

## Chapitre VII

### Noyau de Szegö et calcul numérique de l'application conforme de Riemann

Ce chapitre est tiré de manière essentielle de travaux effectués par Norberto Kerzman et Manfred Trummer au début des années 1980.

*Notations.* Soit  $P$  une partie de  $\mathbb{R}^n$  et  $I$  un intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$ . A toute fonction continue  $K(t, s)$  sur  $P \times I$ , on associe un opérateur  $\mathbb{K}$  de  $L^1(I)$  à valeurs dans l'espace  $\mathcal{C}(P)$  des fonctions continues sur  $P$ , défini par

$$\mathbb{K}u(t) = \int_I K(t, s) u(s) ds, \quad t \in P.$$

La fonction  $K$  sera appelée *noyau de l'opérateur*  $\mathbb{K}$ . Pour  $P = I$  et  $u, v \in L^2(I)$ , le théorème de Fubini donne

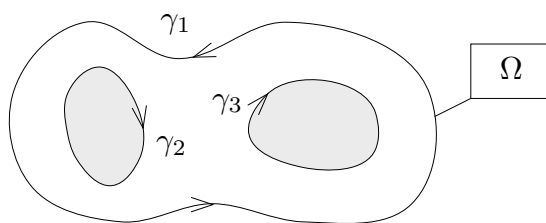
$$\langle \mathbb{K}u, v \rangle = \int_{I \times I} K(t, s) u(s) \bar{v}(t) ds dt$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$|\langle \mathbb{K}u, v \rangle| \leq \|K\|_{L^2(I \times I)} \|u\|_2 \|v\|_2.$$

Par conséquent  $\|\mathbb{K}\| \leq \|K\|_2$ , et un argument de densité montre que  $\mathbb{K}$  définit un opérateur continu  $L^2(I) \rightarrow L^2(I)$  pour tout noyau  $K \in L^2(I \times I)$ .

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe borné du plan complexe  $\mathbb{C}$  dont la frontière  $\partial\Omega$  est une réunion de courbes fermées de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ .



On désigne par  $\mathcal{O}(\Omega)$  l'espace des fonctions holomorphes sur  $\Omega$ , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Par ailleurs, on note  $ds$  la mesure de longueur d'arc sur  $\partial\Omega$  et  $s$  l'abscisse curviligne sur chaque composante connexe, calculée à partir d'une origine quelconque. Enfin  $L^p(\partial\Omega)$  désigne l'espace des fonctions  $L^p$  à valeurs complexes sur  $\partial\Omega$  muni de la mesure  $ds$ .

## 1. Transformation de Hilbert

Si  $f$  est une fonction continue sur  $\overline{\Omega}$  et holomorphe dans  $\Omega$ , la formule de Cauchy donne

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-w} dz, \quad w \in \Omega.$$

Notons  $z = \gamma(s)$  la paramétrisation de  $\partial\Omega$  par l'abscisse curviligne. On a  $dz = \tau(z) ds$  où  $\tau(z) = \gamma'(s)$  est le vecteur unitaire tangent à  $\partial\Omega$  au point  $z$ . Par suite

$$f(w) = \int_{\partial\Omega} H(w, z) f(z) ds \quad \text{avec}$$

$$H(w, z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\tau(z)}{z-w}, \quad w \in \Omega, \quad z \in \partial\Omega.$$

**Définition 1.1.** La fonction  $H(w, z)$  est appelée *noyau de Cauchy de  $\Omega$* . Si  $u$  est une fonction sur  $\partial\Omega$ , la transformée de Hilbert de  $u$  est définie par

$$\mathbb{H}u(w) = \int_{\partial\Omega} H(w, z) u(z) ds, \quad w \in \Omega.$$

Comme le noyau  $H$  est continu sur  $\Omega \times \partial\Omega$ ,  $\mathbb{H}u$  est bien définie dès que  $u \in L^1(\partial\Omega)$ , et donc aussi si  $u \in L^p(\partial\Omega) \subset L^1(\partial\Omega)$ ,  $p \geq 1$ .

**Proposition 1.2.** Pour tout  $u \in L^1(\partial\Omega)$ ,  $\mathbb{H}u$  est holomorphe sur  $\Omega$ , et l'opérateur  $\mathbb{H} : L^p(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega)$  est continu.

*Démonstration.* Le noyau  $H(w, z)$  est différentiable par rapport à  $w$  et on a

$$\frac{\partial H}{\partial w}(w, z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\tau(z)}{(z-w)^2}, \quad \frac{\partial H}{\partial \overline{w}}(w, z) = 0.$$

Les dérivées partielles  $\partial H / \partial w$  et  $\partial H / \partial \overline{w}$  sont donc continues sur  $\Omega \times \partial\Omega$ . D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, on en déduit que  $\mathbb{H}u$  est différentiable et que

$$\frac{\partial}{\partial w} \mathbb{H}u(w) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2i\pi} \frac{\tau(z)}{(z-w)^2} u(z) ds, \quad \frac{\partial}{\partial \overline{w}} \mathbb{H}u(w) = 0,$$

donc  $\mathbb{H}u$  est holomorphe sur  $\Omega$ . On a par ailleurs

$$|H(w, z)| = (2\pi|z-w|)^{-1} \leq (2\pi d(w, \partial\Omega))^{-1}.$$

Si  $K$  est une partie compacte de  $\Omega$ , on obtient

$$\sup_{w \in K} |\mathbb{H}u(w)| \leq (2\pi d(K, \partial\Omega))^{-1} \|u\|_1,$$

donc  $\mathbb{H} : L^1(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega)$  est continu. Le résultat est vrai aussi pour  $L^p(\partial\Omega)$  puisque l'inclusion  $L^p(\partial\Omega) \rightarrow L^1(\partial\Omega)$  est continue.  $\square$

**Formule 1.3.** Si  $u \in C^1(\partial\Omega)$ , on définit la dérivée de  $u$  le long de  $\partial\Omega$  par

$$u'(\gamma(s)) = \frac{1}{\gamma'(s)} \frac{d}{ds} [u(\gamma(s))].$$

Alors  $(\mathbb{H}u)' = \mathbb{H}(u')$  sur  $\Omega$ .

En effet, comme  $dz/ds = \gamma'(s) = \tau(z)$  le long de  $\partial\Omega$ , le calcul ci-dessus suivi d'une intégration par parties montre que

$$\begin{aligned} (\mathbb{H}u)'(w) &= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2i\pi} \frac{\tau(z)}{(z-w)^2} u(z) ds = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2i\pi} \frac{d}{ds(z)} \left[ \frac{-1}{z-w} \right] u(\gamma(s)) ds \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2i\pi} \frac{1}{z-w} \frac{d}{ds} [u(\gamma(s))] ds = \int_{\partial\Omega} H(w, z) u'(z) ds = \mathbb{H}(u')(w). \end{aligned}$$

**Exemple 1.4.**  $\Omega =$  disque unité  $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C}; |w| < 1\}$ .

La paramétrisation de  $\partial\mathbb{D}$  par l'abscisse curviligne s'écrit

$$z = \gamma(s) = e^{is}, \quad s \in [0, 2\pi].$$

On a  $\gamma'(s) = ie^{is} = iz$ , donc le noyau de Cauchy de  $\mathbb{D}$  est donné par

$$H^{\mathbb{D}}(w, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - w} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - w e^{-is}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - w\bar{z}}.$$

Puisque  $|w| < 1$ ,  $H^{\mathbb{D}}(w, z)$  est développable en série entière normalement convergente sur tout compact de  $\mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}$ :

$$H^{\mathbb{D}}(w, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} w^n e^{-ins}.$$

On peut donc écrire

$$\mathbb{H}^{\mathbb{D}}u(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{u}(n) w^n \quad \text{où} \quad \hat{u}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{is}) e^{-ins} ds, \quad n \in \mathbb{Z}$$

est le  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $u$ . Si  $u \in L^2(\partial\mathbb{D})$ , la fonction  $u$  s'écrit elle-même comme somme d'une série de Fourier  $L^2$ -convergente

$$u(e^{is}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}(n) e^{ins}$$

et d'après la formule de Parseval, la transformation de Fourier est une isométrie d'espaces de Hilbert:

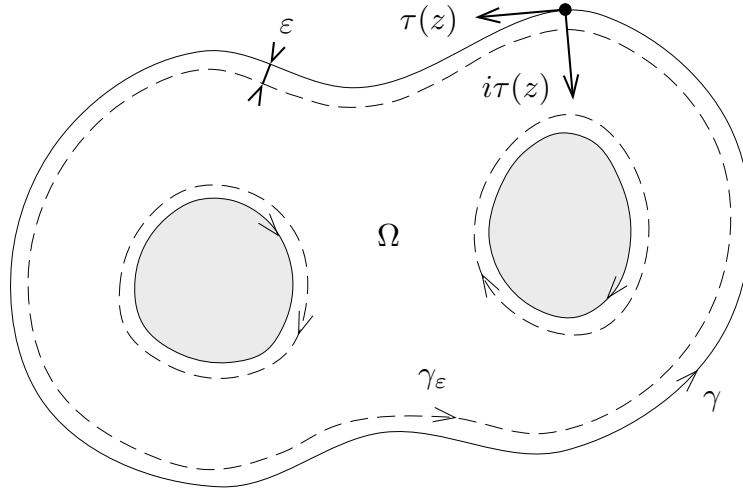
$$\begin{aligned} L^2(\partial\mathbb{D}) &\longrightarrow l^2(\mathbb{Z}) \\ u &\longmapsto \sqrt{2\pi}(\hat{u}(n))_{n \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

□

Revenons au cas général. On considère pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit la courbe de classe  $C^{k-1}$

$$\gamma_\varepsilon(s) = \gamma(s) + \varepsilon i \gamma'(s) = z + \varepsilon i \tau(z), \quad z = \gamma(s) \in \partial\Omega,$$

où  $i\gamma'(s)$  est le vecteur normal rentrant à  $\partial\Omega$ .



Notre objectif est d'étudier le comportement de  $\mathbb{H}u$  sur la courbe  $\gamma_\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Pour cela, on définit un opérateur  $\mathbb{H}_\varepsilon$  sur  $L^2(\partial\Omega)$  à valeurs dans  $C^{k-1}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$  par

$$\mathbb{H}_\varepsilon u(w) = \mathbb{H}u(w + \varepsilon i\tau(w)) \quad \text{i.e.} \quad \mathbb{H}_\varepsilon u(\gamma(s)) = \mathbb{H}u(\gamma_\varepsilon(s)).$$

L'opérateur  $\mathbb{H}_\varepsilon$  est associé au noyau

$$H_\varepsilon(w, z) = H(w + \varepsilon i\tau(w), z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\tau(z)}{z - w - \varepsilon i\tau(w)}.$$

**Théorème 1.5.** (a) Si  $u \in L^2(\partial\Omega)$ , alors  $\mathbb{H}_\varepsilon u$  converge dans  $L^2(\partial\Omega)$  vers une limite notée  $\mathbb{H}_0 u$ , où  $\mathbb{H}_0$  est un opérateur continu sur  $L^2(\partial\Omega)$ . De plus, il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\varepsilon, u$  telle que

$$\|\mathbb{H}_\varepsilon u\|_2 \leq C \|u\|_2.$$

(b) Si  $u \in C^q(\partial\Omega)$ ,  $1 \leq q \leq k$ , alors  $\mathbb{H}u$  se prolonge en une fonction de classe  $C^{q-1}$  sur  $\overline{\Omega}$ .

*Démonstration.* On montre d'abord le théorème lorsque  $\Omega = \mathbb{D}$ .

(a) On a par définition  $\gamma_\varepsilon(s) = (1 - \varepsilon)e^{is}$ , d'où

$$\mathbb{H}_\varepsilon^\mathbb{D} u(e^{is}) = \mathbb{H}^\mathbb{D} u((1 - \varepsilon)e^{is}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \varepsilon)^n \widehat{u}(n) e^{ins}.$$

Si  $\mathbb{H}_0^\mathbb{D}$  est l'opérateur obtenu en faisant  $\varepsilon = 0$  dans la formule ci-dessus, l'égalité de Parseval montre que  $\|\mathbb{H}_\varepsilon^\mathbb{D} u\|_2 \leq \|u\|_2$  pour tout  $\varepsilon$  et

$$\|\mathbb{H}_0^\mathbb{D} u - \mathbb{H}_\varepsilon^\mathbb{D} u\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} [1 - (1 - \varepsilon)^n]^2 |\widehat{u}(n)|^2$$

converge vers 0 quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

(b) La formule  $(\mathbb{H}u)' = \mathbb{H}(u')$  montre qu'il suffit de considérer le cas  $q = 1$ . Alors, comme  $u'$  est continue, la suite des coefficients de Fourier  $\widehat{u}(n)$  de  $u'$  est dans  $l^2(\mathbb{Z})$ . Par suite  $(\widehat{u}(n)) \in l^1(\mathbb{Z})$  grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz; il en résulte que la série  $\sum \widehat{u}(n) w^n$  converge normalement sur  $\overline{\mathbb{D}}$ , d'où  $\mathbb{H}^{\mathbb{D}}u \in C^0(\overline{\mathbb{D}})$ .

On se place maintenant dans le cas d'un ouvert quelconque  $\Omega$ . Si le bord  $\partial\Omega$  est une réunion de courbes  $\gamma_j$ , alors

$$\mathbb{H}u(w) = \sum_j \int_{\gamma_j} H(w, z) u(z) ds$$

et le terme d'indice  $j$  est holomorphe (donc  $C^\infty$ ) sur  $\mathbb{C} \setminus \{\gamma_j\}$ . On peut donc supposer que  $\partial\Omega$  est composé d'une seule courbe fermée, et après homothétie on se ramène au cas où  $\partial\Omega$  est de longueur  $2\pi$ . On a alors

$$\mathbb{H}u(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(\gamma(s))\gamma'(s)}{\gamma(s) - w} ds.$$

(a) Posons  $w = \gamma(t) \in \partial\Omega$ . Il vient

$$\mathbb{H}_\varepsilon u(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(\gamma(s))\gamma'(s)}{\gamma(s) - \gamma(t) - \varepsilon i\gamma'(t)} ds.$$

Comme  $\gamma$  est de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , la formule de Taylor avec reste intégral donne

$$\gamma(s) - \gamma(t) = (s - t)\gamma'(t) + (s - t)^2\varphi_1(t, s)$$

où  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  sont des fonctions dans  $C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ . On en déduit

$$\begin{aligned} \gamma(s) - \gamma(t) - \varepsilon i\gamma'(t) &= [s - t - \varepsilon i + (s - t)^2\varphi_2(t, s)]\gamma'(t) \\ &= -i[e^{i(s-t)} - 1 + \varepsilon + (s - t)^2\varphi_3(t, s)]\gamma'(t) \\ &= -i[e^{is} - (1 - \varepsilon)e^{it} + (s - t)^2\varphi_4(t, s)]e^{-it}\gamma'(t), \\ \mathbb{H}_\varepsilon u(w) &= \int_0^{2\pi} \frac{u(\gamma(s))\gamma'(s)e^{it}}{(e^{is} - (1 - \varepsilon)e^{it})\gamma'(t)} \left[1 - \frac{(s - t)^2\varphi_4(t, s)}{e^{is} - (1 - \varepsilon)e^{it} + (s - t)^2\varphi_4(t, s)}\right] \frac{ds}{2\pi}. \end{aligned}$$

Comme  $e^{i(t-s)}\gamma'(s)/\gamma'(t) = 1 + (s - t)\varphi_5(t, s)$ , on peut écrire

$$\mathbb{H}_\varepsilon u(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{is} u(\gamma(s))}{e^{is} - (1 - \varepsilon)e^{it}} ds + \int_{\partial\Omega} R_\varepsilon(t, s) u(\gamma(s)) ds$$

où  $R_\varepsilon(t, s)$  est de la forme

$$R_\varepsilon(t, s) = \frac{s - t}{e^{is} - (1 - \varepsilon)e^{it}} \left[ \varphi_5(t, s) + \frac{s - t}{\gamma(s) - \gamma_\varepsilon(t)} \varphi_6(t, s) \right].$$

Nous pouvons interpréter cette décomposition sous la forme

$$(\mathbb{H}_\varepsilon u) \circ \gamma = \mathbb{H}_\varepsilon^{\mathbb{D}}(u \circ \gamma) + \mathbb{R}_\varepsilon(u \circ \gamma),$$

où  $\mathbb{H}^{\mathbb{D}}$  est la transformation de Hilbert sur le disque. Il est facile de vérifier qu'on a des minoration

$$|e^{is} - (1 - \varepsilon)e^{it}| \geq C_1(|s - t| + \varepsilon), \quad |\gamma(s) - \gamma_\varepsilon(t)| \geq C_2(|s - t| + \varepsilon).$$

Par suite on a une majoration uniforme  $|R_\varepsilon(t, s)| \leq C_3$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 et l'opérateur  $\mathbb{R}_\varepsilon$  est de norme uniformément bornée. Le théorème de convergence dominée montre que l'opérateur  $\mathbb{R}_\varepsilon$  converge en norme vers l'opérateur  $\mathbb{R}_0$  associé au noyau  $R_0$ . Comme l'application  $u \mapsto u \circ \gamma$  est une isométrie de  $L^2(\partial\Omega)$  sur  $L^2([0, 2\pi]) \simeq L^2(\partial\mathbb{D})$ , il en résulte, modulo cette isométrie, que  $\mathbb{H}_\varepsilon$  converge vers  $\mathbb{H}_0 = \mathbb{H}_0^{\mathbb{D}} + \mathbb{R}_0$ . On notera que  $R_0 \in C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ .

(b) On peut encore supposer  $q = 1$  ici. Si  $u \in C^1(\partial\Omega)$ , on sait d'après la première partie que  $(\varepsilon, s) \mapsto \mathbb{H}_\varepsilon^{\mathbb{D}}(u \circ \gamma)(s)$  s'étend continument à  $[0, \varepsilon_0] \times [0, 2\pi]$ . Il en est de même pour  $\mathbb{R}_\varepsilon(u \circ \gamma)(s)$  d'après le théorème de convergence dominée, d'où  $\mathbb{H}u \in C^0(\overline{\Omega})$ .  $\square$

## 2. Espace de Hardy $\mathcal{H}^2(\partial\cdot)$

A toute fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ , on associe les fonctions  $f_\varepsilon$  sur  $\partial\Omega$  définies par

$$f_\varepsilon(\gamma(s)) = f(\gamma_\varepsilon(s)).$$

**Théorème 2.1.** *Si  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ , il y a équivalence entre les propriétés suivantes:*

- (a)  $f_\varepsilon$  converge dans  $L^2(\partial\Omega)$  vers une fonction  $f_0$ .
- (b) La norme  $\|f_\varepsilon\|_2$  reste bornée quand  $\varepsilon$  tend vers 0.
- (c) Il existe une suite  $\varepsilon_p > 0$  tendant vers 0 telle que la suite  $\|f_{\varepsilon_p}\|_2$  soit bornée.
- (d)  $f$  est la transformée de Hilbert  $\mathbb{H}u$  d'une fonction  $u \in L^2(\partial\Omega)$ .

On a alors  $f = \mathbb{H}f_0$ .

*Démonstration.* Il est évident que (a)  $\implies$  (b)  $\implies$  (c) et l'implication (d)  $\implies$  (a) résulte du théorème 1.5, avec  $f_0 = \mathbb{H}_0 u$ .

Pour démontrer l'implication restante (c)  $\implies$  (d), nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 2.2.** *Soit  $E$  un espace de Hilbert séparable et  $(x_n)$  une suite bornée de  $E$ . Alors il existe une sous-suite  $(x_{n(p)})$  qui converge faiblement vers un élément  $\xi \in E$ , c'est-à-dire telle que*

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \langle x_{n(p)}, y \rangle = \langle \xi, y \rangle, \quad \forall y \in E.$$

*En outre, si  $(y_p)$  converge en norme vers  $y$ , alors  $\langle x_{n(p)}, y_p \rangle$  converge vers  $\langle \xi, y \rangle$ .*

*Démonstration.* Soit  $(e_l)_{l \in \mathbb{N}}$  une base hilbertienne de  $E$ ,  $x_n = \sum x_{n,l} e_l$  et  $M$  un majorant de  $\|x_n\|$ . Chaque suite  $(x_{n,l})_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $\mathbb{C}$ ; il existe donc une partie  $I_0 \subset \mathbb{N}$  telle que la sous-suite  $(x_{n,0})_{n \in I_0}$  ait une limite  $\xi_0$ , puis une partie  $I_1 \subset I_0$  telle que  $(x_{n,1})_{n \in I_1}$  converge vers une limite  $\xi_1$  et ainsi de suite. Soit  $n(p)$

le  $p$ -ième élément de  $I_p$ . La sous-suite diagonale  $x_{n(p)}$  a la propriété que chaque coordonnée  $x_{n(p),l}$  tend vers une limite  $\xi_l$ , et on voit facilement que  $\sum |\xi_l|^2 \leq M^2$ , de sorte que le vecteur  $\xi = \sum \xi_l e_l$  est bien défini. Comme

$$\left| \sum_{l \geq L} x_{n(p),l} \bar{y}_l \right| \leq M \left( \sum_{l \geq L} |y_l|^2 \right)^{1/2}$$

où le second membre converge vers 0 quand  $L$  tend vers  $+\infty$ , il est élémentaire de vérifier que  $\langle x_{n(p)}, y \rangle$  converge vers  $\langle \xi, y \rangle$  pour tout  $y \in E$ . La dernière affirmation résulte de ce que

$$|\langle x_{n(p)}, y - y_p \rangle| \leq M \|y - y_p\|. \quad \square$$

*Démonstration de (c)  $\implies$  (d).* Quitte à extraire une sous-suite de  $(f_{\varepsilon_p})$ , on peut supposer que  $(f_{\varepsilon_p})$  converge faiblement vers un élément  $u \in L^2(\partial\Omega)$ . Pour  $w \in \Omega$  fixé, la formule de Cauchy appliquée au chemin  $\gamma_\varepsilon$  donne

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - w} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} f_\varepsilon(\gamma(s)) \frac{\gamma'_\varepsilon(s)}{\gamma_\varepsilon(s) - w} ds$$

Pour  $\varepsilon = \varepsilon_p$ , ceci peut s'interpréter comme un produit scalaire  $\langle f_{\varepsilon_p}, g_p \rangle$  où  $(f_{\varepsilon_p})$  converge faiblement vers  $u$  et où  $(g_p)$  converge uniformément (donc en norme  $L^2$ ) vers  $s \mapsto \overline{H}(w, \gamma(s))$ . A la limite, on obtient par conséquent

$$f(w) = \langle u, \overline{H}(w, \bullet) \rangle = \mathbb{H}u(w),$$

soit  $f = \mathbb{H}u$ . En outre, si (a) est vérifié, on peut prendre  $u = f_0$  dans (c), donc  $f = \mathbb{H}f_0$ .  $\square$

**Définition 2.3.** L'ensemble des applications  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  vérifiant l'une des propriétés équivalentes 2.1 (a), (b), (c), (d), muni de la norme  $\|f\|_2 = \|f_0\|_2$ , est noté  $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ .

L'application  $f \mapsto f_0$  définit donc une isométrie de  $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$  sur un sous-espace  $\mathcal{H}_0^2(\partial\Omega)$  de l'espace de Hilbert  $L^2(\partial\Omega)$ . La formule  $f = \mathbb{H}f_0$  implique  $f_0 = \mathbb{H}_0 f_0$  pour tout  $f_0 \in \mathcal{H}_0^2(\partial\Omega)$ , et comme  $\mathbb{H}_0 u = (\mathbb{H}u)_0 \in \mathcal{H}_0^2(\partial\Omega)$  pour tout  $u \in L^2(\partial\Omega)$  on voit que l'opérateur

$$\mathbb{H}_0 : L^2(\partial\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}_0^2(\partial\Omega)$$

est un projecteur continu. Il en résulte que  $\mathcal{H}_0^2(\partial\Omega) = \text{Ker}(1 - \mathbb{H}_0)$  est un sous-espace fermé de  $L^2(\partial\Omega)$ . Pour simplifier les notations, on conviendra dans la suite d'identifier  $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$  et son image  $\mathcal{H}_0^2(\partial\Omega)$ , une fonction  $f \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$  et sa limite au bord  $f_0$ , l'opérateur  $\mathbb{H}$  et sa limite au bord  $\mathbb{H}_0$ .

**Exemple 2.4.** Si  $\Omega = \mathbb{D}$ , les calculs faits en 1.4 donnent pour tout  $u \in L^2(\partial\Omega)$  :

$$u(e^{is}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}(n) e^{ins}, \quad \mathbb{H}u(e^{is}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{u}(n) e^{ins}.$$

La transformation de Fourier donne donc un isomorphisme  $L^2(\partial\mathbb{D}) \simeq l^2(\mathbb{Z})$  par lequel  $\mathcal{H}^2(\partial\mathbb{D})$  s'identifie au sous-espace  $l^2(\mathbb{N})$  des fonctions dont les coefficients de Fourier  $\widehat{u}(n)$ ,  $n < 0$ , sont nuls. Dans ce cas,  $\mathbb{H}$  est la projection orthogonale  $l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$ .  $\square$

Dans le cas général, une condition nécessaire pour qu'une fonction  $u$  de  $L^2(\partial\Omega)$  soit dans  $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$  est que  $\int_{\partial\Omega} u(z)f(z)dz = 0$  pour toute fonction  $f \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ , en particulier pour  $f(z) = z^n$ ,  $n \geq 0$ . Ceci résulte du théorème de Cauchy appliqué sur  $\gamma_\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, compte tenu du fait que  $u_\varepsilon \rightarrow u_0$  et  $f_\varepsilon \rightarrow f_0$  dans  $L^2$ . Comme nous le verrons plus loin, le projecteur  $\mathbb{H}$  n'est orthogonal que si  $\Omega$  est un disque.

**Théorème 2.5.** *L'ensemble des fonctions holomorphes sur un voisinage de  $\overline{\Omega}$  est dense dans  $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ .*

*Démonstration.* Si  $f \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ , on a la représentation de Cauchy

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{f_0(\gamma(s))}{\gamma(s) - w} \gamma'(s) ds.$$

Soit, pour  $\varepsilon > 0$  assez petit,  $\tilde{\gamma}_\varepsilon(s) = \gamma(s) - \varepsilon i\gamma'(s)$  la courbe des points de  $\mathbb{C}\Omega$  situés à la distance  $\varepsilon$  de  $\partial\Omega$ . Il est clair que

$$\tilde{f}_\varepsilon(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{f_0(\gamma(s))}{\tilde{\gamma}_\varepsilon(s) - w} \gamma'(s) ds$$

est holomorphe sur l'ouvert des points situés à une distance  $< \varepsilon$  de  $\overline{\Omega}$ . Des calculs analogues à ceux faits dans la démonstration du théorème 1.5 montrent que  $\tilde{f}_\varepsilon$  converge vers  $f$  dans  $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$  : on vérifie d'abord le résultat pour  $\Omega = \mathbb{D}$  ; on voit ensuite que  $(\tilde{f}_\varepsilon)|_{\partial\Omega}$  converge dans  $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$  par un développement de Taylor du noyau, et la limite est  $f$  dans  $\mathcal{O}(\Omega)$ .  $\square$

### 3. Adjoint de l'opérateur $\mathbb{H}$

Si  $I$  est un intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$  et si  $\mathbb{K}$  est l'opérateur sur  $L^2(I)$  associé à un noyau  $K \in L^2(I \times I)$ , il est facile de voir que l'opérateur adjoint  $\mathbb{K}^*$  est défini par le noyau

$$K^*(t, s) = \overline{K}(s, t).$$

Cette formule ne peut toutefois être appliquée directement à  $\mathbb{H}$ , car le noyau  $H$  ne se prolonge pas en un élément de  $L^2(\partial\Omega \times \partial\Omega)$  ni même de  $L^1(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ . Pour contourner cette difficulté, on cherche à évaluer l'opérateur différence  $\mathbb{H}^* - \mathbb{H}$ , qui, comme on le verra plus loin, a le mérite d'être associé à un vrai noyau. On considère les opérateurs approchés  $\mathbb{H}_\varepsilon$ ,  $\mathbb{H}_\varepsilon^*$  définis par les noyaux continus

$$H_\varepsilon(w, z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\tau(z)}{z - w - \varepsilon i\tau(w)},$$

$$H_\varepsilon^*(w, z) = \overline{H}_\varepsilon(z, w) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\overline{\tau}(w)}{\overline{z} - \overline{w} - \varepsilon i\overline{\tau}(z)},$$



et l'opérateur différence  $\mathbb{A}_\varepsilon = \mathbb{H}_\varepsilon^* - \mathbb{H}_\varepsilon$  associé au noyau

$$A_\varepsilon(w, z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{(z - w)\overline{\tau}(w) - (\overline{z} - \overline{w})\tau(z)}{(z - w - \varepsilon i\tau(w))(\overline{z} - \overline{w} - \varepsilon i\overline{\tau}(z))}.$$

Pour  $z = \gamma(s)$ ,  $w = \gamma(t)$  assez voisins, on voit comme dans 1.5 qu'il existe des fonctions  $\varphi_j \in C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$  telles que

$$\begin{aligned} z - w &= (s - t)\gamma'(t) + (s - t)^2\varphi_1(t, s), \\ |z - w|^2 &= (s - t)^2[1 + (s - t)\varphi_2(t, s)]. \end{aligned}$$

En substituant  $\gamma'(t) = \tau(w)$  et  $(s - t)^2$  en fonction de  $|z - w|^2$  dans la première ligne, il vient

$$z - w = (s - t)\tau(w) + |z - w|^2\varphi_3(w, z).$$

En échangeant les rôles de  $z$  et  $w$ , on obtient

$$\begin{aligned} z - w &= (s - t)\tau(z) - |z - w|^2\varphi_3(z, w), \quad \text{d'où} \\ A_\varepsilon(w, z) &= \frac{|z - w|^2 A(w, z)}{(z - w - \varepsilon i\tau(w))(\overline{z} - \overline{w} - \varepsilon i\overline{\tau}(z))} \quad \text{avec} \\ A(w, z) &= \frac{1}{2i\pi} (\varphi_3(w, z)\overline{\tau}(w) + \overline{\varphi}_3(z, w)\tau(z)). \end{aligned}$$

On obtient  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon(w, z) = A(w, z)$  pour  $w \neq z$ , avec  $A(w, z) \in C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ , et de plus on a une majoration uniforme  $|A_\varepsilon(w, z)| \leq C|A(w, z)|$ . Ceci entraîne que  $\mathbb{A}_\varepsilon$  converge en norme vers l'opérateur  $\mathbb{A}$  de noyau  $A$ . Pour tout  $u, v \in L^2(\partial\Omega)$  on obtient donc

$$\langle \mathbb{H}u, v \rangle = \lim \langle \mathbb{H}_\varepsilon u, v \rangle = \lim \langle u, \mathbb{H}_\varepsilon^* v \rangle = \lim \langle u, \mathbb{H}_\varepsilon v + \mathbb{A}_\varepsilon v \rangle = \langle u, (\mathbb{H} + \mathbb{A})v \rangle$$

ce qui prouve bien que  $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} + \mathbb{A}$ . On a d'autre part

$$\begin{aligned} \varphi_3(w, w) &= \varphi_1(t, t) = \frac{1}{2}\gamma''(t), \quad \text{d'où} \\ A(w, w) &= \frac{1}{4i\pi} (\gamma''(t)\overline{\gamma}'(t) + \overline{\gamma}''(t)\gamma'(t)) = \frac{1}{4i\pi} \frac{d}{dt} |\gamma'(t)|^2 = 0 \end{aligned}$$

car  $|\gamma'(t)| = 1$ . On peut donc énoncer:

**Théorème 3.1.** *L'opérateur  $\mathbb{A} = \mathbb{H}^* - \mathbb{H}$  est associé à un noyau  $A \in C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$  défini par*

$$A(w, z) = \frac{1}{2i\pi} \left( \frac{\overline{\tau}(w)}{\overline{z} - \overline{w}} - \frac{\tau(z)}{z - w} \right), \quad w, z \in \partial\Omega.$$

Ce noyau  $A$  est antisymétrique, c'est-à-dire que  $\overline{A}(z, w) = -A(w, z)$ , et de plus  $A(w, w) \equiv 0$ .

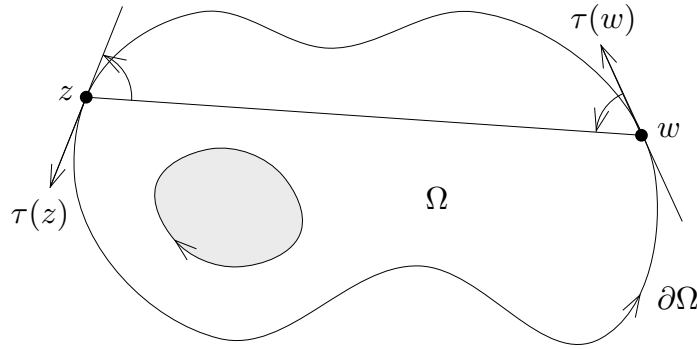
Pour que le projecteur  $\mathbb{H}$  soit orthogonal, il faut et il suffit que  $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}$ , ce qui équivaut à dire que  $A \equiv 0$ .

**Corollaire 3.2.** *Le projecteur  $\mathbb{H}$  est orthogonal si et seulement si  $\Omega$  est un disque.*

*Démonstration.* Si  $A \equiv 0$ , on a nécessairement

$$\text{angle}([z, w], \tau(z)) = -\text{angle}([z, w], \tau(w)) \quad \forall w, z \in \partial\Omega,$$

car les membres de gauche et de droite représentent les arguments respectifs des termes  $\tau(z)/(z - w)$  et  $\bar{\tau}(w)/(\bar{z} - \bar{w})$  intervenant dans  $A(w, z)$ .



En déplaçant la corde  $[z, w]$  parallèlement à une direction fixée, on en déduit que  $\partial\Omega$  doit être invariant par symétrie autour de la médiatrice de chacune de ses cordes. Considérons deux cordes faisant entre elles un angle irrationnel, et le point d'intersection  $P$  de leurs médiatrices. Les deux symétries correspondantes engendrent un groupe dense de rotations de centre  $P$ . Comme  $\partial\Omega$  est fermé,  $\partial\Omega$  est nécessairement une réunion de cercles de centre  $P$ , à savoir un cercle si  $\Omega$  est un disque, ou deux cercles si  $\Omega$  est une couronne. Mais une couronne n'est invariante que par les symétries autour des médiatrices des cordes dont les extrémités sont sur un même cercle. Par conséquent  $\Omega$  est un disque.  $\square$

## 4. Noyau de Szegő

Le *projecteur de Szegő* est par définition le projecteur orthogonal  $\mathbb{S}$  de  $L^2(\partial\Omega)$  sur  $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ . On cherche ici à montrer que  $\mathbb{S}$  est, en un certain sens, associé à un noyau  $S$ . Rappelons que  $\mathbb{H}$  est orthogonal dans le cas du disque, par suite  $\mathbb{S}^{\mathbb{D}} = \mathbb{H}^{\mathbb{D}}$ .

Soit  $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  une base hilbertienne de  $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ . L'image d'une fonction  $u \in L^2(\partial\Omega)$  par le projecteur  $\mathbb{S}$  est alors donnée par la série  $L^2$ -convergente

$$\mathbb{S}u(w) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle u, \psi_j \rangle \psi_j(w) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \psi_j(w) \int_{\partial\Omega} u(z) \bar{\psi}_{j,0}(z) ds,$$

où  $\psi_{j,0}$  désigne la limite au bord de  $\psi_j$ . Ceci suggère d'introduire le noyau

$$S(w, z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \psi_j(w) \bar{\psi}_j(z), \quad w, z \in \Omega,$$

qui sera appelé *noyau de Szegő* de  $\Omega$ .

**Lemme 4.1.** *La série  $\sum_{j \in \mathbb{N}} |\psi_j(w)|^2$  converge uniformément sur tout compact de  $\Omega$ . Le noyau  $S(w, z)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega \times \Omega$ , holomorphe en  $w$  et antiholomorphe en  $z$ . De plus, on a la majoration*

$$S(w, z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} |\psi_j(w)|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|z - w|^2} ds.$$

*Démonstration.* Comme  $\psi_j \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ , on a

$$\psi_j(w) = \mathbb{H}\psi_j(w) = \langle \psi_j, \overline{H}(w, \bullet) \rangle = \langle \psi_j, \mathbb{S}\overline{H}(w, \bullet) \rangle.$$

Par conséquent,  $(\psi_j(w))$  est la suite des coordonnées de la fonction  $\mathbb{S}\overline{H}(w, \bullet)$  dans la base  $(\psi_j)$ , ce qui donne

$$\sum_j |\psi_j(w)|^2 = \|\mathbb{S}\overline{H}(w, \bullet)\|^2 \leq \|H(w, \bullet)\|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|z - w|^2} ds.$$

L'application  $w \mapsto \overline{H}(w, \bullet)$  étant continue de  $\Omega$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ , on voit que la fonction  $w \mapsto \|\mathbb{S}\overline{H}(w, \bullet)\|^2$  est continue sur  $\Omega$ . Le lemme de Dini entraîne alors la convergence uniforme sur tout compact de la série de fonctions continues  $\sum |\psi_j(w)|^2$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que pour  $N$  tendant vers  $+\infty$ ,

$$\left( \sum_{j \geq N} |\psi_j(w) \overline{\psi_j}(z)| \right)^2 \leq \sum_{j \geq N} |\psi_j(w)|^2 \sum_{j \geq N} |\psi_j(z)|^2$$

converge uniformément vers 0 lorsque  $(w, z)$  décrit un compact quelconque de  $\Omega \times \Omega$ . Comme  $\sum \psi_j(w) \overline{\psi_j}(z)$  est une série de fonctions holomorphes en  $(w, \bar{z})$ , on en déduit que  $S$  est holomorphe en  $(w, \bar{z})$ , en particulier de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega \times \Omega$ .  $\square$

**Lemme 4.2.** *Pour  $w \in \Omega$  fixé et pour  $\varepsilon$  tendant vers 0, la fonction*

$$S_\varepsilon(w, \bullet) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \psi_j(w) \overline{\psi_{j,\varepsilon}}$$

*converge vers  $S_0(w, \bullet) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \psi_j(w) \overline{\psi_{j,0}}$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ . De plus*

$$\mathbb{S}u(w) = \int_{\partial\Omega} S_0(w, z) u(z) ds, \quad \forall u \in L^2(\partial\Omega).$$

*Démonstration.* Comme  $\mathbb{H} : L^2(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega)$  est continu,  $\mathbb{H}$  envoie une série  $L^2$ -convergente sur une série de fonctions holomorphes convergeant uniformément sur tout compact, d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{H} \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} \overline{\psi_j}(w) \psi_{j,0} \right) &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \overline{\psi_j}(w) \mathbb{H}\psi_{j,0} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \overline{\psi_j}(w) \psi_j = \overline{S(w, \bullet)}, \\ \mathbb{H}_\varepsilon \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} \overline{\psi_j}(w) \psi_{j,0} \right) &= \overline{S_\varepsilon(w, \bullet)}. \end{aligned}$$

Le théorème 1.5 entraîne que le membre de gauche converge dans  $L^2(\partial\Omega)$  vers  $\mathbb{H}_0(\sum_{j \in \mathbb{N}} \bar{\psi}_j(w) \psi_{j,0}) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \bar{\psi}_j(w) \psi_{j,0}$  (cet élément est dans  $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ ). La formule intégrale résulte immédiatement des considérations du début du § 4.

□

L'espace  $\mathcal{H}^2(\partial\mathbb{D})$  du disque admet la base hilbertienne  $(w^n/\sqrt{2\pi})_{n \in \mathbb{N}}$ , ce qui donne l'expression

$$S^{\mathbb{D}}(w, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} w^n \bar{z}^n = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - w\bar{z}}, \quad \forall (w, z) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}.$$

On voit que  $S_0^{\mathbb{D}}(w, z)$  coïncide bien avec  $H^{\mathbb{D}}(w, z)$  pour  $(w, z) \in \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}$ .

## 5. Formule intégrale reliant $S$ et $H$

L'idée centrale introduite par N. Kerzman est que l'on peut retrouver le projecteur orthogonal  $\mathbb{S}$  à partir du projecteur oblique  $\mathbb{H}$  (qui est connu explicitement). Comme  $\mathbb{S}$  et  $\mathbb{H}$  coïncident avec l'application identique sur  $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ , on a en effet

$$\mathbb{S}\mathbb{H} = \mathbb{H}, \quad \mathbb{H}\mathbb{S} = \mathbb{S}.$$

Prenons les adjoints dans la seconde égalité. Comme  $\mathbb{S}^* = \mathbb{S}$ , on trouve  $\mathbb{S}\mathbb{H}^* = \mathbb{S}$ . Soustrayons maintenant la première égalité et introduisons l'opérateur  $\mathbb{A} = \mathbb{H}^* - \mathbb{H}$ . Il vient

$$\mathbb{S}\mathbb{A} = \mathbb{S}\mathbb{H}^* - \mathbb{S}\mathbb{H} = \mathbb{S} - \mathbb{H},$$

soit encore  $\mathbb{S}(1 - \mathbb{A}) = \mathbb{H}$ .

**Lemme 5.1.** *L'opérateur  $1 - \mathbb{A}$  est un isomorphisme de  $L^2(\partial\Omega)$  et on a  $\|(1 - \mathbb{A})^{-1}\| \leq 1$ .*

*Démonstration.* Comme  $\mathbb{A}$  est antisymétrique, le produit scalaire  $\langle \mathbb{A}u, u \rangle$  est purement imaginaire pour tout  $u \in L^2(\partial\Omega)$ , ce qui implique

$$\|u\|_2^2 \leq |\langle (1 - \mathbb{A})u, u \rangle| \leq \|(1 - \mathbb{A})u\|_2 \|u\|_2$$

et en particulier  $\|(1 - \mathbb{A})u\|_2 \geq \|u\|_2$ . L'opérateur  $1 - \mathbb{A}$  est donc injectif et d'image fermée. L'orthogonal de  $\text{Im}(1 - \mathbb{A})$  est égal au noyau de l'adjoint  $(1 - \mathbb{A})^* = 1 + \mathbb{A}$ , et cet opérateur est injectif pour les mêmes raisons que précédemment. Par suite  $\text{Im}(1 - \mathbb{A}) = L^2(\partial\Omega)$  et  $1 - \mathbb{A}$  est donc un isomorphisme topologique de  $L^2(\partial\Omega)$ . Comme  $1 - \mathbb{A}$  accroît la norme de tout vecteur, on voit que  $(1 - \mathbb{A})^{-1}$  est contractant. □

Le lemme montre qu'on peut calculer  $\mathbb{S}$  à partir de  $\mathbb{H}$  par la formule

$$\mathbb{S} = \mathbb{H}(1 - \mathbb{A})^{-1}.$$

C'est cette idée qu'on va exploiter dans la suite pour évaluer le noyau de Szegő  $S$ , en établissant une formule intégrale reliant  $S$  et  $H$ .

Pour tout  $u \in L^2(\partial\Omega)$  et  $w \in \Omega$ , on a en effet

$$\mathbb{S}\mathbb{A}u(w) = \int_{\partial\Omega} S_0(w, \xi) \mathbb{A}u(\xi) ds(\xi) = \int_{\partial\Omega} S_0(w, \xi) ds(\xi) \int_{\partial\Omega} A(\xi, z) u(z) ds(z).$$

Le théorème de Fubini montre que  $\mathbb{S}\mathbb{A}$  est associé au noyau

$$\Omega \times \partial\Omega \ni (w, z) \longmapsto \int_{\partial\Omega} S_0(w, \xi) A(\xi, z) ds(\xi).$$

L'égalité  $\mathbb{S} = \mathbb{H} + \mathbb{S}\mathbb{A}$  fournit alors l'égalité de noyaux:

**Formule 5.2.** *Pour tous  $(w, z) \in \Omega \times \partial\Omega$  on a*

$$S_0(w, z) = H(w, z) + \int_{\partial\Omega} S_0(w, \xi) A(\xi, z) ds(\xi).$$

## 6. Régularité au bord du noyau de Szegö

Nous nous proposons ici de montrer que  $S$  s'étend en une fonction de classe  $C^{k-2}$  sur  $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$  en dehors de la diagonale  $\Delta_{\partial\Omega}$  de  $\partial\Omega \times \partial\Omega$ . On utilise pour cela la relation  $\mathbb{S} = \mathbb{H} + \mathbb{S}\mathbb{A}$  démontrée au §5, ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= \mathbb{H} + (\mathbb{H} + \mathbb{S}\mathbb{A})\mathbb{A} = \mathbb{H}(\mathbb{H} + \mathbb{A}) + \mathbb{S}\mathbb{A}^2 = \mathbb{H}\mathbb{H}^* + \mathbb{S}\mathbb{A}^2, \\ \mathbb{S}\mathbb{A} &= \mathbb{S} - \mathbb{H} = (\mathbb{S} - \mathbb{H}^*)^* = (\mathbb{S} - \mathbb{H} - \mathbb{A})^* = (\mathbb{S}\mathbb{A} - \mathbb{A})^* = \mathbb{A} - \mathbb{A}\mathbb{S}. \end{aligned}$$

La deuxième égalité implique  $\mathbb{S}\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2 - \mathbb{A}\mathbb{S}\mathbb{A}$ , d'où

$$(6.1) \quad \mathbb{S} = \mathbb{H}\mathbb{H}^* + \mathbb{A}^2 - \mathbb{A}\mathbb{S}\mathbb{A}.$$

Comme  $A \in C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ , il est clair que  $\mathbb{A}^2$  possède un noyau de classe  $C^{k-2}$  sur  $\partial\Omega \times \partial\Omega$ . L'opérateur  $\mathbb{S}\mathbb{A}$  est associé au noyau  $\mathbb{S}A(\bullet, z)$  et  $\mathbb{A}\mathbb{S}\mathbb{A}$  au noyau

$$\int_{\partial\Omega} A(w, \bullet) \mathbb{S}A(\bullet, z) ds = \langle A(w, \bullet), \overline{\mathbb{S}A(\bullet, z)} \rangle.$$

Les applications  $w \mapsto A(w, \bullet)$  et  $z \mapsto A(\bullet, z)$  sont dans  $C^{k-2}(\partial\Omega, L^2(\partial\Omega))$ . Il en est de même pour l'application  $z \mapsto \mathbb{S}A(\bullet, z)$ , puisque  $\mathbb{S}$  est un opérateur continu sur  $L^2(\partial\Omega)$ , donc  $\mathbb{A}\mathbb{S}\mathbb{A}$  a lui aussi un noyau dans  $C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ . Il reste à étudier le noyau de  $\mathbb{H}\mathbb{H}^*$ .

**Lemme 6.2.** *La fonction*

$$G(w, z) = \int_{\partial\Omega} H(w, \xi) \overline{H(z, \xi)} ds(\xi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial\Omega} \frac{ds(\xi)}{(\xi - w)(\bar{\xi} - \bar{z})}, \quad (w, z) \in \Omega \times \Omega$$

*se prolonge en une fonction  $G \in C^{k-2}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \Delta_{\partial\Omega})$ , et l'opérateur défini par  $G|_{\Omega \times \partial\Omega}$  est  $\mathbb{G} = \mathbb{H}\mathbb{H}^*$ .*

Avant de démontrer le lemme 6.2, nous aurons besoin d'un résultat préliminaire généralisant le théorème 1.5 (b).

**Lemme 6.3.** *Soit  $E$  une partie ouverte ou un domaine à bord de classe  $C^1$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $u : \partial\Omega \times E \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue.*

(a) *Si  $u$  est de classe  $C^q$ ,  $1 \leq q \leq k$ , alors la transformée  $\mathbb{H}u$  définie par*

$$\mathbb{H}u(w, x) = \int_{\partial\Omega} H(w, z) u(z, x) ds(z), \quad (w, x) \in \Omega \times E$$

*se prolonge en une fonction de classe  $C^{q-1}$  sur  $\overline{\Omega} \times E$ .*

(b) *Si  $u$  est de classe  $C^q$ ,  $0 \leq q \leq k$  et si  $u(\bullet, x) \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$  pour tout  $x \in \Omega$ , alors  $\mathbb{H}u$  se prolonge en une fonction de classe  $C^q$  sur  $\overline{\Omega} \times E$ .*

*Démonstration.* (a) Grâce à la formule 1.3 suivie d'une dérivation sous le signe somme en  $x$ , on obtient

$$\frac{\partial^l}{\partial x^l} \frac{\partial^m}{\partial w^m} \mathbb{H}u(w, x) = \mathbb{H} \left( \frac{\partial^l}{\partial x^l} \frac{\partial^m}{\partial z^m} u(z, x) \right),$$

de sorte qu'il suffit de regarder le cas  $q = 1$ . La démonstration du théorème 1.5 montre que  $\mathbb{H}$  est continu de  $C^1(\partial\Omega)$  dans  $C^0(\overline{\Omega})$ . On en déduit

$$\|\mathbb{H}u(\bullet, x) - \mathbb{H}u(\bullet, x_0)\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq C \|u(\bullet, x) - u(\bullet, x_0)\|_{C^1(\partial\Omega)}$$

et le second membre tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $x_0$  dans  $E$ . On sait d'autre part que  $w \mapsto H(w, x)$  s'étend continument à  $\overline{\Omega}$  pour tout  $x \in E$  fixé. Ceci entraîne facilement la continuité de  $\mathbb{H}u$  sur  $\overline{\Omega} \times E$  grâce à l'inégalité triangulaire

$$|\mathbb{H}u(w, x) - \mathbb{H}u(w_0, x_0)| \leq |\mathbb{H}u(w, x) - \mathbb{H}u(w, x_0)| + |\mathbb{H}u(w, x_0) - \mathbb{H}u(w_0, x_0)|.$$

(b) On est facilement ramené au cas  $q = 0$ , à condition de vérifier que toutes les dérivées de  $u$  en  $(z, x)$  d'ordre inférieur ou égal à  $q$  sont encore dans  $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ . Par récurrence, il suffit de vérifier ce résultat pour  $u'_x$  et  $u'_z$ . Pour  $u'_x$ , on observe simplement que

$$u'_x(\bullet, x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(\bullet, x) - u(\bullet, x_0)}{x - x_0} \quad \text{dans } \mathcal{H}^2(\partial\Omega).$$

D'autre part, la fonction holomorphe  $v = \mathbb{H}u(\bullet, x)$  est continue sur  $\overline{\Omega}$  d'après (a), et vérifie par hypothèse  $v|_{\partial\Omega} = u(\bullet, x)$ . Comme  $v' = \mathbb{H}u'_z$ , le théorème 1.5 montre que  $(v')_\varepsilon$  converge vers  $\mathbb{H}_0 u'_z$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ , et par suite dans  $L^1(\partial\Omega)$ . Pour tout arc  $\widehat{ab} \subset \partial\Omega$  on obtient donc

$$\begin{aligned} \int_a^b (\mathbb{H}_0 u'_z)(w, x) dw &= \lim \int_a^b (v')_\varepsilon(w) dw = \lim v(b + \varepsilon i\tau(b)) - v(a + \varepsilon i\tau(a)) \\ &= v(b) - v(a) = u(b, x) - u(a, x) \end{aligned}$$

donc  $\mathbb{H}_0 u'_z = u'_z$  et  $u'_z(\bullet, x) \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ . Comme dans (a), le cas  $q = 0$  se réduit à voir que  $\mathbb{H}$  envoie  $C^0(\partial\Omega) \cap \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$  dans  $C^0(\overline{\Omega})$ , continument par rapport aux normes uniformes. Si  $\Omega = \mathbb{D}$ , ceci résulte du fait que  $\mathbb{H}u$  est, pour  $u \in C^0(\partial\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}^2(\partial\mathbb{D})$ , la solution du problème de Dirichlet (cf. W. Rudin). Le cas général résulte de l'écriture  $\mathbb{H}_\varepsilon = \mathbb{H}_\varepsilon^{\mathbb{D}} + \mathbb{R}_\varepsilon$  obtenue dans la démonstration du théorème 1.5.  $\square$

*Démonstration du lemme 6.2.* Soit  $(\theta_j)$  une partition de l'unité de classe  $C^k$  sur  $\partial\Omega$ , et  $T_j = \text{Supp } \theta_j$ . Ecrivons  $G = \sum G_j$  avec

$$G_j(w, z) = \int_{\partial\Omega} H(w, \xi) \overline{H(z, \xi)} \theta_j(\xi) ds(\xi),$$

c'est-à-dire  $G_j(\bullet, z) = \mathbb{H}(\overline{H}(\bullet, z) \theta_j)$ . Comme  $\overline{H(z, \xi)} \theta_j(\xi)$  est de classe  $C^{k-1}$  pour  $(\xi, z) \in \partial\Omega \times (\overline{\Omega} \setminus T_j)$ , le lemme 6.3 (a) montre que  $G_j$  est de classe  $C^{k-2}$  sur  $\overline{\Omega} \times (\overline{\Omega} \setminus T_j)$ , et donc aussi sur  $(\overline{\Omega} \setminus T_j) \times \overline{\Omega}$  après conjugaison et échange des rôles de  $w, z$ . Par conséquent  $G_j \in C^{k-2}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus T_j \times T_j)$ , et  $G = \sum G_j$  est de classe  $C^{k-2}$  sur  $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$  en dehors de  $\bigcup_j T_j \times T_j$ , qui est un voisinage arbitrairement petit de  $\Delta_{\partial\Omega}$  si les diamètres des  $T_j$  sont choisis assez petits.

Pour tout  $u \in L^2(\partial\Omega)$ , on a d'autre part

$$\mathbb{H}\mathbb{H}^* u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{H}\mathbb{H}_\varepsilon^* u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{G}_\varepsilon u,$$

où  $\mathbb{G}_\varepsilon$  est l'opérateur associé au noyau

$$G_\varepsilon(w, z) = \int_{\partial\Omega} H(w, \xi) \overline{H_\varepsilon(z, \xi)} ds(\xi) = G(w, z + \varepsilon i\tau(z)).$$

Comme ce noyau converge vers  $G|_{\Omega \times \partial\Omega}$  uniformément sur tout compact, on en déduit bien  $\mathbb{H}\mathbb{H}^* = \mathbb{G}$ .  $\square$

**Théorème 6.4.** *Le noyau de Szegő  $S(w, z)$  se prolonge en une fonction dans  $C^{k-2}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \Delta_{\partial\Omega})$ , et plus précisément, en la somme du noyau  $G$  et d'une fonction de classe  $C^{k-2}$  sur  $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ . Quand  $z \in \Omega$  tend vers le bord  $\partial\Omega$ , on a*

$$S(z, z) \sim \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial\Omega} \frac{ds(\xi)}{|\xi - z|^2} \sim \frac{1}{4\pi d(z, \partial\Omega)}.$$

*Démonstration.* Considérons le noyau  $K(w, z) = S_0(w, z) - G_0(w, z)$  sur  $\Omega \times \partial\Omega$ , associé à l'opérateur

$$\mathbb{S} - \mathbb{H}\mathbb{H}^* = \mathbb{A}^2 - \mathbb{A}\mathbb{S}\mathbb{A} : L^2(\partial\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}^2(\partial\Omega).$$

On sait que cet opérateur est défini par un noyau  $K_0 \in C^{k-2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ , ce qui implique  $K_0(\bullet, z) \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$  pour tout  $z$  et  $K = \mathbb{H}K_0$ . Le lemme 6.3 (b) donne alors  $K \in C^{k-2}(\overline{\Omega} \times \partial\Omega)$ . Par échange de  $w, z$  on voit que  $(S(\bullet, z) - G(\bullet, z))_0$  est

de classe  $C^{k-2}$  sur  $\partial\Omega \times \overline{\Omega}$ , et une nouvelle application du lemme 6.3 (b) donne  $S - G \in C^{k-2}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ . On en déduit en particulier

$$S(z, z) \sim G(z, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial\Omega} \frac{ds(\xi)}{|\xi - z|^2}$$

quand  $z$  tend vers  $\partial\Omega$ . Soit  $\delta = d(z, \partial\Omega)$  et  $\gamma(t)$  le point de  $\partial\Omega$  tel que  $|z - \gamma(t)| = \delta$ . Le point  $z$  est sur la normale à  $\partial\Omega$  au point  $\gamma(t)$ , donc  $z = \gamma(t) + \delta i\gamma'(t)$ . Quand  $\delta$  et  $|s - t|$  tendent vers 0, on a

$$\gamma(s) - z = \gamma(s) - \gamma(t) - \delta i\gamma'(t) = \gamma'(t)(s - t - i\delta + O((s - t)^2)),$$

par suite  $|\gamma(s) - z|^2 \sim (s - t)^2 + \delta^2$  et

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{ds}{|\gamma(s) - z|^2} &\sim \int_{|s-t| < \delta^{1/3}} \frac{ds}{(s-t)^2 + \delta^2} + \int_{|s-t| > \delta^{1/3}} \frac{ds}{|\gamma(s) - z|^2} \\ &= \frac{2}{\delta} \arctan(\delta^{-2/3}) + O(\delta^{-2/3}) \sim \frac{\pi}{\delta}. \end{aligned} \quad \square$$

## 7. Relation avec l'application conforme de Riemann

On suppose ici que  $\Omega$  est un ouvert simplement connexe à frontière de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ . Pour tout point  $a \in \Omega$  fixé, il existe alors une unique application conforme bijective

$$R : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$$

telle que  $R(a) = 0$  et  $R'(a) > 0$ .

**Théorème 7.1.** *L'application  $R$  s'étend en un difféomorphisme de classe  $C^{k-1}$  de  $\overline{\Omega}$  sur  $\overline{\mathbb{D}}$ .*

La démonstration de ce théorème sera donnée plus loin. Nous admettons le résultat provisoirement. Le changement de variable  $z = R(w)$  donne alors

$$\int_{\partial\mathbb{D}} |u(z)|^2 |dz| = \int_{\partial\Omega} |u \circ R(w)|^2 |R'(w)| |dw|$$

pour toute fonction  $u \in L^2(\partial\Omega)$ . On voit donc qu'on a une isométrie

$$\begin{aligned} L^2(\partial\mathbb{D}) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega) \\ u &\longmapsto u \circ R (R')^{1/2} \end{aligned}$$

où  $(R')^{1/2}$  est la détermination de la racine carrée complexe telle que  $R'(a)^{1/2} > 0$  (on notera que  $R'$  ne s'annule pas sur  $\Omega$ ). L'isométrie envoie  $H(\mathbb{D}) \cap C^0(\overline{\mathbb{D}})$  sur  $\mathcal{O}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  et, par densité (théorème 2.5), elle envoie donc  $\mathcal{H}^2(\partial\mathbb{D})$  sur  $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ .



Si  $(\psi_j)$  est une base orthonormée de  $\mathcal{H}^2(\partial\mathbb{D})$ , on en déduit que  $(\psi_j \circ R(R')^{1/2})$  est une base orthonormée de  $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ . Par conséquent

$$S(w, z) = S^{\mathbb{D}}(R(w), R(z)) R'(w)^{1/2} \overline{R'(z)}^{1/2},$$

$$S(w, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{R'(w)^{1/2} \overline{R'(z)}^{1/2}}{1 - R(w)\overline{R(z)}}.$$

En substituant  $z = a$ ,  $R(a) = 0$ , on obtient en particulier

$$S(w, a) = \frac{1}{2\pi} R'(w)^{1/2} R'(a)^{1/2}, \quad S(a, a) = \frac{1}{2\pi} R'(a),$$

d'où on déduit aussitôt les

**Formules 7.2.** *L'application conforme  $R$  et sa dérivée sont données par*

$$(a) \quad R'(w) = 2\pi \frac{S(w, a)^2}{S(a, a)}, \quad \forall w \in \overline{\Omega},$$

$$(b) \quad R(w) = -i\tau(w) \frac{S(w, a)^2}{|S(w, a)|^2}, \quad \forall w \in \partial\Omega.$$

*Démonstration.* La relation (a) est immédiate à partir de ce qui précède. On a par ailleurs  $|R(w)|^2 = 1$  sur  $\partial\Omega$ . En prenant la dérivée  $d/ds$  le long de  $\partial\Omega$ , on voit que  $dR(w)/ds = R'(w)dw/ds = R'(w)\tau(w)$  doit être orthogonal à  $R(w)$ . Quand  $w$  tourne dans le sens positif sur  $\partial\Omega$ , il en est de même pour  $R(w)$  sur  $\partial\mathbb{D}$  (une application holomorphe préserve l'orientation), donc l'argument de  $R'(w)\tau(w)$  est égal à celui de  $iR(w)$ . Ceci donne  $iR(w) = R'(w)\tau(w)/|R'(w)|$  et (b) se déduit alors de (a).  $\square$

Il nous reste à démontrer la régularité jusqu'au bord de l'application conforme de Riemann. Pour cela, on va montrer d'abord la régularité analytique lorsque  $\partial\Omega$  est réelle analytique, puis on passera au cas général par un argument d'approximation en norme  $C^k$  de  $\partial\Omega$ .

**Lemme 7.3.** *Soient  $\Omega_1, \Omega_2$  des ouverts simplement connexes bornés de  $\mathbb{C}$  ayant des frontières  $\mathbb{R}$ -analytiques et  $F : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  une application biholomorphe. Alors  $F$  s'étend en une application biholomorphe d'un voisinage de  $\overline{\Omega}_1$  sur un voisinage de  $\overline{\Omega}_2$ .*

*Démonstration.* Quitte à remplacer  $F$  par  $F^{-1} : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ , il suffit de voir que  $F$  s'étend holomorphiquement à un voisinage de  $\overline{\Omega}_1$ . D'après Rudin (théorème 14.19),  $F$  se prolonge en un homéomorphisme de  $\overline{\Omega}_1$  sur  $\overline{\Omega}_2$ . Soit  $x_1 \in \partial\Omega_1$  un point quelconque et  $x_2 = F(x_1) \in \partial\Omega_2$ . Au voisinage de  $x_j$ ,  $\partial\Omega_j$  est donné par une courbe  $\mathbb{R}$ -analytique  $s \mapsto \gamma_j(s)$  définie pour  $s \in \mathbb{R}$  voisin de 0. Celle-ci se prolonge en une application holomorphe  $\tilde{\gamma}_j$  de la variable  $z = s + it$  au voisinage de 0 dans  $\mathbb{C}$ . Soit  $\Pi^+ = \{z = s + it; t > 0\}$  le demi-plan supérieur. Il existe un disque  $U_j \subset \mathbb{C}$  de centre 0 et un voisinage  $V_j \subset \mathbb{C}$  de  $x_j$  tels que  $\tilde{\gamma}_j$  définit un biholomorphisme de  $\Pi^+ \cap U_j$  sur  $\Omega_j \cap V_j$ . Si on choisit en outre  $V_1$  assez petit pour que  $F(\Omega_1 \cap V_1) \subset V_2$ , on en déduit une application holomorphe

$G = \tilde{\gamma}_2^{-1} \circ F \circ \tilde{\gamma}_1 : \Pi^+ \cap U_1 \rightarrow \Pi^+ \cap U_2$  qui se prolonge continument en une application de  $\overline{\Pi}^+ \cap U_1$  dans  $\overline{\Pi}^+ \cap U_2$  telle que  $G(\mathbb{R} \cap U_1) \subset \mathbb{R} \cap U_2$ . Le principe de réflexion de Schwarz (W. Rudin, théorème 11.17) montre que  $G$  se prolonge en une application holomorphe  $\tilde{G}$  de  $U_1$  dans  $U_2$ , d'où un prolongement local  $\tilde{F} = \tilde{\gamma}_2 \circ \tilde{G} \circ \tilde{\gamma}_1^{-1}$  de  $V_1$  dans  $V_2$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 7.1.* Si  $\Omega$  est à frontière  $\mathbb{R}$ -analytique, le lemme 7.3 montre que  $R$  est en particulier un  $C^\infty$ -difféomorphisme de  $\overline{\Omega}$  sur  $\overline{\mathbb{D}}$ , donc les formules 7.2 sont bien vraies. Si  $\partial\Omega$  est seulement de classe  $C^k$ , on peut approximer la courbe frontière  $\gamma$  par une courbe  $\mathbb{R}$ -analytique obtenue par convolution:

$$\gamma_\delta(s) = \int_{\mathbb{R}} \gamma(t) \exp\left(\frac{-(s-t)^2}{\delta^2}\right) \frac{dt}{\delta\sqrt{2\pi}}.$$

On notera que  $\gamma_\delta$  est une fonction ayant la même périodicité que  $\gamma$  et que  $\|\gamma_\delta - \gamma\|_{C^k}$  converge vers 0 avec  $\delta$ . Pour  $\delta$  assez petit, cette courbe est la frontière d'un ouvert  $\Omega_\delta$  pour lequel on a un noyau de Szegő  $S_\delta$  et une application de Riemann  $R_\delta : \Omega_\delta \rightarrow \mathbb{D}$ . D'après ce qui précède,  $R'_\delta$  est lié à  $S_\delta$  par la formule 7.2 (a). La démonstration que nous avons donnée de la régularité de  $S$  fournit en outre la continuité de l'application  $\gamma \mapsto S$ , lorsqu'on prend la norme  $C^k$  sur l'espace des courbes  $\gamma$  et la norme  $C^{k-2}$  pour  $S$  (sur un compact de  $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$  ne rencontrant pas  $\Delta_{\partial\Omega}$ ). Il en résulte que  $R_\delta$  converge uniformément vers une application holomorphe  $R_0$  qui vérifie encore 7.2 (a). En particulier  $R'_0 \in C^{k-2}(\overline{\Omega})$ , donc  $R_0 \in C^{k-1}(\overline{\Omega})$ . De plus  $R_0$  envoie  $\partial\Omega$  sur  $\partial\mathbb{D}$ . Comme une limite d'applications holomorphes injectives est ou bien injective ou bien constante (conséquence du théorème de Rouché), et comme  $R_0(a) = 0$ ,  $R'_0(a) = 2\pi S(a, a) > 0$ , on en déduit que  $R_0$  coïncide avec l'application conforme  $R : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$  cherchée. Il reste à démontrer que la dérivée  $R'$  ne peut s'annuler en aucun point  $z_0 \in \partial\Omega$ . Un calcul facile montre que pour  $\varepsilon > 0$  assez petit l'image conforme de  $\Omega$  par l'application  $z \mapsto 1/(z - z_0 + \varepsilon i\tau(z_0))$  est strictement convexe au voisinage du point image de  $z_0$ . On peut donc supposer que  $\Omega$  est convexe au voisinage de  $z_0$ . Dans ce cas, on peut modifier la courbe  $\partial\Omega$  en dehors d'un petit voisinage de  $z_0$  de sorte qu'elle soit la frontière  $\partial\tilde{\Omega}$  d'un ouvert arbitrairement proche d'un disque en norme  $C^2$ . Alors l'application conforme  $\tilde{R} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{D}$  est voisine de l'application identique en norme  $C^1$ , donc  $\tilde{R}$  est un  $C^1$ -difféomorphisme jusqu'au bord. Comme  $R \circ \tilde{R}^{-1}$  envoie  $\partial\mathbb{D}$  sur  $\partial\mathbb{D}$  au voisinage de  $\tilde{R}(z_0)$ , la démonstration du lemme 7.3 montre que  $R \circ \tilde{R}^{-1}$  s'étend en une application biholomorphe au voisinage de  $\tilde{R}(z_0)$ , par suite  $R'(z_0) \neq 0$ .  $\square$

**Remarque 7.4.** Lorsque  $\partial\Omega$  est de classe  $C^1$ , il n'est pas vrai en général que  $R$  s'étend en une application de classe  $C^1$  sur  $\overline{\Omega}$ , et même si c'est le cas, il se peut que la dérivée  $R'$  s'annule au bord. Un exemple de cette situation est donné par l'ouvert  $\Omega$  obtenu en prenant l'image conforme d'un petit disque  $\Delta = \{|z - \varepsilon| < \varepsilon\}$  par l'application  $Q(z) = z/\log(1/z)$  (resp.  $Q(z) = z\log(1/z)$ ). La frontière de  $\partial\Omega$  est de classe  $C^1$  au voisinage de 0 parce que  $\log(1/z)$  a un argument qui tend vers 0 quand  $z$  tend vers 0 le long de  $\partial\Delta$ . L'application conforme est donnée par

$R = Q^{-1}/\varepsilon - 1$  et on a donc  $R'(0) = 1/(\varepsilon Q'(0)) = \infty$  (resp  $R'(0) = 0$ ). De même, pour  $k \geq 2$ , on peut vérifier que l'image de  $\Delta$  par  $Q(z) = z + z^k \log \log(1/z)$  a une frontière de classe  $C^k$ , mais  $Q$  et  $R$  ne sont pas de classe  $C^k$  au voisinage de 0.

## 8. Calcul numérique de l'application conforme

La formule intégrale 5.2 donne

$$S(a, w) = H(a, w) + \int_{\partial\Omega} S(a, z) A(z, w) ds, \quad w \in \partial\Omega.$$

Comme  $\overline{A(z, w)} = -A(w, z)$ , on trouve après conjugaison:

$$(8.1) \quad S(w, a) + \int_{\partial\Omega} A(w, z) S(z, a) ds = \overline{H(a, w)}, \quad w \in \partial\Omega,$$

ce qui permet d'obtenir  $S(w, a)$  en fonction des noyaux  $H$  et  $A$  explicitement connus. Les formules 7.2 (a), (b) peuvent alors être utilisées pour calculer l'application de Riemann  $R$  à partir de  $S$ .

Les intégrales  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$  mises en jeu seront évaluées par la méthode des trapèzes relative à une subdivision  $t_i = \alpha + ih$ ,  $0 \leq i \leq n$ , de pas constant  $h = (\beta - \alpha)/n$ :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \simeq h \left( f(t_0) + f(t_1) + \dots + f(t_{n-1}) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{2} \right).$$

Si  $f$  est de classe  $C^{2l}$ , l'erreur d'approximation  $\varepsilon$  est donnée par la formule d'Euler-Mac Laurin

$$\varepsilon = \sum_{m=1}^l \frac{b_{2m} h^{2m}}{(2m)!} (f^{(2m-1)}(\beta) - f^{(2m-1)}(\alpha)) - h^{2l} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{B_{2l}((t - \alpha)/h)}{(2l)!} f^{(2l)}(t) dt,$$

où  $b_{2m}$  et  $B_{2m}$  sont respectivement les nombres et les polynômes de Bernoulli. Ceci montre que l'erreur est en général de l'ordre de  $O(h^2) = O(n^{-2})$ . Néanmoins, pour une fonction  $f$  périodique de période  $\beta - \alpha$  et de classe  $C^{2l}$ , l'erreur est majorée par  $O(h^{2l})$ ; dans ce cas, on a en effet  $f^{(m)}(\beta) = f^{(m)}(\alpha)$  pour tout  $m$ .

Comme les intégrales à évaluer sont des intégrales de fonctions périodiques, la convergence de la méthode des trapèzes est donc extrêmement rapide, tout au moins dans le cas de fonctions  $C^{\infty}$ . Cette remarque montre que l'on n'a pas intérêt à calculer  $R$  par intégration à partir de 7.2 (a), mais plutôt à partir de 7.2 (b) et de la formule de Cauchy

$$R(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{R(z) dz}{z - w}.$$

Supposons donnée une paramétrisation quelconque  $[\alpha, \beta] \ni t \mapsto z(t)$  de la courbe  $\partial\Omega$ . En multipliant (8.1) par  $|z'(t)|^{1/2}$  après avoir substitué  $w = z(t)$ ,  $z = z(u)$ , on obtient la relation équivalente

$$(8.2) \quad \sigma(t) + \int_{\alpha}^{\beta} a(t, u) \sigma(u) du = g(t),$$

avec les notations

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= |z'(t)|^{1/2} S(z(t), a), \\ g(t) &= |z'(t)|^{1/2} \overline{H(a, z(t))}, \\ a(t, u) &= |z'(t)|^{1/2} |z'(u)|^{1/2} A(z(t), z(u)).\end{aligned}$$

Cette écriture a l'avantage de préserver le caractère hermitien antisymétrique du noyau  $a(t, u)$ . Les fonctions  $g(t)$  et  $a(t, u)$  sont données par les formules explicites

$$\begin{aligned}g(t) &= \frac{1}{2i\pi} \frac{\overline{z'(t)}}{a - z(t)} |z'(t)|^{-1/2}, \\ h(t, u) &= \frac{1}{2i\pi} \frac{z'(u)}{z(u) - z(t)} |z'(t)|^{1/2} |z'(u)|^{-1/2}, \\ a(t, u) &= \begin{cases} \overline{h(u, t)} - h(t, u) & \text{si } t \neq u \\ 0 & \text{si } t = u. \end{cases}\end{aligned}$$

L'utilisation de la méthode des trapèzes conduit à résoudre le système linéaire

$$\sigma(t_i) + h \sum_{0 \leq j < n} a(t_i, t_j) \sigma(t_j) = g(t_i), \quad 0 \leq i < n.$$

Ce système est de rang  $n$ , car la matrice antisymétrique  $(a(t_i, t_j))$  a toutes ses valeurs propres imaginaires. La résolution du système fournit les valeurs  $\sigma(t_j)$  cherchées, par exemple à l'aide de la méthode d'élimination de Gauss. Dans cette situation, il existe en fait des schémas de résolution itératifs plus efficaces (voir M.R. Trummer). Une fois les valeurs  $\sigma(t_j)$  connues, on obtient

$$R(z(t_j)) = -i \frac{z'(t_j)}{|z'(t_j)|} \frac{\sigma(t_j)^2}{|\sigma(t_j)|^2},$$

et une intégration approchée de la formule de Cauchy donne

$$(8.3) \quad R(w) \simeq \frac{h}{2i\pi} \sum_{0 \leq j < n} \frac{z'(t_j)}{z(t_j) - w} R(z(t_j)).$$

Tous ces calculs sont immédiats dès lors que la fonction  $z(t)$  et sa dérivée  $z'(t)$  sont connues aux points  $t = t_j$ . L'application de Riemann inverse

$$Q = R^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \Omega, \quad Q(0) = a,$$

peut être évaluée comme suit. La formule des résidus implique

$$\begin{aligned}Q'(w) &= \frac{1}{R'(R^{-1}(w))} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{dz}{R(z) - w}, \\ Q(w) &= a + \int_0^w Q'(v) dv = a - \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \log(1 - w \overline{R(z)}) dz.\end{aligned}$$

L'approximation des trapèzes fournit alors

$$(8.4) \quad Q(w) \simeq a - \frac{h}{2i\pi} \sum_{0 \leq j < n} \log(1 - w \overline{R(z(t_j))}) z'(t_j).$$

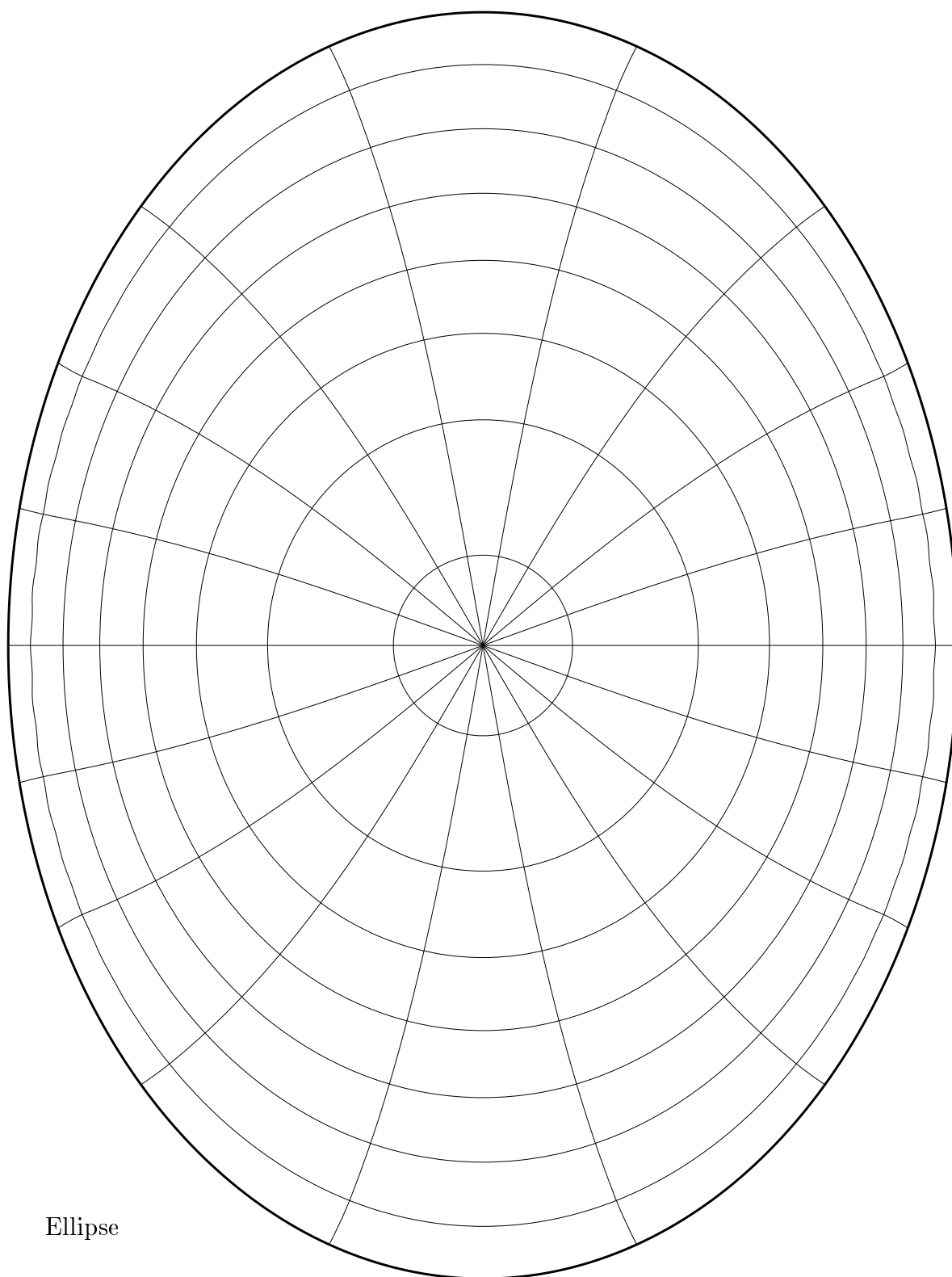
Dans la pratique, les formules (8.3) et (8.4) sont un peu instables lorsqu'on s'approche du bord, à cause des pôles de la fonction à intégrer. Un moyen de résoudre cette difficulté est de considérer que  $R(z)$  est affine par morceaux sur le bord entre les points  $z(t_j)$  et  $z(t_{j+1})$ . Pour la fonction  $Q$ , ceci donne par exemple

$$(8.4') \quad Q(w) \simeq a + \frac{1/w}{2\pi i} \sum_{0 \leq j < n} \frac{z(t_{j+1}) - z(t_j)}{\overline{R(z(t_{j+1}))} - \overline{R(z(t_j))}} \left[ \zeta \log \zeta - \zeta \right]_{\zeta=1-w\overline{R(z(t_j))}}^{\zeta=1-w\overline{R(z(t_{j+1}))}}.$$

L'approximation obtenue est alors tout à fait bonne, même au voisinage du bord.

## Bibliographie

- [1] N. Kerzman and E.M. Stein : *The Cauchy kernel, the Szegő kernel and the Riemann mapping function*; Math. Ann. **236** (1978) 85-93.
- [2] N. Kerzman and M.R. Trummer : *Numerical conformal mapping via the Szegő kernel*; J. Comp. Appl. Math. **14** (1986) 111-123.
- [3] W. Rudin : *Analyse réelle et complexe*; Mc Graw-Hill, 1966, et Masson, Paris, 1975.
- [4] M.R. Trummer : *An efficient implementation of a conformal mapping method based on the Szegő kernel*; Siam J. Numer. Anal. **23** (1986) 853-872.

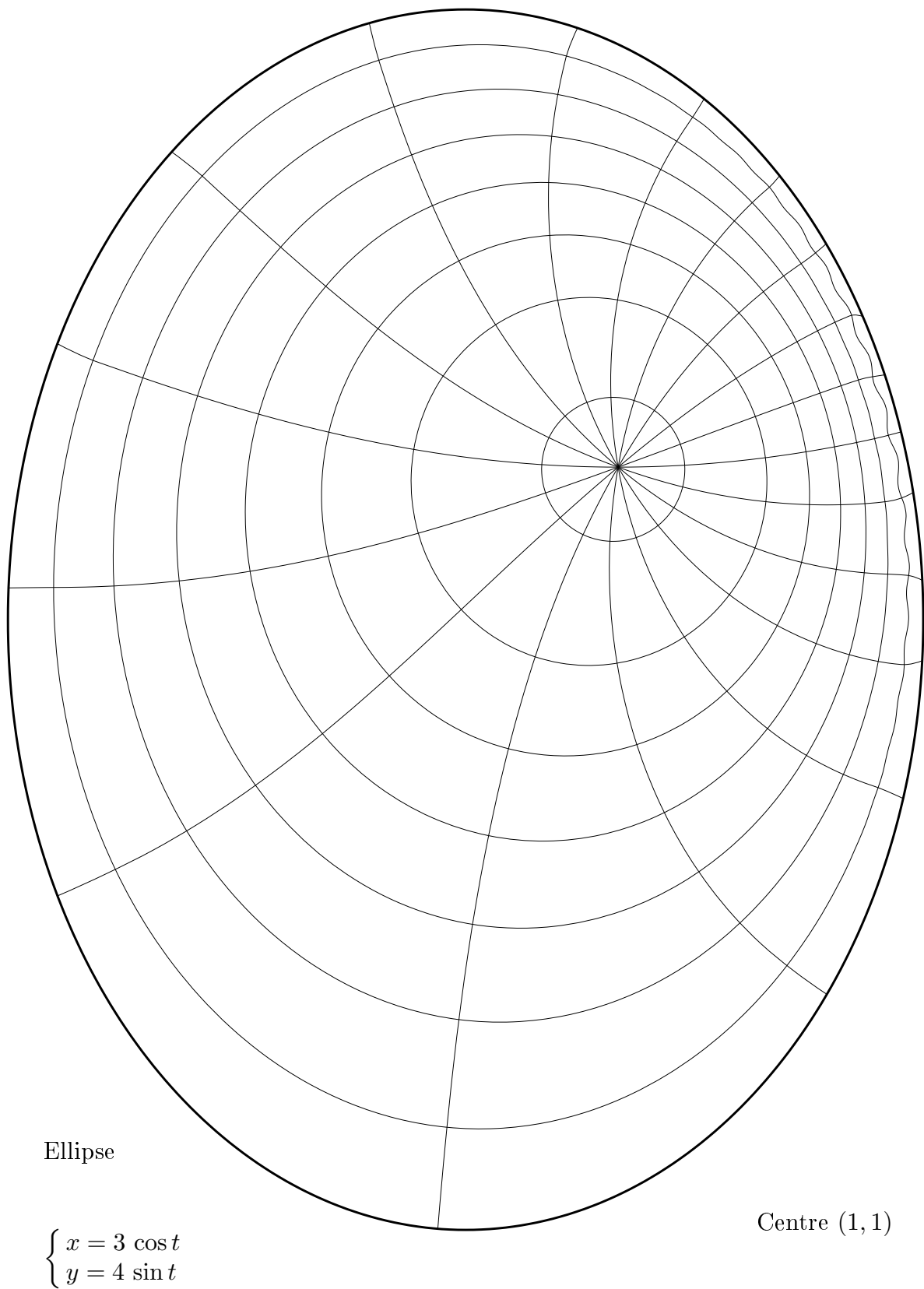


Ellipse

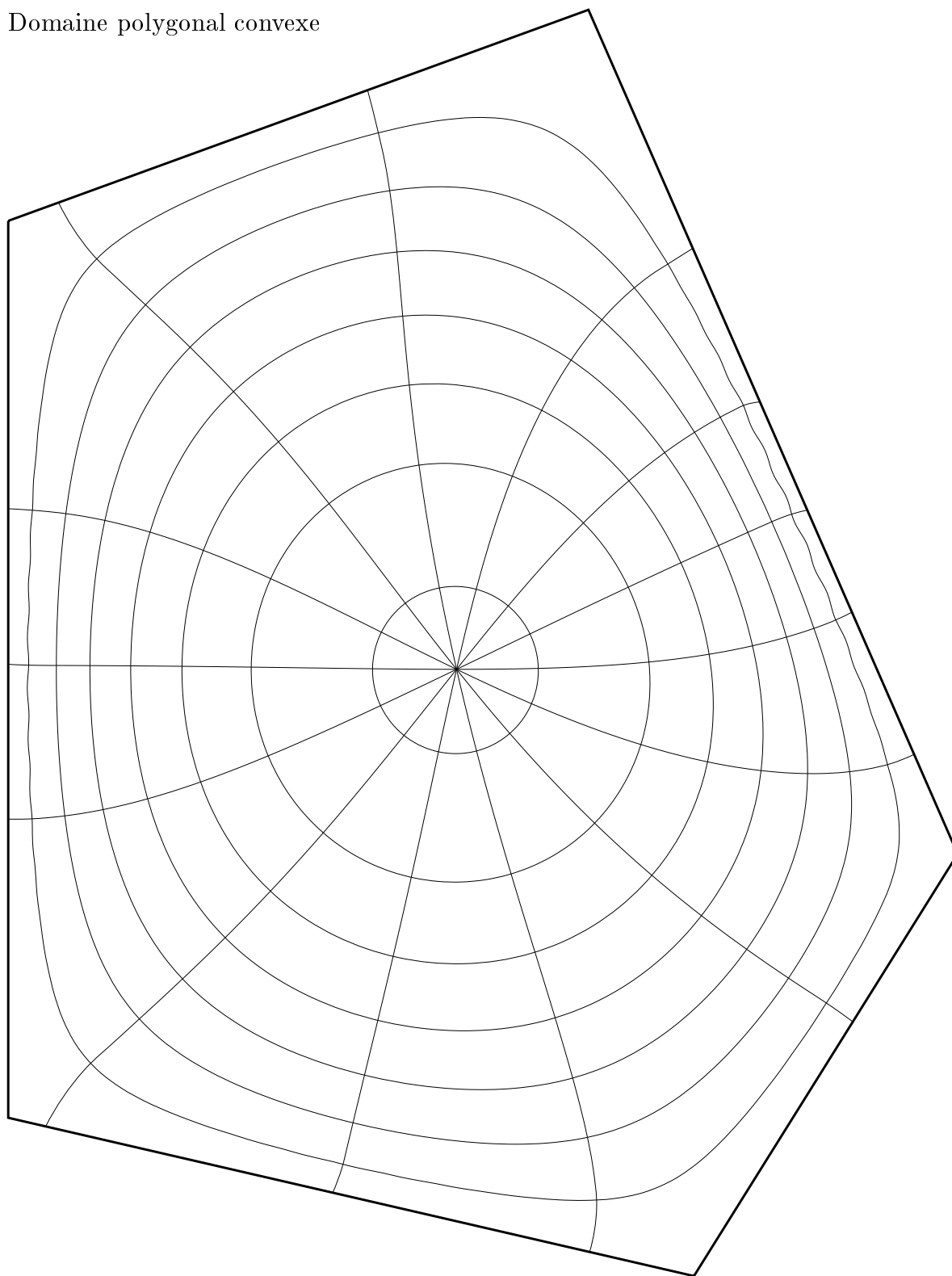
$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$$

Centre (0,0)

**Fig. 1**

**Fig. 2**

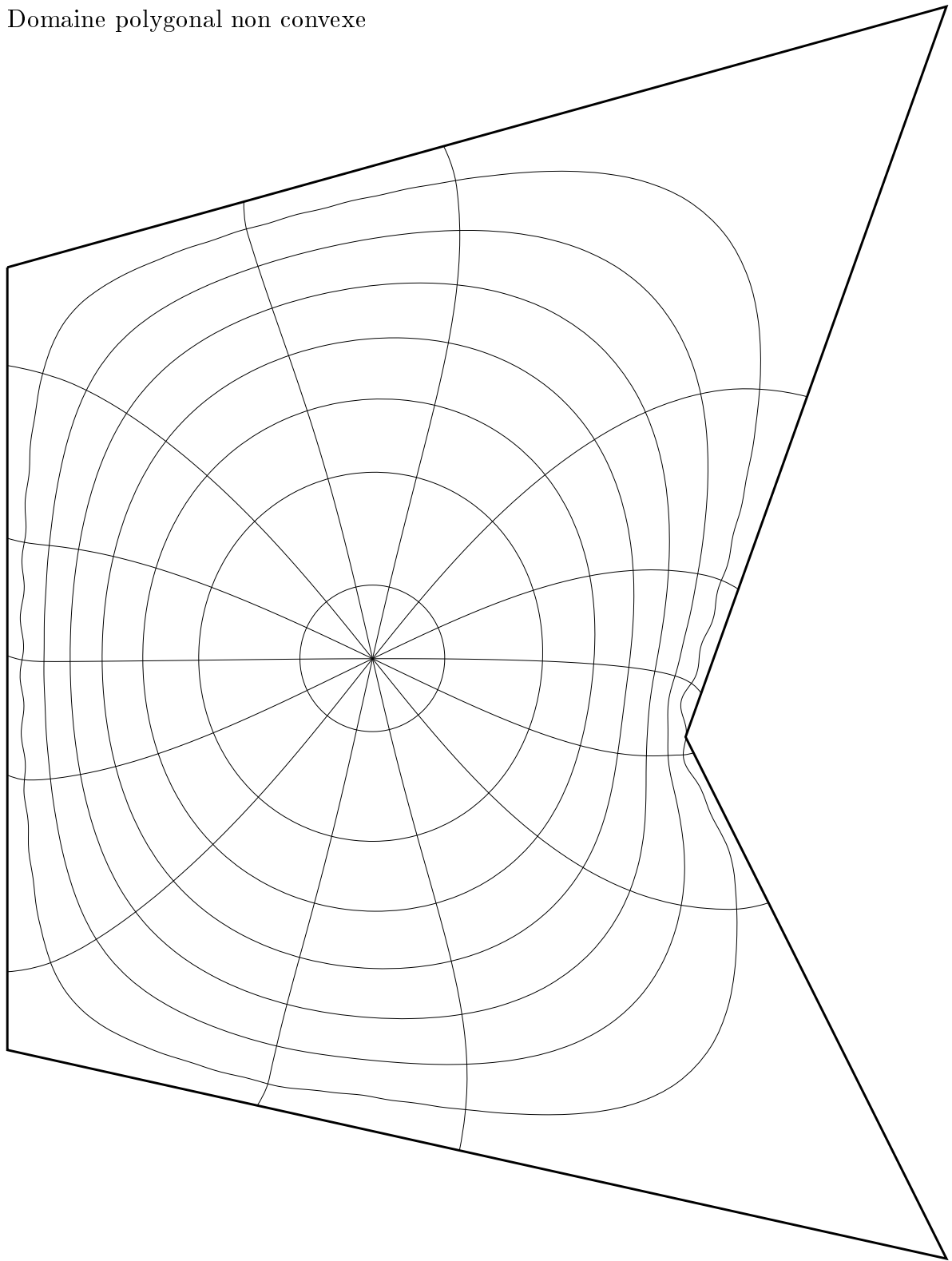
Domaine polygonal convexe



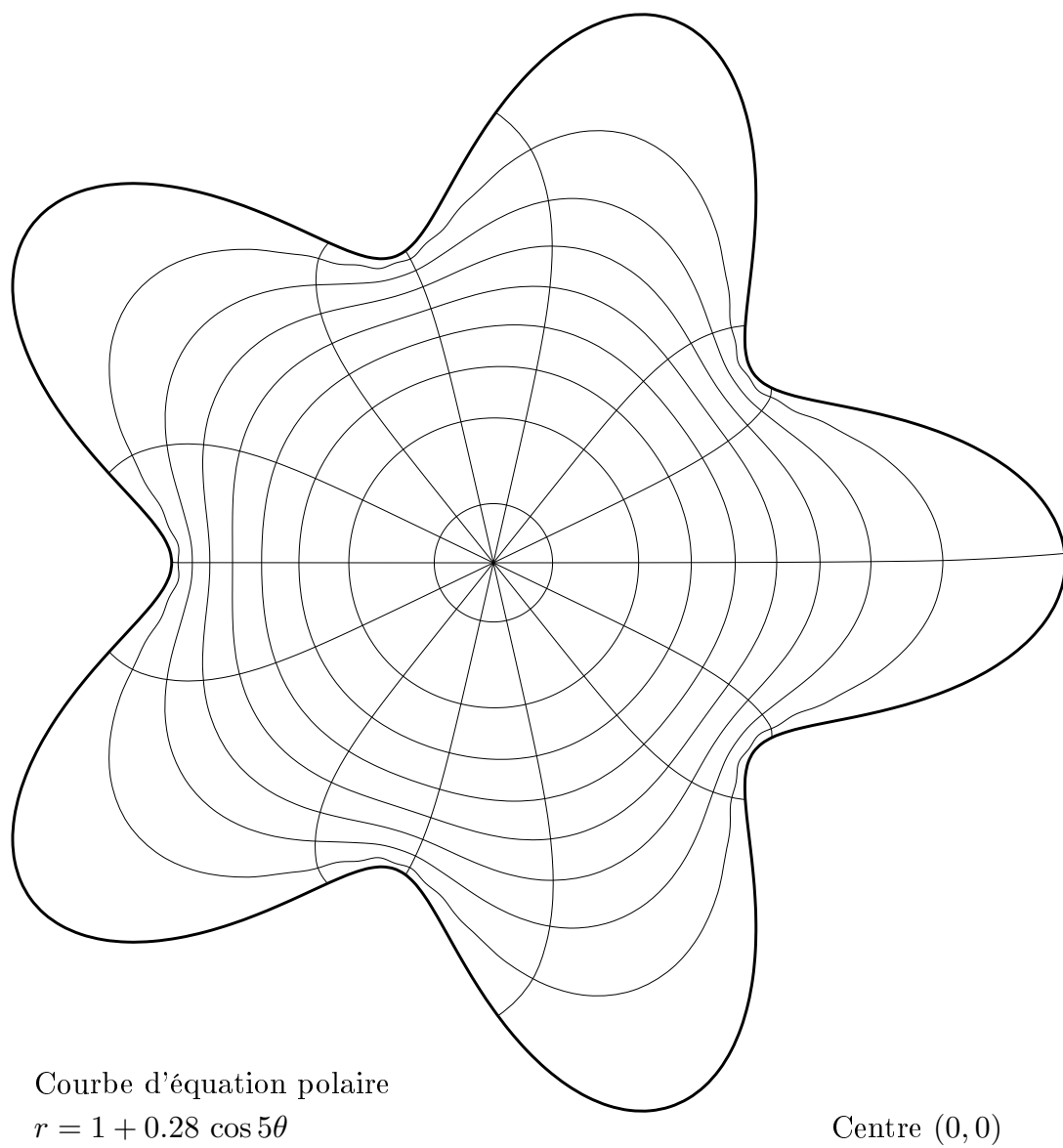
**Fig. 3**

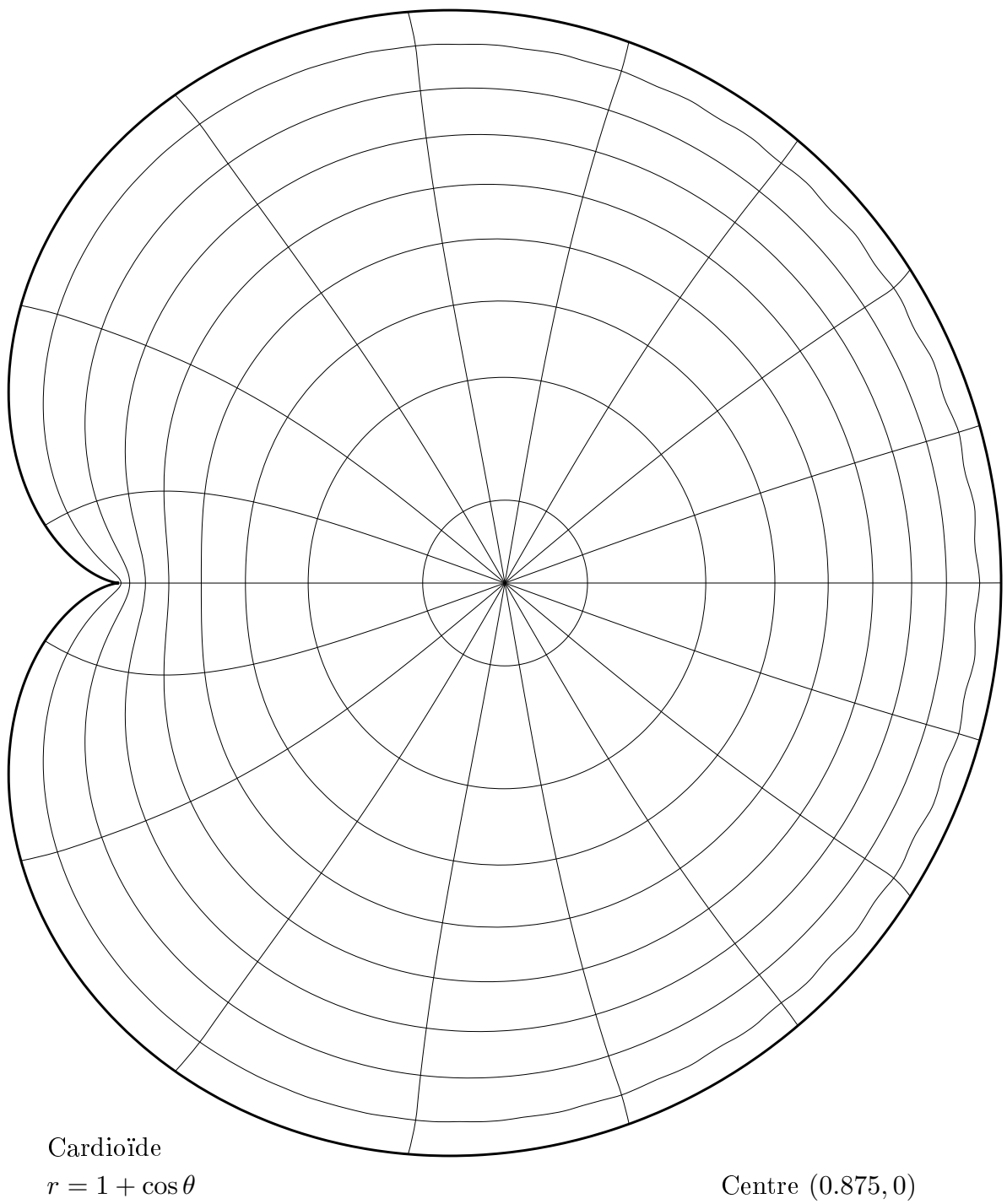


Domaine polygonal non convexe



**Fig. 4**

**Fig. 5**



**Fig. 6**

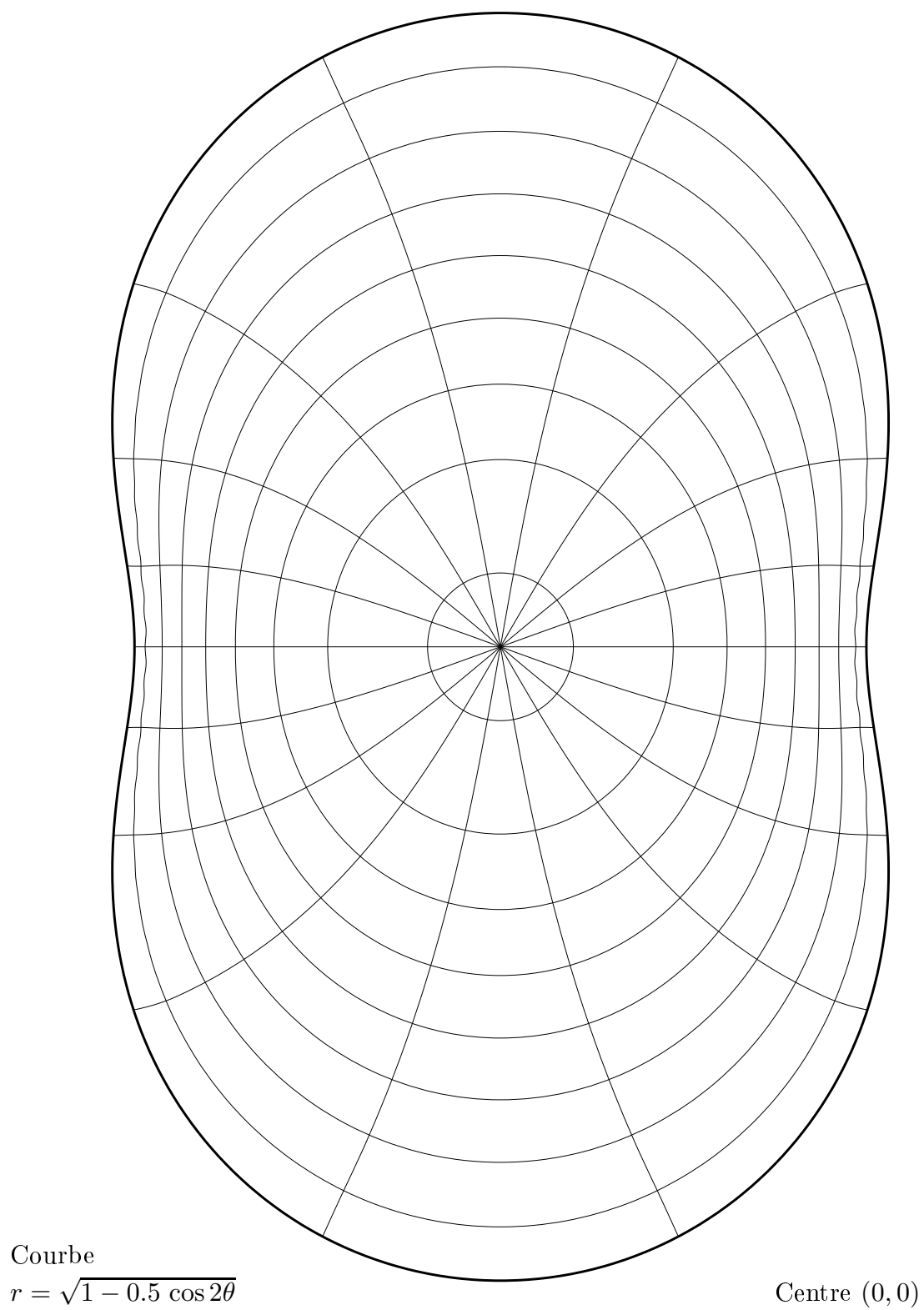


Fig. 7

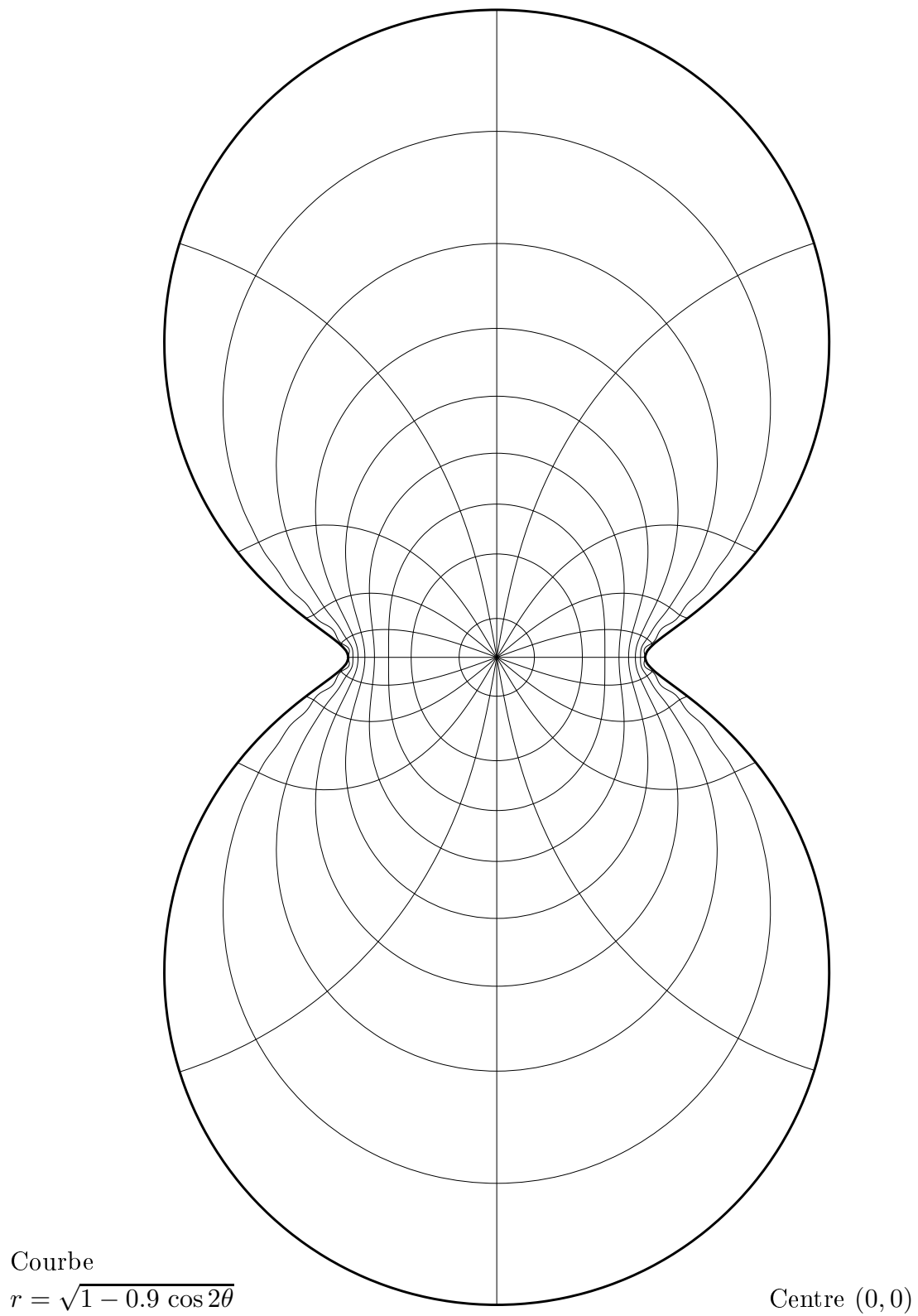


Fig. 8



# Chapitre VIII

## Surfaces de Riemann, propriétés fondamentales et exemples

### 1. Variétés différentielles et surfaces de Riemann

#### 1.1. Faisceaux de fonctions et espaces annelés

Nous introduisons d'abord la notion de faisceau de fonctions. Une notion plus élaborée de faisceau (dont les «sections» ne sont pas nécessairement des fonctions) nous sera nécessaire ultérieurement, mais nous avons préféré limiter le cadre conceptuel dans un premier temps, afin de rester le plus élémentaire possible.

**Définition 1.** *Si  $X$  est un espace topologique et  $E$  un ensemble, on appelle faisceau de fonctions  $\mathcal{F}$  de  $X$  dans  $E$  la donnée, pour chaque ouvert  $U \subset X$ , d'un ensemble  $\mathcal{F}(U)$  de fonctions  $U \rightarrow E$  tel que :*

- (i) *Si  $V \subset U$  et  $f \in \mathcal{F}(U)$  alors  $f|_V \in \mathcal{F}(V)$ ,*
- (ii) *Etant donné une réunion d'ouverts  $V = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$  et des fonctions  $f_\alpha \in \mathcal{F}(V_\alpha)$  vérifiant  $\forall \alpha, \beta \in I, f_\alpha|_{V_\alpha \cap V_\beta} = f_\beta|_{V_\alpha \cap V_\beta}$ , alors la fonction  $f : V \rightarrow E$  définie par  $\forall \alpha \in I, f|_{V_\alpha} = f_\alpha$  est telle que  $f \in \mathcal{F}(V)$ .*

On peut, par exemple, considérer le faisceau (assez peu intéressant a priori...) de toutes les fonctions  $U \rightarrow E$ , auquel cas (ii) est trivial. En général, l'axiome (ii) signifie que le faisceau  $\mathcal{F}$  est décrit par une propriété de nature locale (comme la continuité, la différentiabilité, etc), et non de nature globale (comme le serait la propriété, pour une fonction, d'être bornée). Ainsi, si  $E = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on peut s'intéresser aux faisceaux  $\mathcal{C}_{X,\mathbb{R}}, \mathcal{C}_{X,\mathbb{C}}$  des fonctions continues à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{C}$ . Dans ces deux derniers cas, on a affaire à des *faisceaux d'anneaux*, c'est-à-dire des faisceaux  $\mathcal{A}$  tels que  $\mathcal{A}(U)$  est un anneau pour tout ouvert  $U \subset X$  (ce qui suppose que l'ensemble d'arrivée  $E$  a lui-même une structure d'anneau). Un couple  $(X, \mathcal{A})$  formé d'un espace topologique et d'un faisceau d'anneaux est

appelé un *espace annelé*, et  $\mathcal{A}$  est appelé le *faisceau structural* de  $X$ . Les exemples fondamentaux qui vont nous préoccuper sont les espaces annelés  $(\Omega, \mathcal{O})$  et  $(\Omega, \mathcal{C}^k)$ , où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$  (resp. de  $\mathbb{R}^n$ ), et où, pour tout ouvert  $U$  de  $\Omega$ , l'anneau  $\mathcal{O}(U)$  est l'ensemble des fonctions holomorphes sur  $U$  et  $\mathcal{C}^k(U)$  celui des fonctions  $\mathbb{R}$ -différentiables de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $U$ , à valeurs réelles. Plus généralement :

**Définition 2.** On appelle variété différentielle de classe  $\mathcal{C}^k$  et de dimension  $n$  sur  $\mathbb{R}$  un espace annelé  $(X, \mathcal{C}_X^k)$  vérifiant les propriétés suivantes :

- (i)  $X$  est un espace séparé localement compact et réunion dénombrable de compacts ;
- (ii)  $\mathcal{C}_X^k$  est un faisceau de fonctions continues  $X \rightarrow \mathbb{C}$  tel que pour tout point  $p \in X$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $p$  dans  $X$  et un homéomorphisme  $\tau : U \rightarrow \Omega$  sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , possédant la propriété suivante : pour tout ouvert  $V \subset U$ , l'ensemble  $\mathcal{C}_X^k(V)$  consiste en les composées  $f = \tilde{f} \circ \tau$ , avec  $\tilde{f} \in \mathcal{C}^k(\tau(V), \mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^k$  sur l'ouvert image  $\tau(V) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

De même, on appelle surface de Riemann un espace annelé  $(X, \mathcal{O}_X)$  vérifiant l'axiome (i), et à la place de (ii), l'axiome

- (ii')  $\mathcal{O}_X$  est un faisceau de fonctions continues  $X \rightarrow \mathbb{C}$  tel que pour tout point  $p \in X$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $p$  dans  $X$  et un homéomorphisme  $\tau : U \rightarrow \Omega$  sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , possédant la propriété suivante : pour tout ouvert  $V \subset U$ , l'ensemble  $\mathcal{O}_X(V)$  consiste en les composées  $f = \tilde{f} \circ \tau$ , avec  $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\tau(V))$  holomorphe sur l'ouvert image  $\tau(V) \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ .

Un tel homéomorphisme  $\tau$  s'appelle une *carte* (différentiable) de  $(X, \mathcal{C}_X^k)$ , resp. une *carte* (holomorphe) de  $(X, \mathcal{O}_X)$ . Dans ce dernier cas, il résulte de la définition, en prenant  $\tilde{f}(z) = z$ , que la fonction  $\tau$  vérifie elle-même  $\tau \in \mathcal{O}_X(U)$ . D'après l'axiome (ii') de la Définition 2, on peut trouver un recouvrement ouvert  $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$  de  $X$  et un système de cartes  $\tau_\alpha : U_\alpha \rightarrow \Omega_\alpha \subset \mathbb{C}$ . De nouveau, l'axiome (ii') entraîne que les *applications de transition*

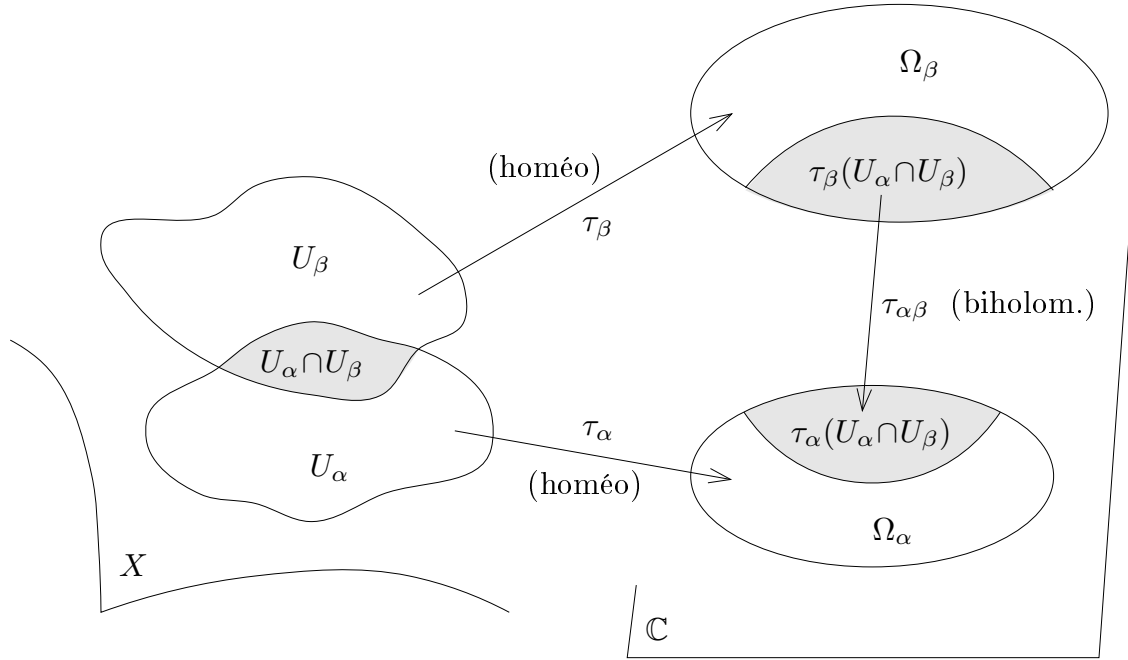
$$\tau_{\alpha, \beta} = \tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1} : \tau_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \tau_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont des biholomorphismes. En effet,  $\tau_{\alpha, \beta}$  est l'unique application  $\tilde{f}$  telle que  $\tau_\alpha = \tilde{f} \circ \tau_\beta$  sur  $V = U_\alpha \cap U_\beta \subset U_\beta$ , et comme  $\tau_\alpha|_V \in \mathcal{O}_X(V)$ , on doit avoir

$$\tau_{\alpha, \beta} = \tilde{f} \in \mathcal{O}_X(\tau_\beta(V)) = \mathcal{O}_X(\tau_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)).$$

Par symétrie des rôles de  $\alpha, \beta$ , on a aussi  $\tau_{\alpha, \beta}^{-1} = \tau_{\beta, \alpha} \in \mathcal{O}_X(\tau_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta))$ . Ces propriétés peuvent être visualisées par le schéma suivant.





Inversement, on va pouvoir reconstruire une structure d'espace annelé à partir d'un *atlas différentiable* (resp. un *atlas holomorphe*) comme ci-dessus :

**Définition 3.** On appelle *atlas différentiable de classe  $\mathcal{C}^k$*  (resp. *holomorphe*) sur un espace topologique  $X$  (localement compact, séparé et réunion dénombrable de compacts) la donnée d'un recouvrement ouvert  $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$  de  $X$  et d'un système d'homéomorphismes (appelés *cartes*)  $\tau_\alpha : U_\alpha \rightarrow \Omega_\alpha$  sur des ouverts  $\Omega_\alpha \subset \mathbb{C}$ , tel que les applications de transition

$$\tau_{\alpha,\beta} = \tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1} : \tau_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \tau_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

soient des difféomorphismes de classe  $\mathcal{C}^k$  (resp. des biholomorphismes).

Pour reconstruire une structure de surface de Riemann à partir d'un atlas holomorphe, on utilise la proposition suivante (le cas d'une variété différentielle serait entièrement analogue). La preuve est très facile et sera laissée au lecteur.

**Proposition.** A tout atlas holomorphe  $\tau_\alpha : U_\alpha \rightarrow \Omega_\alpha$ ,  $\alpha \in I$ , sur  $X$ , on associe le faisceau d'anneau  $\mathcal{O}_X$  ainsi défini : si  $V$  est un ouvert de  $X$ ,  $\mathcal{O}_X(V)$  est l'ensemble des fonctions  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $\tilde{f}_\alpha = f \circ \tau_\alpha^{-1}$  est holomorphe sur  $\tau_\alpha(V) \cap \Omega_\alpha$  pour tout  $\alpha \in I$ . Alors  $(X, \mathcal{O}_X)$  est une surface de Riemann.

**Remarque.** Un atlas holomorphe peut évidemment être considéré comme un atlas  $\mathcal{C}^\infty$  à valeurs dans  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ . En composant les cartes  $\tau_\alpha$  avec des applications de classe  $\mathcal{C}^k$   $k = 0, 1, \dots, \infty$ , on obtient des inclusions de faisceaux d'anneaux

$$\mathcal{O}_X \subset \mathcal{C}_X^\infty \subset \dots \subset \mathcal{C}_X^k \subset \dots \subset \mathcal{C}_X^1 \subset \mathcal{C}_X^0.$$

La variété différentielle de dimension 2  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  s'appelle la surface différentielle sous-jacente à la surface de Riemann  $(X, \mathcal{O}_X)$ . De même, on appelle *variété*

*topologique* toute variété  $(X, \mathcal{C}_X^0)$  de classe  $\mathcal{C}^0$ , et on a le concept de variété topologique sous-jacente à une variété différentielle de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, \infty$ .

**Définition 4.** Si  $\tau : U \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$  est une carte de la variété différentielle  $X$ , on notera en général  $\tau(p) = (x_1, \dots, x_n)$  et on dira que les fonctions  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées locales du point  $p$  relativement à la carte  $\tau$ . Dans le cas d'une surface de Riemann, on posera le plus souvent  $\tau(p) = z$  et on dira que  $z$  est une coordonnée locale holomorphe (de sorte que  $z = x + iy$  fournit des coordonnées locales  $(x, y)$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ). On dit enfin que la carte est centrée en un point  $p_0 \in U$  si  $\tau(p_0) = 0$ , c'est-à-dire si  $p_0$  est l'origine des coordonnées locales.

## 1.2. Espace tangent à une variété ou à une surface de Riemann

Nous introduisons d'abord la notion classique de dérivation. Si  $A$  et  $B$  sont des anneaux (supposés commutatifs et unitaires), et si  $B$  est aussi une  $A$ -algèbre, ce qui revient à la donnée d'un homomorphisme d'anneaux  $A \rightarrow B$ ,  $x \mapsto x1_B$ , on appelle dérivation  $D$  de  $A$  dans  $B$  toute application  $D : A \rightarrow B$  qui est un homomorphisme de groupes additifs et qui vérifie la règle de Leibnitz

$$D(uv) = uD(v) + D(u)v \quad \text{pour tous } u, v \in A.$$

Comme  $D(1_A) = D(1_A \times 1_A) = 1_A D(1_A) + 1_A D(1_A) = 2D(1_A)$ , il vient nécessairement  $D(1_A) = 0$ . On notera  $\text{Der}(A, B)$  l'ensemble des dérivations de  $A$  dans  $B$ . Si en outre  $A, B$  sont des algèbres sur un corps  $\mathbb{K}$ , on supposera en général que l'homomorphisme  $A \rightarrow B$  est  $\mathbb{K}$ -linéaire, et on note alors  $\text{Der}_{\mathbb{K}}(A, B)$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des dérivations  $\mathbb{K}$ -linéaires de  $A$  dans  $B$ .

Si  $\mathcal{A}$  est un faisceau d'anneaux sur  $X$  de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on peut considérer l'anneau noté  $\mathcal{A}_x$  des « germes » de fonctions de  $\mathcal{A}$  en  $x$ , c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions définies sur des voisinages  $V$  assez petits de  $x$ , pour la relation d'équivalence  $f \sim g$  si  $f$  et  $g$  coïncident sur un certain voisinage  $W$  de  $x$ . On a un homomorphisme d'anneaux  $\mathcal{A}_x \rightarrow B = \mathbb{K}$  défini par  $f \mapsto f(x) \in \mathbb{K}$ .

**Définition 1.** Si  $\mathcal{A}$  est un faisceau d'anneaux de fonctions sur  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , on appelle dérivation de  $\mathcal{A}$  en un point  $x \in X$  la donnée pour chaque voisinage  $V$  de  $x$  d'une  $\mathbb{K}$ -forme linéaire  $D : \mathcal{A}(V) \rightarrow \mathbb{K}$  compatible aux restrictions (si  $V' \subset V$  et  $f \in \mathcal{A}(V)$ , alors  $Df|_{V'} = Df$ ), et vérifiant la règle de Leibnitz

$$D(fg) = f(x)(Dg) + (Df)g(x)$$

pour tous  $f, g \in \mathcal{A}(V)$ .

Déterminons d'abord les dérivations du faisceau d'anneaux  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^\infty$  au point  $x = 0$ . Soit  $D$  une telle dérivation. Posons  $\xi_j = Dx_j$  (on note ici par abus  $x_j$  la fonction  $x \mapsto x_j$ ). On part de l'observation que

$$D1 = D(1 \cdot 1) = 1 \cdot (D1) + (D1) \cdot 1 = 2D1$$

donc  $D1 = 0$ . Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de 0 et soit

$$u_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) dt.$$

Nous pouvons écrire

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) dt$$

d'où

$$f(x) = f(0) + \sum_{j=1}^n x_j u_j(x) \quad \text{avec} \quad u_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0).$$

Il vient alors

$$Df = \sum_{j=1}^n (Dx_j) u_j(0) = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = D_\xi f(0),$$

donc  $D = D_\xi$  est la dérivation dans la direction du vecteur  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Les dérivations de  $\mathcal{C}_\mathbb{R}^\infty$  s'identifient aux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  par la correspondance  $\xi \mapsto D_\xi$ .

**Définition 2.** *Etant donné une variété différentielle  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on appelle espace tangent de  $X$  au point  $p \in X$ , noté  $T_{X,p}$ , l'ensemble des dérivations du faisceau  $\mathcal{C}_X^\infty$  en  $p$ . On notera  $\xi : f \mapsto \xi f$  (ou parfois  $D_\xi$ ) une telle dérivation.*

D'après ce qui précède, pour toute variété différentielle  $X$  de dimension  $n$  et tout système de coordonnées locales  $\tau = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \Omega$  sur un voisinage ouvert  $U$  du point  $p \in X$ , on a un isomorphisme

$$T_{X,p} \simeq \mathbb{R}^n, \quad \xi \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_n) \quad \text{avec} \quad \xi_j = \xi x_j.$$

Dans ces coordonnées, la dérivation  $\xi$  ( $= D_\xi$ ) peut encore s'écrire sous la forme

$$D_\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

avec l'abus de notation consistant à poser pour tout  $f \in \mathcal{C}_X^\infty(U)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial(f \circ \tau^{-1})}{\partial x_i}(\tau(p)).$$

Dans la pratique, lorsqu'on travaille dans une carte fixée, on considère souvent l'homéomorphisme  $\tau$  comme une « identification » de l'ouvert  $U$  à l'ouvert  $\Omega$ , de sorte qu'on se permet d'omettre  $\tau$  dans les formules, comme si on avait  $\tau = \text{Id}$ . Par définition de l'espace tangent, on peut alors considérer le système de dérivations  $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$  comme une base de  $T_{X,p}$  en chaque point  $p \in U$ .

Le cas d'une surface de Riemann est plus subtil, dans la mesure où il convient de distinguer d'une part les dérivations du faisceau structural  $\mathcal{O}_X$ , et d'autre part celles du faisceau  $\mathcal{C}_X^\infty \supset \mathcal{O}_X$  qui définit la structure de surface différentielle sous-jacente. On part de l'observation que les dérivations  $\xi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$  de l'anneau des fonctions holomorphes sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$  sont données par

$$f \mapsto \xi f = a f'(p) = a \frac{\partial f}{\partial z}(p),$$

où  $a = \xi z$ . Pour le voir (en  $p = 0$  par exemple), on écrit  $f(z) = f(0) + zu(z)$  à partir du développement en série, avec  $u(0) = f'(0)$ ,

**Définition 3.** Soit  $(X, \mathcal{O}_X)$  une surface de Riemann et  $\mathcal{C}_X^\infty \supset \mathcal{O}_X$  le faisceau d'anneaux des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $X$ .

- (i) L'espace tangent (complexe)  $T_{X,p}$  est l'ensemble des dérivations complexes  $\mathcal{O}_{X,p} \rightarrow \mathbb{C}$ , c'est-à-dire les opérateurs linéaires de la forme

$$\xi : \mathcal{O}_{X,p} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \xi \cdot f = a \frac{\partial f}{\partial z}(p), \quad a \in \mathbb{C},$$

relativement à une coordonnée holomorphe  $z = \tau(p)$  sur un ouvert  $U \subset X$ .

- (ii) L'espace tangent réel  $T_{X,p}^{\mathbb{R}}$  est l'ensemble des dérivations réelles  $\mathcal{C}_{X,p}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ , c'est-à-dire les opérateurs linéaires de la forme

$$\xi : \mathcal{C}_{X,p}^\infty \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \xi \cdot f = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(p) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(p), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

relativement à une coordonnée holomorphe  $z = x + iy = \tau(p)$ .

- (iii) L'espace tangent complexifié  $T_{X,p}^{\mathbb{C}}$  est l'ensemble des dérivations  $\mathcal{C}_{X,p}^\infty \rightarrow \mathbb{C}$ , c'est-à-dire les opérateurs linéaires de la forme

$$\xi : \mathcal{C}_{X,p}^\infty \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \xi \cdot f = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(p) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(p) = a \frac{\partial f}{\partial z}(p) + b \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p),$$

relativement à une coordonnée holomorphe  $z = x + iy = \tau(p)$ , où  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  sont des coefficients complexes quelconques et  $a = \alpha + i\beta$ ,  $b = \alpha - i\beta$ .

Il est évident que l'on a un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -espace vectoriels

$$T_{X,p}^{\mathbb{C}} \simeq T_{X,p} \oplus \overline{T}_{X,p}$$

où  $T_{X,p}$  admet pour base la dérivation  $\partial/\partial z$ , où  $\overline{T}_{X,p}$  est l'espace conjugué ayant pour base  $\partial/\partial \bar{z}$ , et  $T_{X,p}^{\mathbb{C}}$  est l'espace de dimension complexe 2 ayant pour base  $(\partial/\partial z, \partial/\partial \bar{z})$ . Rappelons que l'on a par définition

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

L'espace tangent réel  $T_{X,p}^{\mathbb{R}}$ , quant à lui, est un sous-espace vectoriel réel de dimension 2 de l'espace tangent complexifié  $T_{X,p}^{\mathbb{C}}$ , constitué précisément des vecteurs tangents complexifiés invariants par conjugaison, c'est-à-dire les vecteurs de la forme

$$a \frac{\partial}{\partial z} + \bar{a} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}$$

avec  $a = \alpha + i\beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Les dérivations de  $\overline{T}_{X,p}$  annulent les fonctions holomorphes, tandis que celles de  $T_{X,p}$  annulent les fonctions anti-holomorphes, c'est-à-dire les fonctions du faisceau conjugué  $\overline{\mathcal{O}}_X$ .

### 1.3. Sphère de Riemann

La sphère de Riemann est tout simplement la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$

$$S^2 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3; u^2 + v^2 + w^2 = 1\}.$$

On appelle projection stéréographique de pôle  $A \in S^2$ , l'application

$$\pi_A : S^2 \setminus \{A\} \longrightarrow P_A = (OA)^\perp$$

sur le plan  $P_A$  perpendiculaire en  $O$  à la droite  $(OA)$ , qui envoie tout point  $M \in S^2 \setminus \{A\}$  sur le point d'intersection  $(AM) \cap P_A$ . On convient d'orienter le plan  $P_A$  par une base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  choisie en sorte que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, -\vec{OA})$  soit une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$ .

Munie des cartes « projections stéréographiques » :

$$\begin{aligned} \pi_S : S^2 \setminus \{S\}, \quad M \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} &\mapsto z = \frac{u + iv}{1 + w}, \\ \pi_N : S^2 \setminus \{N\}, \quad M \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} &\mapsto z' = \frac{u - iv}{1 - w}, \end{aligned}$$

c'est une surface de Riemann; la transition de carte  $\theta = \pi_N \circ \pi_S^{-1}$  est donnée par

$$\theta : \pi_S(S^2 \setminus \{S, N\}) = \mathbb{C}^* \rightarrow \pi_N(S^2 \setminus \{S, N\}) = \mathbb{C}^* \quad z \mapsto z' = \frac{1}{z}.$$

En étendant  $\pi_S : S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{C}$  en  $\tilde{\pi}_S : S^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , avec  $\tilde{\pi}_S(S) = \infty$ , on identifie la sphère de Riemann à  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

Ainsi, une base de voisinages de  $\infty$  dans  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  est formée des ensembles  $V_R = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \overline{D}(0, R) = \{|z| > R\}$  et une fonction  $f$  est holomorphe au voisinage de  $\infty$  ( $f \in \mathcal{O}_{S^2}(V_R)$ ) si et seulement si  $z \mapsto f(1/z)$  est holomorphe sur  $D(0, 1/R)$ .

On note, à partir de maintenant,  $z = \tau(x)$  la « coordonnée holomorphe locale » (i.e. lecture systématique dans la carte). Une métrique hermitienne sur une surface de Riemann est une application  $x \mapsto h(x)$  de la forme  $h(z) = h_1(z)|dz|^2$  où  $h_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  est de classe  $C^\infty$ . On applique donc cette métrique à des vecteurs du plan tangent à  $X$  en  $x$ .

La métrique induite par  $\mathbb{R}^3$  sur  $S^2$  n'est évidemment pas celle lue par les cartes dans  $\mathbb{C}$ . Néanmoins, on a entre ces deux métriques la relation

$$du^2 + dv^2 + dw^2 = \frac{4|dz|^2}{(1 + |z|^2)^2}$$

si  $du^2 + dv^2 + dw^2$  est la métrique induite par  $\mathbb{R}^3$  et  $|dz|^2$  celle de  $\mathbb{C}$  (lue dans la carte).

**Corollaire.** *Les projections stéréographiques  $\pi_S$  et  $\pi_N$  conservent les angles de courbes.*

*Démonstration.* Ceci vient du fait que les différentielles  $d\pi_S$  et  $d\pi_N$  sont des similitudes directes (les métriques  $du^2 + dv^2 + dw^2$  et  $|dz|^2$  étant proportionnelles d'après le calcul ci-dessus). On dit encore que  $\pi_S$  et  $\pi_N$  sont des transformations « conformes ».  $\square$

Pour obtenir une carte conforme de  $S^2$  (conservant les angles) sur un ouvert  $U \subset S^2$ , il suffit donc de prendre une application quelconque de la forme  $f \circ \pi_S$  avec  $f$  biholomorphe sur l'ouvert image  $\Omega = \pi_S(U)$  (il faut alors supposer que  $S \notin U$ ). Idem pour  $f \circ \pi_N$ .

## 2. Applications holomorphes entre surfaces de Riemann, 1-formes holomorphes

**Définition.** Si  $X$  et  $Y$  sont des surfaces de Riemann alors une application continue  $\varphi : X \rightarrow Y$  est dite holomorphe si  $\forall f \in \mathcal{O}_Y(V)$ ,  $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$ . Si  $(U_\alpha, \tau_\alpha)$  est un atlas de  $X$  et  $(V_\beta, \tilde{\tau}_\beta)$  est un atlas de  $Y$ , cette définition est équivalente à :  $\forall (\alpha, \beta)$ ,  $\tilde{\tau}_\beta \circ \varphi \circ \tau_\alpha^{-1} \in \mathcal{O}(\tau_\alpha(U_\alpha \cap \varphi^{-1}(V_\beta)))$ .

**Remarque.** On définit de même, par cartes locales, le faisceau  $\mathcal{M}_X$  des fonctions méromorphes, et une fonction est méromorphe si elle est localement le quotient de deux fonctions holomorphes.

**Remarque.** Si  $X$  est une surface de Riemann, une fonction méromorphe sur  $X$  est la même chose qu'une fonction holomorphe  $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  (cf. le changement de carte, au voisinage de  $\infty$ ,  $\theta \circ f = 1/f$ ).

**Définition.** Une 1-forme holomorphe (respectivement méromorphe) sur une surface de Riemann  $X$  est la donnée de  $\beta(z) = f(z) dz$ , où  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe (respectivement méromorphe). On définit le résidu, en  $z_0$ , d'une 1-forme  $\beta$  holomorphe sur  $U \setminus \{z_0\}$ , par

$$\text{Res}(\beta, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \beta,$$

où  $\gamma$  est un lacet dans  $U \setminus \{z_0\}$  d'indice 1 en  $z_0$ , par exemple le bord d'un petit voisinage compact de  $z_0$ .

**Théorème (Formule des résidus).** Si  $X$  est une surface de Riemann, si  $K$  est un compact de  $X$  à bord de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et  $\alpha$  est une 1-forme holomorphe sur  $V \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$  où  $V$  est un voisinage de  $K$  et  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset K^\circ$ , alors

$$\int_{\partial K} \beta = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(\beta, x_j).$$

*Démonstration.* On découpe le compact en un nombre fini de morceaux  $K_\ell$  contenus dans des cartes, en se débrouillant pour que  $\partial K_\ell$  ne contienne pas de point singulier. On applique alors la formule usuelle (pour un compact de  $\mathbb{C}$ ) à chacun des compacts  $K_\ell$ .  $\square$

### 3. Surfaces de Riemann compactes

**Théorème.** *Si  $X$  est une surface de Riemann compacte connexe alors les seules applications holomorphes sur  $X$  sont les constantes.*

*Démonstration.* Application immédiate du principe du maximum (le maximum est atteint puisqu'on est sur un espace compact).  $\square$

**Théorème.** *Si  $X$  est une surface de Riemann compacte et  $\beta$  est une 1-forme méromorphe sur  $X$  alors  $\sum_{x \in X} \text{Res}(\beta, x) = 0$ .*

**Remarque.** On déduit de ce qui précède, en considérant  $\beta = df/f$ , qu'une fonction méromorphe sur une surface de Riemann compacte a autant de zéros que de pôles, pourvu que l'on prenne en compte les multiplicités.

### 4. Courbes algébriques

#### 4.1. Courbes algébriques affines

**Définition.** *Une courbe algébrique affine plane est une courbe  $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; P(x, y) = 0\}$ , où  $P$  est un polynôme.*

Pour qu'une telle courbe soit lisse, il suffit que le système d'équations  $P(x, y) = \partial P / \partial x(x, y) = \partial P / \partial y(x, y) = 0$  n'admette pas de solution dans  $\mathbb{C}^2$ .

Dans ce cas, si par exemple  $\partial P / \partial y(x_0, y_0) \neq 0$  en un point de  $\mathbb{C}$ , alors par le théorème des fonctions implicites on a  $h : V \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe sur un voisinage  $V$  de  $x_0$  telle que  $C$  soit le graphe  $y = h(x)$  au voisinage de  $(x_0, y_0)$ .  $C$  est donc une surface de Riemann, de carte locale en un tel point la première projection  $p_1(x, y) = x$ .

#### 4.2. Courbes algébriques projectives

**Définition.** *Si  $Q \in \mathbb{C}[x, y, z]$  est homogène de degré  $d$ , i.e.*

$$Q(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d Q(x, y, z),$$

*alors on définit la courbe projective plane*

$$C = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2; Q(x, y, z) = 0\}.$$

*Si  $U = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2; z \neq 0\}$ , alors  $U \simeq \mathbb{C}^2$  et, pour une courbe projective plane  $C$  comme ci-dessus,*

$$C \cap U = \{[x : y : 1]; Q(x, y, 1) = 0\}.$$

*$C \cap U$  est donc, par l'isomorphisme  $U \simeq \mathbb{C}^2$ , une courbe algébrique affine plane.*

Pour qu'une courbe projective plane soit lisse, et donc une surface de Riemann compacte, il suffit que le système d'équations

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

n'admette pas de solution dans  $\mathbb{C}^3$ .

**Définition.** Si  $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; P(x, y) = 0\}$  est une courbe algébrique affine plane de degré  $\deg(P) = d$ , alors on introduit le polynôme homogénéisé

$$Q(x, y, z) = z^d P(x/z, y/z)$$

et la compactifiée de  $\mathbb{C}$  est la courbe projective plane

$$\overline{C} = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2; Q(x, y, z) = 0\}.$$

Les points à l'infini rajoutés à  $C$  pour former  $\overline{C}$  correspondent à  $z = 0$  et se calculent donc en considérant l'équation  $Q(x, y) = 0$ .

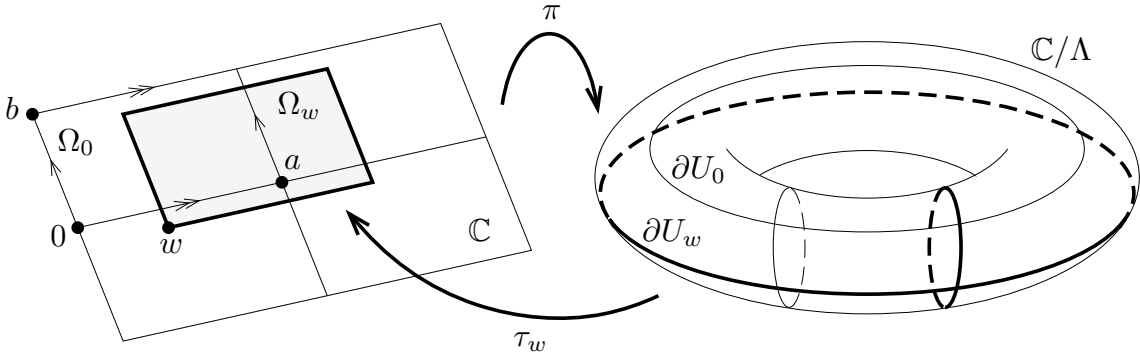
## 5. Courbes elliptiques

### 5.1. Définition des courbes elliptiques

**Définition.** Soit  $\Lambda$  un réseau dans  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire un sous-groupe discret de rang 2

$$\Lambda = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \{ma + pb; (m, p) \in \mathbb{Z}^2\}$$

où  $a, b$  sont des nombres complexes  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants. On appelle courbe elliptique associée au réseau  $\Lambda$  l'espace quotient  $X = \mathbb{C}/\Lambda$ , muni de la topologie quotient.



Topologiquement,  $\mathbb{C}/\Lambda$  est un tore, obtenu en recollant les arêtes opposées du parallélogramme fondamental  $P$  (parallélogramme fermé d'arêtes  $[0, a]$  et  $[0, b]$ ). Soit  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X = \mathbb{C}/\Lambda$  la projection canonique. Pour tout  $w \in \mathbb{C}$ , on considère le parallélogramme ouvert

$$\Omega_w = w + P^\circ, \quad \Omega_w \subset \mathbb{C},$$

et son image  $U_w = \pi(\Omega_w) \subset X$ . Alors  $\pi$  est un homéomorphisme de  $\Omega_w$  sur  $U_w$  et on a donc un homéomorphisme inverse  $\tau_w = \pi^{-1} : U_w \rightarrow \Omega_w$ . Le système  $(\tau_w)_{w \in \mathbb{C}}$  constitue un atlas holomorphe. En effet, il n'est pas difficile de constater que les intersections  $U_w \cap U_{w'}$  sont constituées de 1, 2 ou 4 composantes connexes qui sont elles-mêmes des parallélogrammes (4 parallélogrammes par exemple pour l'intersection  $U_0 \cap U_w$  figurant sur le schéma ci-dessus). Les applications de



transition  $\tau_{ww'} = \tau_w \circ \tau_{w'}^{-1} : \tau_{w'}(U_w \cap U_w) \rightarrow \tau_w(U_w \cap U_w)$  coïncident avec des translations  $z \mapsto z + \lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , sur chacune des composantes connexes de  $\tau_{w'}(U_w \cap U_w)$  (l'élément  $\lambda$  n'est pas le même sur les différentes composantes connexes, mais peu importe ...).

**Conséquence.** *L'atlas  $(\tau_w)_{w \in \mathbb{C}}$  est holomorphe et munit la courbe elliptique  $\mathbb{C}/\Lambda$  d'une structure de surface de Riemann compacte.*

Notre objectif est de démontrer le théorème suivant.

**Théorème.** *Pour tout réseau  $\Lambda$ , la courbe elliptique  $\mathbb{C}/\Lambda$  est isomorphe (en tant que surface de Riemann) à une courbe algébrique lisse de degré 3 dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ .*

On peut en fait démontrer que toute surface de Riemann compacte  $X$  admet un plongement sur une courbe algébrique lisse dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$  (et une immersion dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , sur une courbe algébrique n'ayant que des points doubles « ordinaires »), mais il s'agit d'un résultat considérablement plus difficile, nécessitant des résultats d'Analyse non triviaux. Dans le cas qui nous intéresse, la preuve se fait en exhibant un isomorphisme explicite relativement simple. C'est l'objet du paragraphe suivant.

## 5.2. Fonction $\wp$ de Weierstrass

Étant donné un réseau  $\Lambda = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b \subset \mathbb{C}$ , on définit la fonction de Weierstrass  $\wp$  associée à  $\Lambda$  par

$$\begin{aligned} (5.2.1) \quad \wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \left( \frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,p) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left( \frac{1}{(z - ma - pb)^2} - \frac{1}{(ma + pb)^2} \right). \end{aligned}$$

On commence par montrer qu'il y a convergence normale sur tout compact de  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  (les points de  $\Lambda$  étant visiblement des points singuliers). En effet,

$$\frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{1}{(1 - z/\lambda)^2} - 1 \right) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{(z/\lambda)(2 - z/\lambda)}{(1 - z/\lambda)^2}.$$

Pour  $z \in K \subset \overline{D}(0, R)$  et  $\lambda$  assez grand, disons  $|\lambda| \geq 2R$ , on a  $|z/\lambda| \leq 1/2$  et  $|1 - z/\lambda| \geq 1/2$ , d'où

$$\left| \frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right| \leq \frac{|z/\lambda|(2 + 1/2)}{|\lambda|^2 \cdot 1/4} \leq \frac{10R}{|\lambda|^3}.$$

Le problème est donc seulement de démontrer la convergence de la série à termes positifs  $\sum_{\lambda \in \Lambda^*} 1/|\lambda|^3$ . Or, en raison des hypothèses,  $(a, b)$  est une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ , et par conséquent  $(x, y) \mapsto |x| + |y|$  et  $(x, y) \mapsto |xa + yb|$  sont deux normes sur  $\mathbb{R}^2$ . Le théorème sur l'équivalence des normes dans les espaces normés de dimension finie entraîne l'existence de constantes  $C_1, C_2 > 0$  telles que

$$C_1(|x| + |y|) \leq |xa + yb| \leq C_2(|x| + |y|).$$

En particulier  $|ma + pb| \geq C_1(|m| + |p|)$ , et le problème se ramène donc à la convergence de la série

$$\sum_{(m,p) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(|m| + |p|)^3} = 4 \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{m^3} + 4 \sum_{(m,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(m + p)^3}.$$

On peut pour cela utiliser la majoration élémentaire usuelle

$$\sum_{m \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(m+p)^\alpha} \leq \int_p^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{p^{\alpha-1}}, \quad \forall \alpha > 1.$$

En appliquant ceci pour  $\alpha > 2$  et en sommant sur  $p \in \mathbb{N}^*$  il vient

$$\sum_{(m,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(m+p)^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{\alpha-1} \left(1 + \frac{1}{\alpha-2}\right) = \frac{1}{\alpha-2} < +\infty.$$

Comme la série définissant  $\wp$  ne comporte qu'un nombre fini de termes ayant des pôles dans un disque compact  $\overline{D}(0, R)$  donné (à savoir  $1/z^2$  et les termes  $1/(z-\lambda)^2 - 1/\lambda^2$  correspondant aux indices  $\lambda \in \Lambda^* \cap \overline{D}(0, R)$ ), et comme chacun de ces termes est méromorphe sur  $\mathbb{C}$ , on en déduit que  $\wp$  est une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$ , admettant pour pôles les éléments  $\lambda \in \Lambda$  du réseau. Par ailleurs, le théorème de dérivation terme à terme donne

$$(5.2.2) \quad \wp'(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{-2}{(z-\lambda)^3}$$

avec convergence normale sur tout compact de  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ . De là on déduit la

**Proposition.** *La fonction  $\wp$  est une fonction méromorphe périodique de groupe de périodes  $\Lambda$ , i.e.  $\wp(z+\lambda) = \wp(z)$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$  et il n'y a pas d'autres périodes. La fonction admet pour pôles précisément les points de  $\Lambda$ ; ce sont des pôles doubles. Par ailleurs, la fonction  $\wp$  est paire, et elle admet au voisinage de 0 un développement en série de Laurent*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{p=1}^{+\infty} (2p+1) s_{2p+2} z^{2p},$$

où les coefficients  $s_p$  sont les sommes des « séries d'Eisenstein »

$$s_p = \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \frac{1}{\lambda^p}.$$

*Démonstration.* Il est clair sur la formule (5.2.1) que  $\wp$  est paire (un changement concomitant de  $z$  en  $-z$  et de  $\lambda \in \Lambda^*$  en  $-\lambda \in \Lambda^*$  laisse la série inchangée). Par ailleurs, la  $\Lambda$ -périodicité de la dérivée  $\wp'$  est évidente sur la formule (5.2.2). En particulier, les fonctions  $\wp(z+a) - \wp(z)$  et  $\wp(z+b) - \wp(z)$  sont constantes, puisque leur dérivée est nulle sur l'ouvert connexe  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ . En prenant  $z = -a/2 \notin \Lambda$ , il vient  $\wp(z+a) - \wp(z) = \wp(a/2) - \wp(-a/2) = 0$  donc  $\wp(z+a) - \wp(a)$  est nulle, et il en est de même pour  $\wp(z+b) - \wp(z)$ . On voit donc que tous les éléments  $\lambda = ma + pb$  sont des périodes. Comme

$$u(z) = \wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \left( \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

est homomorphe au voisinage de 0 avec  $u(0) = 0$  et

$$u^{(n)}(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \frac{(-1)^n (n+1)!}{(z-\lambda)^{n+2}}, \quad n \geq 1,$$

il vient  $u(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{(n)}(0)}{n!} z^n$  au voisinage de 0, avec  $\frac{u^{(n)}(0)}{n!} = (n+1)s_{n+2}$ . L'impairité de  $s_n$  vis-à-vis de  $\lambda$  montre que  $s_n = 0$  pour  $n$  impair  $\geq 3$ , on a donc

$$u(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)s_{n+2}z^n = \sum_{p=1}^{+\infty} (2p+1)s_{2p+2}z^{2p}$$

au voisinage de 0 et le développement en série de Laurent de  $\wp$  s'en déduit. Soit enfin  $\Lambda_1$  le groupe des périodes de  $\wp$ , qui contient  $\Lambda$  d'après ce qui précède. Comme 0 est un pôle double, la  $\Lambda_1$ -périodicité montre que les points de  $\Lambda_1$  sont également des pôles. On a donc  $\Lambda_1 \subset \Lambda$ , d'où  $\Lambda_1 = \Lambda$ .  $\square$

**Corollaire.** *La fonction  $\wp$  se factorise par passage au quotient en une fonction méromorphe*

$$\tilde{\wp} : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

(et donc en une application holomorphe  $\tilde{\wp} : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ ), ayant un unique pôle double  $\tilde{0}$ .

De même les dérivées  $\wp^{(n)}$  sont  $\Lambda$ -périodiques et donnent par passage au quotient des fonctions méromorphes  $\tilde{\wp}^{(n)}$  sur  $\mathbb{C}/\Lambda$  admettant  $\tilde{0}$  comme unique pôle. On montre maintenant, et c'est là un fait tout à fait fondamental, que  $\wp$  satisfait une équation différentielle algébrique simple.

**Équation différentielle fondamentale de  $\wp$ .** *La fonction  $\wp$  satisfait l'équation*

$$\wp'^2 = 4\wp^3 + \alpha\wp + \beta$$

avec les constantes complexes  $\alpha = -60s_4$ ,  $\beta = -140s_6$ .

*Démonstration.* Le début de la série de Laurent de  $\wp$  est

$$\wp(z) = z^{-2} + 3s_4z^2 + 5s_6z^4 + 7s_8z^6 + O(z^6).$$

Par dérivation, on a donc

$$\begin{aligned} \wp'(z) &= -2z^{-3} + 6s_4z + 20s_6z^3 + 42s_8z^5 + O(z^5), \\ \wp'(z)^2 &= 4z^{-6} - 24s_4z^{-2} - 80s_6 + (36s_4^2 - 168s_8)z^2 + O(z^4), \\ \wp(z)^3 &= z^{-6} + 9s_4z^{-2} + 15s_6 + (27s_4^2 + 21s_8)z^2 + O(z^4). \end{aligned}$$

Par différence, on trouve

$$\begin{aligned} \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 &= -60s_4z^{-2} - 140s_6 - (72s_4^2 + 252s_8)z^2 + O(z^4) \\ \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 - \alpha\wp(z) &= -140s_6 + (108s_4^2 - 252s_8)z^2 + O(z^4). \end{aligned}$$

en posant  $\alpha = -60s_4$ . En particulier la fonction  $\tilde{\wp}'^2 - 4\tilde{\wp}^3 - \alpha\tilde{\wp}$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}/\Lambda$  tout entier (le pôle  $z = \tilde{0}$  a disparu). Par compacité de  $\mathbb{C}/\Lambda$ , elle est

nécessairement constante et égale à sa valeur en  $z = \dot{0}$ , soit  $\beta = -140s_6$ , ce qui démontre le théorème.  $\square$

**Remarque.** L'identification à zéro des coefficients ultérieurs du développement fournit des relations remarquables reliant les valeurs des série d'Eisenstein, permettant en particulier de calculer de proche en proche  $s_8, s_{10}, \dots$ , à partir des deux premières valeurs  $s_4, s_6$ . On a ainsi  $108s_4^2 - 252s_8 = 0$ , d'où  $s_8 = \frac{3}{7}s_4^2$ .

On a maintenant le lemme suivant.

**Lemme.** *Les zéros de  $\wp'$  sont les points  $z = a/2$ ,  $z = b/2$  et  $z = (a+b)/2$ . Leurs images par  $\wp$ , à savoir*

$$r_1 = \wp(a/2), \quad r_2 = \wp(b/2), \quad r_3 = \wp((a+b)/2)$$

*sont les trois racines (2 à 2 distinctes) de l'équation  $4p^3 + \alpha p + \beta = 0$ ,  $p \in \mathbb{C}$ . En outre, l'application*

$$\tilde{\wp} : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$$

*a la propriété suivante: pour tout  $w \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{\infty, r_1, r_2, r_3\}$ , la préimage  $(\tilde{\wp})^{-1}(w)$  est constituée de deux éléments opposés et distincts  $z, -z \pmod{\Lambda}$ , tandis que pour  $w = \infty, r_1, r_2, r_3$ , l'équation  $\tilde{\wp}(z) = w$  admet une racine double, égale respectivement à  $0, a/2, b/2, (a+b)/2 \pmod{\Lambda}$ .*

On exprime géométriquement le lemme en disant que  $\tilde{\wp}$  réalise un « revêtement ramifié » à 2 feuillets de  $\mathbb{C}/\Lambda$  sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , avec points de ramification  $0, a/2, b/2, (a+b)/2 \pmod{\Lambda}$ .

*Démonstration.* Si  $w = \infty$ , on a bien  $(\tilde{\wp})^{-1}(\infty) = \{\dot{0}\}$ , et ce point doit être considéré comme double, puisque  $\dot{0}$  est un pôle double. Maintenant, si  $w \in \mathbb{C}$ , la fonction méromorphe  $\tilde{\wp}(z) - w$  sur la surface de Riemann compacte  $\mathbb{C}/\Lambda$  est telle que la somme algébrique des multiplicités des zéros et des pôles est nulle. Comme il n'y a qu'un seul pôle, de multiplicité 2, on en déduit que l'équation  $\tilde{\wp}(z) = w$  admet deux racines, comptées avec multiplicités. D'après la parité de  $\wp$ , ces racines forment nécessairement un couple de points 2 à 2 opposés  $z, -z$ , à moins qu'on ait  $z = -z$  dans  $\mathbb{C}/\Lambda$ . Ceci se produit si et seulement si  $2z = 0 \pmod{\Lambda}$  i.e.  $2z = ma + pb \in \Lambda$ . Suivant la parité de  $m$  et  $p$ , on obtient exactement 4 classes, celle des éléments  $z = 0, a/2, b/2, (a+b)/2$ . En 0, la situation est claire, on a  $\wp(0) = \infty$  et 0 est un pôle double. Aux autres points, par exemple  $a/2$ , l'imparité et la périodicité de  $\wp'$  impliquent  $\wp'(a/2) = -\wp'(-a/2) = -\wp'(a/2 - a) = -\wp'(a/2)$ , donc  $\wp'(a/2) = 0$ . On trouve de même  $\wp'(b/2) = 0$  et  $\wp'((a+b)/2) = 0$ . Par conséquent, si  $r_1, r_2, r_3$  sont les images par  $\wp$  de  $a/2, b/2$  et  $(a+b)/2$ , l'équation  $\tilde{\wp}(z) = r_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) admet ces points comme racines doubles, et il ne peut y en avoir d'autre. L'équation  $\wp'^2 = 4\wp^3 + \alpha\wp + \beta$  montre que les images  $r_1, r_2, r_3$  de  $a/2, b/2, (a+b)/2$  par  $\wp$  sont bien racines de l'équation  $4p^3 + \alpha p + \beta = 0$ . Les images  $r_1, r_2, r_3$  sont nécessairement distinctes (et sont donc les 3 racines distinctes du polynôme  $4p^3 + \alpha p + \beta$ ): si on avait disons  $r_1 = r_2$ , alors l'équation  $\wp(z) = r_1 = r_2$  admettrait 2 racines doubles distinctes mod  $\Lambda$ , à savoir les classes de  $a/2, b/2$ , soit un total de 4 points en comptant les multiplicités, contradiction. Le lemme est démontré.  $\square$

Nous avons maintenant le résultat suivant, qui précise le résultat énoncé au § 5.2.

**Théorème.** *L'application  $\varphi : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  telle que*

$$\varphi(z) = [\tilde{\wp}(z) : \tilde{\wp}'(z) : 1]$$

*pour  $z \neq \dot{0}$  et  $\varphi(\dot{0}) = [0 : 1 : 0]$  définit un isomorphisme (c'est-à-dire une application biholomorphe) de la courbe elliptique  $\mathbb{C}/\Lambda$  sur la courbe algébrique lisse de degré 3*

$$\overline{\Gamma} = \{[x : y : t] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2; y^2t = 4x^3 + \alpha xt^2 + \beta t^3\},$$

*qui est la compactification projective de la courbe algébrique affine*

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; y^2 = 4x^3 + \alpha x + \beta\}.$$

*Le point  $[0 : 1 : 0]$  est l'unique point à l'infini de  $\overline{\Gamma}$ , et sur  $\mathbb{C}/\Lambda \setminus \{\dot{0}\}$ ,  $\varphi$  peut être vue comme l'application*

$$\mathbb{C}/\Lambda \setminus \{\dot{0}\} \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{C}^2, \quad z \mapsto (\wp(z), \wp'(z)).$$

*Démonstration.* Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que  $\overline{\Gamma}$  est lisse (on utilise pour cela le fait que l'équation  $4p^3 + \alpha p + \beta = 0$  a ses 3 racines distinctes), et qu'elle admet  $[0 : 1 : 0]$  comme unique point à l'infini. L'équation différentielle satisfaite par  $\wp$  montre que  $\varphi$  envoie bien  $\mathbb{C}/\Lambda$  dans  $\overline{\Gamma}$ . Seul le comportement au voisinage de  $\dot{0}$  n'est pas clair. Pour  $z$  voisin de 0, on a

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= [\wp(z) : \wp'(z) : 1] = [z^{-2} + O(z^2) : -2z^{-3} + O(z) : 1] \\ (5.2.3) \quad &= [z + O(z^5) : -2 + O(z^4) : z^3] = \left[-\frac{1}{2}z + O(z^5) : 1 : -\frac{1}{2}z^3 + O(z^7)\right], \end{aligned}$$

après multiplication par  $z^3$ , puis division par  $-2 + O(z^4)$ . Ceci montre bien que  $\varphi : \mathbb{C}/\Lambda \setminus \dot{0}$  se prolonge au voisinage de l'origine en une application holomorphe de  $\mathbb{C}/\Lambda$  dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , telle que  $\varphi(\dot{0}) = [0 : 1 : 0]$ . Pour  $z \neq \dot{0}$ , la dérivée de  $\varphi$  (vue comme application dans  $\mathbb{C}^2$ ) est

$$\varphi'(z) = (\tilde{\wp}'(z), \tilde{\wp}''(z)),$$

qui ne s'annule jamais (la première composante  $\tilde{\wp}'(z)$  s'annule seulement si  $z = a/2$ ,  $z = b/2$ ,  $z = (a+b)/2$ , mais en ces points  $\tilde{\wp}''(z) \neq 0$ , puisque ces points sont des racines doubles de l'équation  $\tilde{\wp}(z) = r_j$ ). Par ailleurs, (5.2.3) montre que  $\varphi'(0) \neq 0$ , la première composante ayant une dérivée non nulle. Ceci montre que  $\varphi$  est un difféomorphisme local de  $\mathbb{C}/\Lambda$  dans  $\overline{\Gamma}$ . En fait  $\varphi$  est bijective, comme il résulte facilement du lemme: la préimage de  $[0 : 1 : 0] \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$  est  $\{\dot{0}\}$ , tandis qu'un point  $(x, y) \in \Gamma$  est atteint par une et une seule des deux racines  $z$ ,  $-z$  de l'équation  $\wp(z) = x$  (on a  $\wp'(z)^2 = y^2 = 4x^3 + \alpha x + \beta$ , et si  $z$  ne convient pas, alors  $-z$  convient grâce à l'impairité de  $\wp'$ ).  $\square$

**Remarque.** On peut démontrer plus généralement que toute surface de Riemann compacte est isomorphe à une courbe projective lisse dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$  et, par projection dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , qu'elle s'envoie sur une courbe algébrique de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  ayant au plus des points doubles ordinaires.