

Thèse de l'Université Joseph Fourier (Grenoble I)

Inégalités de Morse et variétés de Moishezon

Laurent Bonavero

préparée à l'Institut Fourier
laboratoire de mathématiques, UMR 5582 du C.N.R.S.

soutenue le lundi 18 décembre 1995

Jury :

Michel Brion, rapporteur
Frédéric Campana, rapporteur
Jean-Pierre Demailly, directeur
Christian Peskine, examinateur
Chris Peters, examinateur

Texte publié comme preprint sur arXiv : alg-geom/9512013

RÉSUMÉ

Le sujet central de cette thèse est l'étude de certaines propriétés d'une classe de variétés analytiques complexes compactes : les variétés de Moishezon.

Dans un premier temps, nous généralisons les inégalités de Morse holomorphes de J.-P. Demailly dans le cas d'un fibré en droites muni d'une métrique à singularités analytiques au dessus d'une variété complexe compacte. Nos inégalités donnent une estimation des groupes de cohomologie à valeurs dans les puissances tensorielles du fibré, tordues par la suite des faisceaux d'idéaux multiplicateurs de Nadel naturellement associée. Nous obtenons comme conséquence une caractérisation nécessaire et suffisante, de plus invariante par morphisme biméromorphe, pour qu'une variété complexe compacte soit de Moishezon.

Dans un deuxième temps, nous utilisons la théorie de Mori pour analyser la structure des variétés de Moishezon dont le groupe de Picard est infini cyclique, dont le fibré canonique est gros et qui deviennent projectives après un seul éclatement de centre lisse. Si le fibré canonique n'est pas nef, nous montrons que le centre de l'éclatement est nécessairement de dimension supérieure ou égale à la moitié de celle de la variété. En dimension quatre, nous prouvons que le centre de l'éclatement est toujours une surface, et si le fibre canonique n'est pas nef, nous montrons entre autres que le centre de l'éclatement est nécessairement isomorphe au plan projectif.

MOTS-CLÉS

Variété analytique compacte, inégalités de Morse holomorphes, métrique singulière, fibré numériquement effectif, variété de Moishezon, groupe de Picard, théorie de Mori, éclatement.

CLASSIFICATION MATHÉMATIQUE

32J25, 32L05, 32L10, 32C10, 14J40, 14J05, 32I20.

Remerciements

Ces années de thèse sous la direction de Jean-Pierre Demailly ont été autant d'années agréables. Il m'a progressivement appris le métier de chercheur, inspirant directement la première moitié de cette thèse, puis me laissant avec confiance acquérir une certaine indépendance. Sa vision globale des mathématiques en général et de la géométrie analytique en particulier m'a beaucoup apporté, la clarté de son enseignement et de ses exposés beaucoup appris. Enfin, il a lu mes textes avec beaucoup de rigueur et de disponibilité. Pour tout cela, et bien plus encore, je le remercie très sincèrement.

Chris Peters me fait l'honneur de présider ce jury, Bernard Shiffman celui d'avoir accepté de rapporter sur cette thèse, Christian Peskine celui d'être présent aujourd'hui ; je les remercie tous les trois.

Je veux remercier Frédéric Campana non seulement pour avoir accepté d'être rapporteur, mais également pour la gentillesse avec laquelle il s'est intéressé à mon travail. Ainsi, il a eu une intervention décisive dans la progression de la deuxième moitié de cette thèse, me faisant bénéficier de ses grandes connaissances, notamment dans le domaine de la théorie de Mori.

Michel Brion me fait le plaisir de participer à ce jury. Pour sa présence aujourd'hui, pour l'intérêt permanent et critique qu'il a porté aux versions préliminaires orales et écrites de mon travail, et pour les mathématiques qu'il m'explique régulièrement, je le remercie chaleureusement.

J'ai trouvé à Grenoble un interlocuteur régulier particulièrement attentif : Laurent Manivel a suivi, semaine après semaine, l'évolution de mes recherches, a lu avec beaucoup de précision mon travail, et de nombreuses simplifications ou modifications par rapport au texte initial sont issues de ses remarques. Je le remercie très sincèrement, ainsi que mes deux compères Michel Méo et Christophe Mourougane.

Je veux remercier aussi Thomas Peternell pour les séjours à Bayreuth toujours enrichissants et Claire Voisin pour s'être récemment intéressée à mon travail, m'ouvrant ainsi des perspectives nouvelles de recherche.

Durant ces années de thèse, j'ai aussi fait partie de l'Unité de Mathématiques Pures et Appliquées de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, y donnant en particulier mon enseignement après y avoir été étudiant. C'est pour moi une chance d'avoir pu bénéficier de cette double culture mathématique, et je tiens à mentionner ici l'ambiance exceptionnelle qui règne à l'UMPA. J'en remercie tous ses membres, et plus particulièrement Etienne Ghys pour son enthousiasme mathématique communicatif et la clarté de ses exposés, ainsi qu'Emmanuel Giroux et Bruno Sévenec pour les nombreuses discussions, toujours enrichissantes que nous avons eues. Je veux associer à ces remerciements Alexis Marin qui de Lyon à Grenoble s'est toujours intéressé à mon travail.

Enfin, Marguerite partage avec beaucoup d'amour ma vie quotidienne : je la remercie pour sa présence... et aussi pour avoir effectué les dessins de cette thèse.

Table des matières

1	Préliminaires	11
1.1	Quelques rappels de géométrie analytique complexe	11
1.1.1	Variétés, fibrés vectoriels	11
1.1.2	Théorème de Kodaira	13
1.2	Quelques rappels sur les variétés de Moishezon	13
1.2.1	Théorème de Siegel	13
1.2.2	Éclatements et variétés de Moishezon	15
1.3	Les inégalités de Morse de J.-P. Demailly	17
1.4	Exemples explicites	19
1.4.1	La première construction	19
1.4.2	La construction de K. Oguiso	24
1.4.3	Quelques commentaires	25
2	Inégalités de Morse singulières	27
2.1	Métriques singulières	27
2.1.1	Premières définitions	27
2.1.2	Faisceaux d'idéaux multiplicateurs de Nadel	28
2.2	Inégalités de Morse singulières	31
2.2.1	Énoncé du résultat principal	31
2.2.2	Démonstration du théorème B	32
2.3	Caractérisations des variétés de Moishezon	39
2.3.1	Deux rappels	39
2.3.2	Démonstration des théorèmes C et D	41
2.3.3	Quelques commentaires	42
2.4	Une version algébrique des inégalités de Morse	43
2.4.1	Théorème de Kawamata-Viehweg	43
2.4.2	Inégalités de Morse algébriques singulières	46
3	Étude de certaines variétés de Moishezon	49
3.1	Un théorème de J. Kollár	49
3.1.1	Énoncé du résultat	49
3.1.2	Démonstration	50
3.1.3	Commentaires	51
3.2	Quelques rappels sur la théorie de Mori	52
3.2.1	Cône des courbes effectives	52

3.2.2	Contraction de Mori	53
3.2.3	Contractions divisorielles	54
3.2.4	L'inégalité de Wiśniewski	54
3.3	Un premier résultat	55
3.3.1	Cône des courbes sur \tilde{X}	55
3.3.2	Contraction de Mori de \tilde{X}	57
3.3.3	Application à la dimension 3	61
3.4	Une famille de variétés de Moishezon	62
3.4.1	Un résultat intermédiaire	62
3.4.2	Démonstration du théorème G	62
3.4.3	Démonstration de la proposition	64
3.5	Une classification en dimension 4	66
3.5.1	Énoncé des résultats	66
3.5.2	Démonstration du théorème H	67
3.5.3	Démonstration du théorème I	68
3.5.4	Quelques commentaires	70

Introduction

Le sujet central de cette thèse est l'étude de certaines propriétés d'une classe de variétés analytiques complexes compactes : les variétés de Moishezon. Ces dernières sont particulièrement intéressantes car elles forment la plus petite classe de variétés complexes stable par application biméromorphe et contenant les variétés projectives. Il est bien connu depuis K. Kodaira que les variétés projectives sont caractérisées par l'existence d'un fibré en droites ample ou de façon équivalente d'un fibré en droites muni d'une métrique hermitienne à courbure strictement positive. Le fil conducteur de cette thèse est l'étude de l'existence ou de l'inexistence de fibrés en droites vérifiant des propriétés de positivité faible sur les variétés de Moishezon.

L'étude que nous avons faite est divisée en deux parties : un point de vue analytique suivant et généralisant une démarche présente dans certains travaux de J.-P. Demailly et Y.-T. Siu, et un point de vue plus algébrique reposant sur l'utilisation de la théorie de Mori, démarche présente dans certains travaux de J. Kollár et T. Peternell.

Étude analytique

Cette étude a démarré avec les travaux de J.-P. Demailly et Y.-T. Siu qui, répondant à une conjecture de H. Grauert et O. Riemenschneider, ont donné indépendamment des conditions analytiques suffisantes (existence de fibrés en droites à courbure semi-positive et génériquement positive) pour qu'une variété complexe compacte soit de Moishezon.

Une de nos motivations vient du fait qu'aucune de ces conditions n'est nécessaire, comme le montre l'étude de constructions récentes.

L'un des premiers résultats de cette thèse est de donner une caractérisation analytique des variétés de Moishezon. Pour cela, nous montrons, et c'est le théorème principal de la première partie de notre travail, que les inégalités de Morse holomorphes de J.-P. Demailly se généralisent au cas d'un fibré en droites E muni d'une métrique singulière h au dessus d'une variété complexe compacte X . Nos inégalités donnent une estimation asymptotique de la dimension des groupes de cohomologie à valeurs dans les puissances tensorielles $E^{\otimes k}$, tordues par une suite de faisceaux d'idéaux $\mathcal{I}_k(h)$ naturellement associée aux singularités de la métrique h : la suite des faisceaux d'idéaux multiplicateurs de Nadel. La présence de ces faisceaux d'idéaux constitue le phénomène nouveau par rapport au cas où la métrique est lisse. Comme dans ce dernier cas, l'estimation fait intervenir des intégrales de la courbure $\Theta(E)$. Notre résultat est le suivant :

Théorème *Si la métrique h a des singularités analytiques, alors pour tout fibré F de rang r et pour tout q compris entre 0 et $n = \dim(X)$, on a :*

$$\sum_{j=0}^q (-1)^{q-j} \dim H^j(X, \mathcal{O}(E^k \otimes F) \otimes \mathcal{I}_k(h)) \leq r \frac{k^n}{n!} \int_{X(\leq q, E)} (-1)^q \Theta(E)^n + o(k^n)$$

(avec égalité si $q = n$), où $X(\leq q, E)$ désigne l'ouvert de X des points lisses de la métrique d'indice inférieur à q .

Ce résultat est à mettre en parallèle avec la généralisation du théorème de Kawamata-Viehweg donnée par A. Nadel.

Nous montrons ensuite, généralisant un résultat de S. Ji et B. Shiffman obtenu indépendamment et simultanément au nôtre, que les critères de J.-P. Demailly et Y.-T. Siu deviennent, dans ce cadre plus souple, nécessaires et suffisants. Donnons par exemple le :

Théorème *Une variété compacte X de dimension n est de Moishezon si et seulement s'il existe sur X un courant fermé T de bi-degré $(1, 1)$ tel que :*

- (i) $\{T\} \in H^2(X, \mathbb{Z})$,
- (ii) $T = \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} \varphi + \alpha$, où φ est une fonction réelle à singularités analytiques et où α est un représentant C^∞ de $\{T\}$,
- (iii) $\int_{X(\leq 1, T)} T^n > 0$ où l'intégrale est prise sur les points lisses du courant T .

Comme nous l'avons déjà mentionné, ce type de critère a la propriété d'être invariant par morphisme biméromorphe.

Étude algébrique

La deuxième partie de cette thèse consiste à étudier en détail la classe des variétés de Moishezon dont le groupe de Picard est \mathbb{Z} , et dont le fibré canonique K_X est gros ("big").

Une de nos motivations provient d'un résultat de J. Kollár affirmant qu'en dimension 3, et sous les hypothèses précédentes, le fibré canonique est alors numériquement effectif (nef). Il n'est donc pas possible de trouver dans cette classe des variétés de Moishezon de dimension 3 ne vérifiant pas les critères de J.-P. Demailly et Y.-T. Siu. Nous montrons que ceci n'est plus vrai en dimension supérieure ou égale à 4 en construisant explicitement des exemples :

Théorème *Pour tout entier n supérieur ou égal à 4, il existe des variétés de Moishezon X , non projectives, de dimension n vérifiant :*

- (i) $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$, (ii) K_X est gros, (iii) K_X n'est pas nef.

La construction donnant ce résultat montre que les variétés X obtenues deviennent projectives après un éclatement le long d'une sous-variété isomorphe à \mathbb{P}^{n-2} .

Plus généralement, un résultat fondamental de B. Moishezon affirme qu'une variété de Moishezon peut être rendue projective après une succession finie d'éclatements le long de sous-variétés lisses. Ce résultat difficile ne donne malheureusement aucune indication quant au choix explicite des sous-variétés en question. Grâce à l'utilisation de la célèbre théorie de Mori sur un modèle projectif, nous avons étudié le centre de l'éclatement en toutes dimensions :

Théorème *Soit X une variété de Moishezon (non projective) de dimension n , avec $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ et K_X gros. Supposons de plus que X est rendue projective après éclatement le long d'une sous-variété Y lisse.*

Alors, si K_X n'est pas nef, on a $\dim Y > \frac{n-1}{2}$.

En dimension 4, ce résultat peut être précisé, y compris dans le cas où le fibré canonique est nef :

Théorème *Soit X une variété de Moishezon (non projective) de dimension 4, avec $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ et K_X gros. Supposons de plus que X est rendue projective après éclatement le long d'une sous-variété Y lisse.*

Alors Y est nécessairement une surface. Autrement dit, et dans cette situation particulière, il ne suffit pas d'éclater une courbe pour "rentrer dans le monde projectif".

Nous avons vu précédemment que K_X n'est pas nécessairement nef à partir de la dimension 4. Le résultat suivant montre que l'exemple que nous avons construit est, en un sens, le seul possible en dimension 4 dans le cas où K_X n'est pas nef.

Théorème *Sous les hypothèses précédentes et si K_X n'est pas nef, alors le couple $(Y, N_{Y/X})$ est isomorphe à $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{\oplus 2})$.*

Ces résultats précis sont accessibles en dimension 4 car les contractions de Mori ont été étudiées par T. Ando, Y. Kawamata et M. Beltrametti. Nos résultats peuvent être vus comme un premier pas vers une analyse du caractère non projectif des variétés de Moishezon de dimension supérieure ou égale à 4 ; la situation en dimension 3 étant maintenant assez bien comprise suite aux travaux de J. Kollár et T. Peternell.

Plan du texte

- le chapitre 1 est un chapitre de préliminaires ; il contient une description précise des motivations et des objets utilisés dans le reste de la thèse. Nous y détaillons en particulier une démonstration du théorème de Siegel et donnons les constructions de I. Nakamura et K. Oguiso montrant que les critères analytiques de J.-P. Demailly et Y.-T. Siu ne sont pas nécessaires en général.

- le chapitre 2 est consacré à l'étude analytique. Nous rappelons les premiers résultats liés aux métriques singulières, énonçons et démontrons notre version des inégalités de Morse holomorphes. On en déduit les caractérisations analytiques des

variétés de Moishezon. Enfin, nous donnons une version algébrique singulière des inégalités de Morse.

- le chapitre 3 est consacré à l'étude algébrique. Nous commençons par rappeler le résultat de J. Kollár en dimension 3, puis nous faisons une étude des variétés de Moishezon à groupe de Picard \mathbb{Z} , à fibré canonique gros et devenant projectives après un seul éclatement de centre lisse et projectif. Nous obtenons une restriction sur la dimension du centre de l'éclatement. En dimension 4, cette restriction implique que ce dernier est nécessairement une surface. Nous décrivons alors notre exemple et montrons qu'en dimension 4, cette construction est essentiellement la seule dans le cas où le fibré canonique n'est pas nef.

Mentionnons que les chapitres 2 et 3 sont dans une large mesure indépendants et peuvent être lus dans un ordre quelconque.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre a pour but d'introduire les principales notions utilisées par la suite, de présenter les premières motivations en détail et de rappeler un certain nombre de résultats auxquels nous nous référons dans les chapitres suivants.

1.1 Quelques rappels de géométrie analytique complexe

1.1.1 Variétés, fibrés vectoriels

Précisons tout d'abord que dans toute cette thèse, et sauf mention explicite du contraire, le mot **variété** sera utilisé pour désigner une **variété analytique complexe non singulière** supposée de plus connexe. Pour toutes les notions introduites ici, nous renvoyons de façon générale à [G-H78].

Un **fibré vectoriel** complexe F au dessus d'une variété X est la donnée d'une variété F et d'une application $\pi : F \rightarrow X$ de sorte qu'il existe un recouvrement de X par des ouverts trivialisants U_α et des isomorphismes (appelés trivialisations)

$$\theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^r$$

respectant la structure d'espace vectoriel des fibres, i.e

$$\theta_{\alpha\beta}(x, \xi) := \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1}(x, \xi) = (x, g_{\alpha\beta}(x)\xi)$$

où $g_{\alpha\beta}$ est une application holomorphe sur $U_\alpha \cap U_\beta$ à valeurs dans le groupe des matrices complexes inversibles de taille r . Nous notons ξ_x un point de F au dessus du point x de X (i.e tel que $\pi(\xi_x) = x$). L'entier r est le **rang** du fibré F . Si $r = 1$, on parle de **fibré en droites**.

Un exemple important de fibré en droites est le fibré $\mathcal{O}(D)$ associé à un diviseur D sur X : si D est un diviseur irréductible donné sur U_α par l'équation $f_\alpha = 0$, le fibré $\mathcal{O}(D)$ est le fibré associé au cocycle

$$g_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} .$$

Toutes les constructions d'algèbre linéaire s'étendent aux fibrés : dual, produit tensoriel, produit extérieur. Ainsi, un exemple fondamental de fibré en droites sur une variété X de dimension n est le **fibré canonique** défini par

$$K_X := \det(T^*X) = \bigwedge^n T^*X,$$

où T^*X désigne le fibré cotangent, dual du fibré tangent holomorphe TX de X .

Un autre exemple important de fibré en droites est le fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ sur l'espace projectif \mathbb{P}^n : en associant à un point $[x]$ de \mathbb{P}^n la droite $\mathbb{C}x$, on construit un sous-fibré en droites du fibré trivial $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$; le dual de ce fibré en droites est par définition le fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$.

L'ensemble des fibrés en droites, modulo isomorphisme, sur une variété X est naturellement muni d'une structure de groupe pour le produit tensoriel : on l'appelle **groupe de Picard** de X et on le note $\text{Pic}(X)$. Mentionnons ici que nous identifions suivant l'usage un fibré en droites E au faisceau inversible $\mathcal{O}(E)$ des germes de sections holomorphes de E . La k -ième puissance tensorielle d'un fibré en droites E sera notée indifféremment $E^{\otimes k}$, E^k , $\mathcal{O}(kE)$ ou même kE .

Un fibré vectoriel E peut être muni d'une métrique hermitienne \mathcal{C}^∞ , on parle alors de fibré vectoriel **hermitien** et on note généralement h une telle métrique : elle correspond à la donnée d'une forme hermitienne sur chaque fibre E_x de E , dépendant de façon \mathcal{C}^∞ de x .

Dans le cas particulier d'un fibré en droites, une métrique hermitienne est donnée localement sur un ouvert trivialisant U_α par

$$h(\xi_x) = \|\xi_x\|_h := |\xi| \exp(-\varphi_\alpha(x))$$

(la fonction $\exp(-\varphi_\alpha)$ est appelée **poids** de la métrique h dans la trivialisatoin θ_α) où la fonction réelle φ_α est de classe \mathcal{C}^∞ sur U_α .

Lorsque le fibré tangent TX est muni d'une métrique hermitienne, on dit que la variété X est hermitienne. Comme il est d'usage, nous identifions toujours la donnée d'une métrique hermitienne sur une variété X à celle de la $(1, 1)$ forme réelle, généralement notée ω , qui lui est naturellement associée (ω est à un facteur -2 près la partie imaginaire de la métrique). Ainsi, une variété est **kählérienne** si elle possède une métrique hermitienne pour laquelle ω est une forme fermée.

Une variété **projective** est une variété isomorphe à une sous-variété fermée d'un espace projectif \mathbb{P}^N .

Pour un fibré en droites hermitien (E, h) , on note $\Theta(E)$ la $(1, 1)$ **forme de courbure** de (E, h) : c'est la forme réelle définie globalement sur X et donnée localement par

$$\Theta(E) = \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} \varphi_\alpha;$$

c'est aussi la courbure de la connexion de Chern du fibré hermitien E . La classe de cohomologie de $\Theta(E)$ appartient à $H^2(X, \mathbb{Z})$ et ne dépend pas de la métrique h ; c'est la première classe de Chern de E et elle est notée $c_1(E)$. Remarquons qu'il n'y a pas de sens à parler des valeurs propres de la forme de courbure, mais que la **signature**

de la courbure (i.e le nombre de “valeurs propres” nulles, strictement positives et strictement négatives) est une notion bien définie sans donnée supplémentaire. Par exemple, le fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ muni de la métrique induite de celle de \mathbb{C}^{n+1} est à courbure strictement positive : la forme de courbure est la métrique de Fubini-Study de \mathbb{P}^n .

1.1.2 Théorème de Kodaira

Nous sommes en mesure d’énoncer maintenant le célèbre théorème de plongement de Kodaira [Kod54] :

Théorème (K. Kodaira, 1954) *Une variété compacte X est projective si et seulement si elle possède un fibré en droites hermitien E à courbure strictement positive.*

Signalons évidemment qu’un sens est aisé : si une variété est projective, la restriction à X du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ muni de sa métrique naturelle ayant pour courbure la forme de Fubini-Study de \mathbb{P}^N donne le fibré souhaité. L’autre sens consiste à montrer que pour k entier assez grand, il est possible de plonger X dans l’espace projectif des hyperplans de $H^0(X, E^{\otimes k})$, où $H^0(X, E^{\otimes k})$ désigne l’espace vectoriel des sections holomorphes globales de $E^{\otimes k}$.

Rappelons ici qu’un fibré en droites pouvant être muni d’une métrique à courbure strictement positive est dit **ample**.

C’est le théorème de Kodaira que H. Grauert et O. Riemenschneider [GrR70] se proposaient de généraliser aux variétés de Moishezon, variétés que nous introduisons dans le paragraphe suivant.

1.2 Quelques rappels sur les variétés de Moishezon

Les variétés de Moishezon sont, parmi les variétés compactes, celles qui possèdent le “plus” de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes. Cette définition heuristique est justifiée par le théorème de Siegel que nous rappelons maintenant.

1.2.1 Théorème de Siegel

En 1955, C.L. Siegel démontre le résultat suivant [Sie55] :

Théorème (C.L. Siegel, 1955) *Si X est une variété compacte de dimension n , alors X possède au plus n fonctions méromorphes algébriquement indépendantes.*

La démonstration originale de C.L. Siegel repose sur une application élémentaire du lemme de Schwarz. Il existe maintenant plusieurs démonstrations différentes, certaines généralisant cet énoncé aux espaces complexes compacts. Nous en donnons ici une preuve “moderne” dans le cas non singulier. Pour cela, nous utilisons un résultat de P. Gauduchon [Gau77] : *toute variété analytique complexe compacte de dimension n possède une métrique hermitienne ω de classe C^∞ et d’excentricité nulle, i.e telle que $\partial\bar{\partial}(\omega^{n-1}) = 0$.*

Commençons par montrer le lemme suivant :

Lemme *Soit X une variété compacte que l'on munit d'une métrique de Gauduchon ω et soit x_0 un point de X . Alors, il existe une constante $C := C(X, x_0, \omega)$ telle que pour tout fibré en droites hermitien (E, h) au dessus de X et pour toute section holomorphe s de E non identiquement nulle, on ait :*

$$\text{mult}(s, x_0) \leq C \int_X \omega^{n-1} \wedge \Theta(E).$$

Démonstration

Soit r un réel strictement positif fixé "petit" (de sorte qu'il existe une carte centrée en x_0 et contenant la boule $B(x_0, r)$). Alors, la multiplicité de s en x_0 vérifie :

$$\text{mult}(s, x_0) \leq \frac{\text{vol}_{n-1}(Z_s \cap B(x_0, r))}{\text{vol}_{n-1}(B_{n-1}(x_0, r))} + o(r)$$

où vol_{n-1} est le volume $(n-1)$ -dimensionnel mesuré avec la métrique ω , et où Z_s désigne le lieu des zéros de s . En effet, la multiplicité de s en x_0 est en fait égale à la limite décroissante lorsque r tend vers 0 de la quantité du membre de droite de l'inégalité. Comme X est compacte, on a *a fortiori* :

$$\text{mult}(s, x_0) \leq C \text{vol}_{n-1}(Z_s) = C \int_{Z_s} \omega^{n-1}.$$

Mais l'équation de Lelong-Poincaré affirme que :

$$\frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} \log \|s\| = [Z_s] - \Theta(E),$$

où $[Z_s]$ désigne le courant d'intégration sur l'ensemble Z_s . Comme ω^{n-1} est $\partial \bar{\partial}$ -fermée, la formule de Stokes donne de suite :

$$\int_{Z_s} \omega^{n-1} = \int_X \omega^{n-1} \wedge \Theta(E),$$

ce qui prouve le lemme. ■

Ce lemme implique le résultat suivant :

Proposition *Soient X une variété compacte de dimension n , ω une métrique de Gauduchon sur X et E un fibré en droites hermitien au dessus de X . Alors :*

(i) $\dim H^0(X, E) \leq \binom{n+p}{n}$ où p est la partie entière de $C \int_X \omega^{n-1} \wedge \Theta(E)$ et où C est la constante du lemme précédent,

(ii) $\dim H^0(X, E^{\otimes k}) \leq A \left(\int_X \omega^{n-1} \wedge \Theta(E) \right)^n k^n + o(k^n)$, où A est une constante indépendante de E et k .

Démonstration

Il suffit de remarquer que $\binom{n+p}{n}$ est la dimension de l'espace vectoriel des polynômes de n variables et de degré inférieur ou égal à p : le lemme implique en effet que

l'application linéaire qui à une section holomorphe de E associe son p -ième jet en x_0 est injective, d'où le point (i). Le point (ii) est conséquence du fait que la forme de courbure du fibré $(E^{\otimes k}, h^k)$ est donnée par $\Theta(E^{\otimes k}) = k\Theta(E)$. On applique alors (i) au fibré $(E^{\otimes k}, h^k)$. ■

Remarquons que la proposition précédente affirme que la dimension de l'espace vectoriel des sections holomorphes des puissances $E^{\otimes k}$ d'un fibré en droites sur une variété compacte de dimension n croît au plus comme k^n . Ce fait est bien classique et nous avons estimé la dimension en fonction d'intégrales de courbure. Des estimations bien plus précises, valables pour la dimension de tous les groupes de cohomologie seront données par les inégalités de Morse holomorphes de J.-P. Demailly dans le paragraphe suivant.

Démonstration du théorème de Siegel

L'argument est standard : soient $(f_i)_{1 \leq i \leq N}$ N fonctions méromorphes algébriquement indépendantes sur X . Notons D la somme des diviseurs des pôles des f_i et $\mathcal{O}(D)$ le fibré en droites associé. Rappelons que $H^0(X, \mathcal{O}(D))$ est isomorphe à l'espace vectoriel des fonctions méromorphes sur X vérifiant $\text{div}(f) + D \geq 0$. Alors, si P est un polynôme à coefficients complexes en N variables, de degré total inférieur ou égal à k , la fonction méromorphe $P(f_1, \dots, f_N)$ est une section holomorphe de $\mathcal{O}(kD)$, et comme les f_i sont algébriquement indépendantes, on a $\binom{N+k}{N}$ telles sections linéairement indépendantes. De là :

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}(D)^{\otimes k}) \geq \binom{N+k}{N} \sim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k^N}{N!}.$$

Avec la proposition, il vient $N \leq n$. ■

1.2.2 Éclatements et variétés de Moishezon

Nous commençons ce paragraphe par quelques rappels sur les éclatements. Ces derniers jouent un rôle important dans la théorie des variétés de Moishezon et la construction d'exemples explicites.

1.2.2.1 Éclatements

Une référence standard est à nouveau [G-H78].

Si X est une variété, et Y une sous-variété de X de codimension supérieure ou égale à 2, on construit une variété \tilde{X} appelée **éclatement de X le long de Y** en remplaçant les points de Y par l'espace des directions normales à Y dans X .

On note généralement $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ l'éclatement et $E := \pi^{-1}(Y)$ le **diviseur exceptionnel**. La sous-variété Y est appelée **centre de l'éclatement**. Par construction, π induit un isomorphisme

$$\pi|_{\tilde{X} \setminus E} : \tilde{X} \setminus E \rightarrow X \setminus Y.$$

Signalons que le centre de l'éclatement Y peut être réduit à un point.

La restriction de π au diviseur exceptionnel E munit E d'une structure de fibré en espaces projectifs au dessus de Y : plus précisément, E est isomorphe à $\mathbb{P}(N_{Y/X}^*)$ (projectivisé en droites du fibré normal $N_{Y/X}$ suivant la convention de Grothendieck). De plus, le fibré normal $N_{E/\tilde{X}} = \mathcal{O}(E)|_E$ est isomorphe au fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N_{Y/X}^*)}(-1)$.

Mentionnons aussi que le groupe de Picard de \tilde{X} est égal à $\pi^* \text{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathcal{O}(E)$. Par exemple, le fibré canonique est donné par

$$K_{\tilde{X}} = \pi^* K_X + (r - 1)\mathcal{O}(E)$$

où r est la codimension du centre de l'éclatement. Enfin, si Z est une sous-variété de X , non incluse dans le centre de l'éclatement Y , alors l'adhérence de $\pi^{-1}(Z \cap (X \setminus Y))$ dans \tilde{X} est appelée **transformée stricte** de Z . Si Z' est la transformée stricte de Z , alors

$$\pi|_{Z'} : Z' \rightarrow Z$$

est l'éclatement de $Z \cap Y$ dans Y .

Le résultat suivant, dû à A. Fujiki et S. Nakano [FuN72] donne un critère pour qu'un diviseur soit le diviseur exceptionnel d'un éclatement ; ce critère est une extension du critère de Castelnuovo sur les surfaces. Nous l'utiliserons souvent lors de la construction d'exemples explicites de variétés de Moishezon non projectives.

Théorème (A. Fujiki, S. Nakano, 1972) *Soit Z une variété et D une sous-variété de Z de codimension 1. On suppose que D est isomorphe à $\mathbb{P}(G)$ où G est un fibré vectoriel sur une variété Y ; on note $p : \mathbb{P}(G) \rightarrow Y$ la projection. On suppose enfin que $N_{D/Z}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(G)}(-1)$.*

Alors, il existe une variété Z' contenant Y comme sous-variété et une application $\pi : Z \rightarrow Z'$ de sorte que π soit l'éclatement de Z' le long de Y et que la restriction de π à D soit égale à p .

Notons qu'au vu de ce qui précède, les hypothèses faites sur le diviseur D dans cet énoncé sont évidemment nécessaires : ce critère remarquable montre qu'elles sont suffisantes.

1.2.2.2 Variétés de Moishezon

Le théorème de Siegel motive les définitions suivantes :

Définition *Un fibré en droites sur une variété compacte de dimension n est dit **gros** (**big** en anglais) si la dimension de l'espace vectoriel des sections holomorphes globales de ses puissances $E^{\otimes k}$ croît exactement comme k^n .*

Remarque De façon générale, pour un fibré en droites E sur une variété compacte X , il existe un entier $\kappa(E)$ tel que la dimension de $H^0(X, E^k)$ croît comme $k^{\kappa(E)}$. Cet entier (égal à $-\infty$ si tous les $H^0(X, E^k)$ sont nuls) est appelé **dimension de Kodaira-Iitaka**. Cet entier est inférieur ou égal à la dimension de X , et selon ce qui précède, le fibré E est gros si et seulement si $\kappa(E) = \dim X$.

Définition Une variété compacte de dimension n est **de Moishezon** si elle possède exactement n fonctions méromorphes algébriquement indépendantes ou, de façon équivalente, si elle possède un fibré en droites gros.

Les premiers exemples de variétés de Moishezon sont les variétés projectives. En particulier, toutes les courbes sont de Moishezon. En fait, le théorème suivant, difficile et fondamental, montre qu'une variété de Moishezon n'est pas très loin d'être projective. Ce résultat est dû à B. Moishezon [Moi67] :

Théorème (B. Moishezon, 1967) Une variété compacte est de Moishezon si et seulement si elle peut être rendue projective après un nombre fini d'éclatements de centres lisses. On peut même choisir les centres projectifs.

Remarque Mentionnons dès à présent que ce théorème ne donne aucune méthode pour choisir les sous-variétés le long desquelles il faut éclater. Ce problème figure dans une liste de 100 problèmes ouverts en géométrie établie par S. T. Yau [Yau93]. Nous donnerons (modestement) quelques réponses dans cette direction dans la deuxième partie de cette thèse.

Une conséquence du théorème précédent est le théorème de Chow-Kodaira : une surface complexe compacte lisse est de Moishezon si et seulement si elle est projective. En effet, on ne peut qu'éclater des points en dimension 2. Or, de façon générale, si X est une variété compacte et si \tilde{X} est la variété X éclatée au point x , alors X est projective si et seulement si \tilde{X} l'est (voir par exemple [Kle66]).

Ceci explique le fait que tous les exemples de variétés de Moishezon qui figurent dans notre travail sont de dimension supérieure ou égale à 3. Le premier exemple de variété de Moishezon non projective a été construit par H. Hironaka (voir par exemple [Har77]). Nous donnons deux constructions dues à I. Nakamura et K. Oguiso à la fin de ces préliminaires.

1.3 Les inégalités de Morse de J.-P. Demailly

Nous rappelons ici les inégalités de Morse holomorphes de J.-P. Demailly : on renvoie à [Dem85] pour la démonstration de ce résultat.

Dans ce qui suit, X désigne une variété compacte de dimension n et (E, h) un fibré en droites hermitien sur X . Au couple (E, h) , on associe pour tout entier q compris entre 0 et n l'ouvert $X(q, E)$ formé des points x de X pour lesquels $\Theta(E)(x)$ possède exactement q valeurs propres strictement négatives et $n - q$ valeurs propres strictement positives ; finalement on pose $X(\leq q, E) = X(0, E) \cup \dots \cup X(q, E)$.

Les inégalités de Morse holomorphes donnent une estimation des groupes de cohomologie à valeurs dans les puissances tensorielles $E^{\otimes k}$ en fonction d'intégrales de courbure sur X .

L'énoncé précis est le suivant :

Théorème (J.-P. Demailly, 1985) Pour tout q compris entre 0 et n , et si F est un fibré vectoriel holomorphe de rang r sur X , on a :

(i) $\sum_{j=0}^q (-1)^{q-j} \dim H^j(X, E^k \otimes F) \leq r \frac{k^n}{n!} \int_{X(\leq q, E)} (-1)^q \Theta(E)^n + o(k^n)$ (avec égalité si $q = n$),

(ii) $\dim H^q(X, E^k \otimes F) \leq r \frac{k^n}{n!} \int_{X(q, E)} (-1)^q \Theta(E)^n + o(k^n)$.

Le point (i) est désigné sous le nom plus précis d'inégalités de Morse fortes, alors que le point (ii), qui est une conséquence immédiate de (i), est désigné sous le nom d'inégalités de Morse faibles.

Ces inégalités ont de nombreuses applications dont certaines très récentes : elles sont utilisées dans les travaux de J.-P. Demailly et Y.-T. Siu en direction de la conjecture de Fujita [Dem94], [Siu94].

En général, ces inégalités peuvent se substituer aux théorèmes d'annulation lorsque la signature de la forme de courbure n'est pas constante. En particulier, J.-P. Demailly les a utilisées initialement pour renforcer un résultat de Y.T. Siu donnant un critère analytique suffisant pour qu'une variété soit de Moishezon. Ces résultats fournissent la solution à la conjecture de H. Grauert et O. Riemenschneider [GrR70] :

Théorème (J.-P. Demailly, Y.T. Siu, 1985) *Une variété compacte X est de Moishezon dès que X possède un fibré E en droites muni d'une métrique hermitienne lisse dont la forme de courbure $\Theta(E)$ vérifie l'une des conditions suivantes :*

(i) $\Theta(E)$ est partout semi-positive et définie positive en au moins un point ("critère de Siu"),

(ii) $\int_{X(\leq 1, E)} \Theta(E)^n > 0$ ("critère de Demailly").

Les deux énoncés découlent des inégalités de Morse : elles impliquent dans les deux cas que le fibré E est gros. Avant de commenter ce résultat, rappelons qu'un fibré en droites E sur une variété compacte X est dit **numériquement effectif** (en abrégé **nef**) si pour toute métrique hermitienne ω sur X et pour tout $\varepsilon > 0$, le fibré E possède une métrique lisse h_ε telle que $\Theta_{h_\varepsilon}(E) \geq -\varepsilon\omega$. Cette notion a été introduite par J.-P. Demailly, T. Peternell et M. Schneider [DPS94] et admet une formulation équivalente sur les variétés projectives : sur une variété projective X , un fibré en droites est nef si et seulement si son intersection avec toute courbe de X est semi-positive. Sur une variété quelconque, il peut ne pas y avoir de courbes, cependant il y en a "suffisamment" sur une variété de Moishezon et Mihai Paun a étendu le résultat précédent à ces dernières : *sur une variété de Moishezon, un fibré en droites est nef si et seulement si son intersection avec toute courbe est semi-positive* [Pau95].

Remarque-exemple Un fibré en droites satisfaisant au critère de Siu est simultanément gros et nef. Par ailleurs, des exemples de variétés de Moishezon satisfaisant les critères (i) et (ii) sont donnés par les variétés de Moishezon qui admettent un morphisme génériquement fini vers une variété projective.

1.4 Exemples explicites

Nous donnons dans ce paragraphe deux constructions, l'une utilisée par I. Nakamura [Nak87] et J. Kollár [Kol91] et l'autre due à K. Oguiso. Nous étudions en détail la première et expliquons plus brièvement celle de K. Oguiso. Ces constructions nous permettent de montrer qu'aucun des deux critères analytiques précédents pour qu'une variété soit de Moishezon n'est nécessaire : ces énoncés n'admettent donc pas de réciproque dans le cadre des fibrés hermitiens à métrique lisse.

1.4.1 La première construction

La construction qui suit exhibe une famille de variétés de dimension 3 complexe dépendant d'un paramètre entier m . L'origine de cette construction n'est pas très claire ; elle est utilisée dans [Nak87] et mentionnée dans [Kol91] §5. Une des motivations de J. Kollár, lorsqu'il mentionne cet exemple, est de construire une variété de Moishezon, dont le groupe de Picard est \mathbb{Z} et dont le générateur gros du groupe de Picard est d'auto-intersection négative. En particulier, ce générateur n'est pas nef.

1.4.1.1 Construction explicite

La construction est très simple : elle consiste à éclater \mathbb{P}^3 le long d'une courbe contenue dans une quadrique, et à contracter lorsque ceci est possible la transformée stricte de la quadrique sur une courbe rationnelle lisse.

Soit donc $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^3$ une quadrique lisse, donnée par exemple par l'équation homogène $xy = zt$, où $[x : y : z : t]$ sont les coordonnées homogènes sur \mathbb{P}^3 . La quadrique \mathcal{Q} est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et nous notons

$$L_1 = \{*\} \times \mathbb{P}^1 \text{ et } L_2 = \mathbb{P}^1 \times \{*\}$$

les générateurs de $H_2(\mathcal{Q}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2$. On a évidemment

$$L_i \cdot L_i = 0 \text{ et } L_1 \cdot L_2 = 1.$$

De plus, tout diviseur D de \mathcal{Q} est numériquement caractérisé par un couple d'entiers (a, b) donné par l'intersection de D avec L_1 et L_2 :

$$(a, b) = (D \cdot L_1, D \cdot L_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

Ce couple est appelé le type de D . Par exemple, le diviseur canonique $K_{\mathcal{Q}}$ est de type $(-2, -2)$.

Affirmation *Pour tous n et m entiers positifs, il existe une courbe lisse $C_{n,m}$ incluse dans \mathcal{Q} et de type (n, m) . Une telle courbe est de genre $g_{n,m} = (n-1)(m-1)$ et de degré $n+m$.*

Soit $C_{n,m}$ une telle courbe. Nous éclatons alors \mathbb{P}^3 le long de $C_{n,m}$: on obtient une variété projective \tilde{X} , et un morphisme

$$\pi_1 : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^3.$$

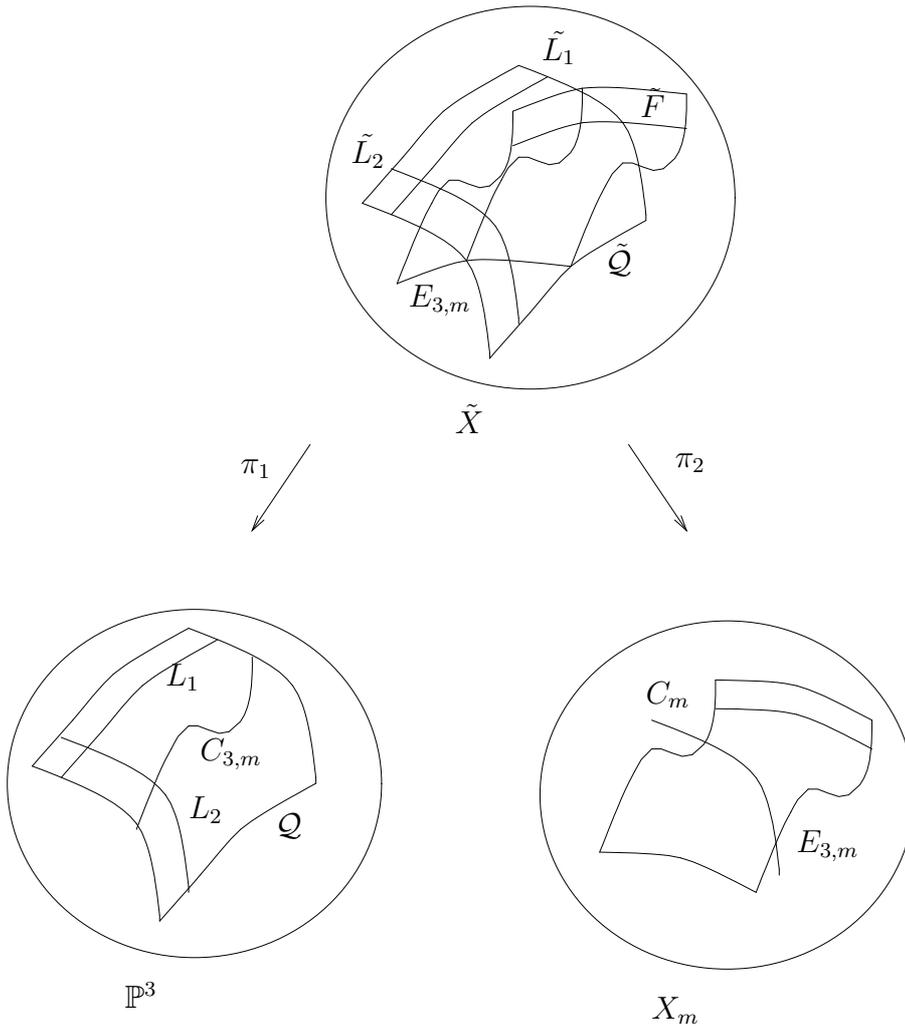
Notons $E_{n,m}$ le diviseur exceptionnel de l'éclatement ; il est isomorphe à $\mathbb{P}(N_{C_{n,m}/\mathbb{P}^3}^*)$. Comme le groupe de Picard de \mathbb{P}^3 est \mathbb{Z} , celui de \tilde{X} est \mathbb{Z}^2 . Si \tilde{Q} désigne la transformée stricte de Q et \tilde{L}_i celle de L_i , alors \tilde{Q} et \tilde{L}_i sont respectivement isomorphes à Q et L_i car $C_{n,m}$ est incluse dans Q . De plus, le type du fibré normal $N_{\tilde{Q}/\tilde{X}}$ de \tilde{Q} dans \tilde{X} est donné par l'affirmation suivante que nous démontrons plus loin :

Affirmation On a $N_{\tilde{Q}/\tilde{X}} \cdot \tilde{L}_1 = 2 - n$ et $N_{\tilde{Q}/\tilde{X}} \cdot \tilde{L}_2 = 2 - m$.

Comme cas particulier de l'affirmation précédente, considérons le cas où $n = 3$. La restriction à \tilde{L}_1 du fibré $N_{\tilde{Q}/\tilde{X}}$ est alors isomorphe au fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$. Par le critère de contraction de Fujiki-Nakano, il existe donc une variété X_m et une application

$$\pi_2 : \tilde{X} \rightarrow X_m$$

de sorte que π_2 soit l'éclatement d'une courbe lisse rationnelle C_m , de fibré normal projectivement trivial (égal à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m)^{\oplus 2}$) tel que le diviseur exceptionnel de π_2 est exactement \tilde{Q} . Evidemment, X_m est biméromorphiquement équivalente à \mathbb{P}^3 donc est de Moishezon. De plus, le groupe de Picard de X_m est \mathbb{Z} .



Avant d'étudier plus en détail la variété X_m , démontrons les deux affirmations nécessaires à sa construction.

Démonstration des affirmations

L'existence de $C_{n,m}$ résulte du fait que $\mathcal{O}(n, m) = \text{pr}_1^* \mathcal{O}(n) \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}(m)$ est très ample sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Enfin, le calcul du genre est donné par la formule classique

$$2g_{n,m} - 2 = C_{n,m} \cdot (C_{n,m} + K_{\mathcal{Q}}).$$

Ici,

$$C_{n,m} \cdot C_{n,m} = 2nm \text{ et } C_{n,m} \cdot K_{\mathcal{Q}} = -2(n + m).$$

Ceci démontre la première affirmation. ■

Pour la deuxième, la suite exacte

$$0 \rightarrow T\tilde{\mathcal{Q}} \rightarrow T\tilde{X}|_{\tilde{\mathcal{Q}}} \rightarrow N_{\tilde{\mathcal{Q}}/\tilde{X}} \rightarrow 0$$

donne $N_{\tilde{\mathcal{Q}}/\tilde{X}} = K_{\tilde{\mathcal{Q}}} - K_{\tilde{X}|_{\tilde{\mathcal{Q}}}}$ où $K_{\tilde{X}} = \pi_1^* K_{\mathbb{P}^3} + \mathcal{O}(E_{n,m})$. De là :

$$\begin{aligned} N_{\tilde{\mathcal{Q}}/\tilde{X}} \cdot \tilde{L}_i &= K_{\tilde{\mathcal{Q}}} \cdot \tilde{L}_i - \pi_1^* K_{\mathbb{P}^3} \cdot \tilde{L}_i - \mathcal{O}(E_{n,m}) \cdot \tilde{L}_i \\ &= K_{\mathcal{Q}} \cdot L_i - K_{\mathbb{P}^3} \cdot L_i - C_{n,m} \cdot L_i. \end{aligned}$$

Or, $K_{\mathcal{Q}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)|_{\mathcal{Q}}$ et $K_{\mathbb{P}^3} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)$. Ceci conclut le calcul. ■

1.4.1.2 Deux propriétés de X_m

Nous montrons ici que les critères de Demailly et Siu ne sont pas satisfaits pour la variété de Moishezon X_m .

Théorème A *La variété X_m vérifie les deux propriétés suivantes :*

(i) *si m est strictement plus grand que 3, X_m ne possède pas de fibré en droites à la fois gros et nef, et donc ne satisfait pas au critère de Siu,*

(ii) *si m est strictement plus grand que 5, X_m ne possède pas de fibré en droites E muni d'une métrique hermitienne lisse h telle que la forme de courbure $\Theta(E)$ vérifie*

:

$$\int_{X(\leq 1, E)} \Theta(E)^3 > 0.$$

L'affirmation (i) est due à J. Kollár, nous en donnons une preuve élémentaire, tandis que (ii) est nouveau à notre connaissance.

Démonstration de (i)

Soit E un fibré holomorphe de rang 1 sur X_m , que l'on suppose non trivial (le fibré trivial, bien que nef, n'est pas gros !). Il existe alors des entiers k et l tels que :

$$\pi_2^* E = \pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(l) - \mathcal{O}(kE_{3,m}).$$

Comme \tilde{L}_1 est une fibre de π_2 , on a : $\pi_2^* E \cdot \tilde{L}_1 = 0$. On en déduit la relation $l = 3k$ et donc

$$\pi_2^* E = k(3\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) - \mathcal{O}(E_{3,m})),$$

où k est un entier non nul. En particulier, si \tilde{F} est une fibre non triviale de π_1 dans \tilde{X} , on a les nombres d'intersection suivants :

$$\begin{cases} \pi_2^* E \cdot \tilde{L}_2 = k(3 - m) \\ \pi_2^* E \cdot \tilde{F} = k \end{cases}$$

On en déduit que pour $m > 3$, le fibré $\pi_2^* E$ n'est pas nef (sinon son intersection avec toute courbe serait positive ou nulle), et donc E n'est pas nef. ■

Démonstration de (ii)

Notons dans la suite $\mathcal{O}_{X_m}(1)$ le générateur du groupe de Picard de X_m tel que $\pi_2^* \mathcal{O}_{X_m}(1) = \pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3) - \mathcal{O}(E_{3,m})$.

Affirmation *Le fibré canonique K_{X_m} est égal à $\mathcal{O}_{X_m}(-2)$.*

En effet, on a

$$K_{\tilde{X}} = \pi_2^* K_{X_m} + \mathcal{O}(\tilde{Q}) = \pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) + \mathcal{O}(E_{3,m})$$

par construction. Or,

$$\mathcal{O}(\tilde{Q}) = \pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) - \mathcal{O}(E_{3,m}),$$

d'où l'affirmation.

Affirmation *Les espaces de sections holomorphes $H^0(X_m, \mathcal{O}_{X_m}(k))$ sont nuls pour tout entier $k < 0$ et le fibré $\mathcal{O}_{X_m}(1)$ est gros.*

Par invariance biméromorphe des plurigenres, les groupes $H^0(X_m, \mathcal{O}_{X_m}(k))$ sont nuls pour tout entier k strictement négatif et pair. Comme X_m est de Moishezon de groupe de Picard \mathbb{Z} , X_m possède un fibré gros qui n'est donc pas $\mathcal{O}_{X_m}(-1)$, c'est donc que $\mathcal{O}_{X_m}(1)$ est gros et que les $H^0(X_m, \mathcal{O}_{X_m}(k))$ sont nuls pour tout entier k strictement négatif. Ceci démontre l'affirmation.

Par dualité de Serre, on déduit des deux affirmations précédentes que *les groupes de cohomologie $H^3(X_m, \mathcal{O}_{X_m}(k))$ sont nuls pour tout entier $k > -2$.*

Nous sommes maintenant en mesure de passer à la preuve de (ii) proprement dit : raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathcal{O}_{X_m}(1)$ possède une telle métrique. D'après les inégalités de Morse holomorphes de J.-P. Demailly appliquées pour $q = 1$ au fibré hermitien $(\mathcal{O}_{X_m}(1), h)$, on a :

$$\dim H^0(X_m, \mathcal{O}_{X_m}(k)) - \dim H^1(X_m, \mathcal{O}_{X_m}(k)) \geq \frac{1}{6} \left(\int_{X(\leq 1, E)} \Theta(E)^3 \right) k^3 + o(k^3).$$

Comme les groupes de cohomologie $H^3(X_m, \mathcal{O}_{X_m}(k))$ sont nuls pour tout entier $k > -2$, on a successivement :

$$\begin{aligned}
c_1(\mathcal{O}_{X_m}(1))^3 \frac{k^3}{6} + o(k^3) &= \sum_{i=0}^3 (-1)^i \dim H^i(X_m, \mathcal{O}_{X_m}(k)) \\
&= \sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim H^i(X_m, \mathcal{O}_{X_m}(k)) \\
&\geq \dim H^0(X_m, \mathcal{O}_{X_m}(k)) - \dim H^1(X_m, \mathcal{O}_{X_m}(k)) \\
&\geq \left(\int_{X(\leq 1, E)} \Theta(E)^3 \right) \frac{k^3}{6} + o(k^3).
\end{aligned}$$

On en déduit que $c_1(\mathcal{O}_{X_m}(1))^3 \geq \int_{X(\leq 1, E)} \Theta(E)^3 > 0$. Il suffit donc de montrer pour obtenir la contradiction cherchée que pour $m > 5$, on a $c_1(\mathcal{O}_{X_m}(1))^3 \leq 0$. Or, cette dernière quantité est aisément calculable :

Affirmation *La quantité $c_1(\mathcal{O}_{X_m}(1))^3$ est égale à $6 - m$.*

En effet

$$\begin{aligned}
c_1(\mathcal{O}_{X_m}(1))^3 &= c_1(\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3) - \mathcal{O}(E_{3,m}))^3 \\
&= c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3))^3 - 3 \int_{E_{3,m}} c_1(\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3))^2 \\
&\quad + 3 \int_{\tilde{X}} c_1(\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)) \wedge c_1(\mathcal{O}(E_{3,m}))^2 - E_{3,m}^3.
\end{aligned}$$

On a évidemment $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3))^3 = 27$ et $\int_{E_{3,m}} c_1(\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3))^2 = 0$.

Pour les deux termes restants, on commence par remarquer que $c_1(\mathcal{O}(E_{3,m}))|_{E_{3,m}}$ est égale à $-\xi$ où $\xi = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N_{C_{3,m}/\mathbb{P}^3}^*)}(1))$ désigne la classe fondamentale de l'éclatement.

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{X}} c_1(\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)) \wedge c_1(\mathcal{O}(E_{3,m}))^2 &= - \int_{E_{3,m}} \pi_1^* c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)) \wedge \xi \\
&= - \int_{C_{3,m}} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)) \\
&= -3(3 + m),
\end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que $C_{3,m}$ est de degré $3 + m$ dans \mathbb{P}^3 (rappelons que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|_Q = \mathcal{O}(1, 1)$). Finalement, il reste à calculer $E_{3,m}^3$. Pour cela, rappelons que ξ vérifie la formule fondamentale suivante :

$$\xi^2 - \pi_1^* c_1(N_{C_{3,m}/\mathbb{P}^3}^*) \xi + \pi_1^* c_2(N_{C_{3,m}/\mathbb{P}^3}^*) = 0$$

qui se réduit ici à $\xi^2 - \pi_1^* c_1(N_{C_{3,m}/\mathbb{P}^3}^*) \xi = 0$.

Il vient alors $E_{3,m}^3 = \int_{E_{3,m}} \xi^2 = \int_{E_{3,m}} \pi_1^* c_1(N_{C_{3,m}/\mathbb{P}^3}^*) \xi = \int_{C_{3,m}} c_1(N_{C_{3,m}/\mathbb{P}^3}^*)$.

Or la suite exacte :

$$0 \rightarrow TC_{3,m} \rightarrow T\mathbb{P}_{|C_{3,m}}^3 \rightarrow N_{C_{3,m}/\mathbb{P}^3} \rightarrow 0$$

donne de suite :

$$\int_{C_{3,m}} c_1(N_{C_{3,m}/\mathbb{P}^3}^*) = \int_{C_{3,m}} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)) - 2g_{3,m} + 2 = -6 - 8m.$$

Il reste finalement :

$$c_1(\mathcal{O}_{X_m}(1))^3 = 27 - 27 - 9m + 6 + 8m = 6 - m.$$

Ceci achève la preuve de l'affirmation et par suite celle du théorème. ■

1.4.2 La construction de K. Oguiso

Pour ce paragraphe, la référence est [Ogu94]. Dans cet article, K. Oguiso construit une variété de Moishezon non projective, de dimension 3 et qui est de plus de Calabi-Yau : ceci signifie que cette variété est simplement connexe et à fibré canonique trivial. Mettons en garde le lecteur sur l'usage fait ici de l'expression Calabi-Yau. En effet, la variété en question n'est pas kählérienne. Rappelons plus généralement qu'un théorème de B. Moishezon affirme que *toute variété de Moishezon kählérienne est projective* (voir le "survey" de T. Peternell [Pet95] pour une démonstration rapide de ce résultat).

Le résultat de K. Oguiso est le suivant :

Théorème (K. Oguiso, 1994) *Il existe une variété de Moishezon Y , de dimension 3 et de Calabi-Yau telle que $H^2(Y, \mathbb{Z}) = \text{Pic}(Y) = \mathbb{Z} \cdot L$ où L satisfait $L^3 := c_1(L)^3 = 0$. Autrement dit, la forme cubique d'intersection sur $H^2(Y, \mathbb{Z})$ est identiquement nulle.*

Nous donnons dans la dernière partie de cette thèse une construction, différente de celle d'Oguiso, permettant de retrouver ce résultat. Dans [Ogu94], K. Oguiso obtient ce théorème comme conséquence du résultat suivant :

Théorème (K. Oguiso, 1994) *Soit d un entier positif. Alors il existe une variété projective X_d de dimension 3, intersection complète d'une quadrique et d'une quartique dans \mathbb{P}^5 et contenant une courbe rationnelle lisse C_d de degré d dont le fibré normal N_{C_d/X_d} est $\mathcal{O}_{C_d}(-1)^{\oplus 2}$.*

Montrons que ce dernier résultat implique le premier.

Soit donc X_d comme ci dessus et soit \tilde{X}_d la variété projective obtenue en éclatant X_d le long de la courbe C_d . Un argument identique à celui développé dans la construction précédente assure que l'on peut contracter le diviseur exceptionnel $E \simeq C_d \times \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ dans l'autre direction : on note Y_d la variété obtenue. Par construction, Y_d est de Moishezon, de Calabi-Yau et son groupe de Picard est \mathbb{Z} . Enfin, si $\mathcal{O}_{Y_d}(1)$ est le générateur gros de $\text{Pic}(Y_d)$, on montre comme précédemment que $c_1(\mathcal{O}_{Y_d}(1))^3 = 8 - d^3$. Le premier résultat est démontré en choisissant $d = 2$ i.e $Y := Y_2$.

Comme pour les variétés X_m précédemment construites, *les variétés Y_d pour d supérieur ou égal à 2 ne satisfont pas les critères de Siu et Demailly.*

Remarque Les variétés Y_d ont été obtenues après une transformation birationnelle classique en théorie de Mori appelée “flop”. Nous revenons sur ce type de construction dans la deuxième partie de cette thèse.

1.4.3 Quelques commentaires

Ces préliminaires illustrent une partie des motivations de cette thèse. En effet, alors que les deux constructions précédentes montrent que les critères de J.-P. Demailly et Y.-T. Siu ne sont pas nécessaires dans le cadre des fibrés hermitiens munis d’une métrique \mathcal{C}^∞ , nous montrons dans le deuxième chapitre de cette thèse que ces critères deviennent nécessaires et suffisants dans le cadre plus souple des métriques singulières. Pour cela, nous étendons les inégalités de Morse en autorisant un certain type de singularités aux métriques des fibrés considérés.

Remarquons ensuite que les constructions précédentes donnent des exemples de variétés de Moishezon de dimension 3, de groupe de Picard \mathbb{Z} avec respectivement $-K_X$ gros et K_X trivial. Une des motivations du dernier chapitre de cette thèse est de répondre à la question suivante : peut-on construire des exemples analogues avec K_X gros ? Un résultat de J. Kollár montre que ce n’est pas possible en dimension 3 : nous montrons en revanche que de tels exemples existent en dimension supérieure. Ceci nous conduira naturellement à étudier la structure du centre de l’éclatement projectif donné abstraitement par le théorème de Moishezon lorsque la variété devient projective après un éclatement seulement.

Chapitre 2

Inégalités de Morse singulières

Le but central de ce chapitre est d'étendre les inégalités de Morse holomorphes de J.-P. Demailly au cas d'un fibré en droites E muni d'une métrique singulière au dessus d'une variété complexe compacte X . Ces inégalités nous permettent ensuite de caractériser analytiquement les variétés de Moishezon. Enfin, nous donnons une version algébrique singulière de nos inégalités de Morse.

2.1 Métriques singulières

La notion de métrique singulière pour des fibrés en droites a été introduite par J.-P. Demailly, A. Nadel et H. Tsuji. Nous commençons ce paragraphe en rappelant les premières définitions et les exemples classiques. Une référence est [Dem90].

2.1.1 Premières définitions

Soit X une variété et E un fibré en droites sur X . Une métrique hermitienne **singulière** sur E est donnée localement sur un ouvert trivialisant U_α par

$$h(\xi_x) = \|\xi_x\|_h := |\xi| \exp(-\varphi_\alpha(x))$$

où la fonction réelle φ_α est seulement supposée **localement intégrable**.

Cette dernière hypothèse suffit à donner encore un sens à la notion de courbure d'un tel fibré : en effet, on pose toujours $\Theta(E) := \frac{i}{\pi} \partial\bar{\partial}\varphi_\alpha$ où le $\partial\bar{\partial}$ est pris au sens des distributions. L'objet ainsi défini n'est plus une forme \mathcal{C}^∞ mais un **courant** (appelé courant de courbure) de bi-degré $(1, 1)$. Le lemme de Dolbeault-Grothendieck étant vrai pour les courants, la cohomologie de De Rham est calculable aussi bien avec les courants qu'avec les formes et la classe de cohomologie du courant de courbure $\Theta(E)$ est égale comme dans le cas lisse à la première classe de Chern du fibré E .

Exemples Les deux exemples suivants jouent un rôle essentiel.

(i) Si $D = \sum \alpha_j D_j$ est un diviseur de X et si g_j est l'équation locale de D_j sur un ouvert U_α , alors la fonction $\varphi_\alpha = \sum \alpha_j \log |g_j|$ définit une métrique singulière naturelle sur le fibré en droites $\mathcal{O}(D)$ associé au diviseur D .

Pour cette métrique, l'équation de Lelong-Poincaré est $\Theta(\mathcal{O}(D)) = [D]$ où $[D]$ désigne le courant d'intégration sur le diviseur D .

Remarquons que dans le cas où X est une courbe complexe et E le fibré tangent de X , la construction précédente donne une métrique plate avec des masses de Dirac de courbure : ce type de métrique est bien connu en géométrie riemannienne sous le nom de **métrique plate à singularités coniques**.

(ii) Soit E un fibré en droites sur une variété X et soient s_1, \dots, s_p des sections de $E^{\otimes k}$. Alors,

$$\|\xi_x\|^2 := \left(\frac{|\theta_\alpha(\xi)|^2}{|\theta_\alpha(s_1(x))|^2 + \dots + |\theta_\alpha(s_p(x))|^2} \right)^{1/k}$$

où θ_α est une trivialisatoin locale de E et $E^{\otimes k}$, définit une métrique singulière sur le fibré E . La fonction φ_α est ici $\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{2k} \log(|\theta_\alpha(s_1(x))|^2 + \dots + |\theta_\alpha(s_p(x))|^2)$.

Comme dans le cas \mathcal{C}^∞ , nous désirons pouvoir donner un sens à l'expression "être à courbure positive ou strictement positive" pour un fibré en droites muni d'une métrique singulière.

Pour cela, rappelons qu'un courant T de bi-degré $(1, 1)$ est **positif** si pour toutes formes $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ de type $(1, 0)$ et \mathcal{C}^∞ à support compact, on a :

$$\langle T, i\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge i\alpha_{n-1} \wedge \bar{\alpha}_{n-1} \rangle \geq 0,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est la dualité entre les courants et les formes. On note alors $T \geq 0$.

De même, on dira qu'un courant T de bi-degré $(1, 1)$ est **strictement positif** s'il existe une métrique ω hermitienne \mathcal{C}^∞ sur X telle que $T - \omega$ est un courant positif. On note dans ce cas $T > 0$.

Nous introduisons alors la définition suivante :

Définition *Un fibré en droites muni d'une métrique singulière est positif (respectivement strictement positif) si le courant de courbure associé est positif (respectivement strictement positif).*

En reprenant les notations de l'exemple ci-dessus, le fibré en droites $\mathcal{O}(D)$ muni de sa métrique singulière est positif si et seulement si le diviseur D est effectif (i.e tous les coefficients α_j sont positifs ou nuls). L'exemple (ii) définit toujours un courant de courbure positif car une fonction de la forme $\varphi = \log \sum |f_j|^2$ où les f_j sont des fonctions holomorphes est plurisousharmonique (en abrégé **psh**).

2.1.2 Faisceaux d'idéaux multiplicateurs de Nadel

L'étude d'un fibré en droites muni d'une métrique singulière est facilitée par l'utilisation d'un outil pertinent associé aux singularités de la métrique : il s'agit d'un faisceau d'idéaux introduit par A. Nadel.

Définition *Soit (E, h) un fibré en droites sur une variété X . On appelle "faisceau multiplicateur de Nadel" le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}(h)$ des germes de fonctions holomorphes L^2 par rapport au poids de la métrique singulière, i.e l'ensemble des germes*

$f \in \mathcal{O}_{X,x}$ tels que $|f|^2 \exp(-2\varphi)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue dans des coordonnées locales au voisinage de x .

Plus généralement, si φ est une fonction réelle sur un ouvert Ω , nous notons aussi $\mathcal{I}(\varphi)$ le faisceau des germes $f \in \mathcal{O}_\Omega$ tels que $|f|^2 \exp(-2\varphi)$ est localement intégrable.

La propriété essentielle satisfaite par ce faisceau d'idéaux, due à Nadel, est que si φ est une fonction plurisousharmonique, alors $\mathcal{I}(\varphi)$ est un faisceau cohérent.

Avant de donner des exemples, mentionnons le résultat suivant qui généralise le théorème de Kawamata-Viehweg : il s'agit du théorème d'annulation de Nadel [Nad89] [Dem89].

Théorème d'annulation de Nadel Soit X une variété kählérienne compacte, et E un fibré en droites muni d'une métrique singulière à courbure strictement positive. Alors, pour tout $q \geq 1$, on a :

$$H^q(X, \mathcal{O}(E + K_X) \otimes \mathcal{I}(h)) = 0.$$

Ce résultat montre que pour généraliser un théorème d'annulation dans le contexte des fibrés en droites munis de métrique singulière, une bonne méthode consiste à "tordre" la cohomologie du fibré par le faisceau de Nadel.

Donnons quelques exemples de faisceaux multiplicateurs, qui bien que très simples jouent un rôle important.

Exemples

(i) Soit φ une fonction réelle sur un ouvert Ω de \mathbb{C}^n contenant l'origine. Si φ est minorée au voisinage de l'origine, alors pour tout x proche de 0, on a clairement $\mathcal{I}(\varphi)_x = \mathcal{O}_{\Omega,x}$. En particulier, si φ est continue sur Ω , alors $\mathcal{I}(\varphi) = \mathcal{O}_\Omega$.

(ii) Plaçons nous dans \mathbb{C}^n au voisinage de l'origine et, pour $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des réels positifs et k un entier naturel, posons :

$$\varphi_k(z) = \frac{k}{2} \log(|z_1|^{2\alpha_1} + \dots + |z_p|^{2\alpha_p}).$$

Alors, $\mathcal{I}(\varphi_k)_{\mathbb{C}^n,0}$ est $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ -engendré par les $\prod_{j=1}^p z_j^{\beta_j}$ tels que :

$$\sum_{j=1}^p \frac{\beta_j + 1}{\alpha_j} > k.$$

En particulier, si tous les α_i sont égaux à α , alors $\mathcal{I}(\varphi_k)_{\mathbb{C}^n,0}$ est $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ -engendré par les $\prod_{j=1}^p z_j^{\beta_j}$ où

$$\sum_{j=1}^p \beta_j \geq [k\alpha - p] + 1$$

($\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x). Autrement dit, $\mathcal{I}(\varphi_k) = \mathcal{I}_Y^{\lfloor k\alpha \rfloor - p + 1}$ où Y est la sous-variété $\{z_1 = \dots = z_p = 0\}$ et \mathcal{I}_Y son idéal annulateur.

(iii) Soit φ une fonction de la forme $\sum \alpha_j \log |g_j|$ où les α_j sont des réels positifs et où les fonctions holomorphes g_j sont telles que les $D_j := g_j^{-1}(0)$ soient des diviseurs irréductibles lisses se coupant transversalement (on dit alors que $D = \sum \alpha_j D_j$ est un diviseur **lisse à croisements normaux**). Dans ce cas, le faisceau multiplicateur $\mathcal{I}(\varphi)$ s'identifie au faisceau inversible de rang un $\mathcal{O}(-\sum_j \lfloor \alpha_j \rfloor D_j)$.

Démonstration

Le point (i) est trivial.

Pour (ii), il s'agit d'estimer l'intégrale suivante sur un voisinage de 0 :

$$I := \int_{D(0,\varepsilon)^n} \frac{|\sum a_\beta z_1^{\beta_1} \dots z_n^{\beta_n}|^2}{(|z_1|^{2\alpha_1} + \dots + |z_p|^{2\alpha_p})^k} d\lambda(z).$$

Le passage en coordonnées polaires $z_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ donne

$$I = (2\pi)^n \sum |a_\beta|^2 \int_{[0,\varepsilon]^n} \frac{\rho_1^{2\beta_1+1} \dots \rho_n^{2\beta_n+1}}{(|\rho_1|^{2\alpha_1} + \dots + |\rho_p|^{2\alpha_p})^k} d\rho_1 \dots d\rho_n,$$

puis

$$I = (2\pi)^n \sum |a_\beta|^2 \frac{\varepsilon^{2\beta_{p+1}+2} \dots \varepsilon^{2\beta_n+2}}{(2\beta_{p+1}+2) \dots (2\beta_n+2)} \int_{[0,\varepsilon]^p} \frac{\rho_1^{2\beta_1+1} \dots \rho_p^{2\beta_p+1}}{(\rho_1^{2\alpha_1} + \dots + \rho_p^{2\alpha_p})^k} d\rho_1 \dots d\rho_p.$$

Par le changement de variables $u_j = \rho_j^{\alpha_j}$, l'intégrale ci-dessus est égale à

$$\int_{[0,\varepsilon]^p} \frac{u_1^{((2\beta_1+2)/\alpha_1)-1} \dots u_p^{((2\beta_p+2)/\alpha_p)-1}}{(u_1^2 + \dots + u_p^2)^k} du_1 \dots du_p,$$

Par homogénéité, cette dernière intégrale converge si et seulement si l'intégrale

$$\int_0^\varepsilon \frac{t^{2\sum_{j=1}^p ((\beta_j+1)/\alpha_j) - p}}{t^{2k}} t^{p-1} dt$$

converge, soit $2\sum_{j=1}^p \frac{\beta_j+1}{\alpha_j} - p - 2k + p - 1 > -1$. Ceci donne bien la condition annoncée.

Pour le point (iii), il s'agit de déterminer le critère pour qu'une fonction de la forme

$$\frac{|f|^2}{|g_1|^{2\alpha_1} \dots |g_n|^{2\alpha_n}}$$

soit dans L_{loc}^1 . Comme les g_j fournissent des coordonnées locales, et si p_j désigne l'ordre d'annulation de f le long de $D_j = \{g_j = 0\}$, la condition nécessaire et suffisante est que $2p_j - 2\alpha_j > -2$, soit $p_j \geq \lfloor \alpha_j \rfloor$. Comme les sections du fibré $\mathcal{O}(-D_j)$ s'identifient aux fonctions holomorphes s'annulant à un ordre supérieur ou égal à un le long de D_j , le résultat en découle. ■

2.2 Inégalités de Morse singulières

Dans cette partie, nous énonçons et démontrons notre version singulière des inégalités de Morse holomorphes.

2.2.1 Énoncé du résultat principal

Dans tout ce qui suit, X désigne une variété compacte et (E, h) un fibré en droites sur X muni d'une métrique singulière.

A (E, h) , on associe pour tout entier k positif le faisceau d'idéaux de Nadel donné par la métrique singulière h^k du fibré E^k ; il s'agit ici du faisceau des germes de fonctions holomorphes f telles que $|f|^2 \exp(-2k\varphi)$ est L^1_{loc} (où $\exp(-\varphi)$ est le poids local de h). Nous notons ce faisceau $\mathcal{I}_k(h)$.

Pour des raisons qui apparaîtront plus loin, nous sommes contraints de n'accepter qu'un certain type de singularités, que nous appelons “**singularités analytiques**”. Plus précisément, nous faisons l'hypothèse suivante sur h (c'est-à-dire localement sur φ) :

Hypothèse (S) : la fonction φ s'écrit localement :

$$\varphi = \frac{c}{2} \log\left(\sum \lambda_j |f_j|^2\right) + \psi,$$

où les f_j sont holomorphes, les λ_j sont des fonctions réelles positives \mathcal{C}^∞ sans zéros communs, ψ est \mathcal{C}^∞ et c est un rationnel positif ou nul. Mentionnons que la somme $\sum \lambda_j |f_j|^2$ peut posséder une infinité de termes.

Cette hypothèse implique que la fonction φ est **quasi plurisousharmonique** (ce qui signifie que son hessien complexe est minoré par une $(1, 1)$ -forme à coefficients continus) et donc en particulier que le faisceau $\mathcal{I}_k(h)$ est un faisceau cohérent d'après le résultat de A. Nadel précédemment rencontré.

En terme de courbure, l'hypothèse (S) implique en particulier que le courant de courbure $\Theta(E) = \frac{i}{\pi} \partial\bar{\partial}\varphi$ est quasi positif (c'est-à-dire minoré par une $(1, 1)$ -forme à coefficients continus).

Remarque Signalons dès maintenant que cette hypothèse est “raisonnable” car c'est précisément par des fonctions ayant ce type de singularités que J.-P. Demailly approche une fonction quasi plurisousharmonique quelconque [Dem92]. Ceci aura une importance capitale dans les applications. Remarquons aussi que tous les exemples rencontrés jusqu'à présent satisfont l'hypothèse (S). Nous renvoyons ici au paragraphe 2.3.1 pour une discussion plus complète de l'origine de ce type de singularités autorisées.

Dans notre contexte, nous introduisons les notations suivantes :

Notations Le symbole $X(q, E)$ désigne l'ouvert de X formé des points x au voisinage desquels φ est bornée et $\Theta(E)(x)$ possède exactement q valeurs propres strictement

négatives et $n - q$ valeurs propres strictement positives ; finalement et comme dans le cas lisse $X(\leq q, E) = X(0, E) \cup \dots \cup X(q, E)$.

Notre résultat est le suivant :

Théorème B *Soit (E, h) à singularités analytiques sur une variété compacte X de dimension n et soit F un fibré de rang r sur X . Alors pour tout q compris entre 0 et n :*

$$(i) \sum_{j=0}^q (-1)^{q-j} \dim H^j(X, \mathcal{O}(E^k \otimes F) \otimes \mathcal{I}_k(h)) \leq r \frac{k^n}{n!} \int_{X(\leq q, E)} (-1)^q \Theta(E)^n + o(k^n),$$

(avec égalité si $q = n$),

$$(ii) \dim H^q(X, \mathcal{O}(E^k \otimes F) \otimes \mathcal{I}_k(h)) \leq r \frac{k^n}{n!} \int_{X(q, E)} (-1)^q \Theta(E)^n + o(k^n).$$

Comme dans le cas où la métrique est lisse, le point (ii) est conséquence immédiate du point (i).

Remarquons que comme dans le théorème d'annulation de Nadel, le phénomène nouveau par rapport au cas \mathcal{C}^∞ est la présence des faisceaux d'idéaux ; les groupes de cohomologie que nous estimons sont les groupes de cohomologie à valeurs dans les grandes puissances de E , tordues par la suite des faisceaux multiplicateurs naturellement associée aux singularités de la métrique.

Evidemment, si la métrique est lisse, nous retrouvons les inégalités de J.-P. Demailly car tous les $\mathcal{I}_k(h)$ sont égaux au faisceau structural \mathcal{O}_X . Cependant, mentionnons dès maintenant que notre démonstration repose sur les inégalités dans le cas \mathcal{C}^∞ !

2.2.2 Démonstration du théorème B

2.2.2.1 Plan de la preuve

La démarche suivie pour démontrer nos inégalités est la suivante :

a) après éclatement de X le long de sous-variétés définies par les singularités de h , on se ramène à un fibré muni d'une métrique lisse ; on peut alors appliquer les inégalités de Morse holomorphes dans le cas h lisse à la variété obtenue \tilde{X} ,

b) on relie les groupes de cohomologie sur \tilde{X} à ceux de X . Pour cela, nous étudions le comportement des faisceaux multiplicateurs par rapport aux éclatements en montrant que les dimensions des groupes de cohomologie associés sont asymptotiquement de même dimension.

2.2.2.2 Réduction au cas lisse

Commençons par expliquer la première partie de la preuve.

Pour cela, il est bon de remarquer que l'hypothèse (S) implique que les singularités de la métrique h sont localisées le long d'un ensemble analytique, défini localement par $\{x \mid \forall j, f_j(x) = 0\}$. Comme nous l'avons vu dans les exemples, cet ensemble analytique n'est pas nécessairement irréductible et ses composantes irréductibles sont en général de dimension quelconque.

La réduction au cas lisse consiste dans un premier temps à se ramener à une variété \tilde{X} , obtenue en éclatant X le long de centres lisses $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ de telle sorte que la métrique $\tilde{h} = \pi^*h$ sur le fibré $\tilde{E} = \pi^*E$ n'ait ses singularités qu'en codimension 1 (ou, de façon équivalente, de telle sorte que le faisceau $\tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{h})$ soit inversible).

Dans un deuxième temps, nous appliquerons les inégalités de Morse dans le cas lisse.

a) Désingularisation de $\mathcal{I}_k(h)$

Pour rendre les faisceaux $\mathcal{I}_k(h)$ localement libres, l'idée (classique) est d'éclater l'idéal "engendré par les f_j ". Cependant, une difficulté apparaît ici car la donnée des f_j est locale sur X et la notion d'idéal engendré par ces fonctions n'a donc pas de sens *a priori*. Nous avons cependant la proposition suivante :

Proposition *Il existe un faisceau d'idéaux global \mathcal{J} , qui coïncide avec la clôture intégrale du faisceau d'idéaux engendré par les f_j sur chaque ouvert où φ s'écrit comme dans l'hypothèse (S).*

Démonstration

En effet, c'est un fait bien connu (résultant par exemple du théorème de Briançon-Skoda [BSk74], voir aussi [L-T74]) que la clôture intégrale du faisceau d'idéaux engendré par les f_j est donnée par :

$$\mathcal{J}_x = \{f \in \mathcal{O}_{X,x} ; \exists C > 0, |f(z)| \leq C \exp(\frac{1}{c}\varphi(z)) \text{ au voisinage de } x\}.$$

Si maintenant φ_α et φ_β désignent les poids de la métrique sur des ouverts trivialisants U_α et U_β , alors sur l'intersection $U_\alpha \cap U_\beta$, on a $\varphi_\alpha = \varphi_\beta + O(1)$. La caractérisation ci-dessus implique donc bien que \mathcal{J} est défini globalement sur X . ■

Nous sommes en mesure de démontrer la proposition suivante :

Proposition *Sous les hypothèses précédentes, il existe une variété \tilde{X} et $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ une composée d'un nombre fini d'éclatements de centres lisses tels que le fibré $\tilde{E} := \pi^*E$ muni de la métrique singulière $\tilde{h} = \pi^*h$ de poids local $\exp(-\tilde{\varphi})$ vérifie la propriété suivante : pour tout $x_0 \in \tilde{X}$, il existe des coordonnées holomorphes w_1, \dots, w_n centrées en x_0 et une fonction $\tilde{\psi}$ de classe \mathcal{C}^∞ telles que :*

$$\tilde{\varphi}(w) = c \sum_j a_j \log |g_j(w)| + \tilde{\psi}(w)$$

où les a_j sont des entiers positifs ou nuls et où les g_j sont irréductibles dans $\mathcal{O}_{\tilde{X},x_0}$ et définissent un diviseur lisse à croisements normaux.

Démonstration

Éclatons l'idéal \mathcal{J} de sorte que l'image inverse $\pi^{-1}\mathcal{J}.\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ soit un faisceau inversible. Par le théorème d'aplatissement d'Hironaka [Hir75], on peut dominer cet éclatement par une variété \tilde{X} obtenue par une suite d'éclatements de centres lisses dans X , et l'image inverse de \mathcal{J} est toujours inversible !

Mais alors, la métrique image réciproque sur π^*E est donnée par

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi} &= \frac{c}{2} \log(\sum (\lambda_j \circ \pi) |f_j \circ \pi|^2) + \psi \circ \pi \\
&= \frac{c}{2} \log(|g|^2) + \frac{c}{2} \log(\sum (\lambda_j \circ \pi) |h_j|^2) + \psi \circ \pi \\
&= \frac{c}{2} \log(|g|^2) + \tilde{\psi},
\end{aligned}$$

où on a noté g le générateur local du faisceau d'idéaux engendré par les $f_j \circ \pi$. Si la décomposition de g en facteurs irréductibles dans $\mathcal{O}_{\tilde{X}, x_0}$ s'écrit : $g = \prod_j g_j^{a_j}$, on a le résultat après application du théorème de désingularisation d'Hironaka [Hir64] pour rendre le diviseur défini par les g_j à croisements normaux. ■

Dans tout ce qui suit, les objets utilisés sont ceux obtenus après application de la proposition précédente.

Notons $\tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{h})$ le faisceau d'idéaux des germes de fonctions holomorphes sur \tilde{X} telles que $|f|^2 e^{-2k\tilde{\varphi}}$ est L_{loc}^1 (c'est le faisceau multiplicateur de Nadel associé au fibré π^*E). Si nous notons $b_{j,k} = \lfloor ca_j k \rfloor$ et \tilde{D}_j le diviseur défini localement par $g_j = 0$, alors la détermination du faisceau $\tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{h})$ relève des exemples précédents si bien que le lemme suivant en découle :

Lemme *Sous les conditions précédentes, le faisceau d'idéaux $\tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{h})$ s'identifie au faisceau inversible de rang un $\mathcal{O}(-\sum_j b_{j,k} \tilde{D}_j)$.*

b) Exemples

Illustrons ce qui précède en reprenant les notations de l'exemple (ii) du 2.1.2. Dans ces cas évidemment simples, il n'est nul besoin d'appliquer les théorèmes d'Hironaka : on explicite directement le choix des éclatements !

Si on suppose que tous les α_i sont égaux à α , nous avons vu alors que $\mathcal{I}(\varphi_k)$ est égal à $\mathcal{I}_Y^{\lfloor k\alpha \rfloor - p + 1}$ où Y est la sous-variété de codimension p donnée par $\{z_1 = \dots = z_p = 0\}$. Si $p = 1$, le faisceau d'idéaux est déjà inversible, sinon éclatons \mathbb{C}^n le long de Y . L'expression de la nouvelle métrique est donnée dans la première carte par

$$\tilde{\varphi}(w) = \alpha \log(|w_1|) + \frac{1}{2} \log(1 + |w_2|^{2\alpha} + \dots + |w_p|^{2\alpha})$$

si bien que $\tilde{\mathcal{I}}(\varphi_k) = \mathcal{O}(-\lfloor k\alpha \rfloor D)$ où D est le diviseur exceptionnel de l'éclatement. Il suffit donc dans ce cas d'un éclatement en codimension p pour obtenir le résultat souhaité.

De même, si α est un entier positif et si $\varphi(z) = \frac{1}{2} \log(|z_1|^2 + |z_2|^{2\alpha})$ dans \mathbb{C}^n , il faut cette fois α éclatements en codimension 2.

En effet, éclatons \mathbb{C}^n le long de $\{z_1 = z_2 = 0\}$. L'expression de la nouvelle métrique est donnée dans la première carte par

$$\tilde{\varphi}(w) = \log(|w_1|) + \frac{1}{2} \log(1 + |w_1 w_2|^{2\alpha})$$

qui est de la forme voulue alors qu'on obtient dans la deuxième carte

$$\tilde{\varphi}(w) = \log(|w_2|) + \frac{1}{2} \log(|w_1|^2 + |w_2|^{2(\alpha-1)}).$$

On éclate alors dans la deuxième carte le long de $\{w_1 = w_2 = 0\}$. En répétant ce procédé α fois, on obtient une métrique de la forme souhaitée en tout point.

Décrivons le faisceau d'idéaux obtenu : pour tout j compris entre 1 et α , notons D_j la transformée stricte dans \tilde{X} du diviseur exceptionnel du j -ième éclatement. Alors D_j et D_{j+1} se coupent transversalement et on a $\tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{\varphi}) = \mathcal{O}(-kD)$ où D désigne le diviseur à croisements normaux $D = \sum_{j=1}^{\alpha} jD_j$.

c) Inégalités de Morse sur \tilde{X}

On montre maintenant comment appliquer les inégalités de Morse holomorphes dans le cas \mathcal{C}^∞ sur \tilde{X} au fibré en droites $\tilde{E} = \pi^*E$ muni de la métrique image réciproque. Pour cela, nous devons montrer que $(\tilde{E})^k \otimes \tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{h})$ peut essentiellement s'écrire comme la k -ième puissance tensorielle d'un fibré en droites hermitien fixe.

Notons $c = \frac{u}{v}$ et supposons que $k = vk'$ est un multiple du dénominateur de c . Comme $b_{j,k} = ca_jk$, le faisceau multiplicateur $\tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{h})$ est égal au faisceau inversible $\mathcal{O}(-k'\tilde{D})$ où $\tilde{D} = u \sum_j a_j \tilde{D}_j$.

Avec ces notations, on a la :

Proposition Notons \hat{E} le fibré $\tilde{E}^v \otimes \mathcal{O}(-\tilde{D})$. Alors :

- (i) pour tout $k = vk'$, on a $(\hat{E})^{k'} = \tilde{E}^k \otimes \tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{h})$,
- (ii) la métrique hermitienne sur \hat{E} , produit de la métrique \tilde{h}^v et de la métrique singulière naturelle sur $\mathcal{O}(-\tilde{D})$, est une métrique hermitienne \mathcal{C}^∞ . De plus, et en dehors des singularités de la métrique \tilde{h} , on a l'égalité $\Theta(\hat{E}) = v\Theta(\tilde{E}) = \pi^*\Theta(E)$.

Démonstration

Le point (i) est évident. Pour le point (ii), la métrique produit naturelle est donnée localement par le poids $\tilde{\chi}(z) = v\tilde{\phi}(z) - \sum_{j=1}^n ua_j \log |g_j| = v\tilde{\psi}(z)$. Ainsi, cette métrique est lisse et l'égalité de courbure découle de suite du fait que $\partial\bar{\partial} \log |g_j| = 0$ là où g_j ne s'annule pas. ■

Cette proposition nous permet d'estimer les groupes de cohomologie qui nous intéressent :

Proposition On a pour tout k :

$$\sum_{j=0}^q (-1)^{q-j} \dim H^j(\tilde{X}, \mathcal{O}(\tilde{E}^k \otimes \tilde{F}) \otimes \tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{h})) \leq r \frac{k^n}{n!} \int_{X(\leq q, E)} (-1)^q \Theta(E)^n + o(k^n)$$

où l'intégrale est prise sur les points lisses de la métrique de E .

Démonstration

D'après la proposition précédente, on peut appliquer les inégalités de Morse de Demailly au fibré \hat{E} , si bien que pour $k = k'v$, on a :

$$\sum_{j=0}^q (-1)^{q-j} \dim H^j(\tilde{X}, \mathcal{O}(\tilde{E}^k \otimes \tilde{F}) \otimes \tilde{\mathcal{L}}_k(\tilde{h})) \leq r \frac{k'^n}{n!} \int_{\tilde{X}(\leq q, \hat{E})} (-1)^q \Theta(\hat{E})^n + o(k'^n).$$

Relions alors l'intégrale de courbure sur \tilde{X} à une intégrale de courbure sur X . Comme $\Theta(\hat{E}) = v\Theta(\tilde{E})$ sur les points lisses de la métrique de \tilde{E} si $k = k'v$, on a

$$k'^n \int_{\tilde{X}(\leq q, \hat{E})} \Theta(\hat{E})^n + o(k'^n) = k^n \int_{\tilde{X}(\leq q, \tilde{E})} \Theta(\tilde{E})^n + o(k^n).$$

Notons alors S la réunion des diviseurs exceptionnels de $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$; S est négligeable pour la mesure de Lebesgue et on a

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{X}(\leq q, \tilde{E})} \Theta(\tilde{E})^n &= \int_{\tilde{X}(\leq q, \tilde{E}) \setminus S} \Theta(\tilde{E})^n = \int_{\tilde{X}(\leq q, \tilde{E}) \setminus S} \Theta(\pi^*E)^n \\ &= \int_{\tilde{X}(\leq q, \tilde{E}) \setminus S} \pi^*(\Theta(E)^n) = \int_{X(\leq q, E) \setminus \pi(S)} \Theta(E)^n \\ &= \int_{X(\leq q, E)} \Theta(E)^n. \end{aligned}$$

On a donc pour les entiers k multiples d'un entier fixe :

$$\sum_{j=0}^q (-1)^{q-j} \dim H^j(\tilde{X}, \mathcal{O}(\tilde{E}^k \otimes \tilde{F}) \otimes \tilde{\mathcal{L}}_k(\tilde{h})) \leq r \frac{k^n}{n!} \int_{X(\leq q, E)} \Theta(E)^n + o(k^n)$$

où l'intégrale est prise sur les points lisses de la métrique de E .

Pour terminer cette preuve, il suffit de montrer que l'estimation précédente est valable sans restriction sur k .

En reprenant les notations du lemme et en posant $c = \frac{u}{v}$, on a, pour $k = k'v + r$

$$b_{j,k} = ua_jk' + r'$$

où r' ne prend qu'un nombre fini de valeurs entières. On en déduit alors

$$\begin{aligned} \tilde{E}^k \otimes \tilde{F} \otimes \mathcal{O}(-\sum_j b_{j,k} D_j) &= (\tilde{E}^v)^{k'} \otimes \tilde{E}^{r'} \otimes \tilde{F} \otimes \mathcal{O}(-k'u \sum_j a_j D_j) \otimes \mathcal{O}(-r' \sum_j D_j) \\ &= (\tilde{E}^v)^{k'} \otimes \mathcal{O}(-k'u \sum_j a_j D_j) \otimes \hat{F}_{r'}. \end{aligned}$$

On raisonne alors comme précédemment : on munit $\hat{F}_{r'}$ d'une métrique lisse quelconque tandis que $(\tilde{E}^v)^{k'} \otimes \mathcal{O}(-k'u \sum_j a_j D_j)$ est muni de la métrique lisse naturelle donnée localement par $v\tilde{\psi}(z)$. Ceci démontre la proposition. ■

2.2.2.3 Lien entre cohomologie sur \tilde{X} et cohomologie sur X

Pour achever la preuve du théorème B, il reste à relier les groupes

$$H^q(\tilde{X}, \mathcal{O}(\tilde{E}^k \otimes \tilde{F}) \otimes \tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{h}))$$

de la proposition précédente et les

$$H^q(X, \mathcal{O}(E^k \otimes F) \otimes \mathcal{I}_k(h))$$

qui nous intéressent directement. Nous adoptons ici une démarche un peu différente de celle de notre travail [Bo93b].

Soient X une variété compacte et $\mu : X' \rightarrow X$ l'éclatement de X le long d'une sous-variété lisse Y . Soit E un fibré en droites sur X , muni d'une métrique hermitienne singulière h de poids local $\exp(-\varphi)$. On note $\mathcal{I}_k(\varphi)$ le faisceau multiplicateur associé à la métrique sur E^k . Soit enfin F un fibré vectoriel sur X . Nous montrons dans ce paragraphe la proposition suivante :

Proposition *Supposons qu'au voisinage de tout point du diviseur exceptionnel de μ , la fonction $\varphi \circ \mu$ s'écrit :*

$$\varphi \circ \mu = \alpha \log |f| + \psi,$$

où α est strictement positif, f désigne une équation locale du diviseur exceptionnel de μ et ψ est une fonction psh.

Alors, si $k\alpha > 1$, on a pour tout entier $q \geq 0$:

$$H^q(X', K_{X'} \otimes \mu^*(E^k \otimes F) \otimes \mathcal{I}_k(\varphi \circ \mu)) \simeq H^q(X, K_X \otimes E^k \otimes F \otimes \mathcal{I}_k(\varphi)).$$

Commentaires Nous ne supposons plus dans ce dernier résultat que la métrique est à singularités analytiques, ni que les faisceaux $\mathcal{I}_k(\varphi \circ \mu)$ sont inversibles. Le point important est que l'hypothèse faite sur l'écriture de $\varphi \circ \mu$ est automatiquement satisfaite si φ est à singularités analytiques et le centre de l'éclatement Y est inclus dans le lieu singulier de la métrique.

La fin de la démonstration de nos inégalités de Morse se conclut par application répétée de cette proposition aux éclatements successifs dont $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ est la composée. ■

Avant de démontrer la proposition, mentionnons le problème suivant :

Question *Si les singularités de φ sont quelconques, a-t-on toujours*

$$\dim H^q(X', K_{X'} \otimes \mu^*(E^k \otimes F) \otimes \mathcal{I}_k(\varphi \circ \mu)) = \dim H^q(X, K_X \otimes E^k \otimes F \otimes \mathcal{I}_k(\varphi)) + o(k^n)?$$

Démonstration de la proposition

Elle repose tout d'abord sur le fait que les faisceaux de Nadel se comportent bien par image directe. De façon précise, si (E, h) est un fibré en droites muni d'une métrique singulière au dessus d'une variété X , et si $\mu : \tilde{X} \rightarrow X$ est une modification, alors [Dem94]

$$\mu_*(K_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{I}(\mu^*h)) = K_X \otimes \mathcal{I}(h).$$

Évidemment, ceci ne suffit pas pour démontrer qu'il y a isomorphisme en cohomologie : l'obstruction est mesurée par les images directes supérieures. Ainsi, il suffit de montrer, grâce au théorème de Leray, que pour tout entier $q \geq 1$ et pour tout k assez grand,

$$R^q \mu_* (K_{X'} \otimes \mathcal{I}_k(\varphi \circ \mu)) = 0.$$

On note r la codimension de Y , centre de l'éclatement.

Dans ce cas, le faisceau q -ième image directe supérieure $R^q \mu_* (K_{X'} \otimes \mathcal{I}_k(\varphi \circ \mu))$ est un faisceau à support dans Y , la fibre au dessus d'un point y de Y étant égale à :

$$F_{k,y} = \varinjlim_{U \ni y} H^q(\mu^{-1}(U), (K_{X'} \otimes \mathcal{I}_k(\varphi \circ \mu))|_{\mu^{-1}(U)}),$$

où la limite porte sur les voisinages U de y dans X .

Soit donc U un ouvert de Stein voisinage de y et soit ω une métrique hermitienne sur X' . Il s'agit de montrer que pour toute forme u de type (n, q) sur $\mu^{-1}(U)$, à coefficients localement L^2 satisfaisant :

- (i) $\bar{\partial}u = 0$,
- (ii) $I := \int_{\mu^{-1}(U)} |u|^2 \exp(-2k\varphi \circ \mu) dV_\omega < +\infty$,

il existe une forme v de type $(n, q-1)$ à coefficients localement L^2 satisfaisant :

- (i)' $\bar{\partial}v = u$,
- (ii)' $\int_{\mu^{-1}(U)} |v|^2 \exp(-2k\varphi \circ \mu) dV_\omega < +\infty$.

Résoudre un tel problème est en général possible grâce aux estimations L^2 de Hörmander. La difficulté ici est que la fonction $k\varphi \circ \mu$ n'est pas strictement psh au voisinage du diviseur exceptionnel D de l'éclatement. C'est exactement ici que nous utilisons l'hypothèse faite sur φ . En effet, l'égalité

$$\varphi \circ \mu = \alpha \log |f| + \psi$$

se traduit par :

$$\mathcal{I}_k(\varphi \circ \mu) = \mathcal{O}(-[k\alpha]D) \otimes \mathcal{I}(k\psi + (k\alpha - [k\alpha]) \log |f|).$$

Il s'agit alors de montrer l'annulation des groupes

$$H^{n,q}(\mu^{-1}(U), \mathcal{O}(-[k\alpha]D) \otimes \mathcal{I}(k\psi + (k\alpha - [k\alpha]) \log |f|)),$$

autrement dit de résoudre le problème du $\bar{\partial}$:

- (i)' $\bar{\partial}v = u$,
- (ii)' $\int_{\mu^{-1}(U)} |v|^2 \exp(-2k\psi) dV_\omega < +\infty$,

pour des (n, q) formes à valeurs dans le fibré $\mathcal{O}(-[k\alpha]D)$. Or, le fibré $\mathcal{O}(-D)|_D = \mathcal{O}_D(1)$ est strictement positif sur les fibres de l'éclatement. On peut donc munir $\mathcal{O}(-[k\alpha]D)$ d'une métrique à courbure strictement positive au voisinage du diviseur exceptionnel, et comme ψ peut être supposée strictement psh en dehors de D , nous sommes maintenant dans les hypothèses d'application des estimations L^2 de Hörmander. ■

2.3 Caractérisations analytiques des variétés de Moishezon

Dans la lignée des conditions suffisantes données par Y.-T. Siu et J.-P. Demailly pour caractériser les variétés de Moishezon, nous montrons la caractérisation suivante :

Théorème C *Une variété compacte X de dimension n est de Moishezon si et seulement si il existe sur X un courant T fermé de bidegré $(1, 1)$ tel que :*

- (i) $\{T\} \in H^2(X, \mathbb{Z})$,
- (ii) $T = \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} \varphi + \alpha$, où φ est une fonction réelle à singularités analytiques et où α est un représentant \mathcal{C}^∞ de $\{T\}$,
- (iii) $\int_{X(\leq 1, T)} T^n > 0$ où l'intégrale est prise sur les points lisses du courant T .

L'idée de donner une caractérisation analytique des variétés de Moishezon en terme de courant de courbure est aussi présente dans un travail de S. Ji et B. Shiffman [JiS93] simultanément au nôtre. Nos inégalités permettent ainsi de démontrer le résultat suivant :

Théorème D [JiS93], [Bo93b] *Une variété compacte X de dimension n est de Moishezon si et seulement si il existe sur X un courant T fermé de bidegré $(1, 1)$ tel que :*

- (i) $\{T\} \in H^2(X, \mathbb{Z})$,
- (ii) le courant T est strictement positif (i.e. minoré par une $(1, 1)$ -forme \mathcal{C}^∞ hermitienne).

Ces deux énoncés fournissent l'extension naturelle aux variétés de Moishezon du théorème de plongement de Kodaira pour les variétés projectives.

Avant de démontrer les résultats ci-dessus, nous rappelons deux résultats sur les courants.

2.3.1 Deux rappels

Il est bien connu [G-H78] que la seule obstruction pour qu'une $(1, 1)$ -forme fermée réelle \mathcal{C}^∞ soit la forme de courbure d'un fibré en droites hermitien est que sa classe de cohomologie soit entière, i.e. appartienne à $H^2(X, \mathbb{Z})$. Nous montrons dans la proposition suivante que ce résultat persiste pour les courants quasi positifs :

Proposition *Soit T un courant quasi-positif fermé, de bi-degré $(1, 1)$ dont la classe de cohomologie $\{T\}$ est dans $H^2(X, \mathbb{Z})$.*

Alors, il existe un fibré en droites E muni d'une métrique singulière dont le courant de courbure est égal à T .

Démonstration

Elle suit la démonstration du cas \mathcal{C}^∞ [S-S85]. On recouvre la variété X par des ouverts de Stein contractiles dont les intersections mutuelles sont elles aussi contractiles. Sur chaque ouvert U_α , on écrit $T = \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} \varphi_\alpha$. Comme T est quasi positif, les

fonctions φ_α sont quasi plurisousharmoniques, donc localement intégrables (c'est le seul point qui diffère du cas \mathcal{C}^∞).

De là, on écrit successivement $\varphi_{\alpha\beta} := \varphi_\beta - \varphi_\alpha$ sur l'intersection $U_\alpha \cap U_\beta$, puis

$$i(\bar{\partial} - \partial)\varphi_{\alpha\beta} = 2\pi du_{\alpha\beta}.$$

Les fonctions $c_{\alpha\beta\gamma} := u_{\beta\gamma} - u_{\alpha\gamma} + u_{\alpha\beta}$ sont constantes. Comme $\{T\}$ est entière, la classe $\{c_{\alpha\beta\gamma}\}$ l'est aussi. Il existe donc une 1-côchaîne à coefficients réels $\{b_{\alpha\beta}\}$ telle que :

$$c_{\alpha\beta\gamma} + b_{\beta\gamma} - b_{\alpha\gamma} + b_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta\gamma} \in \mathbb{Z}.$$

On pose alors :

$$g_{\alpha\beta} := \exp(\varphi_{\alpha\beta} + 2i\pi(u_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta})).$$

Les $g_{\alpha\beta}$ sont holomorphes sans zéro et forment un cocycle : on note E le fibré en droites associé. Comme

$$|g_{\alpha\beta}| \exp(-\varphi_\alpha) = \exp(-\varphi_\beta),$$

les poids $\exp(-\varphi_\alpha)$ définissent une métrique singulière sur E dont le courant de courbure est T . ■

Comme nos inégalités de Morse supposent que la métrique est à singularités analytiques, nous avons besoin d'un résultat d'approximation permettant de s'y ramener. De façon générale, étant donné un courant fermé T sur une variété compacte, c'est un problème classique que de vouloir le régulariser dans la même classe de cohomologie. Malheureusement, il n'est pas possible en général de régulariser \mathcal{C}^∞ tout en perdant aussi peu de positivité que souhaité. L'obstruction à le faire est mesurée par les nombres de Lelong du courant. Pour ne pas perdre de positivité, on régularise en autorisant des singularités analytiques. Le résultat que nous utilisons est le théorème d'approximation des courants de J.-P. Demailly [Dem92] :

Théorème (J.-P. Demailly, 1992) *Soit T un courant fermé de bi-degré $(1, 1)$ de sorte que $T \geq \alpha$ où α est une $(1, 1)$ forme \mathcal{C}^∞ . Alors pour toute métrique hermitienne ω de classe \mathcal{C}^∞ sur X , il existe une suite de courants T_ε telle que :*

- (i) $\{T_\varepsilon\} = \{T\}$,
- (ii) T_ε tend (faiblement) vers T lorsque ε tend vers 0,
- (iii) $T_\varepsilon \geq \alpha - \varepsilon\omega$,
- (iv) $T_\varepsilon = i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon + \beta$, où φ_ε est une fonction réelle à singularités analytiques et où β est un représentant \mathcal{C}^∞ de $\{T\}$.

Il n'est pas question ici de donner la démonstration de ce résultat, mais pour éclairer le lecteur, mentionnons la première étape de la démonstration, qui est une version locale du résultat :

Proposition *Soit φ une fonction psh dans la boule unité B de \mathbb{C}^n . Pour k entier positif, notons $\mathcal{H}(k\varphi)$ l'espace de Hilbert défini de la façon suivante :*

$$\mathcal{H}(k\varphi) = \{f \in \mathcal{O}(B) \mid \int_B |f|^2 \exp(-2k\varphi) d\lambda < +\infty\}.$$

Soit enfin $(\sigma_{j,k})_j$ une base orthonormée de $\mathcal{H}(k\varphi)$. Alors la suite de fonctions

$$\varphi_k := \frac{1}{2k} \log\left(\sum_j |\sigma_{j,k}|^2\right)$$

converge vers φ simplement et dans L^1_{loc} lorsque k tend vers $+\infty$.

La difficulté du théorème réside dans le recollement des diverses approximations locales données par la proposition précédente. Les fonctions λ_j figurant dans la définition de l'hypothèse S proviennent essentiellement de partition de l'unité. En particulier, elles ne s'annulent pas toutes simultanément si bien que les singularités sont vraiment données par les zéros communs d'une famille de fonctions holomorphes.

2.3.2 Démonstration des théorèmes C et D

Nous démontrons ici les deux caractérisations analytiques. Pour cela, on commence par remarquer que le sens faux dans le cadre des métriques lisses est vérifié de façon presque immédiate dans le cadre plus souple des variétés de Moishezon.

Soit en effet X une variété de Moishezon et $\pi : \hat{X} \rightarrow X$ une modification projective. Si $\hat{\omega}$ est une $(1, 1)$ forme \mathcal{C}^∞ définie positive sur \hat{X} telle que $\{\hat{\omega}\} \in H^2(\hat{X}, \mathbb{Z})$, et si ω est une $(1, 1)$ forme \mathcal{C}^∞ définie positive sur X , alors la forme $\pi^*\omega$ est \mathcal{C}^∞ et semi-positive. Il existe donc une constante $A > 0$ telle que $\hat{\omega} \geq A\pi^*\omega$. Par conséquent, le courant $T = \pi_*\hat{\omega}$ vérifie $T \geq A\omega$: en effet, si α est une $(n-1, n-1)$ forme positive \mathcal{C}^∞ sur X , on a

$$\begin{aligned} \langle T, \alpha \rangle &= \int_{\hat{X}} \hat{\omega} \wedge \pi^*\alpha \\ &\geq \int_{\hat{X}} A\pi^*\omega \wedge \pi^*\alpha \\ &= A \int_X \omega \wedge \alpha \\ &= \langle A\omega, \alpha \rangle. \end{aligned}$$

Le courant T satisfait les points (i) et (ii) du théorème D, et le théorème d'approximation des courants de Demailly rappelé précédemment implique qu'il existe un courant $T' \in \{T\}$ ayant localement les singularités de l'hypothèse S et tel que $T' \geq (A/2)\omega$. Ainsi, T' vérifie la conclusion du théorème C.

Pour la réciproque dans le théorème C, soit T satisfaisant (i), (ii) et (iii). Alors, il existe un fibré en droites sur X muni d'une métrique hermitienne singulière dont le courant de courbure est égal à T . Les inégalités de Morse singulières impliquent que :

$$\dim H^0(X, E^k \otimes \mathcal{I}_k(h)) - \dim H^1(X, E^k \otimes \mathcal{I}_k(h)) \sim_{k \rightarrow +\infty} k^n.$$

A fortiori,

$$\dim H^0(X, E^k) \sim_{k \rightarrow +\infty} k^n,$$

i.e le fibré E est gros et X est de Moishezon.

Pour le théorème D, si T est strictement positif, on peut supposer par le théorème d'approximation des courants que T a localement les singularités de l'hypothèse S. On conclut alors comme ci-dessus. ■

Remarque La preuve du théorème D donnée par S. Ji et B. Shiffman suit la démarche suivante : on approche, comme précédemment, le courant T par un courant strictement positif et singulier sur un ensemble analytique S . Puis on montre directement grâce aux estimations L^2 de Hörmander appliquées à la variété kählérienne complète $X \setminus S$ que les grandes puissances de E engendrent les 1-jets en dehors de S .

2.3.3 Quelques commentaires

Les théorèmes C et D sont satisfaisants car ils donnent une caractérisation analytique des variétés de Moishezon. Cependant, on souhaiterait pouvoir se dispenser de l'hypothèse faite sur les singularités dans le théorème C ou affaiblir l'hypothèse de stricte positivité du théorème D. On conjecture le résultat suivant :

Conjecture *Une variété compacte X est de Moishezon si et seulement si il existe sur X un courant T positif fermé de bi-degré $(1, 1)$ tel que :*

- (i) $\{T\} \in H^2(X, \mathbb{Z})$,
- (ii) *il existe un ouvert U sur lequel T est strictement positif.*

La condition (ii) est une façon d'assurer que le support de T n'est pas négligeable pour la mesure de Lebesgue. Evidemment, l'hypothèse S nous a permis de définir les intégrales de courbure en intégrant simplement sur la partie lisse de la métrique. Dans le cas général, définir un produit de courants T^n est un problème de type **Monge-Ampère**.

Le résultat suivant va dans le sens de la conjecture :

Proposition *La conjecture est vraie dans le cas des surfaces complexes (et dans ce cas, X étant de Moishezon est donc projective).*

Démonstration

Soit ω une métrique hermitienne sur X , et pour $\varepsilon > 0$, soit T_ε un courant donné par le théorème d'approximation des courants vérifiant $T_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega$. Par le théorème C, il suffit de montrer que pour ε assez petit, on a

$$\int_{X(\leq 1, T_\varepsilon)} T_\varepsilon^n > 0.$$

Comme il existe un ouvert U sur lequel T est strictement positif (disons supérieur à $C_U\omega|_U$ où C_U est une constante strictement positive), il existe un ouvert plus petit U' indépendant de ε sur lequel T_ε est supérieur à $(C_U/2)\omega|_{U'}$. On en déduit qu'il existe une constante $C > 0$, indépendante de ε telle que pour tout ε petit, on ait

$$\int_{X(0, T_\varepsilon)} T_\varepsilon^n \geq \int_{U'} T_\varepsilon^n > C.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{X(1, T_\varepsilon)} T_\varepsilon^n = 0.$$

Or, sur l'ouvert $X(q, T_\varepsilon)$, on a

$$0 \leq (-1)^q T_\varepsilon^n \leq \frac{n!}{q!(n-q)!} \varepsilon^q \omega^q \wedge (T_\varepsilon + \varepsilon\omega)^{n-q}.$$

Il suffit donc de contrôler les produits de Monge-Ampère et plus précisément de montrer que pour $q > 0$ (et dans la perspective de la conjecture, $q = 1$ suffit), on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^q \int_X \omega^q \wedge (T_\varepsilon + \varepsilon\omega)^{n-q} = 0.$$

C'est évidemment vrai pour $q = n$ et, si on suppose de plus que la métrique ω est une métrique de Gauduchon, alors la formule de Stokes donne

$$\int_X \omega^{n-1} \wedge (T_\varepsilon + \varepsilon\omega) = \text{Cste} + O(\varepsilon),$$

et donc c'est aussi vrai pour $q = n - 1$.

Dans le cas des surfaces, on a l'estimation souhaitée pour $q = n - 1 = 1$, donc X est de Moishezon par le théorème C. ■

Comme le montre la preuve ci-dessus, le cas général pourrait découler du contrôle des masses de Monge-Ampère des approximations φ_ε utilisées par J.-P. Demailly dans la démonstration de son théorème d'approximation des courants.

2.4 Une version algébrique singulière des inégalités de Morse

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques exemples "algébriques" de faisceaux d'idéaux de Nadel. Leur origine en géométrie algébrique se situe dans la version du théorème de Kawamata-Viehweg pour les diviseurs à coefficients rationnels. Comme dans [Dem90] ou [EsV92], ce faisceau d'idéaux sert de terme correctif dans le cas où les diviseurs considérés ne sont pas à croisements normaux.

Par ailleurs, il existe une version algébrique des inégalités de Morse holomorphes de Demailly [Dem94] dans le cas d'un fibré en droites différence de deux fibrés amples. Il est alors naturel de donner une version analogue dans le cadre singulier. Évidemment, il s'agit essentiellement d'une reformulation dans un cas particulier de notre théorème B.

2.4.1 Théorème de Kawamata-Viehweg

Soient X une variété projective, et M un diviseur rationnel effectif de X . On note $M = \sum a_i D_i$ où les a_i sont des rationnels positifs et les D_i sont des diviseurs

irréductibles. Nous notons $\mathcal{I}(M)$ le faisceau d'idéaux de Nadel associé à la métrique singulière $\phi = \sum a_i \log |g_i|$ où g_i est un générateur local de D_i . On rappelle que si M est à croisements normaux, alors $\mathcal{I}(M)$ n'est rien d'autre que le faisceau inversible $\mathcal{O}(-[M])$ où $[M] := \sum [a_i] D_i$. Avec ces notations, rappelons le théorème de Kawamata-Viehweg [Kaw82], [Vie82] :

Théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg *Soient X une variété projective et L un fibré en droites sur X . On suppose que $L = M + \sum_j \alpha_j E_j$ où :*

- (i) M est un \mathbb{Q} -diviseur effectif gros et nef,
- (ii) les α_j sont des réels vérifiant $0 \leq \alpha_j < 1$,
- (iii) le diviseur $\sum_j \alpha_j E_j$ est à croisements normaux.

Alors

$$H^q(X, K_X + L) = 0 \text{ pour tout } q \geq 1.$$

Dans le cas où $\sum_j \alpha_j E_j$ n'est pas à croisements normaux dans l'énoncé du théorème de Kawamata-Viehweg, le faisceau multiplicateur de Nadel sert de terme correctif. Nous allons détailler un exemple utilisé par L. Ein et R. Lazarsfeld dans l'étude des diviseurs à singularité presque isolée (voir le papier de R. Lazarsfeld [Laz93] pour plus de détails).

Le contexte est le suivant : soient X une variété projective, A un fibré gros et nef sur X et D un diviseur dans le système linéaire $|kA|$.

Choisissons $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ une composée d'un nombre fini d'éclatements de centres lisses de sorte que π^*D soit un diviseur à croisements normaux et soit $K_{\tilde{X}/X}$ la différence des fibrés canoniques :

$$K_{\tilde{X}/X} = K_{\tilde{X}} - \pi^*K_X.$$

Alors, pour λ rationnel, $0 \leq \lambda < 1$, on pose :

$$\mathcal{I}_\lambda = \pi_* \left(K_{\tilde{X}/X} - \lfloor \pi^* \left(\lambda \frac{D}{k} \right) \rfloor \right).$$

La proposition suivante donne les propriétés de \mathcal{I}_λ :

Proposition *On a*

(i) *le faisceau d'idéaux \mathcal{I}_λ est égal au faisceau multiplicateur $\mathcal{I}(\lambda \frac{D}{k})$, en particulier \mathcal{I}_λ est indépendant de la résolution π choisie,*

(ii) *les images directes supérieures $R^q \pi_* \left(K_{\tilde{X}/X} - \lfloor \pi^* \left(\lambda \frac{D}{k} \right) \rfloor \right)$ sont nulles pour tout $q \geq 1$,*

(iii) *les groupes de cohomologie $H^q(X, (K_X + A) \otimes \mathcal{I}_\lambda)$ sont nuls pour tout $q \geq 1$.*

Démonstration

Pour le point (i), nous utilisons à nouveau l'identité

$$\mu_*(K_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{I}(\mu^*h)) = K_X \otimes \mathcal{I}(h).$$

Dans notre situation, on a

$$\pi_* \left(K_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{I}(\pi^*(\lambda \frac{D}{k})) \right) = K_X \otimes \mathcal{I}(\lambda \frac{D}{k}).$$

Comme $\pi^*(\lambda \frac{D}{k})$ est à croisements normaux, on a

$$\mathcal{I}(\pi^*(\lambda \frac{D}{k})) = \mathcal{O} \left(-\lfloor \pi^*(\lambda \frac{D}{k}) \rfloor \right).$$

De là, on déduit successivement

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\lambda &= \pi_* \left(K_{\tilde{X}/X} - \lfloor \pi^*(\lambda \frac{D}{k}) \rfloor \right) \\ &= \pi_* \left(K_{\tilde{X}} - \pi^* K_X - \lfloor \pi^*(\lambda \frac{D}{k}) \rfloor \right) \\ &= -K_X \otimes K_X \otimes \mathcal{I}(\lambda \frac{D}{k}) \\ &= \mathcal{I}(\lambda \frac{D}{k}). \end{aligned}$$

Ceci démontre le point (i).

Pour le point (ii), la démonstration repose sur l'observation classique suivante (déjà observée par H. Grauert et O. Riemenschneider [GrR70]) : les faisceaux $R^q \pi_* \mathcal{F}$ sont nuls si et seulement si pour tout fibré L sur X suffisamment ample et tout $q \geq 1$, on a $H^q(\tilde{X}, \mathcal{F} \otimes \pi^* L) = 0$. Comme

$$\begin{aligned} R^q \pi_* \left(\pi^*(K_X + \pi^* A) + K_{\tilde{X}/X} - \lfloor \pi^*(\lambda \frac{D}{k}) \rfloor \right) = \\ (K_X + \pi^* A) \otimes R^q \pi_* \left(K_{\tilde{X}/X} - \lfloor \pi^*(\lambda \frac{D}{k}) \rfloor \right), \end{aligned}$$

il suffit de montrer que pour tout fibré L sur X suffisamment ample et tout $q \geq 1$, on a

$$H^q \left(\tilde{X}, \pi^* L + \pi^* A + K_{\tilde{X}} - \lfloor \pi^*(\lambda \frac{D}{k}) \rfloor \right) = 0.$$

Or ce dernier groupe est égal à

$$H^q \left(\tilde{X}, K_{\tilde{X}} + \pi^* L + (1 - \lambda) \pi^* A + (\lambda \pi^* A - \lfloor \lambda \pi^* A \rfloor) \right)$$

qui est nul grâce au théorème de Kawamata-Viehweg appliqué au \mathbb{Q} -diviseur effectif gros et nef

$$M := \pi^* L + (1 - \lambda) \pi^* A.$$

Pour le point (iii), on a

$$H^q(X, (K_X + A) \otimes \mathcal{I}_\lambda) = H^q \left(\tilde{X}, K_{\tilde{X}} + \pi^* A - \lfloor \pi^*(\lambda \frac{D}{k}) \rfloor \right).$$

Ce dernier groupe s'écrit encore $H^q \left(\tilde{X}, K_{\tilde{X}} + (1 - \lambda) \pi^* A + \lambda \pi^* A - \lfloor \lambda \pi^* A \rfloor \right)$ qui est nul à nouveau par le théorème de Kawamata-Viehweg. ■

2.4.2 Inégalités de Morse algébriques singulières

En nous inspirant de l'exemple précédent, nous sommes en mesure de donner une version algébrique des inégalités de Morse holomorphes singulières. Pour cela, rappelons au préalable la version suivante des inégalités de Morse holomorphes de J.-P. Demailly [Dem94] :

Théorème *Soit X une variété kählérienne de dimension n et soient F et G deux fibrés en droites nef sur X . Alors, on a :*

$$\sum_{j=0}^q (-1)^{q-j} \dim H^j(X, k(F - G)) \leq \frac{k^n}{n!} \sum_{j=0}^q (-1)^{q-j} \binom{n}{j} F^{n-j} \cdot G^j + o(k^n).$$

Ce résultat a été obtenu dans un premier temps par J.-P. Demailly comme conséquence des inégalités de Morse, et plus récemment, F. Angelini en a donné une démonstration purement algébrique [Ang95]. Auparavant, S. Trapani [Tra91] et Y.-T. Siu [Siu93] avaient démontré le cas particulier $q = 1$ en vue d'obtenir des critères numériques pour l'existence de sections. Le terme algébrique a ici une double origine : les estimations font intervenir des nombres d'intersection à la place d'intégrales de courbure, et un cas particulier du théorème est celui d'une variété projective et d'un fibré écrit comme différence de deux fibrés amples.

Nous montrons le résultat suivant :

Théorème E *Soit X une variété kählérienne de dimension n et soient F et G deux fibrés en droites sur X . On suppose que G est nef, et qu'il existe un entier positif m , un fibré en droites nef A et un diviseur effectif D de sorte que : $mF = A + D$. Alors, on a :*

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^q (-1)^{q-j} \dim H^j((X, k(F - G) \otimes \mathcal{I}_k(m^{-1}D))) \\ & \leq \frac{k^n}{n!} \sum_{j=0}^q (-1)^{q-j} \binom{n}{j} m^{-n+j} A^{n-j} \cdot G^j + o(k^n). \end{aligned}$$

Démonstration

Soit $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ une composée d'un nombre fini d'éclatements de centres lisses de sorte que π^*D soit un diviseur à croisements normaux.

Comme dans le cadre purement analytique de nos inégalités de Morse singulières, on travaille sur \tilde{X} où l'on applique simplement l'énoncé précédent.

Détaillons brièvement : le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_k(m^{-1}D)$ est égal à l'image directe

$$\pi_* \left(K_{\tilde{X}/X} - \lfloor \pi^*(km^{-1}D) \rfloor \right),$$

si bien qu'il s'agit d'estimer les dimensions

$$\dim H^q \left(\tilde{X}, k\pi^*(F - G) - \lfloor \pi^*(km^{-1}D) \rfloor \right).$$

Or pour k multiple de m , on a

$$k\pi^*(F - G) - \lfloor \pi^*(km^{-1}D) \rfloor = k\pi^*(m^{-1}A - G),$$

et il suffit d'appliquer le théorème précédent aux fibrés nef π^*A et π^*G . ■

Chapitre 3

Étude de certaines variétés de Moishezon dont le groupe de Picard est infini cyclique

Le thème central de ce chapitre est l'étude d'une classe particulière de variétés de Moishezon : celles dont le groupe de Picard est \mathbb{Z} et dont le fibré canonique est gros. En faisant l'hypothèse supplémentaire que la variété X devient projective après un seul éclatement de centre lisse et projectif, nous étudions ce centre *via* la théorie de Mori sur le modèle projectif. Nous obtenons alors une restriction sur la dimension du centre de l'éclatement dans le cas où le fibré canonique n'est pas nef. Après avoir donné une nouvelle famille de variétés de Moishezon ne possédant pas de fibré en droites gros et nef et s'inscrivant dans ce cadre d'étude, nous nous restreignons à la dimension 4. Nous obtenons alors une description précise du centre de l'éclatement et montrons que notre construction est essentiellement unique dans le cas où le fibré canonique n'est pas nef. Enfin, nous obtenons aussi des restrictions partielles en dimension 4 dans le cas où le fibré canonique est nef.

3.1 Un théorème de J. Kollár

3.1.1 Énoncé du résultat

Nous avons vu dans les préliminaires de cette thèse qu'il existe des variétés de Moishezon ne possédant pas de fibré en droites simultanément gros et numériquement effectif. Plus précisément, nous avons rencontré le résultat suivant :

Théorème (J. Kollár, K. Oguiso)

(i) *Il existe des variétés de Moishezon X de dimension 3 dont le groupe de Picard est égal à \mathbb{Z} , avec $-K_X$ gros et ne possédant pas de fibré gros et nef,*

(ii) *il existe des variétés de Moishezon X de dimension 3 dont le groupe de Picard est égal à \mathbb{Z} , dont le fibré canonique est trivial et ne possédant pas de fibré gros et nef.*

Remarquons que pour une variété de Moishezon dont le groupe de Picard est \mathbb{Z} , un et un seul générateur de $\text{Pic}(X)$ est gros. Suivant J. Kollár [Kol91], nous notons ce générateur $\mathcal{O}_X(1)$ et nous écrivons $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot \mathcal{O}_X(1)$.

Notons aussi m_X l'entier défini par la relation $K_X = \mathcal{O}_X(m_X)$. Remarquons ici que les trois cas $m_X < 0$ (respectivement $m_X = 0$ et $m_X > 0$) correspondent aux trois possibilités $\kappa(X) = -\infty$ (respectivement $\kappa(X) = 0$ et $\kappa(X) = \dim X$), où $\kappa(X)$ désigne la dimension de Kodaira de X .

Evidemment, il reste un cas non couvert par l'énoncé précédent et la question suivante est naturelle :

Question *Existe-t-il des variétés de Moishezon X , avec $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot \mathcal{O}_X(1)$ et $m_X > 0$ ne possédant pas de fibré gros et nef ?*

En dimension 3, la réponse à cette question est négative comme le montre le résultat suivant :

Théorème (J. Kollár, 1991) *Soit X une variété de Moishezon de dimension 3. On suppose que le groupe de Picard $\text{Pic}(X)$ est \mathbb{Z} et que le fibré canonique K_X est gros. Alors K_X est nef.*

Remarque Dans le cas où le fibré canonique est gros et nef, l'un de ses multiples est globalement engendré par le "base-point free theorem". Au vu du résultat précédent, il n'existe donc pas d'exemple de variété de Moishezon de dimension 3, de groupe de Picard \mathbb{Z} et à fibré canonique gros ne satisfaisant pas aux critères de J.-P. Demailly et Y.-T. Siu.

La suite de ce paragraphe consiste à rappeler la démonstration de ce résultat car les idées qu'elle contient seront présentes dans tout le chapitre.

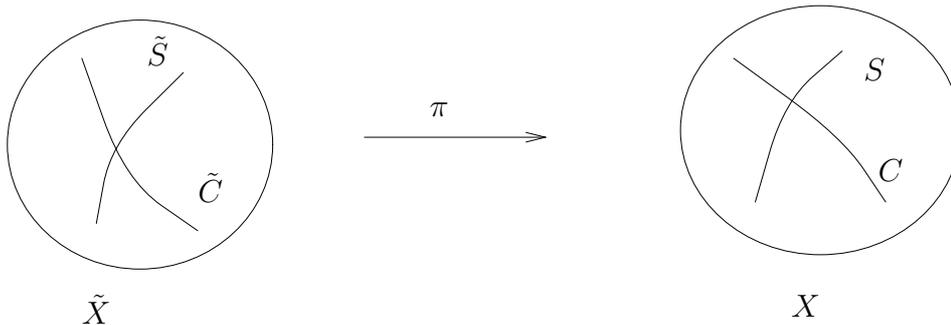
3.1.2 Démonstration

La référence précise est [Kol91], page 170 et suivantes.

Le lemme suivant, bien qu'élémentaire est essentiel :

Lemme *Soit X une variété de Moishezon, de dimension quelconque, avec $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot \mathcal{O}_X(1)$. Soit $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ une modification projective, de lieu exceptionnel $\tilde{S} \subset \tilde{X} \xrightarrow{\pi} S \subset X$.*

Alors pour toute courbe C de X , non incluse dans S , on a $\mathcal{O}_X(1) \cdot C > 0$.



Corollaire *Sous les hypothèses du lemme, et si de plus K_X est gros, alors pour toute courbe C (respectivement \tilde{C}) de X (respectivement de \tilde{X}) non incluse dans S (respectivement \tilde{S}), on a $K_X \cdot C > 0$ (respectivement $K_{\tilde{X}} \cdot \tilde{C} > 0$).*

Démonstration du lemme

Soit \tilde{H} un diviseur ample dans \tilde{X} , et $H := \pi_*(\tilde{H})$. Alors H est gros, donc s'écrit $\mathcal{O}_X(p)$, où p est un entier strictement positif. Comme

$$\mathcal{O}_X(1) \cdot C = \frac{1}{p} H \cdot C,$$

il suffit de montrer que pour toute courbe C non incluse dans S , on a $H \cdot C > 0$. Comme C n'est pas incluse dans S , si \tilde{C} désigne la transformée stricte de C , l'égalité suivante est vérifiée :

$$H \cdot C = \pi^*(H) \cdot \tilde{C} = (\tilde{H} + \sum a_i E_i) \cdot \tilde{C},$$

où les a_i sont des entiers positifs ou nuls, et les E_i les composantes irréductibles de \tilde{S} . De là, $H \cdot C > 0$ car $\tilde{H} \cdot \tilde{C} > 0$ et pour tout i , on a $E_i \cdot \tilde{C} \geq 0$. ■

Remarque Ce lemme affirme en particulier que les courbes sur lesquelles $\mathcal{O}_X(1)$ est négatif ou nul sont incluses dans un ensemble analytique de codimension supérieure ou égale à 2.

Démonstration du théorème

En dimension 3, on déduit du lemme précédent qu'il n'y a qu'un nombre fini de courbes sur lesquelles $\mathcal{O}_X(1)$ est négatif. Si K_X est gros, et si C est une courbe telle que $K_X \cdot C < 0$, alors une telle courbe se déforme dans X car la formule de Riemann-Roch donne

$$\chi(N_{C/X}) = -K_X \cdot C + (n-3)(1-g) = -K_X \cdot C > 0,$$

où $N_{C/X}$ est le fibré normal de C dans X . Mentionnons que si la courbe C est singulière, on définit $N_{C/X}$ comme étant égal à $\nu^*TX/T\tilde{C}$ où $\nu : \tilde{C} \rightarrow C$ est la normalisée de la courbe C . Ceci donne bien la contradiction. ■

3.1.3 Commentaires

La démonstration ci-dessus repose sur un argument de déformation. Comme nous utilisons dans la suite ce type d'argument, il est sans doute bon de faire ici un bref rappel.

Étant données une variété X et une sous-variété Y de X , c'est un problème classique et important de déterminer les déformations de Y dans X . Dans le cadre analytique, ce problème a été considéré par K. Kodaira [Kod62] et par A. Grothendieck et D. Mumford dans le cadre algébrique où la notion de **schéma de Hilbert** joue un rôle essentiel : une référence importante est le travail récent de J. Kollár [Kol94].

La "solution" au problème est donnée par le :

Théorème [Gro62], [Kod62] *Soit Y une sous-variété d'une variété X . Alors le schéma de Hilbert $\text{Hilb}(X)$ des sous-ensembles analytiques de X admet $H^0(Y, N_{Y/X})$ comme espace tangent de Zariski en $[Y]$. La dimension de $\text{Hilb}(X)$ en $[Y]$ satisfait :*

$$\dim H^0(Y, N_{Y/X}) - \dim H^1(Y, N_{Y/X}) \leq \dim_{[Y]} \text{Hilb}(X) \leq \dim H^0(Y, N_{Y/X}).$$

En particulier, si $H^1(Y, N_{Y/X}) = 0$, alors $\text{Hilb}(X)$ est lisse au voisinage de $[Y]$.

Dans le cadre analytique, la construction de K. Kodaira consiste à trouver explicitement en coordonnées locales les séries entières définissant les sous-ensembles proches de Y , tandis que dans le cadre algébrique, l'idée est qu'une variété projective Z est déterminée par le sous-espace vectoriel des polynômes de degré suffisamment grand qui s'annulent sur Z .

3.2 Quelques rappels sur la théorie de Mori

La théorie de Mori, née dans les années 80, consiste à étendre et approfondir en dimension supérieure ou égale à 3 la classification des surfaces complexes et l'étude des applications biméromorphes entre surfaces complexes.

Cependant, cette théorie n'est valable que sur les variétés projectives. Comme une variété de Moishezon est dominée par une variété projective, une idée naturelle est d'appliquer certains résultats de la théorie de Mori pour obtenir des renseignements concernant la structure des variétés de Moishezon ou de leur caractère non projectif.

Nous rappelons dans ce paragraphe les résultats essentiels utilisés dans ce chapitre. Deux excellentes références sont [CKM88] et [KMM87].

Mentionnons aussi qu'une des grandes idées de S. Mori est, même pour l'étude des variétés non singulières, de quitter le monde lisse pour autoriser certains types de singularités ; cette analyse fut en particulier mise en oeuvre par M. Reid. Il est cependant bon de préciser ici que la plupart des énoncés que nous utilisons sont d'une difficulté moindre dans le cas lisse, cadre dans lequel nous les appliquons.

3.2.1 Cône des courbes effectives

Dans tout ce paragraphe, X est une variété projective.

3.2.1.1 Notations

Rappelons tout d'abord que la notation $N_1(X, \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies (à coefficients réels) de courbes (irréductibles et éventuellement singulières) de X , modulo l'équivalence numérique : deux courbes sont équivalentes si et seulement si leurs intersections avec tout diviseur sont égales.

Pour une variété projective (et même de Moishezon), cet espace vectoriel est de dimension finie et est en dualité naturelle (*via* la forme d'intersection) avec le groupe de Néron-Severi $(\text{Pic}(X)/\text{Pic}^0(X)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$; la dimension de $N_1(X, \mathbb{R})$ est appelée **nombre de Picard de X** . L'espace vectoriel $N_1(X, \mathbb{R})$ est naturellement un sous-espace vectoriel de $H_2(X, \mathbb{R})$.

Enfin, nous notons suivant l'usage $\text{NE}(X)$ le sous-cône convexe de $N_1(X, \mathbb{R})$ engendré par les classes d'homologie des courbes effectives. L'adhérence de ce cône est notée $\overline{\text{NE}}(X)$.

3.2.1.2 Théorème du cône

L'un des premiers succès de la théorie de Mori est de montrer que *si le fibré canonique K_X n'est pas nef, alors il existe une courbe rationnelle sur laquelle il est strictement négatif.*

L'énoncé précis est le suivant :

Théorème du cône *Soit X une variété projective. Alors il existe un ensemble minimal (fini ou dénombrable) de courbes rationnelles C_i dans X de sorte que :*

$$(i) \text{ pour tout } i, \text{ on a } 0 < -K_X \cdot C_i \leq \dim X + 1,$$

$$(ii) \overline{\text{NE}}(X) = \overline{\text{NE}}(X)_{K_X \geq 0} + \sum_i \mathbb{R}_+ [C_i],$$

où $\overline{\text{NE}}(X)_{K_X \geq 0} := \{[C] \in N_1(X, \mathbb{R}) \mid K_X \cdot C \geq 0\}$.

Les courbes rationnelles C_i sont appelés **courbes rationnelles extrémales** et les $\mathbb{R}_+ [C_i]$ sont appelées **rayons extrémaux**.

On ne connaît pas de version analogue de ce théorème pour les variétés de Moishezon. À notre connaissance, la question suivante est ouverte :

Question *Soit X une variété de Moishezon, dont le fibré canonique n'est pas nef. Existe-t-il alors une courbe rationnelle C telle que $K_X \cdot C < 0$?*

3.2.2 Contraction de Mori

Les rayons extrémaux jouent le même rôle dans la théorie de Mori que les courbes rationnelles lisses d'auto-intersection négative dans la théorie des surfaces complexes : ils peuvent être contractés. Le théorème suivant décrit les différents types de contraction obtenus en contractant un rayon extrême.

Théorème de contraction [CKM88] *Soit X une variété projective dont le fibré canonique n'est pas nef. Soient C une courbe rationnelle extrême et $R := \mathbb{R}_+ [C]$ le rayon extrême engendré par C .*

Alors, il existe une variété (éventuellement singulière) projective, normale, et une application

$$f : X \rightarrow Y,$$

notée aussi cont_R , de sorte que :

(i) *une courbe de X est contractée par f si et seulement si sa classe d'homologie appartient au rayon R ,*

(ii) *le fibré $-K_X$ est f -ample (i.e la restriction de $-K_X$ à toute fibre de f est ample).*

De plus, on distingue trois types de contractions :

(a) *$\dim X > \dim Y$ et f est une fibration Fano (i.e la fibre générique de f est une variété lisse dont le fibré anti-canonique est ample),*

(b) $\dim X = \dim Y$ et f est une contraction divisorielle (i.e f est birationnelle et contracte un diviseur),

(c) $\dim X = \dim Y$ et f est une petite contraction (i.e f est birationnelle et contracte un sous-ensemble algébrique de codimension supérieure ou égale à 2).

Les cas (a) et (b) sont les “bons” cas : dans le cas (a), on réduit la compréhension de la variété X à celle d’une variété de dimension plus petite et à la structure des fibres qui sont des variétés de Fano. Dans le cas (b), la variété singulière Y est \mathbb{Q} -factorielle, à singularités terminales (ce sont les singularités qui permettent de donner encore un sens à l’expression “ K_Y est ou n’est pas nef”) et le nombre de Picard de Y est strictement plus petit que celui de X . Le cas (c) est le “mauvais” cas : les singularités de Y sont telles que Y ne possède pas de fibré canonique et il n’est pas clair que Y soit “plus simple” que X .

3.2.3 Contractions divisorielles

Nous utilisons dans la suite un résultat plus précis que le théorème de contraction dans le cas d’une contraction divisorielle. Sous cette forme, il apparaît dans les travaux de T. Ando [And85] et M. Beltrametti [Bel86] :

Théorème (T. Ando, M. Beltrametti, 1985) *Soient X une variété projective et $f : X \rightarrow Y$ une contraction divisorielle d’un rayon extrême. Soit enfin F une fibre générale de $f_E : E \rightarrow f(E)$ où E est le diviseur exceptionnel de f .*

Alors il existe un fibré en droites L sur X tel que :

(i) $\text{Im}(\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(F)) = \mathbb{Z} \cdot L|_F$ où $L|_F$ est ample sur F ,

(ii) $\mathcal{O}_F(-K_X) \simeq \mathcal{O}_F(pL)$ et $\mathcal{O}_F(-E) \simeq \mathcal{O}_F(qL)$ où p et q sont deux entiers positifs.

Enfin, si F est de dimension 2, alors F est isomorphe à \mathbb{P}^2 ou à la quadrique \mathcal{Q}_2 .

Nous utiliserons ce résultat lorsque X est de dimension 4.

3.2.4 L’inégalité de Wiśniewski

Avant d’énoncer cette inégalité, nous avons besoin de deux notations : soient X une variété projective, R un rayon extrême de $\overline{\text{NE}}(X)$ et f la contraction de Mori associée.

On note $l(R) = \min\{-K_X \cdot C \mid C \text{ est une courbe rationnelle telle que } [C] \in R\}$. Le nombre $l(R)$ est la **longueur** du rayon R .

On note aussi $A(R)$ le lieu de X couvert par les courbes dont la classe appartient à R .

Dans [Wis91], J. Wiśniewski démontre l’inégalité fondamentale suivante :

Théorème (J. Wiśniewski, 1991) *Pour toute fibre non triviale F de f , on a :*

$$\dim F + \dim A(R) \geq \dim X + l(R) - 1.$$

Cette inégalité, dont une forme faible est due à P. Ionescu [Ion86], a de nombreuses conséquences dans la classification des variétés projectives de dimension supérieure ou égale à 3.

3.3 Un premier résultat

Rappelons pour commencer ce paragraphe que les exemples de J. Kollár et K. Oguiso déjà cités vérifient la propriété supplémentaire suivante : les variétés X construites ne sont, bien sûr, pas projectives, mais le deviennent après exactement un éclatement le long d'une sous-variété $Y \subset X$.

Dans toute cette partie, nous nous plaçons dans la situation analogue suivante :

Hypothèse X est une variété de Moishezon non projective de dimension n dont le groupe de Picard est égal à \mathbb{Z} , dont le fibré canonique est gros et telle qu'il existe une sous-variété $Y \subset X$ de sorte que l'éclatement $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ de X le long de Y définisse une variété projective \tilde{X} . On note E le diviseur exceptionnel de l'éclatement.

La remarque suivante est très importante :

Remarque D'après le corollaire 3.1.2, on sait alors que K_X (respectivement $K_{\tilde{X}}$) est strictement positif sur les courbes non incluses dans Y (respectivement dans E). La conséquence suivante sera utilisée dans la suite : si C est une courbe de Y sur laquelle K_X est strictement négatif, cette courbe ne peut pas se déformer (dans X) hors de Y .

La méthode que nous adoptons pour étudier X et Y est d'appliquer la théorie de Mori à la variété projective \tilde{X} .

3.3.1 Cône des courbes sur \tilde{X}

Dans le cadre de notre étude, comme $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$, l'espace vectoriel $N_1(\tilde{X}, \mathbb{R})$ est isomorphe à \mathbb{R}^2 .

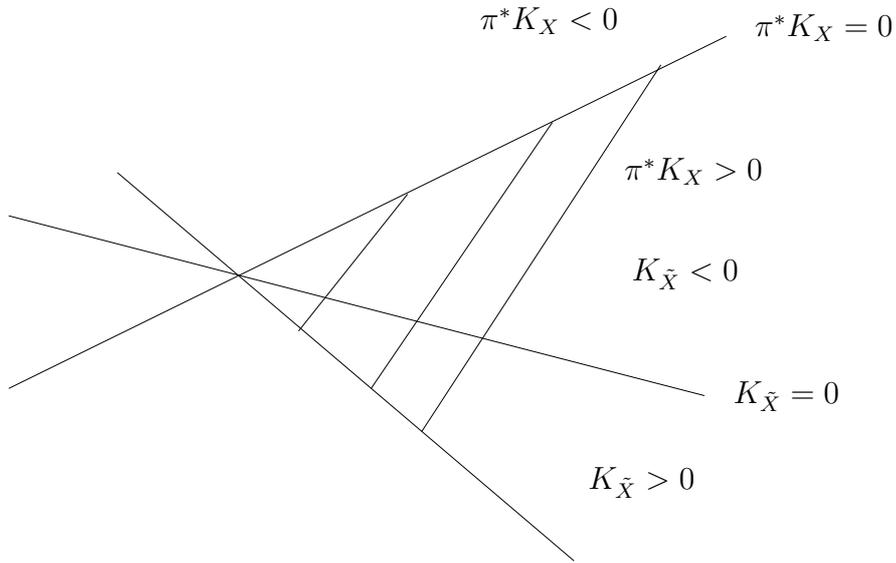
Dans la suite, nous représentons dans $N_1(\tilde{X}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2$ le cône fermé $\overline{\text{NE}}(\tilde{X})$; dans les figures ci-dessous, ce dernier correspond à la partie hachurée. Si D est un élément de $\text{Pic}(\tilde{X})$, nous notons $D > 0$ (respectivement $D = 0$, respectivement $D < 0$) les ensembles

$$\{[C] \in \overline{\text{NE}}(\tilde{X}) \mid D \cdot C > 0\}$$

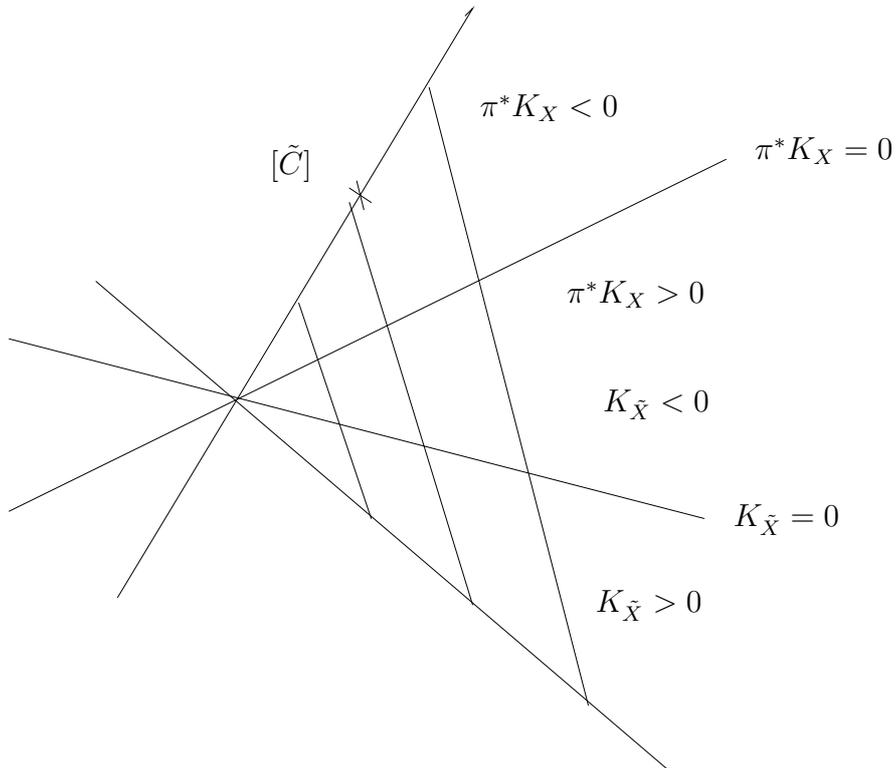
(respectivement $D \cdot C = 0$, respectivement $D \cdot C < 0$).

Deux cas se présentent suivant que K_X est nef ou non. Ces deux cas se distinguent naturellement ; ils correspondent, comme nous le verrons plus loin, au fait que X admet ou non un morphisme vers une variété (éventuellement singulière) projective de même dimension,

(i) soit K_X est nef et le dessin est le suivant :



(ii) soit K_X n'est pas nef et le dessin est le suivant :



Quelques commentaires sur ces diagrammes

- dans les deux cas, le fait que la droite $\{K_{\tilde{X}} = 0\}$ coupe le cône effectif vient du fait qu'il y a à la fois des courbes sur lesquelles $K_{\tilde{X}}$ est strictement positif (celles non contenues dans le diviseur exceptionnel) et des courbes sur lesquelles $K_{\tilde{X}}$ est strictement négatif (toute courbe incluse dans les fibres de l'éclatement),

- dans le deuxième cas, la position relative de $\{\pi^*K_X = 0\}$ est justifiée par le fait qu'il y a des courbes sur lesquelles π^*K_X et $K_{\tilde{X}}$ sont strictement positifs (celles non

contenues dans le diviseur exceptionnel d'après 3.1.2) et que π^*K_X est nul sur toute courbe incluse dans les fibres de l'éclatement.

3.3.1.1 Quelques conséquences de ces diagrammes

Nous regroupons ici les renseignements provenant directement de la description de $\overline{NE}(\tilde{X})$. Pour cela, appliquons le théorème du cône à la variété projective \tilde{X} . On en déduit que le rayon extrême du côté $K_{\tilde{X}} < 0$ est engendré par la classe d'une courbe rationnelle \tilde{C} dans \tilde{X} . Alors, le théorème de contraction assure l'existence d'une variété (en général singulière) projective Z et d'un morphisme f associés à la courbe extrême rationnelle \tilde{C} de sorte que la situation suivante ait lieu :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xleftarrow{f} & \tilde{X} \supset E \\ & & \downarrow \pi \quad \downarrow \\ & & X \supset Y \end{array}$$

(i) Cas où K_X est nef.

Alors le rayon extrême est engendré par la classe d'une courbe rationnelle incluse dans une fibre non triviale de π . Toutes les fibres de π sont donc contractées par f si bien que f se factorise en une application $g : X \rightarrow Z$

$$\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{g} Z \text{ et } f = g \circ \pi.$$

(ii) Cas où K_X n'est pas nef.

Alors les fibres de f et les fibres de π ne se coupent que sur un nombre fini de points : en effet, il n'existe pas de courbes simultanément contractées par π et f car les rayons engendrés par $[\tilde{C}]$ et la classe d'une courbe rationnelle incluse dans une fibre non triviale de π sont distincts.

3.3.1.2 Une application immédiate

Dans le cas où K_X n'est pas nef, la courbe rationnelle \tilde{C} n'étant pas contractée par π , la courbe rationnelle $C = \pi(\tilde{C})$ vérifie $K_X \cdot C < 0$. Le résultat suivant en découle :

Proposition *Sous les hypothèses précédentes, si K_X n'est pas nef, il existe une courbe rationnelle $C \subset Y$ sur laquelle K_X est strictement négatif.*

3.3.2 Contraction de Mori de \tilde{X}

Nous étudions ici plus en détail la contraction de Mori f associée à la courbe extrême rationnelle $\tilde{C} \subset \tilde{X}$ obtenue précédemment pour en déduire une estimation de la dimension de Y en toute dimension.

3.3.2.1 Énoncé du résultat

Nous avons vu qu'il y a trois types de contractions extrêmes. Le théorème suivant restreint les possibilités dans notre situation :

Théorème F *Soit X de Moishezon avec $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ et K_X gros. Si X est rendue projective après éclatement $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ le long de Y , alors :*

- (i) *on a $\dim \tilde{X} = \dim Z$, autrement dit f est une application birationnelle,*
- (ii) *si f est une contraction divisorielle, son diviseur exceptionnel est égal à celui de π (noté E précédemment) ; ce cas est le seul possible lorsque K_X est nef,*
- (iii) *si f est une contraction divisorielle et si K_X n'est pas nef, les inégalités suivantes sont satisfaites :*

$$\text{codim } Y - 1 \leq \dim f(E) < \dim Y \quad \text{et} \quad \dim Y > \frac{n-1}{2},$$

- (iv) *si f est une petite contraction et si K_X n'est pas nef, l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\dim Y \geq \frac{n+1}{2}.$$

On peut reformuler ce résultat sans faire intervenir la contraction de Mori :

Théorème F' *Soit X une variété de Moishezon de dimension n avec $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ et K_X gros. Supposons que X est rendue projective après éclatement le long d'une sous-variété lisse Y .*

Alors, si K_X n'est pas nef, on a $\dim Y > \frac{n-1}{2}$.

Remarque Le fait que K_X soit gros est ici essentiel. En effet, les constructions de J. Kollár et K. Oguiso montrent que les inégalités du point (iii) ne sont pas vraies en général. La construction de J. Kollár donne aussi un exemple où les diviseurs exceptionnels de π et f ne sont pas égaux.

3.3.2.2 Démonstration du théorème F-F'

Les points (i) et (ii) du théorème F sont faciles : par hypothèse, f ne contracte que des courbes sur lesquelles $K_{\tilde{X}}$ est strictement négatif, donc incluses dans E d'après le corollaire 3.2.1 ; en particulier le point (i) est démontré.

Ceci montre aussi que si f est une contraction divisorielle, son diviseur exceptionnel étant inclus dans E est donc égal à E . Réciproquement, si K_X est nef, f se factorise à travers π et donc est une contraction divisorielle. Le point (ii) est démontré.

Montrons le point (iii) du théorème F : f est une contraction divisorielle et K_X n'est pas nef. La situation est résumée par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
f(E) & \longleftarrow & E \\
\cap & & \searrow \\
Z & \longleftarrow & \tilde{X} \\
& & \downarrow \pi \\
& & X \supset Y
\end{array}$$

Dans cette situation, on écrit

$$K_{\tilde{X}} = f^*K_Z + aE = \pi^*K_X + (r-1)E$$

où $r = \text{codim } Y$ et où a est un nombre rationnel. Cette égalité est une égalité de \mathbb{Q} -diviseurs de Cartier : dans le cas d'une contraction divisorielle, le diviseur canonique de Z n'est pas de Cartier en général mais l'un de ses multiples entiers l'est. Rappelons que toutes les notions de positivité (telle que par exemple être gros, nef ou ample) s'étendent naturellement aux \mathbb{Q} -diviseurs de Cartier.

Les inégalités cherchées découlent immédiatement du lemme suivant :

Lemme *Si K_X n'est pas nef, les nombres a et r vérifient les deux inégalités suivantes :*

- (i) $a > r - 1$,
- (ii) $\text{codim } f(E) + r \leq n + 1$.

L'inégalité suivante est vraie en toute généralité pour une contraction divisorielle :

- (iii) $a \leq \text{codim } f(E) - 1$.

Démonstration du lemme

Inégalité (i) :

Comme Z est projective avec $\text{Pic}(Z) = \mathbb{Z}$ et K_Z gros, on en déduit que K_Z est ample et donc que f^*K_Z est nef, et strictement positif sur les courbes de \tilde{X} non contractées par f . Choisissons alors une courbe rationnelle R incluse dans une fibre non triviale de π (ces dernières sont des \mathbb{P}^{r-1} , on prend pour R une droite \mathbb{P}^1).

L'égalité

$$f^*K_Z \cdot R + aE \cdot R = \pi^*K_X \cdot R + (r-1)E \cdot R$$

donne alors :

$$a - (r-1) = f^*K_Z \cdot R > 0$$

car, K_X n'étant pas nef, R n'est pas contractée par f . ■

Inégalité (ii) :

Cette inégalité découle de suite du fait que les fibres de f et π dans E ne peuvent se couper qu'en un nombre fini de points. De là :

$$(n-1 - \dim f(E)) + (r-1) \leq n-1. \blacksquare$$

Inégalité (iii) :

Soit F une fibre générique de la restriction de f à E , et soit \tilde{C} une courbe dans F .

Alors, on a

$$aE \cdot \tilde{C} = K_{\tilde{X}} \cdot \tilde{C}$$

et par la formule d'adjonction :

$$K_{\tilde{X}|E} = K_E - E|_E.$$

De là, on en déduit :

$$a + 1 = \frac{K_E \cdot \tilde{C}}{E \cdot \tilde{C}}.$$

Comme le fibré canonique K_F est simplement la restriction de K_E à F , on obtient :

$$a = \frac{K_F \cdot \tilde{C}}{E \cdot \tilde{C}} - 1.$$

Or, la variété F est Fano, et par le théorème du cône appliqué à F , on peut supposer que \tilde{C} est une courbe (rationnelle) satisfaisant :

$$0 < -K_F \cdot \tilde{C} \leq \dim F + 1 = n - 1 - \dim f(E) + 1 = \text{codim } f(E).$$

De là, comme $E \cdot \tilde{C}$ est un entier strictement négatif, il vient $a \leq \text{codim } f(E) - 1$. Ceci termine la preuve du lemme. ■

Remarque L'inégalité (iii) peut aussi se déduire de l'inégalité de Wiśniewski : en effet f étant divisorielle, on a $\dim A(R) = n - 1$ et la dimension de la fibre générique non triviale est $n - 1 - \dim f(E)$. De là, l'inégalité de Wiśniewski donne

$$\text{codim } f(E) - 1 \geq l(R).$$

Or, comme $K_{\tilde{X}} = f^*K_Z + aE$, on a $-K_{\tilde{X}} \cdot C \geq a$ pour toute courbe contractée, d'où $l(R) \geq a$ comme souhaité.

Montrons maintenant le point (iv) du théorème F. Pour cela, on applique l'inégalité de Wiśniewski : comme f est une petite contraction, on a évidemment

$$\dim A(R) \leq n - 2,$$

et si F est une fibre non triviale de f cette dernière est incluse dans E et ne coupe les fibres de π que sur un ensemble fini. On en déduit que $\dim F \leq \dim Y$ d'où :

$$n - 2 + \dim Y \geq n + l(R) - 1,$$

soit

$$\dim Y \geq l(R) + 1.$$

Il suffit alors d'estimer $l(R)$. Or, on a $K_{\tilde{X}} = \pi^*K_X + (r - 1)E$ et comme K_X n'est pas nef, π^*K_X est strictement négatif sur les courbes contractées par f . On en déduit que

$$-K_{\tilde{X}} \cdot C \geq r$$

pour toute courbe contractée par f . De là, $l(R) \geq r$ et en reportant

$$2 \dim Y \geq n + 1$$

qui est l'inégalité souhaitée. ■

3.3.3 Application à la dimension 3

On déduit du théorème F un résultat précisant celui de J. Kollár dans notre situation :

Corollaire *Soit X une variété de Moishezon non projective de dimension 3, avec $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ et K_X gros.*

Si X peut être rendue projective après un éclatement seulement, alors X est une petite modification d'une variété singulière projective ayant une unique singularité nodale ordinaire (dont le modèle local est $xy - zt = 0$ dans $(\mathbb{C}^4, 0)$). En particulier, le fibré canonique K_X est nef.

Démonstration du corollaire

On note toujours π l'éclatement rendant X projective et f la contraction de Mori définie sur la variété projective \tilde{X} . D'après le théorème F, f est birationnelle, et comme il n'y a pas de petites contractions en dimension 3 d'une variété non singulière, c'est que f est une contraction divisorielle. De plus, les inégalités (iii) du théorème F ne peuvent être vérifiées ici car elles impliquent $\text{codim } Y = 1$. C'est donc que K_X est nef (on retrouve ainsi le résultat de J. Kollár), et que le rayon extrême du côté $K_{\tilde{X}} < 0$ est engendré par la classe d'homologie des fibres de π . Il y a alors exactement deux possibilités :

- les fibres de la contraction de Mori (restreinte au diviseur exceptionnel E) sont de dimension 1 et alors cette dernière coïncide avec π . Dans ce cas, X est projective, ce que l'on a exclu,

- la contraction de Mori contracte le diviseur exceptionnel E sur un point. Dans ce cas, nous appliquons le résultat de S. Mori [Mor82] qui donne la liste de toutes les contractions extrémales d'une variété non singulière de dimension 3. On en déduit que le diviseur exceptionnel de π (égal à celui de f) est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et que $\mathcal{O}_E(E) = N_{E/\tilde{X}}$ est de type $(-1, -1)$. La situation est alors la suivante :

$$\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{g} Z \text{ et } f = g \circ \pi,$$

où Z est une variété singulière projective ayant une unique singularité nodale ordinaire (dont le modèle local est $xy - zt = 0$ dans $(\mathbb{C}^4, 0)$). Dans ce cas, la contraction de Mori est alors $g \circ \pi$ et correspond à l'éclatement du point singulier : le centre Y de l'éclatement π est une courbe rationnelle lisse. ■

Exemple La situation précédente peut effectivement être réalisée : soit Z une hypersurface de \mathbb{P}^4 d'équation

$$h_0x_0^2 + h_1x_1^2 + h_2x_2^2 + h_3x_3^2 = 0,$$

où $[x_0 : \dots : x_4]$ sont les coordonnées homogènes dans \mathbb{P}^4 et où les h_i sont quatre polynômes homogènes de degré d supérieur ou égal à 4 ne s'annulant pas en $[0 : 0 : 0 : 0 : 1]$ et génériques parmi les polynômes ayant ces propriétés. Alors l'hypersurface Z est lisse excepté au point $[0 : 0 : 0 : 0 : 1]$ où elle possède une singularité nodale ordinaire. On obtient X comme décrit précédemment en résolvant la singularité puis en contractant dans une direction de la quadrique exceptionnelle.

Nous donnons dans la suite d'autres applications du théorème F mais nous commençons par montrer dans le paragraphe suivant que le résultat de J. Kollár ne s'étend pas en dimension supérieure ou égale à 4.

3.4 Une famille de variétés de Moishezon

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant :

Théorème G *Pour tout entier n supérieur ou égal à 4, il existe des variétés de Moishezon X de dimension n vérifiant :*

(i) $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$, (ii) K_X est gros, (iii) K_X n'est pas nef.

Ainsi, le résultat de J. Kollár est propre à la dimension 3.

Remarque Les variétés obtenues dans la construction qui suit relèvent toutes du cas "contraction divisorielle" évoqué dans le paragraphe précédent. Il serait bien sûr intéressant de construire de telles variétés relevant du cas "petite contraction". Cependant, nous verrons plus loin que ce cas ne peut pas se produire en dimension 4.

3.4.1 Un résultat intermédiaire

La démonstration du théorème G repose sur la proposition suivante, que nous prouvons plus loin. Mentionnons qu'il nous a été signalé par un rapporteur anonyme que cette proposition se trouve dans [BVV78].

Pour n entier, nous notons $[x_0 : \cdots : x_{n+1}]$ les coordonnées homogènes dans \mathbb{P}^{n+1} . On désigne par $\mathbb{P}_{x_n}^1$ la droite $\{x_0 = \cdots = x_{n-1} = 0\}$. Choisissons alors n polynômes homogènes h_0, \dots, h_{n-1} de degré $2n-2$ et considérons l'hypersurface Z de degré $2n-1$ dans \mathbb{P}^{n+1} et d'équation

$$\sigma = x_0 h_0 + \cdots + x_{n-1} h_{n-1} = 0.$$

Cette hypersurface contient $\mathbb{P}_{x_n}^1$ et peut être singulière. On a cependant le résultat suivant :

Proposition *Si n est supérieur ou égal à 3 et si les h_i sont choisis génériquement, alors :*

- (i) *l'hypersurface Z est non singulière,*
- (ii) *le fibré normal $N_{\mathbb{P}^1/Z}$ est égal à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus n-1}$,*
- (iii) *K_Z est égal à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(n-3)|_Z$,*
- (iv) *$\text{Pic}(Z) = \mathbb{Z}$.*

3.4.2 Démonstration du théorème G

La construction qui suit nous a évidemment été inspirée par l'analyse du paragraphe précédent, dans le cas où la contraction de Mori est une contraction divisorielle : si une variété de dimension 4 de Moishezon satisfait le point (iii) du

théorème F, c'est en éclatant une surface, puis en contractant sur une courbe rationnelle que l'on obtient un modèle projectif. Nous donnons cependant la construction générale en toute dimension.

Construction explicite :

On se fixe dorénavant une hypersurface Z donnée par la proposition précédente. La variété X cherchée va être obtenue en effectuant un "flip" (plus exactement l'inverse d'un flip) à partir de Z .

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{P}^1 & \longleftarrow & E = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-2} \\
 \cap & & \uparrow \\
 Z & \longleftarrow & \tilde{X} \\
 & & \downarrow \quad \downarrow \\
 & & X \supset \mathbb{P}^{n-2} \supset \mathbb{P}^1
 \end{array}$$

Suivant la figure ci-dessus, notons \tilde{X} la variété projective obtenue en éclatant Z le long de \mathbb{P}^1 . Le diviseur exceptionnel de l'éclatement est alors $E = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-2}$, et pour pouvoir contracter dans l'autre direction, il s'agit de montrer, d'après le critère de contraction de Fujiki-Nakano, que $\mathcal{O}(E)|_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$. Pour cela, les deux suites exactes suivantes :

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow N_{\mathbb{P}^1/E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-2} \rightarrow N_{\mathbb{P}^1/\tilde{X}} \rightarrow N_{E/\tilde{X}|_{\mathbb{P}^1}} = \mathcal{O}(E)|_{\mathbb{P}^1} \rightarrow 0, \\
 0 \rightarrow T\mathbb{P}^1 \rightarrow T\tilde{X}|_{\mathbb{P}^1} \rightarrow N_{\mathbb{P}^1/\tilde{X}} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

donnent successivement :

$$\deg(N_{\mathbb{P}^1/\tilde{X}}) = \deg(\mathcal{O}(E)|_{\mathbb{P}^1}), \quad \deg(K_{\tilde{X}|_{\mathbb{P}^1}}) = -2 - \deg(N_{\mathbb{P}^1/\tilde{X}}).$$

Comme $K_{\tilde{X}} = f^*K_Z + (n-2)\mathcal{O}(E)$ et $K_Z = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(n-3)|_Z$, on en déduit bien que $\mathcal{O}(E)|_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$.

La contraction de \mathbb{P}^1 définit donc une variété de Moishezon, contenant un \mathbb{P}^{n-2} et telle que $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$.

Montrons maintenant que $N_{\mathbb{P}^{n-2}/\tilde{X}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(-1)$. Comme

$$E = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-2} = \mathbb{P}(N_{\mathbb{P}^{n-2}/\tilde{X}}^*),$$

le fibré normal $N_{\mathbb{P}^{n-2}/\tilde{X}}$ est de la forme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(a)$. Comme précédemment, la suite exacte :

$$0 \rightarrow T\mathbb{P}^{n-2} \rightarrow TX|_{\mathbb{P}^{n-2}} \rightarrow N_{\mathbb{P}^{n-2}/X} \rightarrow 0$$

donne $2a = -\deg(K_{X|\mathbb{P}^{n-2}}) - n + 1$, puis

$$\deg(K_{X|\mathbb{P}^{n-2}}) = \deg(K_{\tilde{X}|\mathbb{P}^{n-2}} - \mathcal{O}(E)|_{\mathbb{P}^{n-2}}) = -(n-2) + 1,$$

d'où finalement $a = -1$.

Par ailleurs, nous venons de montrer que

$$K_X|_{\mathbb{P}^{n-2}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-2}}(3-n).$$

Ainsi, si n est supérieur ou égal à 4, $-K_X$ est ample sur \mathbb{P}^{n-2} . Finalement, le fibré K_X bien que gros n'est pas nef et le théorème est démontré. ■

Remarque La construction précédente, en dimension 3, donne un nouvel exemple de variété de Moishezon, de "Calabi-Yau" satisfaisant $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot \mathcal{O}_X(1)$, (voir aussi [Ogu94]).

3.4.3 Démonstration de la proposition

On démontre (i) et (ii) simultanément.

Les points singuliers de Z sont des zéros communs des équations

$$x_0 h_0 + \cdots + x_{n-1} h_{n-1} = 0$$

et

$$x_0 \frac{\partial h_0}{\partial x_i} + \cdots + x_{n-1} \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_i} + h_i = 0, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

En particulier, Z est lisse au voisinage de $\mathbb{P}^1 = \{x_0 = \cdots = x_{n-1} = 0\}$ dès que les h_i ne s'annulent pas simultanément sur \mathbb{P}^1 . Ceci est vrai pour un choix générique des h_i dès que n est supérieur ou égal à 2.

On déduit alors du théorème de Bertini [G-H78] que si les h_i sont à nouveau génériques, l'hypersurface Z est non singulière partout : en effet, de façon générale, une relation

$$\sum_i s_i f_i = 0$$

définit une variété non singulière en dehors des zéros communs des s_i dès que les f_i sont génériques dans l'espace des sections holomorphes d'un fibré engendrant en tout point les jets d'ordre inférieur ou égal à 1.

Déterminons ensuite le fibré normal $N_{\mathbb{P}^1/Z}$, et pour cela, considérons la suite exacte des fibrés normaux :

$$0 \rightarrow N_{\mathbb{P}^1/Z} \rightarrow N_{\mathbb{P}^1/\mathbb{P}^{n+1}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus n} \xrightarrow{d\sigma} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(2n-1)|_{\mathbb{P}^1} \rightarrow 0.$$

Il est alors clair que $N_{\mathbb{P}^1/Z}$ est de degré $-(n-1)$. Pour montrer qu'il est égal à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus n-1}$, il suffit donc de montrer qu'il n'a pas de sections (rappelons en effet qu'un théorème d'A. Grothendieck affirme que tout fibré vectoriel sur \mathbb{P}^1 est scindé).

Par la suite exacte précédente, une section de $N_{\mathbb{P}^1/Z}$ peut être vue comme une section de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus n}$, annulée par $d\sigma$. Une telle section correspond à la donnée d'un n -uplet (s_0, \dots, s_{n-1}) où les s_i sont des polynômes homogènes de degré 1 en les variables x_n, x_{n+1} , que l'on écrit $s_i(x) = s_{i,n}x_n + s_{i,n+1}x_{n+1}$. Dans $N_{\mathbb{P}^1/\mathbb{P}^{n+1}}$, on a alors :

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} s_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

De même, notons

$$h_i(x) = \sum_{p=0}^{2n-2} h_{i,p} x_n^p x_{n+1}^{2n-2-p}$$

la restriction de h_i à \mathbb{P}^1 . La relation $d\sigma(s) = 0$ donne ici :

$$\sum_{i=0}^{n-1} s_i h_i = 0.$$

Comme

$$d\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} h_i dx_i$$

le long de \mathbb{P}^1 , cette relation se traduit par un système linéaire à $2n$ équations en les $2n$ inconnues $s_{i,n}, s_{i,n+1}$. Il s'agit de montrer que pour un choix générique des h_i , le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} h_{0,0} & h_{1,0} & \dots & h_{n-1,0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{0,1} & h_{1,1} & \dots & h_{n-1,1} & h_{0,0} & h_{1,0} & \dots & h_{n-1,0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{0,2n-2} & h_{1,2n-2} & \dots & h_{n-1,2n-2} & h_{0,2n-3} & h_{1,2n-3} & \dots & h_{n-1,2n-3} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_{0,2n-2} & h_{1,2n-2} & \dots & h_{n-1,2n-2} \end{pmatrix}$$

n'est pas nul, ce qui est clair en prenant par exemple

$$h_{0,0} = \lambda_0, \dots, h_{n-1,n-1} = \lambda_{n-1}, h_{0,n-1} = \mu_0, \dots, h_{n-1,2n-2} = \mu_{n-1}$$

avec $\lambda_i \neq 0, \mu_i \neq 0$.

Ainsi, il existe un choix des h_i de sorte que l'hypersurface Z (éventuellement singulière) est lisse au voisinage de \mathbb{P}^1 , avec $N_{\mathbb{P}^1/Z} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus n-1}$.

Si maintenant les h_i sont choisis de sorte que (i) et (ii) soient satisfaits, alors (iii) est immédiat par adjonction et (iv) découle du théorème de Lefschetz : l'hypersurface Z est le diviseur d'une section d'un fibré ample et les fibrés en droites sur Z sont restriction de fibrés en droites sur \mathbb{P}^{n+1} . ■

Remarque Le cas $n = 3$ de la proposition précédente correspond à celui des quintiques dans \mathbb{P}^4 . Il a été considéré par S. Katz dans [Kat86]. Dans ce cadre, S. Katz détermine le fibré normal $N_{\mathbb{P}^1/Z}$ dans le cas où les h_i sont génériques, mais analyse aussi la situation non générique. Signalons aussi [Cle83], où H. Clemens considère des questions analogues, toujours en dimension 3.

Remarque On peut reprendre plus généralement la construction précédente pour les hypersurfaces de \mathbb{P}^{n+1} de degré $2n - 2k + 1$ passant par un \mathbb{P}^k linéaire. On peut alors à nouveau montrer que (génériquement) $N_{\mathbb{P}^k/Z}$ (qui est de degré $k - n$) n'a pas de sections. Cependant, le fibré $N_{\mathbb{P}^k/Z}$ n'est pas scindé si $k \geq 2$.

Démontrons ce dernier point en considérant à nouveau la suite exacte des fibrés normaux :

$$0 \rightarrow N_{\mathbb{P}^k/Z} \rightarrow N_{\mathbb{P}^k/\mathbb{P}^{n+1}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(1)^{\oplus n+1-k} \xrightarrow{d\sigma} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(2n - 2k + 1)|_{\mathbb{P}^k} \rightarrow 0.$$

En dualisant cette suite, il vient :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(-2n + 2k - 1)|_{\mathbb{P}^k} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(-1)^{\oplus n+1-k} \rightarrow N_{\mathbb{P}^k/Z}^* \rightarrow 0.$$

Si $k \geq 2$, comme le fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(-2n + 2k - 1)|_{\mathbb{P}^k}$ est négatif, la suite exacte longue de cohomologie donne $H^0(\mathbb{P}^k, N_{\mathbb{P}^k/Z}^*) = 0$. Ceci exclut de suite le fait que $N_{\mathbb{P}^k/Z}$ soit scindé car il serait alors égal à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(-1)^{\oplus n-k}$. ■

3.5 Une classification en dimension 4

Dans ce paragraphe, nous considérons des variétés de Moishezon (non projectives) X de dimension 4. Comme précédemment, nous supposons que $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$, que K_X est gros et que X est rendue projective après éclatement le long d'une sous-variété lisse Y .

3.5.1 Énoncé des résultats

Nous montrons les deux résultats suivants :

Théorème H *Sous les hypothèses précédentes, Y est nécessairement une surface. Autrement dit, et dans cette situation particulière, il ne suffit pas d'éclater une courbe pour rentrer dans le monde projectif.*

Nous avons vu précédemment que K_X n'est pas nécessairement nef à partir de la dimension 4. Le résultat suivant montre que l'exemple construit dans le paragraphe précédent est le "seul possible" dans le cas où K_X n'est pas nef. Nous reprenons les notations des paragraphes précédents, $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ désigne l'éclatement de X le long de Y et $f : \tilde{X} \rightarrow Z$ désigne la contraction extrême de Mori sur \tilde{X} .

Théorème I *Sous les hypothèses précédentes et si K_X n'est pas nef, alors :*

- (i) le couple $(Y, N_{Y/X})$ est égal à $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{\oplus 2})$,
- (ii) f contracte le diviseur exceptionnel de π sur une courbe rationnelle lisse à fibré normal $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 3}$ dans une variété projective lisse Z . En particulier, f est une contraction divisorielle.

Ces résultats sont accessibles en dimension 4 car les contractions de Mori sont "bien comprises" grâce aux résultats, rappelés précédemment de T. Ando [And85] et M. Beltrametti [Bel86] pour les contractions divisorielles.

3.5.2 Démonstration du théorème H

Nous traitons séparément les cas K_X nef et K_X non nef.

(i) Le cas K_X non nef .

Il découle directement du théorème F : en effet, si la contraction de Mori f est une contraction divisorielle, le point (iii) assure que Y est une surface et que $f(E)$ est une courbe. Par ailleurs, le point (iv) exclut la possibilité que f soit une petite contraction (car sinon $\dim Y \geq 3$!). Mentionnons qu'une première version de ce travail [Bo95b] excluait ce cas en utilisant le difficile théorème de structure des petites contractions de Kawamata [Kaw89]. Ceci achève le cas K_X non nef.

(ii) Le cas K_X nef.

Dans ce cas, rappelons que la contraction de Mori se factorise par π . Notons $g : X \rightarrow Z$ de sorte que $f = g \circ \pi$.

Raisonnons alors par l'absurde en supposant que Y est une courbe. Dans ce cas, il est clair que $f(E)$ (égal à $g(Y)$) est un point. En effet, dans le cas contraire, $f(E)$ est une courbe et l'application g est finie. Comme Z est projective, on en déduit que X est projective, ce que l'on a rejeté. Ainsi $f(E)$ est un point et le diviseur E est une variété de Fano.

Nous allons montrer que E est en fait isomorphe à la quadrique de dimension 3, ce qui fournira la contradiction ; une quadrique de dimension 3, dont le nombre de Picard est 1, ne pouvant être égale au projectivisé d'un fibré de rang 3 sur une courbe, pour lequel le nombre de Picard est 2 !

Pour cela, remarquons que Z étant \mathbb{Q} -factorielle à singularités terminales, il existe un entier m non nul tel que mK_Z est de Cartier. Alors :

$$mK_X = g^*(mK_Z).$$

En particulier, la restriction de K_X à Y est triviale. Il en découle que $K_Y = \det N_{Y/X}$, et par conséquent,

$$K_E = \pi^*(K_Y - \det N_{Y/X}) + 3\mathcal{O}_E(-1) = 3\mathcal{O}_E(-1).$$

On en déduit que $\mathcal{O}_E(1)$ est ample et que E est une variété (de dimension 3) d'indice 3 ; rappelons que l'indice d'une variété de Fano V est le plus grand entier $r > 0$ tel qu'il existe un fibré en droites L avec $-K_V = rL$. Or, le théorème de Kobayashi-Ochiai [KoO73] affirme qu'une variété de Fano de dimension n et d'indice n est isomorphe à la quadrique \mathcal{Q}_n . On en déduit ici que E est la quadrique \mathcal{Q}_3 comme annoncé. ■

Dans la situation du théorème H et lorsque K_X est nef, nous avons vu que la contraction de Mori f sur \tilde{X} se factorise en une application birationnelle $g : X \rightarrow Z$ qui contracte la surface Y . La proposition suivante précise le cas où $g(Y)$ est réduit à un point :

Proposition *Si K_X est nef et si $f(E)$ (égal à $g(Y)$) est un point, alors le couple $(Y, N_{Y/X})$ est égal à $(\mathbb{P}^2, T^*\mathbb{P}^2)$, $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2))$ ou $(\mathcal{Q}_2, \mathcal{O}_{\mathcal{Q}_2}(-1, -1)^{\oplus 2})$.*

Nous ne connaissons pas d'exemples explicites où ces possibilités sont effectivement réalisées, mais nous pouvons remarquer qu'aucune n'est exclue *a priori* par les résultats de T. Ando et M. Beltrametti.

La démonstration de la proposition découle directement du théorème suivant de T. Peternell [Pet91] :

Théorème (T. Peternell, 1991) *Soit V une variété projective de dimension n et soit E un fibré vectoriel de rang n sur V de sorte que $c_1(E) = c_1(X)$. Alors, le couple (V, E) est égal à $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus n+1})$, $(\mathbb{P}^n, T\mathbb{P}^n)$ ou $(\mathcal{Q}_n, \mathcal{O}_{\mathcal{Q}_n}(1)^{\oplus n})$.*

Démonstration de la proposition

La démonstration du théorème H montre que

$$K_Y = \det N_{Y/X}$$

et que

$$\mathcal{O}_E(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(N_{Y/X}^*)}(1)$$

est ample, donc que $N_{Y/X}^*$ est aussi ample. Le résultat découle du théorème de T. Peternell appliqué au couple $(Y, N_{Y/X}^*)$. ■

3.5.3 Démonstration du théorème I

Notons F la fibre générale de f restreinte au diviseur exceptionnel E . Comme $f(E)$ est une courbe, F est de dimension 2. D'après le théorème de T. Ando et M. Beltrametti, F est égal à \mathbb{P}^2 ou à la quadrique \mathcal{Q}_2 . De plus, il a été vu précédemment que F coupe les fibres de π sur des points. On en déduit que $\pi|_F : F \rightarrow Y$ est une application surjective finie. Deux cas sont à distinguer :

- F est égal à \mathbb{P}^2 .

Dans ce cas, Y est aussi égal à \mathbb{P}^2 . En effet, un résultat de R. Lazarsfeld [Laz84] affirme que si $h : \mathbb{P}^n \rightarrow V$ est une application holomorphe surjective finie sur une variété de dimension n , alors V est isomorphe à \mathbb{P}^n ; en dimension 2, on peut trouver une démonstration élémentaire dans [BPV84].

Montrons alors que

$$\pi|_F : F \simeq \mathbb{P}^2 \rightarrow Y \simeq \mathbb{P}^2$$

est un isomorphisme. Pour cela, il suffit de montrer que $\pi|_F$ est un isomorphisme local, car alors $\pi|_F$ est un revêtement donc le revêtement trivial. Soient donc x dans F et L un \mathbb{P}^1 quelconque passant par $\pi(x)$. Sa pré-image $\pi^{-1}(L)$ est une surface d'Hirzebruch bi-réglée donc $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. L'intersection $F \cap \pi^{-1}(L)$ est alors une réunion de \mathbb{P}^1 "horizontaux". La restriction de π au \mathbb{P}^1 horizontal passant par x est donc un isomorphisme sur son image. Ceci étant vrai pour tout \mathbb{P}^1 passant par $\pi(x)$, ceci montre bien que $d\pi|_F(x)$ est surjective, donc inversible, et que $\pi|_F$ est un isomorphisme local. Ainsi,

$$\pi|_F : F \simeq \mathbb{P}^2 \rightarrow Y \simeq \mathbb{P}^2$$

est un isomorphisme. On en déduit que le fibré normal $N_{Y/X}$ est scindé ; on définit alors a et b en posant :

$$N_{Y/X} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(b).$$

Le fait que $\pi^{-1}(L) \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ montre même que $a = b$.

Comme K_X n'est pas nef, K_X est négatif sur Y . Il vient alors :

$$\deg(K_{X|Y}) = -3 - 2a < 0$$

d'où $a \geq -1$. L'affirmation suivante permet de conclure :

Affirmation *L'entier a est strictement négatif.*

Démonstration

Par l'absurde, supposons que $a \geq 0$. Alors, si C désigne un \mathbb{P}^1 de $Y = \mathbb{P}^2$, on a :

$$H^1(C, N_{C/X}) = H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)^{\oplus 2}) = 0,$$

d'où :

$$\dim_{[C]} \text{Hilb}(X) = \dim H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)^{\oplus 2}) = 2a + 4.$$

Or,

$$\dim_{[C]} \text{Hilb}(Y) = \dim_{[\mathbb{P}^1]} \text{Hilb}(\mathbb{P}^2) = 2.$$

Comme $a \geq 0$, on en déduit que :

$$\dim_{[C]} \text{Hilb}(X) > \dim_{[C]} \text{Hilb}(Y)$$

si bien que C se déforme dans X hors de Y . Ceci n'est pas possible comme nous l'avons déjà rencontré car K_X est positif sur les courbes non incluses dans Y . Ici, K_X , n'étant pas nef, est négatif sur C . Contradiction ! ■

Ainsi, $a = -1$ et f contracte E sur une courbe rationnelle lisse à fibré normal $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 3}$ dans la variété projective lisse Z .

- F est égal à la quadrique \mathcal{Q}_2 .

Nous montrons que ce cas ne peut pas arriver. En effet, Y est alors isomorphe à \mathbb{P}^2 ou \mathcal{Q}_2 . Le cas $Y \simeq \mathbb{P}^2$ s'exclut exactement comme précédemment : $\pi|_F$ réalise un isomorphisme entre la quadrique et \mathbb{P}^2 !

Si $Y \simeq \mathcal{Q}_2$, le raisonnement est plus simple et il est inutile de montrer que

$$\pi|_F : F \simeq \mathcal{Q}_2 \rightarrow Y \simeq \mathcal{Q}_2$$

est un isomorphisme. Choisissons en effet un \mathbb{P}^1 dans Y , à savoir un des générateurs de $H_2(\mathcal{Q}_2, \mathbb{Z})$, sur lequel K_X est strictement négatif (il en existe car K_X n'est pas nef). Alors $N_{Y/X}$ restreint à \mathbb{P}^1 est de la forme

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$$

(ceci comme précédemment car $\pi^{-1}(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$). La suite exacte :

$$0 \rightarrow T\mathbb{P}^1 \rightarrow TX|_{\mathbb{P}^1} \rightarrow N_{\mathbb{P}^1/X} \rightarrow 0,$$

et le fait que $N_{\mathbb{P}^1/\mathcal{Q}_2}$ est trivial entraînent que

$$\deg(-K_{X|\mathbb{P}^1}) = 2 + 2a > 0$$

et donc que $a \geq 0$. Ceci est, comme dans le cas précédent, absurde car ce \mathbb{P}^1 se déformerait alors dans X hors de Y ! ■

3.5.4 Quelques commentaires

Comme nous venons de le voir, la situation en dimension 4 est très satisfaisante lorsque K_X n'est pas nef. Dans le cas où K_X est nef, nous avons obtenu une restriction sur le centre de l'éclatement seulement lorsque le diviseur exceptionnel E est contracté sur un point. Au moment où nous finissons la rédaction de cette thèse, nous avons appris que M. Andreatta et J.A. Wiśniewski terminent la rédaction d'un travail consistant à classifier les contractions extrémales divisorielles en dimension 4 sur une variété non-singulière, étendant ainsi les résultats de M. Beltrametti au cas où le diviseur est contracté sur une courbe ou sur une surface. Nous sommes en mesure d'appliquer leurs résultats dans notre situation pour obtenir la proposition suivante. Précisons cependant que nous n'avons pas encore une version écrite du travail en question mais que notre seule référence est une série de discussions informelles avec M. Andreatta, M. Mella et J.A. Wiśniewski.

Proposition *Soit X comme dans le théorème H. On suppose que K_X est nef. Si f est la contraction de Mori définie sur \tilde{X} , alors :*

(i) *le diviseur exceptionnel E est contracté sur une courbe ou un point. Autrement dit, $f(E)$ n'est pas une surface,*

(ii) *si $f(E)$ est une courbe, cette dernière est une courbe lisse de singularités nodales ordinaires 3-dimensionnelles et le centre Y de l'éclatement π est une surface réglée dont les fibres \mathbb{P}^1 ont pour fibré normal $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 2}$. Autrement dit, la situation est localement le produit d'une courbe par le modèle analogue en dimension 3.*

Cette proposition termine la description des situations possibles ; cependant nous ne connaissons pas à l'heure actuelle d'exemple explicite où le point (ii) est réalisé.

“Démonstration”

Tout d'abord, mentionnons que la contraction divisorielle que nous étudions est très particulière car nous savons *a priori* que le diviseur exceptionnel a une structure de fibration en espaces projectifs sur une base lisse.

Pour le point (i), supposons par l'absurde que $f(E)$ est une surface. Dans ce cas, la fibre générale est un \mathbb{P}^1 et M. Andreatta et J.A. Wiśniewski montrent qu'une éventuelle fibre particulière est soit \mathbb{P}^2 , soit la quadrique \mathcal{Q}_2 , soit la quadrique singulière \mathcal{Q}_2^0 . Dans notre situation, une éventuelle fibre particulière est donc \mathcal{Q}_2 et l'image $\pi(\mathcal{Q}_2)$ dans Y est une courbe rationnelle C d'auto-intersection -1 .

Montrons que ceci n'est pas possible, à nouveau par un argument de déformation. En effet, K_X est trivial sur C , donc

$$N_{C/X} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)$$

où a et b sont deux entiers satisfaisant la relation $a + b = -1$. De là

$$\dim \text{Hilb}_{[C]}(X) \geq \dim H^0(C, N_{C/X}) - \dim H^1(C, N_{C/X}) = a + b + 2 = 1 > 0$$

d'où l'on déduit que C se déforme dans X et ce hors de Y .

Pour le point (ii), nous sommes dans la situation “facile” du travail de M. Andreatta et J.A. Wiśniewski car les fibres de f restreinte à E sont équi-dimensionnelles.

Dans notre situation, la fibre générale est une quadrique \mathcal{Q}_2 et il n'y a pas de fibres particulières : la situation est, transversalement à $f(E)$, la résolution d'une singularité nodale 3-dimensionnelle. ■

Bibliographie

- [And85] T. Ando. On extremal rays of the higher dimensional varieties. *Invent. Math.* 81 (1985) 347-357.
- [Ang95] F. Angelini. An algebraic version of Demailly's asymptotic Morse inequalities. *Preprint (1995)*.
- [BPV84] W. Barth - C. Peters - A. Van de Ven. Compact Complex Surfaces. *Springer 1984*.
- [BVV78] W. Barth, A. Van de Ven. Fano varieties of lines on hypersurfaces. *Arch. Math.* 31 (1978), 96-104.
- [Bel86] M. Beltrametti. Contractions of non numerically effective extremal rays in dimension 4. *Proc. Alg. Geom. Teubner-Texte Math.* 92, 24-37, Berlin : Teubner 1986.
- [Bo93a] L. Bonavero. Inégalités de Morse holomorphes singulières. *C.R. Acad. Sci, t.317, Série I, p. 1163-1166, (1993)*.
- [Bo93b] L. Bonavero. Inégalités de Morse holomorphes singulières. *Prépublication de l'Institut Fourier, 259, (1993), à paraître au Journal of Geometric Analysis*.
- [Bo95a] L. Bonavero. Sur des variétés de Moishezon dont le groupe de Picard est de rang un. *C.R. Acad. Sci, t. 321, 443-446 (1995)*.
- [Bo95b] L. Bonavero. Sur des variétés de Moishezon dont le groupe de Picard est de rang un. *Prépublication de l'Institut Fourier n° 310 (1995), à paraître au Bulletin de la S.M.F.*
- [Bo95c] L. Bonavero. Fonctions méromorphes et fibrés en droites : vers les variétés de Moishezon. *À paraître aux Actes du Séminaire de Géométrie Différentielle de Montpellier*.
- [BSk74] J. Briançon, H. Skoda. Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de \mathbb{C}^n . *C.R. Acad. Sc. Paris, sér. A 278 (1974) 949-951*.
- [Cle83] H. Clemens. Homological equivalence, modulo algebraic equivalence, is not finitely generated. *IHES 58 (1983), 19-38*.
- [CKM88] H. Clemens, J. Kollár, S. Mori. Higher dimensional complex geometry. *Astérisque 166 (1988)*.
- [Dem85] J.-P. Demailly. Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d'' cohomologie. *Ann. Inst. Fourier 35, (1985), 189-229*.

- [Dem89] J.-P. Demailly. Transcendental proof of a generalized Kawamata-Viehweg vanishing theorem. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 309 (1989) 123-126 et *Proceedings of the Conference "Geometrical and algebraical aspects in several complex variables" held at Cetraro, Univ. della Calabria, June (1989)*.
- [Dem90] J.-P. Demailly. Singular hermitian metrics on positive line bundles. *Proc. Conf. Complex algebraic varieties (Bayreuth, April 2-6, 1990)*, edited by K. Hulek, T. Peternell, M. Schneider, F. Schreyer, *Lecture Notes in Math.*, Vol. 1507, Springer-Verlag, Berlin, (1992).
- [Dem92] J.-P. Demailly. Regularization of closed positive currents and Intersection Theory. *J. Alg. Geom.* 1 (1992) 361-409.
- [Dem94] J.-P. Demailly. L^2 vanishing theorems for positive line bundles and adjunction theory. *C.I.M.E. Notes, Prépublication de l'Institut Fourier n° 288 (1994)*.
- [DPS94] J.-P. Demailly, T. Peternell, M. Schneider. Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles. *J. Algebraic Geometry* 3 (1994) 295-345.
- [EsV92] H. Esnault, E. Viehweg. Lectures on vanishing theorems. *DMV Seminar, Band 20, Birkhäuser Verlag, (1992)*.
- [FuN72] A. Fujiki, S. Nakano, Supplement to "On the inverse of monoidal transformations". *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 7 (1972) 637-644.
- [GrR70] H. Grauert, O. Riemenschneider. Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen. *Invent. Math.* 11 (1970) 263-292.
- [Gau77] P. Gauduchon. Le théorème de l'excentricité nulle. *C.R.A.S., A, t.285 (1977) 387-390*.
- [G-H78] P.A. Griffiths, J. Harris. Principles of algebraic geometry. *Wiley, New York (1978)*.
- [Gro62] A. Grothendieck. Fondements de la géométrie algébrique. *Sec. Math. Paris (1962)*.
- [Har77] R. Hartshorne. Algebraic Geometry. *Springer (1977)*.
- [Hir64] H. Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. *Ann. of Math.* 79 (1964) 109-326.
- [Hir75] H. Hironaka. Flattening theorem in complex analytic geometry. *Am. J. Math.* 97 (1975) 503-547.
- [Ion86] P. Ionescu. Generalized adjunction and applications. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 99 (1986) 457-472.
- [JiS93] S. Ji, B. Shiffman. Properties of compact complex manifolds carrying closed positive currents. *J. Geom. Anal.* 3, No.1, 37-61 (1993).
- [Kat86] S. Katz. On the finiteness of rational curves on quintic threefolds. *Comp. Math.* 60 (1986) 151-162.

- [Kaw82] Y. Kawamata. A generalisation of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem. *Math. Ann.* 261 (1982) 43-46.
- [Kaw89] Y. Kawamata. Small contractions of four dimensional algebraic manifolds. *Math. Ann.* 284 (1989) 595-600.
- [KMM87] Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki. Introduction to the minimal model problem. *Adv. Studies in Math.* 10 (1987) 283-360.
- [Kle66] S.L. Kleiman. Toward a numerical theory of ampleness. *Ann. of Math.* 84 (1966) 293-344.
- [KoO73] S. Kobayashi, T. Ochiai. Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics. *J. Math. Kyoto Univ.* 13 (1973), 31-47.
- [Kod54] K. Kodaira. On Kähler varieties of restricted type. *Ann. of Math.* 60 (1954) 28-48.
- [Kod62] K. Kodaira. A theorem of completeness of characteristic systems for analytic families of compact submanifolds of complex manifolds. *Ann. of Math.* 75 (1962) 146-162.
- [Kol91] J. Kollár. Flips, flops, minimal models. *Surveys in Diff. Geom.* 1 (1991), 113-199.
- [Kol94] J. Kollár. Rational curves on algebraic varieties. *Preprint (1994)*.
- [Laz84] R. Lazarsfeld. Some applications of the theory of positive bundles. *Complete Intersections (ed. S. Greco - R. Strano), Springer Lecture Notes vol. 1092 (1984), 29-61*.
- [Laz93] R. Lazarsfeld (with the assistance of G. Fernández del Busto). Lectures on linear series. *Park City, IAS Mathematics Series, Vol. 3, (1993)*.
- [L-T74] M. Lejeune-Jalabert, B. Teissier. Clôture intégrale des idéaux et équisingularité. *Séminaire Lejeune-Teissier, Centre de Mathématiques École Polytechnique (1974)*.
- [Moi67] B. Moishezon. On n dimensional compact varieties with n independent meromorphic functions. *Amer. Math. Soc., Translations 63 (1967), 51-177*.
- [Mor82] S. Mori. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective. *Ann. of Math.* 116 (1982), 133-176.
- [Nad89] A.M. Nadel. Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 86 (1989) 7299-7300 et *Annals of Math.*, 132 (1990), 549-596.
- [Nak87] I. Nakamura. Moishezon threefolds homeomorphic to \mathbb{P}^3 . *J. Math. Soc. Japan*, 39 (1987), 522-535.
- [Ogu94] K. Oguiso. Two remarks on Calabi-Yau Moishezon threefolds. *J. reine angew. Math.* 452 (1994), 153-161.
- [Pau95] M. Paun. Sur l'effectivité numérique des images inverses de fibrés en droites. *En cours de rédaction*.
- [Pet91] T. Peternell. Ample vector bundles on Fano manifolds. *Int. J. Math.* 2, No.3, (1991) 311-322.

- [Pet95] T. Peternell. Moishezon manifolds and rigidity theorems. *Preprint (1995)*.
- [S-S85] B. Shiffman, A.J. Sommese. Vanishing theorems on complex manifolds. *Progress in Math. Vol 56 Birkhäuser (1985)*.
- [Sie55] C.L. Siegel. Meromorphic Funktionen auf kompakten Mannigfaltigkeiten. *Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Math.-Phys. Klasse 4 (1955) 71-77*.
- [Siu84] Y.-T. Siu. A vanishing theorem for semi-positive line bundles over non-Kähler manifolds. *J. Diff. Geom. 19 (1984), 431-452*.
- [Siu85] Y.-T. Siu. Some recent results in complex manifolds theory related to vanishing theorems for the semi-positive case. *L.N.M. 1111, Springer-Verlag, Berlin and New-York, (1985), 169-192*.
- [Siu93] Y.-T. Siu. An effective Matsusaka big theorem. *Ann. Inst. Fourier 43 (1993) 1387-1405*.
- [Siu94] Y.-T. Siu. Effective Very Ampleness. *Preprint à paraître dans Inventiones Math.*
- [Tra91] S. Trapani. Numerical criteria for the positivity of the difference of ample divisors. *Math. Zeits. 219 (1995) 387-402*.
- [Vie82] E. Viehweg. Vanishing theorems. *J. reine angew. Math. 335 (1982) 1-8*.
- [Wis91] J.A. Wiśniewski. On contractions of extremal rays on Fano manifolds. *J. reine angew. Math. 417 (1991) 141-157*.
- [Yau93] S.-T. Yau. Open problems in geometry. *Chern, a great geometer of the twentieth century, edited by S.-T. Yau. International Press Co. Ltd. Hong-Kong. (1992)*.