspond à chaque composante irréductible Γ de la courbe polaire $F^{-1}([a])$ une unique composante irréductible $\overline{\Gamma}$ de $\overline{Z}_a$, et $\overline{\Gamma}$ est au voisinage de D une courbe non singulière transverse à D.



Ceci montre la première partie de la proposition : pour $a \in \Omega$, le nombre de composantes irréductibles $q([a])$ de la courbe polaire $F^{-1}([a])$ est égal à q, nombre de composantes irréductibles de D.

Pour montrer la seconde partie de la proposition, nous allons tout d'abord définir pour chaque composante irréductible D_i de D une fonction d'ordre ν_{D_i} de la manière suivante. Si $g \in \mathcal{O}_{N+1}$, $\nu_{D_i}(g)$ est l'ordre d'annulation de la fonction $g \circ \overline{\pi}$ le long de D_i au voisinage d'un point générique de D_i. Pour un idéal I de $\mathcal{O}_{N+1}$, on pose

$$\nu_{D_i}(I) := \min_{g \in I} \nu_{D_i}(g).$$

Soit $g \in \mathcal{O}_{N+1}$. On note pour i, $1 \leqslant i \leqslant q$, A_{ig} l'ensemble des points de D_i en lesquels l'ordre d'annulation de $g \circ \overline{\pi}$ diffère de $\nu_{D_i}(g)$. A_{ig} est un sous-ensemble analytique de codimension $\geqslant 1$ de D_i, donc de codimension $\geqslant 2$ dans $\overline{Z}$. Par conséquent,

$$\Omega_g := \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{q} G \circ n(A_{ig})$$

est un ouvert de Zariski dense de $\mathbb{P}_N$. Nous allons vérifier que Ω_g satisfait aux conditions de la seconde partie de la proposition. Considérons $a \in \Omega_g$. Comme $a \in \Omega$, on a vu que si Γ est une composante irréductible de $F^{-1}([a])$, Γ est image par $\overline{\pi}$ d'une courbe non singulière $\overline{\Gamma}$ de $\overline{Z}$ contenue dans $\overline{Z}_a$ et transverse à l'une des composantes irréductibles de D, par exemple en un point $x \in H_i$. Comme $a \in \Omega_g$, $x \notin A_{ig}$. Par conséquent, si γ (resp. $\overline{\gamma}$) est une paramétrisation de Γ (resp. $\overline{\Gamma}$), on obtient

$$\nu_0(g \circ \gamma) = \nu_0(g \circ \overline{\pi} \circ \overline{\gamma}) = \nu_{D_i}(g).$$

La seconde partie de la proposition est ainsi vérifiée : si $g \in \mathcal{O}_{N+1}$ et $a \in \Omega_g$, alors $q([a]) = q$ et $\{\nu_0(g \circ \gamma^{\alpha}_{[a]})\}_{\alpha=1,\dots,q} = \{\nu_{D_i}(g)\}_{i=1,\dots,q}$. ■

Fin de la démonstration de la proposition 4.B.1. — Soit $S \in W$ et $(z_0, \dots, z_N)$ un système de coordonnées tel que S soit défini par l'équation $z_0 = 0$ et tel que le point $a^0 = (1 : 0 : \cdots : 0)$ de $\mathbb{P}_N$ appartienne à $\big(\bigcap_{i=0}^{N} \Omega_{z_i}\big) \cap \big(\bigcap_{i=0}^{N} \Omega_{f'_i}\big) \cap \Omega_f$ qui est un ouvert de Zariski dense $\Omega' \subset \Omega$ de $\mathbb{P}_N$.

On a vu que

$$\begin{aligned}
\mu^{(N)}(S) &= \min_{a \in \mathbb{P}_N} \nu\Big(\frac{i}{\pi} d'd'' F_* \log |z_0|_{|[a]}, 0\Big) \\
&= \min_{a \in \Omega'} \sum_{\alpha=1}^{q} \nu_0\big(z_0 \circ \gamma^{\alpha}_{[a]}\big) \\
&= \sum_{i=1}^{q} \nu_{D_i}(z_0) \\
&= \sum_{i=1}^{q} \nu_0\big(z_0 \circ \gamma^{\alpha}_{[a^0]}\big),
\end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que $a^0 \in \Omega' \subset \Omega_{z_0}$. Or, pour $\alpha = 1, \ldots, q$,

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma_{[a^0]})'(\tau) &= \sum_{j=0}^{N} (f'_j \circ \gamma^\alpha_{[a^0]})(\tau)(\gamma^\alpha_{[a^0],j})'(\tau) \\ &= (f'_0 \circ \gamma^\alpha_{[a^0]})(\tau)(\gamma^\alpha_{[a^0],0})'(\tau)\end{aligned}$$

puisque $F \circ \gamma^\alpha_{[a^0]} \in [a^0]$. Donc

$$\begin{aligned}\nu_0(f \circ \gamma^\alpha_{[a^0]}) &= \nu_0(f'_0 \circ \gamma^\alpha_{[a^0]}) + \nu_0(\gamma^\alpha_{[a^0],0}) \\ &= \nu_0(F \circ \gamma^\alpha_{[a^0]}) + \nu_0(z_0 \circ \gamma^\alpha_{[a^0]}).\end{aligned}$$

Comme $S \in W$ et $[a^0] \in \Omega' \subset \bigcap_{i=0}^{N} \Omega_{z_i}$, on a

$$\mu^{(N)}(S) = \mu^{(N)} = \sum_{\alpha=1}^{q} \nu_0(\gamma^\alpha_{[a^0]}).$$

Or on a vu que $\mu^{(N)}(S) = \sum_{\alpha=1}^{q} \nu_0(z_0 \circ \gamma^\alpha_{[a^0]})$, et par ailleurs $\nu_0(z_0 \circ \gamma^\alpha_{[a^0]}) \geqslant \nu_0(\gamma^\alpha_{[a^0]})$ pour $\alpha = 1, \ldots, q$. Donc $\nu_0(z_0 \circ \gamma^\alpha_{[a^0]}) = \nu_0(\gamma^\alpha_{[a^0]})$ pour $\alpha = 1, \ldots, q$, et

(4) $$\nu_0(f \circ \gamma^\alpha_{[a^0]}) = \nu_0(F \circ \gamma^\alpha_{[a^0]}) + \nu_0(\gamma^\alpha_{[a^0]}).$$

Après sommation sur α, et d'après la relation (3), on obtient ainsi $(0_{[a^0]})$. On obtient $(0_{[a]})$ de la même manière pour tout $a \in \Omega'$, ou en remarquant que (4) s'écrit encore

(5) $$\nu_{D_i}(f) = \nu_{D_i}(j(f)) + \nu_{D_i}(\mathfrak{M})$$

où $j(f)$ est l'idéal jacobien de f, *i.e.* l'idéal engendré par $(f'_0, \ldots, f'_N)$, et $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{N+1}$ (engendré par $(z_0, \ldots, z_N)$). Après sommation sur i on obtient directement $(0_{[a]})$ pour $a \in \Omega'$ d'après la proposition 4.B.2.

Ceci achève la démonstration de la proposition 4.B.1 en prenant pour ouvert de Zariski dense Ω'. ∎

Remarque. — Le fait que $\nu_{D_i}(f) = \nu_{D_i}(j(f)) + \nu_{D_i}(\mathfrak{M})$ avait été montré par B. Teissier dans [Te 2] de manière légèrement différente.

Bibliographie

[Ab] ABRAHAMSSON L. — *Microlocal Lelong numbers of plurisubharmonic functions*, J. reine angew. Math. **388** (1988), 116–128.

[B-S] BRIANÇON J., SKODA H. — *Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de* $\mathbb{C}^n$, Note aux CRAS **278** (1974), 949–951.

[De 1] DEMAILLY J-P. — *Formules de Jensen en plusieurs variables et applications arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 75–102.

[De 2] DEMAILLY J-P. — *Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégralité et d'analyticité*, Acta Math. **159** (1987), 153–169.

[De 3] DEMAILLY J-P. — *Analytic Geometry*, A paraître.

[Fe] FEDERER H. — *Measure theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.

[G-H] GRIFFITHS P., HARRIS J. — *Principle of algebraic Geometry*, J. Wiley and sons, 1978.

[Gr] GRIFFITHS P. — *The extension problem in complex analysis II ; embeddings with positive normal bundles*, Amer. J. Math. **88** (1966), 366–446.

[G-R] GUNNING C., ROSSI H. — *Analytic functions of several complex variables*, Prentice Hall, 1965.

[Ki 1] KISELMAN C.O. — *Un nombre de Lelong raffiné*, Annales de la Faculté des Sciences de Monastir, Maroc.

[Ki 2] KISELMAN C.O. — *Stabilité du nombre de Lelong par restriction à une sous-variété*, Lecture Notes in Math. **919**, Berlin-Heidelberg-New York (1982), 324–336.

[La] LANGEVIN R. — *Courbures et singularités complexes*, Comment. Math. Helv. **54** (1979), 6–16.

[Le] LELONG P. — *Plurisubharmonic functions in topological vector spaces : polar sets and problems of measure, Proceedings on infinite dimensional holomorphy*, Lecture Notes in Math. **364** (1974), 58–68.

[Lo] LOESER F. — *Formules intégrales pour certains invariants locaux des espaces analytiques complexes*, Comment. Math. Helv. **59** (1984), 204–225.

[Si] SIU Y.T. — *Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents*, Inventiones Math. **27** (1974), 53–156.

[Te 1] TEISSIER B. — *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney*, Astérisque **7-8** (1973), Singularités à Cargèse, 285–362.

[Te 2] TEISSIER B. — *Variétés polaires I*, Invent. Math. **40** (1977), 267–292.

[Te 3] TEISSIER B. — *Résolution simultanée I, II*, Lecture Notes in Math. **777** (), 71–146.

[Th] THIE P. — *The Lelong number of a point of a complex analytic set*, Math. Annalen **172** (1967), 269–312.

RÉSUMÉ

L'objet de cette thèse est de relier entre elles deux grandeurs importantes, l'une en théorie des courants -- le nombre de Lelong – et l'autre en géométrie algébrique locale – le nombre de Milnor, ou plus généralement la multiplicité. Cette étude nous permet de donner une nouvelle preuve, plus analytique, d'un théorème dû à F. Loeser, qui met en relation les nombres de Milnor d'une fonction à singularité isolée et des intégrales des formes de Chern associées aux fibres non singulières. Par ailleurs, nous proposons une généralisation des nombres de Lelong microlocaux introduits par L. Abrahamsson et nous montrons comment ils peuvent s'interpréter comme des nombres de Lelong généralisés avec poids.

MOTS-CLÉS

Courant d'intégration, fonction plurisousharmonique, nombre de Lelong, singularité isolée, nombre de Milnor

MATHEMATICAL SUBJECT CLASSIFICATION

32B30, 32C30