UNE APPROCHE ELEMENTAIRE DES FONCTIONS ANALYTIQUES COMPLEXES, REPRESENTATION CONFORME ET APPLICATION A L'ITERATION POLYNOMIALE

JPB

7 janvier 2001

Première partie

Les fonctions analytiques de la variable complexe

Définition 1 (Fonction analytique sur un ouvert). Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$. Une application $f : \Omega \to \mathbf{C}$ est dite **analytique** dans Ω si, pour tout point $a \in \Omega$ il existe une suite $(a_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ telle que :

– Le rayon de convergence R_a de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ est strictement positif ; on notera $S(z)$ sa somme définie dans $B(0, R_a$.
– Il existe un réel $r \in]0, R_a]$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ est contenue dans Ω et :

$$\boxed{\forall z \in B(a,r), \quad f(z) = S(z-a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-a)^n}$$

Remarque 1. La série entière $\sum_{n\geq p} a_n\, z^{n-p}$ converge pour $|z| < R_a$ et sa somme, notée $S_p(z)$ est continue sur $B(0, R_a)$; elle est donc bornée au voisinage de 0, ce qui autorise l'écriture :

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{p-1} a_n\,(z-a)^n + O\left((z-a)^p\right) \quad \text{quand } z \to a}$$

Proposition 1. *Il résulte du cours de spéciale sur les séries entières que, si f est analytique dans Ω, elle y est $\mathcal{C}^\infty$ (au sens complexe) et, avec les notations précédentes,* $\boxed{a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}}$*. La série entière précédente est donc unique. Dans la suite, on notera $T_{a,f}$ la somme de la série de Taylor de la fonction analytique f au point a et $R_{a,f} > 0$ son rayon de convergence.*

Proposition 2. *Soit f une fonction analytique dans l'ouvert* **connexe** *Ω. S'il existe un point $a \in \Omega$ où la série de Taylor est identiquement nulle, ie $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout entier n, alors f est nulle sur Ω.*

Démonstration. Notons :

$$N = \{z \in \Omega \ / \ \forall n \in \mathbf{N},\ f^{(n)}(z) = 0\} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left(f^{(n)}\right)^{-1}(\{0\})$$

N est un fermé relatif de Ω comme intersection de fermés et ouvert car f est analytique dans Ω. Comme $a \in N$, la connexité de Ω assure $\boxed{N = \Omega}$. □

Théorème 1 (Principe des zéros isolés). *Soit f une fonction analytique dans l'ouvert* **connexe** *Ω et* **non constante***, alors l'ensemble Z_f des zéros de f est un ensemble, éventuellement vide, de points isolés de Ω.*

Démonstration. Soit $a \in Z_f$, d'après la proposition 2 et la non constance de f, il existe un entier n, que l'on peut supposer minimum, tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Il vient alors, quand $z \to a$:

$$\boxed{f(z) \sim \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n}$$

Il existe donc une boule ouverte B, centrée en a telle que, pour tout $z \in B - \{a\}$, $f(z) \neq 0$. □

Théorème 2 (Principe du maximum). *Soit f une fonction analytique dans l'ouvert* **connexe** *Ω et* **non constante***, alors $|f|$ n'admet de maximum local en aucun point de Ω.*

Démonstration. Soit $a \in \Omega$, prouvons l'existence de $z \in \Omega$, aussi proche qu'on veut de a, tel que $|f(z)| > |f(a)|$. Si $f(a) = 0$ cela résulte du principe des zéros isolés. Sinon, notons n le plus petit entier non nul tel que $n!\,a_n = f^{(n)}(a) \neq 0$, dont l'existence est assuré par la non constance de f et la connexité de Ω. Il vient, quand z est au voisinage de a :

$$\boxed{f(z) = f(a) + a_n\,(z-a)^n + O\left((z-a)^{n+1}\right)}$$

Quitte à multiplier f par un complexe de module 1, on peut supposer $f(a) \in \mathbf{R}$ et $f(a) > 0$. Posons $b = f(a)$ et $a_n = r\,\mathrm{e}^{i\phi}$ avec $r > 0$. Choisissons alors, pour $\epsilon > 0$ assez petit :

$$z = a + \epsilon\,\mathrm{e}^{i\theta} \qquad \text{avec} \qquad \phi + n\theta = 0$$

de sorte que $a_n(z-a)^n$ soit un réel > 0 et que $|z-a| = \epsilon$. Il vient alors, pour ϵ suffisamment petit :

$$||f(z)|-|b+a_n\,(z-a)^n|| \leq |f(z)-b-a_n\,(z-a)^n| = O\left((z-a)^{n+1}\right) < |a_n\,(z-a)^n|$$

et donc, puisque b et $a_n\,(z-a)^n$ sont des réels > 0 :

$$\boxed{|f(z)| > |b+a_n\,(z-a)^n| - |a_n\,(z-a)^n| = b}$$

□

Deuxième partie
Les fonctions holomorphes

1 Fonctions holomorphes sur un ouvert de C

Définition 2 (Fonction holomorphe sur un ouvert). On dira que $f : \Omega \to \mathbf{C}$ est holomorphe sur Ω si elle est de classe $\mathcal{C}^1$ au sens complexe sur Ω.

Proposition 3 (Conditions de Cauchy-Riemann). *Soit Ω un ouvert de* **C** *et $\tilde{\Omega}$ l'ouvert de $\mathbf{R}^2$ défini par :*

$$\tilde{\Omega} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;/\; x+i\,y \in \Omega\}$$

Pour $(x,y) \in \tilde{\Omega}$, posons :

$$\boxed{X(x,y) = \mathrm{Re}\,(f(x+i\,y))\,, \quad Y(x,y) = \mathrm{Im}\,(f(x+i\,y))}$$

Notons enfin $\tilde{f}$ l'application de $\tilde{\Omega}$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par :

$$(x,y) \mapsto (X(x,y), Y(x,y))$$

alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *f est holomorphe sur Ω.*
2. *$\tilde{f} \in \mathcal{C}^1(\tilde{\Omega}, \mathbf{R}^2)$ et sa différentielle en tout point est une similitude directe.*
3. *X et Y sont $\mathcal{C}^1$ sur $\tilde{\Omega}$ et satisfont, en tout point (x,y) de cet ouvert aux conditions de* **Cauchy-Riemann** *:*

$$\boxed{\frac{\partial X}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Y}{\partial y}(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Y}{\partial x}(x,y)}$$

Démonstration. L'équivalence entre 2. et 3. résulte de la forme de la matrice d'une similitude directe dans une base orthonormée directe. L'équivalence entre 1. et 2. est laissée en exercice aux lecteurs. □

Proposition 4 (Opérations algébriques). *Somme, produit, quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$. On notera $\mathcal{H}(\Omega)$ la* **C***-algèbre des fonctions holomorphes sur l'ouvert Ω.*

Proposition 5 (Composition). *idem*

2 Holomorphie et analyticité

Théorème 3 (Holomorphie et analyticité). *Soit* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $a \in \Omega$ *et* $\rho > 0$ *tel que* $B_F(a,\rho) = \overline{B(a,\rho)} \subset \Omega$. *Posons, pour* $n \in \mathbf{Z}$ *et* $r \in [0,\rho]$ *:*

$$c_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(a + r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right) \mathrm{e}^{-ni\theta}\, \mathrm{d}\theta$$

Alors :

1. *Pour* $0 \leq r \leq \rho$ *:*
$$c_n(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ \frac{c_n(\rho)}{\rho^n}\, r^n & \text{sinon} \end{cases}$$

2. $$\sum_{0}^{+\infty} |c_n(\rho)|^2 < +\infty$$
donc, en posant, pour $n \in \mathbf{N}$,
$$\boxed{a_n = \frac{c_n(\rho)}{\rho^n} = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right)}$$
le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n\, z^n$ *est* $\geq \rho$ *et :*
$$\boxed{\forall z \in B(a,\rho),\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-a)^n}$$

3. f *est donc analytique sur* Ω *et développable en série entière de* $z - a$ *dans* $B(a,R)$ *où :*
$$\boxed{R = \sup\{r \in]0,+\infty] \ /\ B(a,r) \subset \Omega\}}$$

Démonstration. D'après les théorèmes usuels de régularité sous l'intégrale la fonction c_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\rho]$. Une intégration par partie prouve que, si $0 < r \leq \rho$:

$$\boxed{c_n'(r) = \frac{n}{r}\, c_n(r)}$$

D'où, pour $n \in \mathbf{Z}$ et $0 < r \leq \rho$:

$$\boxed{c_n(r) = \frac{c_n(\rho)}{\rho^n}\, r^n}$$

1. Si $n < 0$, pour que cette expression ait une limite finie quand $r \to 0$, il est nécessaire et suffisant que $\boxed{c_n(\rho) = 0}$. Si $n \geq 0$, la continuité de c_n assure la validité de la formule en $r = 0$.

2. C'est Parseval pour la fonction $\theta \mapsto f\left(a+\rho\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)$ qui est continue et 2π-périodique. Il s'ensuit que la suite $(c_n(\rho))_{n\geq 0}$ est bornée et donc que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ a un rayon de convergence $\geq \rho$.
Soit $r \in [0,\rho[$. La fonction $\theta \mapsto f\left(a+r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et 2π-périodique. Il vient donc :

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbf{R},\ f\left(a+r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r)\ \mathrm{e}^{in\theta}}$$

La série de Fourier du second membre étant normalement convergente en θ sur $\mathbf{R}$. Donc, si $z \in B(a,\rho)$, il vient en posant $\boxed{z-a = r\ \mathrm{e}^{i\theta}}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-a)^n$.

□

3 Formule de Cauchy pour un cercle et applications

Définition 3 (Intégrale sur un cercle). Soit $C(a,r) \subset \Omega$ le cercle de centre a et de rayon r orienté dans le sens direct. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, on note :

$$\int_{C(a,r)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(a+r\,\mathrm{e}^{it}\right) r\,i\ \mathrm{e}^{it}\ \mathrm{d}t$$

Proposition 6. *Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, on suppose que $\overline{B(a,\rho)} \subset \Omega$, alors, d'après le numéro 1 du théorème 3 :*

$$\int_{C(a,\rho)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Théorème 4 (Formule de Cauchy et analyticité). *Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, on suppose que $\overline{B(a,\rho)} \subset \Omega$. Alors, pour tout $z \in B(a,\rho)$:*

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} \frac{f(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f\left(a+\rho\,\mathrm{e}^{it}\right)\ \rho\,\mathrm{e}^{it}\ \mathrm{d}t}{\rho\ \mathrm{e}^{it} + a - z}}$$

[formule de Cauchy pour un disque] de plus, toujours si $z \in B(a,\rho)$:

$$\boxed{f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} \frac{f(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{(\xi - z)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f\left(a+\rho\,\mathrm{e}^{it}\right)\ \rho\,\mathrm{e}^{it}\ \mathrm{d}t}{\left(\rho\ \mathrm{e}^{it} + a - z\right)^2}}$$

Démonstration. On reprend les notations et les résultats de la preuve du théorème 3. La fonction g, continue, 2π périodique définie par :

$$\boxed{\overline{g(t)} = \frac{\rho\,\mathrm{e}^{it}}{\rho\ \mathrm{e}^{it} + a - z} = \frac{1}{1 - \frac{r}{\rho}\ \mathrm{e}^{i(\theta - t)}}}$$

S'écrit, puisque $|r/\rho| < 1$:

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \mathrm{e}^{ni(t-\theta)}$$

Les coefficients de Fourier de g se calculent par interversion série-intégrale. On trouve :

$$\hat{g}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \mathrm{e}^{-ni\theta} & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

La formule de Parseval pour le produit scalaire, valable pour deux fonctions continues, assure que, vu que les coefficients de Fourier correspondant aux indices négatifs sont nuls :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(a + \rho\,\mathrm{e}^{it}\right) \overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\rho) \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \mathrm{e}^{ni\theta}}$$

$$\boxed{= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r)\,\mathrm{e}^{ni\theta} = f\left(a + r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right) = f(z)}$$

Expression de f' : On peut, soit procéder exactement de la même façon en observant que l'égalité :

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-a)^n}$$

valable dans tout disque ouvert, centré en a et contenu dans Ω peut se dériver terme à terme dans un tel disque ; soit calculer directement, à l'aide de la formule de Cauchy et du théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z+h_n) - f(z)}{h_n}$$

où (h_n) est une suite de complexes non nuls tels que $z + h_n \in \Omega$ pour tout n et qui tend vers 0. **Cela fournira d'excellents exercices aux valeureux lecteurs.** □

Proposition 7. *Soit $z \in \mathbf{C} - C(a,\rho)$:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z} = \begin{cases} 1 & \textit{si } z \in B(a,\rho) \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Lorsque $|z-a| < \rho$, on peut appliquer la formule de Cauchy à la fonction constante 1 dans l'ouvert $\mathbf{C}$. L'autre cas est laissé en exercice (posé aux concours) et peut se faire par intégration terme à terme d'une série *ad hoc*. □

Proposition 8 (Suites de fonctions analytiques). *Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{H}(\Omega)$ qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f, nécessairement continue, alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, au surplus la suite (f_n') des dérivées des fonctions f_n converge uniformément sur tout compact de Ω vers f'.*

Démonstration. L'interversion limite-intégrale pour les suites, uniformément convergentes sur un segment, de fonctions de la variable réelle, assure que f, dont on sait déja la continuité sur Ω, vérifie la formule de Cauchy. Si $\overline{B(a,\rho)} \subset \Omega$, alors, pour tout $z \in B(a,\rho)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f\left(a+\rho\,\mathrm{e}^{it}\right)\,\rho\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t}{\rho\,\mathrm{e}^{it}+a-z}$$

La série de fonction de terme général u_n, défini par

$$\boxed{t \in \mathbf{R} \mapsto u_n(t) = \frac{f\left(a+\rho\,\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{-nit}}{\rho^n}(z-a)^n}$$

est normalement convergente sur $[-\pi,\pi]$. Il en résulte, pour tout $z \in B(a,\rho)$:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-a)^n \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f\left(a+\rho\,\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{-nit}}{\rho^n}\,\mathrm{d}t}$$

L'analycité de f sur Ω en résulte.
<u>Etude de la suite (f_n')</u> : Considérons un disque fermé de rayon $\rho > 0$, centré en a et contenu dans Ω. La formule de Cauchy pour f_n' et f' s'écrit, si $z \in B(a,\rho)$:

$$\boxed{f_n'(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_n\left(a+\rho\,\mathrm{e}^{it}\right)\,\rho\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t}{\left(\rho\,\mathrm{e}^{it}+a-z\right)^2}, \qquad f'(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f\left(a+\rho\,\mathrm{e}^{it}\right)\,\rho\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t}{\left(\rho\,\mathrm{e}^{it}+a-z\right)^2}}$$

<u>Notons</u> $||f||_\infty$ la borne supérieure de la fonction continue f sur le compact $\overline{B(a,\rho)} \subset \Omega$. Il vient, pour $|z-a| \leq \frac{\rho}{2}$:

$$\left|\rho\,\mathrm{e}^{it} - (z-a)\right| \geq |\rho - |z-a|| = \rho - |z-a| \geq \frac{\rho}{2}$$

d'où, sauf erreur de calcul, il résulte des expressions intégrales ci-dessus :

$$\boxed{\sup_{|z|\leq\rho/2} |f_n'(z) - f_n(z)| \leq \frac{4}{\rho}||f_n - f||_\infty}$$

Donc la suite f_n' converge uniformément vers f' sur le compact $\overline{B(a,\frac{\rho}{2})}$. Pour passer à un compact quelconque $K \subset \Omega$, il suffit d'associer à chaque point $z \in K$ une boule $\overline{B(z,\rho(z))} \subset \Omega$ puis de recouvrir K avec un nombre fini de boules $B(z,\rho(z)/2)$ et d'appliquer ce qui précède. □

4 Nombre de zéros dans un disque et applications

Définition 4 (Ordre de multiplicité d'un zéro d'une fonction analytique non nulle). Soit Ω un ouvert **connexe** et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, **non nulle**, il résulte de la proposition 2 que, pour tout $a \in \Omega$ il existe un entier n tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Si a est un zéro de f, le plus petit de ces entiers, nécessairement non nul, s'appelle l'ordre de multiplicité du zéro a et noté $\omega(a)$.

Proposition 9 (Caractérisation). *Si a est un zéro de $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, non nulle dans l'ouvert* **connexe** *Ω, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$\omega(a) = m$.*
2. *Il existe une fonction $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que :*

$$g(a) \neq 0 \quad \textit{et} \quad \forall z \in \Omega,\ f(z) = (z-a)^m\, g(z)$$

Démonstration. L'existence de l'ordre de multiplicité du zéro a est une conséquence de la proposition 2. Soit $m = \omega(a)$. Définissons la fonction $g : \Omega \to \mathbf{C}$ par :

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-a)^m} & \text{si } z \in \Omega - \{a\} \\ \frac{f^(m)(a)}{m!} & \text{sinon} \end{cases}$$

g est holomorphe sur l'ouvert $U = \Omega - \{a\}$ et, si $r > 0$ est tel que $B(a,r) \subset \Omega$, g est, dans cette boule somme de la série entière convergente de $z - a$: $\boxed{\sum_{n \geq m} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n}$ donc g est analytique dans Ω et $g(a) \neq 0$. La réciproque, laissée aux lecteurs, découle d'un simple calcul de dérivées successives. □

Théorème 5 (Nombre de zéros dans un disque). *Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, on suppose que $\overline{B(a,\rho)} \subset \Omega$ et que f ne s'annule pas sur $C(a,\rho)$, il vient :*

1. *f possède un nombre fini de zéros dans $B(a,\rho)$.*
2. *Comme $B(a,\rho)$ est un ouvert connexe sur lequel f est holomorphe et non identiquement nulle [puisqu'elle ne s'annule pas sur sa frontière], chaque zéro de f possède une multiplicité finie. Le nombre de zéros de f dans $B(a,\rho)$,* **comptés avec leurs multiplicité** *vaut alors :*

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'\left(a+\rho\,\mathrm{e}^{it}\right)}{f\left(a+\rho\,\mathrm{e}^{it}\right)}\rho\ \mathrm{e}^{it}\ \mathrm{d}t}$$

Démonstration. Si f possédait une infinité de zéros dans $B(a,\rho)$, l'ensemble de ces zéros aurait un point d'accumulation dans $\overline{B(a,\rho)} \subset \Omega$ qui serait encore un zéro de f contredisant ainsi le principe des zéros isolés.
Soit $n \geq\in \mathbf{N}$ le nombre de zéros de f dans $B(a,\rho)$. Deux cas se présentent :

$\underline{n = 0}$: Il vient alors d'après la proposition 6 que :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 0}$$

<u>n>0</u> : Notons $a_1, \ldots, a_n$ les zéros de f dans $B(a, \rho)$ aux multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_n$. Il existe alors une fonction $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, non nulle dans $\overline{B(a, \rho)}$ telle que, pour tout $z \in \Omega$,

$$\boxed{f(z) = g(z)\prod_{i=1}^{m}(z - a_i)^{m_i}}$$

D'où, sur $\Omega - \{a_1, \ldots, a_n\}$:

$$\boxed{\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{z - a_i}}$$

Il résulte alors des propositions 6 et 7 que :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} m_i}$$

□

Théorème 6 (Image d'un ouvert). *L'image d'un ouvert Ω par une fonction analytique,* **non constante** *est un ouvert.*

Démonstration. Soit $a \in \Omega$ et τ_a la translation $z \mapsto z + a$. Quitte à remplacer f par $g = \tau_{-f(a)} \circ f \circ \tau_a$, qui est holomorphe sur $\tau_{-a}(\Omega)$, on peut supposer que $f(0) = 0$ et prouver que $f(\Omega)$ est un voisinage de 0. Comme f est supposée non constante, le principe des zéros isolés, assure l'existence existe d'un réel $\rho > 0$ tel que $\overline{B(0, \rho)} \subset \Omega$ et que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \overline{B(0, \rho)} - \{0\}$. Notons alors r la distance de 0 au compact $K = f\left(C(0, \rho)\right)$, *[$r > 0$ car $0 \notin K$]* et montrons que $B(0, r) \subset f(\Omega)$. Soit ξ tel que $|\xi| < r = \inf_{t\in\mathbf{R}} \left|f\left(\rho\,\mathrm{e}^{it}\right)\right|$. En vertu du théorème 5, le nombre de solutions z de l'équation $f(z) = \xi$ dans $B(0, \rho)$ est égal à l'intégrale :

$$\boxed{Z(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'\left(\rho\,\mathrm{e}^{it}\right)\,\rho\,\mathrm{e}^{it}}{f\left(\rho\,\mathrm{e}^{it}\right) - \xi}\,\mathrm{d}t}$$

On prouvera alors, à l'aide du théorème de convergence dominée, que si (ξ_n) est une suite d'éléments de $B(0, r)$ qui converge vers $\xi \in B(0, r)$ alors $Z(\xi_n) \to Z(\xi)$. Donc Z est continue dans $B(0, r)$ qui est connexe, comme elle est à valeurs entières elle y est constante et comme $Z(0) > 0$ cette constante est non nulle, ce qu'on voulait. □

Théorème 7 (Suite d'applications injectives). *Soit (f_n) une suite de fonctions analytiques et injectives dans un ouvert* **connexe** Ω. *Si la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de Ω, sa limite $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ est soit constante soit injective.*

Démonstration. La proposition 8 nous apprend l'analycité de f sur Ω. Supposons f non constante sur Ω et soient a et b deux points distincts de Ω. Il existe *[d'après le principe des zéros isolés si $f(a) = f(b)$, d'après la continuité de f en a sinon]* un $\rho > 0$ tel que $\overline{B(a,\rho)} \subset \Omega$ et $f(z) \neq f(b)$ pour $z \in \overline{B(a,\rho)} - \{a\}$. En vertu du théorème 5, le nombre de solutions z de l'équation $f(z) = f(b)$ dans $B(a,\rho)$ est égal à l'intégrale :

$$\boxed{Z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'\left(a + \rho\, \mathrm{e}^{it}\right)\, \rho\, \mathrm{e}^{it}}{f\left(a + \rho\, \mathrm{e}^{it}\right) - f(b)}\, \mathrm{d}t}$$

Pour $z \in \overline{B(a,\rho)}$, on a $z = a$ ou $f(z) \neq f(b)$ donc $b \notin \overline{B(a,\rho)}$ et l'injectivité de f_n assure que $f_n\left(a + \rho\, \mathrm{e}^{it}\right) - f_n(b) \neq 0$ pour tout t. Le nombre Z_n de zéros de l'équation $f_n(z) = f_n(b)$ dans $B(a,\rho)$ est nul puisque f_n est injective et égal à l'intégrale :

$$\boxed{Z_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_n'\left(a + \rho\, \mathrm{e}^{it}\right)\, \rho\, \mathrm{e}^{it}}{f_n\left(a + \rho\, \mathrm{e}^{it}\right) - f_n(b)}\, \mathrm{d}t}$$

Les lecteurs montreront, à l'aide du théorème de convergence dominée et de la proposition 8 que $\lim_{n\to\infty} Z_n = Z$ donc $Z = 0$ et $f(a) \neq f(b)$. □

Troisième partie
Revêtements

5 Inversion locale et globale

Théorème 8 (d'inversion locale). *Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, si $a \in \Omega$ et $f'(a) \neq 0$ alors il existe une boule ouverte B, centrée en $f(a)$ et un ouvert $U \subset \Omega$ contenant a tel que $f_{|U}$ soit une bijection de U sur B, analytique ainsi que sa réciproque. On dira alors que f est un* **difféomorphisme local analytique au point** a

Démonstration. Quitte à composer f par deux translations et une homothétie, on peut se ramener au cas où :

$$\boxed{a = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1}$$

Il existe alors $\rho > 0$ tel que $\overline{B(0,\rho)} \subset \Omega$ et :

$$\boxed{\forall z \in \overline{B(0,\rho)},\ |1 - f'(z)| < \frac{1}{2}}$$

Soit $\xi \in B(0,\rho/2)$, posons, pour $z \in B(0,\rho)$:

$$f_\xi(z) = z + (\xi - f(z))$$

qui est holomorphe dans cette boule et :

$$|f'_\xi(z)| = |1 - f'(z)| < \frac{1}{2}$$

et donc, vu la convexité de la boule :

$$|f_\xi(z) - f_\xi(0)| \leq \frac{1}{2}|z| < \frac{\rho}{2}$$

Comme $f_\xi(0) = \xi$, on en déduit :

$$|f_\xi(z)| < |\xi| + \frac{\rho}{2} < \rho$$

$B(0,\rho)$ **est stable par** f_ξ. On peut donc définir une suite (ϕ_n) de fonctions analytiques dans la boule $B(0,\rho/2)$, à valeurs dans le boule $B(0,\rho)$, par :

$$\boxed{\phi_0(\xi) = 0, \quad \phi_{n+1}(\xi) = f_\xi\left(\phi_n(\xi)\right) = \phi_n(\xi) + \left(\xi - f\left(\phi_n(\xi)\right)\right)}$$

Il vient alors, pour $n \geq 1$:

$$|\phi_{n+1}(\xi) - \phi_n(\xi)| = |f_\xi\left(\phi_n(\xi)\right) - f_\xi\left(\phi_{n-1}(\xi)\right)| \leq \frac{1}{2}|\phi_n(\xi) - \phi_{n-1}(\xi)|$$

et donc, puisque $\phi_1(\xi) = \xi$:

$$\boxed{|\phi_n(\xi) - \phi_{n-1}(\xi)| \leq \frac{|\xi|}{2^{n-1}} \leq \frac{\rho}{2^n}}$$

La série de fonctions de terme général $\phi_n(\xi) - \phi_{n-1}(\xi)$ est donc normalement convergente dans $B(0,\rho/2)$ donc la suite (ϕ_n) est uniformément convergente dans cette boule et, d'après la proposition 8, y définit une fonction analytique ϕ. Au surplus :

$$|\phi_n(\xi) - \phi_0(\xi)| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|\xi|}{2^{k-1}} \leq 2|\xi|$$

donc, en passant cette dernière inégalité à la limite :

$$\boxed{|\phi(\xi)| \leq 2|\xi| < \rho}$$

ϕ envoie donc $B(0,\rho/2)$ dans $B(0,\rho)$. Comme f_ξ est continue dans cette dernière boule, il vient :

$$\boxed{f_\xi\left(\phi(\xi)\right) = \phi(\xi) \ ie \ f\left(\phi(\xi)\right) = \xi}$$

Donc ϕ est injective sur $B(0,\rho/2)$, on sait que $U = \phi\left[B(0,\rho/2)\right] \subset B(0,\rho) \subset \Omega$ est un ouvert d'après le théorème 6 mais on pourra revoir ce fait en exercice en montrant directement en exercice que $U = f^{-1}_{|B(0,\rho)}\left[B(0,\rho/2)\right]$. f induit donc bien un difféomorphisme analytique de U sur $B(0,\rho/2)$. □

Théorème 9 (d'inversion globale). *Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, injective sur l'ouvert Ω alors c'est une bijection de Ω sur l'ouvert $f(\Omega)$ dont la réciproque est analytique. On dira alors que f est un* **difféomorphisme analytique de Ω sur son image.**

Démonstration. Quitte à travailler séparément sur les composantes connexes de Ω qui sont ouvertes, on peut supposer Ω connexe. f est injective et donc non constante et $U = f(\Omega)$ est ouvert d'après le théorème 6. Notons g la réciproque de $f : U \to \Omega$. Pour prouver l'analycité de g sur U il suffit d'appliquer le théorème d'inversion locale 8 à f au voisinage de chaque point $a \in \Omega$. Pour cela il nous faut prouver que $f'(a) \neq 0$ pour tout $a \in \Omega$.
Supposons $f'(a) = 0$ et prouvons que f n'est pas injective au voisinage de a. Quitte à remplacer f par $z \mapsto f(z+a) - f(a)$, on peut supposer $a = 0$ et $f(0) = f'(0) = 0$. Reprenons alors la preuve et les notations du théorème 6. On met en évidence un $\rho > 0$ tel que

- $\overline{B(0,\rho)} \subset \Omega$.
- $f(z) \neq 0$ et $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \overline{B(0,\rho)} - \{0\}$

Notons encore r la distance de 0 au compact $K = f\left(C(0,\rho)\right)$, *[$r > 0$ car $0 \notin K$]*
Soit ξ tel que $|\xi| < r = \inf_{t\in\mathbf{R}} \left|f\left(\rho\, \mathrm{e}^{it}\right)\right|$. L'intégrale :

$$\boxed{Z(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'\left(\rho\, \mathrm{e}^{it}\right)\, \rho\, \mathrm{e}^{it}}{f\left(\rho\, \mathrm{e}^{it}\right) - \xi}\, \mathrm{d}t}$$

qui est une fonction continue de ξ dans $B(0,r)$, donne le nombre de solutions de l'équation $f(z) = \xi$ dans $B(0,\rho)$. Elle est constante dans $B(0,r)$ or $Z(0) \geq 2$ car 0 annule f avec une multiplicité $m \geq 2$. Donc, si $0 < |\xi| < r$, l'équation $f(z) = \xi$ admet au moins deux solutions distinctes dans $B(0,\rho)$. □

6 Revêtements et applications

6.1 Notations

- La lettre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
- On notera, dans cette pertie, $(E, ||\ \ ||)$ et $(E', ||\ \ ||)$ deux $\mathbf{K}$-espace vectoriel normés. Comme d'habitude $B(x,\delta)$ *resp* $B_F(x,\delta)$ désignera la boule ouverte *resp fermée* de centre x et de rayon $\delta > 0$.
- Si $H : (x,t) \mapsto H(x,t)$ est une application continue de $[0,1] \times [0,1]$ dans E, on notera H_x l'application partielle $t \mapsto H(x,t)$.

6.2 Homotopies

6.2.1 Rappels de topologie

Lemme 1. *Un* **ouvert** *est connexe si et seulement si il est connexe par arcs.*

Lemme 2. *Les composantes connexes d'un ouvert sont ouvertes.*

Lemme 3 (Un critère de continuité). *Soient $F_1, F_2, \dots, F_n$ des fermés de E et $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$. Soit $f : F \to E'$ une application. On suppose que, pour tout indice i, $f_{|F_i}$ soit continue sur F_i, alors f est continue sur F.*

Démonstration. Laissées aux lecteurs. □

Proposition 10 (Nombre de Lebesgue d'un recouvrement). *Soit K un compact de E recouvert par une famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E. Alors il existe un réel $\delta > 0$ tel que :*

$$\boxed{\forall x \in K,\ \exists i \in I \ /\ B(x, \delta) \subset \Omega_i}$$

Démonstration. Par l'absurde en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass. □

6.2.2 Chemins et lacets

Définition 5. Un **chemin** γ de E est une application continue de $[0, 1]$ dans E. Un **lacet** de E est un chemin γ tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Définition 6 (Homotopies). On distinguera trois types d'homotopies

Homotopie de chemins : On appelera **homotopie** du chemin γ_0 sur le chemin γ_1 une application $H \in \mathcal{C}([0, 1] \times [0, 1], E)$ telle que $\boxed{H_0 = \gamma_0 \ \text{ et } \ H_1 = \gamma_1}$. Les chemins γ_0 et γ_1 seront dits **homotopes**.

Homotopie de lacets : On rajoute les deux hypothèses suivantes :
- γ_0 et γ_1 sont des lacets.
- A tout instant intermédiaire $s \in [0, 1]$, H_s est un lacet. Les lacets γ_0 et γ_1 seront dits **homotopes en tant que lacets**.

Homotopie pointée de lacets : C'est une homotopie de lacets γ_0 et γ_1 **dont les extrémités sont identiques** *ie* $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$, telle qu'à tout instant $s \in [0, 1]$ on ait $H(s, 0) = a$. Les lacets γ_0 et γ_1 seront dits **p-homotopes en tant que lacets.**

Proposition 11 (Simple connexité). *Un ouvert U de E est dit* **simplement connexe** *s'il satisfait l'une des deux propriétés équivalentes suivante :*

i) *Tout lacet de E est homotope* **en tant que lacet** *à un lacet constant.*

ii) *Tout lacet de E est p-homotope à un lacet constant.*

Démonstration. Il suffit de prouver que i) entraine ii). Supposons i) et soit H une homotopie de lacets de γ_0 sur le lacet constant γ_1. □

6.3 Revêtements

Définition 7. On appelle **revêtement** d'un ouvert Ω de E' par un ouvert U de E toute application f de U dans E' telle que :
- $f(U) = \Omega$.

- Pour tout point $x \in \Omega$, il existe un voisinage ouvert ω_x de x et une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts **disjoints** de U, *[dépendants de x]* tels que

$$\boxed{f^{-1}(\omega_x) = \bigcup_{i\in I} U_i}$$

- Pour tout $i \in I$, $f_{|U_i}$ est un homéomorphisme de U_i sur ω_x. On dira que ω_x est un **ouvert de base** et la famille $(U_i)_{i\in I}$ est une **pile d'ouvert au dessus de ω_x (ou au dessus de x pour faire plus court) (dessin). Il est clair que cela impose la continuité de f.**

Exemple 1. On prouvera en exercice que l'application $z \mapsto \mathrm{e}^z$ est un revêtement analytique de $\mathbf{C}^*$ par $\mathbf{C}$.

Exemple 2. En utilisant le théorème 8 d'inversion locale, on établira que tout polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$, non constant, définit un revêtement analytique de $\Omega = P(U)$ par $U = \{z \in \mathbf{C} \ / \ P'(z) \neq 0\}$.

Théorème 10 (Théorème de relèvement). *Soit $f : U \to \Omega$ un revêtement. Soit $\gamma : [0,1] \to \Omega$ un chemin et $z_0 \in U$ tel que $f(z_0) = \gamma(0)$. Il existe un et un seul chemin $\Gamma : [0,1] \to U$ tel que :*

$$\boxed{\Gamma(0) = z_0 \quad \textit{et } f \circ \Gamma = \gamma}$$

Ce chemin est appelé **relèvement de γ d'origine z_0.**

Démonstration. **Existence :** On recouvre d'abord $\gamma\left([0,1]\right)$ par une famille d'ouverts de base $(\omega_x)_{x\in\gamma([0,1])}$ comme dans la définition 7. On en déduit que le compact $[0,1]$ est recouvert par la famille (J_x) d'ouverts relatifs de $[0,1]$ où $J_x = \left(\gamma^{-1}\left(\omega_x\right)\right)$. On introduit alors le nombre de Lebesgue δ de ce recouvrement défini dans la proposition 10. Soit $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ une subdivision de $[0,1]$ telle que, pour $1 \leq i \leq n$, $t_i - t_{i-1} < \delta$. Soit $i < n$. Supposons disposer d'une application continue $\Gamma : [0,t_i] \to U$ telle que $\Gamma(0) = z_0$ et $f \circ \Gamma = \gamma_{|[0,t_i]}$. Le segment $[t_i, t_{i+1}]$ est contenu dans un des J_x et donc $\gamma\left([t_i,t_{i+1}]\right) \subset \omega_x$. Soit alors U_j celui des ouvert de la pile au dessus de ω_x qui contient $\Gamma(t_i)$. Comme $f_{|U_j}$ est un homéomorphisme de U_j sur ω_x, on peut prolonger Γ à $[0,t_{i+1}]$ en posant :

$$\boxed{\Gamma(t) = f_{|U_j}^{-1}\left(\gamma(t)\right) \quad \text{pour } t \in]t_i, t_{i+1}]}$$

Cette dernière propriété a encore lieu pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$ puisque $\Gamma(t_i) \in U_j$ et $f \circ \Gamma(t_i) = \gamma(t_i)$. Il résulte du lemme 3 que Γ ainsi prolongée est encore continue sur $[0,t_{i+1}]$ et, par construction, que $f \circ \Gamma = \gamma_{|[0,t_{i+1}]}$. Une récurrence immédiate scelle alors la preuve.

Unicité : Soient Γ_1 et Γ_2 deux relèvements de γ qui prennent la valeur z_0 en 0. On considère

$$X = \{t \in [0,1] \ , \ \Gamma_1(t) = \Gamma_2(t)\}$$

– X est fermé dans $[0,1]$ par continuité de Γ_1 et Γ_2.
– X est un ouvert relatif de $[0,1]$ car si $t_0 \in X$, il existe un $\alpha > 0$ tel que, pour $t \in]t_0-\alpha, t_0+\alpha[\cap[0,1]$, $\Gamma_1(t)$ et $\Gamma_2(t)$ soient dans une même feuille U_j au dessus de $\gamma(t_0)$ et donc :

$$\forall t \in]t_0-\alpha, t_0+\alpha[\cap[0,1],\ \Gamma_1(t) = f_{|U_j}^{-1}(\gamma(t)) = \Gamma_2(t)$$

– Comme $0 \in X$, la connexité de $[0,1]$ assure que $X = [0,1]$.

$\square$

Théorème 11 (Théorème de relèvement des homotopies). *Soit $f : U \to \Omega$ un revêtement. Soit $h : [0,1]\times[0,1] \to \Omega$ une homotopie et Γ_0 un relèvement de h_0. Il existe une et une seule homotopie $H : [0,1]\times[0,1] \to U$ telle que :*

$$\boxed{H_0 = \Gamma_0 \quad \textit{et } f\circ H = h}$$

Cette homotopie est appelée **relèvement de h d'origine Γ_0.**

Démonstration. **<u>Existence</u> :** Soit $t \in [0,1]$. D'après le théorème 10 de relèvement des chemins, il existe un et un seul chemin $C_t : s \mapsto C_t(s)$ qui relève $s \mapsto h(s,t)$ et tel que $C_t(0) = \Gamma_0(t)$. Posons, pour $(s,t) \in [0,1]\times[0,1]$: $\boxed{H(s,t) = C_t(s)}$. Il vient donc :

$$\boxed{\forall (s,t) \in [0,1]\times[0,1],\ H(0,t) = \Gamma_0(t) \ \text{ et } \ f\circ H(s,t) = h(s,t)}$$

La seule difficulté consiste à établir la continuité de H. Pour cela, on recouvre le compact $h([0,1]\times[0,1])$ par des ouverts de base ω_x. On en déduit un recouvrement de $[0,1]\times[0,1]$ par les ouverts $h^{-1}(\omega_x)$ dont on note δ le nombre de Lebesgue [1] associé pour la norme $|| \ \ ||_\infty$ de $\mathbf{R}^2$.
Comme dans la démonstration du théorème précédent, on construit alors deux subdivisions $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ et $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ de $[0,1]$ dont les pas sont strictement inférieurs à δ de sorte que, pour tout couple $(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2$, $h([s_{j-1},s_j]\times[t_{i-1},t_i])$ soit contenu dans un même ouvert de base ω_x.
Montrons alors, par récurrence sur j que la restriction de H à $[0,s_j]\times[0,1]$ est continue.
Pour $j = 0$ cela découle de $H_0 = \Gamma_0$. Supposons la propriété vraie pour $j-1 \geq 0$ et prouvons la pour j. On a vu que, pour $i \in \{1,\ldots,n\}$, $h([s_{j-1},s_j]\times[t_{i-1},t_i])$ est contenu dans un ω_x et donc

$$H([s_{j-1},s_j]\times[t_{i-1},t_i]) \subset f^{-1}(\omega_x) = \bigcup_{r\in I} U_r$$

[1] Henri Léon Lebesgue (1875-1941) : Né à Beauvais, fils de forgeron. Entra à l'Ens Ulm en 1894, enseigna au lycée de Nancy, aux universités de Rennes, de Poitiers, de Paris (Sorbonne). Il fut nommé professeur au Collège de France en 1921 et élu à l'Académie des sciences en 1922. Sa célèbre théorie de l'intégration date de 1905

Soit U_k la feuille au dessus ω_x qui contient $H(s_{j-1}, t_{i-1})$. L'application partielle :

$$t \in [t_{i-1}, t_i] \mapsto H(s_{j-1}, t)$$

a été supposée continue et son image, connexe, est incluse dans $\bigcup_{r \in I} U_r$ qui sont des ouverts disjoints ; elle est donc incluse dans un seul de ces ouverts, à savoir U_k. Fixons maintenant $t \in [t_{i-1}, t_i]$, l'application C_t : $s \mapsto H(t, s)$ est continue sur $[0, 1]$ par construction. On prouve de la même manière que, pour $s \in [s_{j-1}, s_j]$, $H(s, t)$ appartient à la même feuille que $H(s_{j-1}, t)$ à savoir U_k. En résumé

$$H\left([s_{j-1}, s_j] \times [t_{i-1}, t_i]\right) \subset U_k$$

et donc :

$$\boxed{\forall (s,t) \in [s_{j-1}, s_j] \times [t_{i-1}, t_i],\ H(s,t) = f^{-1}_{|U_k} \circ h(s,t)}$$

Donc les restrictions de H aux fermés :

$$[0, s_{j-1}] \times [0, 1], \quad [s_{j-1}, s_j] \times [t_{i-1}, t_i] \ \text{ pour } 1 \leq i \leq n$$

sont continues et donc aussi la restriction de H à leur réunion d'après le lemme 3 ce qui clôt la récurrence.

Unicité : Elle résulte de l'unicité dans le théorème de relèvement des chemins. □

6.4 Applications

Les revêtements sont utilisés [2] pour prouver des résultats de passage du local au global en plusieurs variables. Nous utiliserons plus loin le résultat suivant.

Théorème 12. *Soient*

- U *et* Ω *deux ouverts de* $\mathbf{C}$.
- $f : U \to \Omega$ *un revêtement analytique.*
- Ω' *un ouvert non vide, connexe, simplement connexe contenu dans* Ω.
- U' *une composante connexe de* $f^{-1}(\Omega')$.

Alors

- f *induit un difféomorphisme analytique de* U' *sur* Ω'.
- U' *est aussi simplement connexe.*
- *Si* $z_0 \in \Omega'$ *et si* Z_0 *est un antécédent de* z_0 *par* f, *il existe une et une seule application continue* g *de* Ω' *dans* U *telle que :*

$$\boxed{g(z_0) = Z_0 \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_{\Omega'}}$$

g est un difféomorphisme analytique de Ω' sur la composante connexe de U qui contient Z_0.

[2]outre en topologie algébrique c'est à dire en vraie topologie

Démonstration. D'après le théorème 9 d'inversion globale, il suffit de prouver que f induit une bijection de U' sur Ω'.

Surjectivité : Soit $a \in U'$ et $b = f(a) \in \Omega'$. Soit $y \in \Omega'$. Prouvons que y possède un antécédent par f qui appartient à U'. Comme Ω' est un ouvert connexe, il est connexe par arcs et il existe un chemin γ , tracé dans Ω', qui relie b à y. On relève Γ à partir de a en un chemin Γ dont l'image, qui est connexe, est nécessairement contenue dans une composante connexe de $f^{-1}(\Omega')$ qui ne peut être que celle de a, à savoir U'. Il en résulte que $\Gamma(1) \in U'$ et $f \circ \Gamma(1) = \gamma(1) = y$ ce qu'on voulait.

Injectivité : Soient a et a' deux points de U' tels que $f(a) = f(a') = b \in \Omega'$. Comme U' est un ouvert connexe, il existe un chemin Γ_0, tracé dans U', qui relie a et a'. Son image $\gamma_0 = f \circ \Gamma_0$ est un lacet, tracé dans Ω', d'origine et d'extrémité b. Comme Ω' est simplement connexe, γ_0 est p-homotope au lacet constant $t \mapsto b$ *[cf la proposition 11]*. Soit H le relèvement de la p-homotopie h à partir du chemin Γ_0. Il vient :

$$\boxed{H(0,1) = a' \ \text{ et } \ \forall s \in [0,1],\ f \circ H(s,1) = h(s,1) = b}$$

Il en résulte que $s \mapsto H(s,1)$ est un relèvement du lacet constant $s \mapsto b$ à partir du point a'. D'après l'unicité d'un tel relèvement il s'ensuit que $H(s,1) = a'$ pour tout $s \in [0,1]$. De même on prouverait que $H(s,0) = a$. Reste à voir que le chemin $t \mapsto H(1,t)$ relève encore le lacet constant b à partir du point a, c'est donc le lacet constamment égal à a donc $\boxed{a = H(1,1) = a'}$ ce qu'on voulait.

Le reste de la preuve en découle et est laissée aux lecteurs.

□

Corollaire 1 (Logarithme et puissances). *L'application $z \mapsto \mathrm{e}^z$ est un revêtement de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}^*$. En lui appliquant le théorème 12 il en résulte que si Ω' est un ouvert simplement connexe contenu dans $\mathbf{C}^*$ et si $(z_0, Z_0) \in \Omega' \times \mathbf{C}$ avec $\mathrm{e}^{Z_0} = z_0$, il existe une et une seule fonction analytique $g \in \mathcal{H}(\Omega')$ telle que :*

$$\boxed{\forall z \in \Omega',\ \mathrm{e}^{g(z)} = z \ \ \textit{et} \ \ g(z_0) = Z_0}$$

Au surplus, $\boxed{g'(z) = \dfrac{1}{z}}$*. Une telle application est appelée une* **détermination du logarithme sur Ω'**.

Si $\alpha \in \mathbf{C}$, on peut aussi définir sur Ω' :

$$\boxed{z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\, g(z)}}$$

qui s'appelle une **détermination de la puissance sur Ω'***. En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$:*

$$\boxed{\left(z^{1/2}\right)^2 = \mathrm{e}^{g(z)} = z}$$

s'appelle une **détermination de la racine carrée sur Ω'.**

Exercice 1. Etudier les propriétés algébriques de ces déterminations et étudier les déterminations principales pour lesquelles $z_0 = 1$ et $\Omega' = \mathbf{C} - \mathbf{R}_-$.

Quatrième partie

Représentation conforme

Définition 8. On appelle **représentation conforme** d'un ouvert U de $\mathbf{C}$ sur un ouvert V de $\mathbf{C}$ un difféomorphisme analytique de U sur V. Si $U = V$, on parle **d'automorphisme analytique de** U. L'ensemble des automorphismes analytiques de U est un groupe pour la composition.

7 Les automorphismes analytiques du disque unité

On notera $\mathbf{U}$ le cercle unité de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ le disque unité ouvert.

Lemme 4 (Schwarz). *Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbf{D})$ telle que $f(0) = 0$ et $f(\mathbf{D}) \subset \mathbf{D}$, alors $\forall z \in \mathbf{D}$, $|f(z)| \leq |z|$.*

Démonstration. D'après la proposition 9, la fonction g définie sur $\mathbf{D}$ par :

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

est analytique sur $\mathbf{D}$. Soit $r \in]0, 1[$. D'après le principe du maximum *[cf prop 2]* :

$$\sup_{|z| \leq r} |g(z)| = \sup_{|z| \leq r} |g(z)| \leq \frac{1}{r}$$

On en déduit que, si $|z| < 1$ alors, pour tout $r \in]|z|, 1[$, $|g(z)| \leq 1/r$. En faisant tendre r vers 1 dans cette inégalité, il vient $|g(z)| \leq 1$ et le résultat. □

Proposition 12. *Les automorphismes analytiques de $\mathbf{D}$ tels que $f(0) = 0$ sont les applications de la forme :*

$$\boxed{z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\ z}$$

Démonstration. En appliquant le lemme de Schwarz à f et à f^{-1}, il vient $|f(z)| = |z|$ pour tout $z \in \mathbf{D}$. En reprenant la fonction g de la démonstration précédente il vient $g(\mathbf{D}) \subset \mathbf{U}$. Or l'image d'un ouvert par une fonction holomorphe non constante est un ouvert *[théorème 6]* donc g est constante et le résultat suit. □

Proposition 13. *Soit $a \in \mathbf{C} - \mathbf{U}$. Soit $z \in \mathbf{U}$. L'autre point d'intersection avec $\mathbf{U}$ de la droite az est donné par :*

$$\boxed{z' = \frac{a - z}{1 - \overline{a}\,z}}$$

On notera h_a l'homographie que cette formule définit sur l'ouvert $\Omega_a = \mathbf{C} - \{\frac{1}{\overline{a}}\}$.

Démonstration. Il suffit d'écrire que le rapport :

$$\frac{z' - a}{z - a}$$

est réel soit :

$$\frac{z' - a}{z - a} = \overline{\frac{z' - a}{z - a}}$$

En remplaçant les conjugués de $z \in \mathbf{U}$ et $z' \in \mathbf{U}$ par leurs inverses, il vient $z' = h_a(z)$. □

Proposition 14. *h_a est un automorphisme analytique involutif de Ω_a et, si $a \in \mathbf{D}$, h_a induit un automorphisme analytique involutif de $\mathbf{D}$.*

Démonstration. Par le calcul $h_a(\Omega_a) = \Omega_a$ et $h_a \circ h_a = \mathrm{Id}_{\Omega_a}$. Pour prouver que, si $|a| < 1$, $h_a(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$, on calcule, pour $|z| < 1$:

$$|a - z|^2 - |1 - \overline{a}\, z|^2 = \left(|a|^2 - 1\right)\left(1 - |z|^2\right) < 0$$

□

Théorème 13. *Le groupe des automorphismes analytiques de $\mathbf{D}$ est constitué des homographies de la forme :*

$$\boxed{z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\, \frac{a - z}{1 - \overline{a}\, z} \quad \theta \in \mathbf{R},\ a \in \mathbf{D}}$$

Démonstration. Soit f un tel automorphisme. Posons $\boxed{a = f^{-1}(0) \in \mathbf{D}}$. $h = f \circ h_a$ est alors un automorphisme analytique de $\mathbf{D}$ tel que $h(0) = 0$. La proposition 12 permet de conclure. □

8 Les automorphismes analytiques du demi plan de Poincaré

Le demi plan de Poincaré est l'ensemble :

$$\boxed{\mathbf{P} = \{z \in \mathbf{C}\ /\ \operatorname{Im} z > 0\}}$$

Théorème 14. *Les automorphismes analytiques de $\mathbf{P}$ sont les homographies de la forme :*

$$\boxed{z \mapsto \frac{a\, z + b}{c\, z + d} \quad (a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4,\ a\, d - b\, c = 1}$$

Démonstration. On prouve d'abord qu'une telle homographie f vérifie $f(\mathbf{P}) \subset \mathbf{P}$ *via* la formule :

$$\operatorname{Im} f(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|c\,z+d|^2}$$

puis que f admet un inverse de la même forme ce qui prouve que $f(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$. Ensuite on observe que l'homographie h définie par :

$$h(z) = \left|\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right|$$

est une application conforme de $\mathbf{P}$ sur $\mathbf{D}$. Donc f est un automorphisme analytique de $\mathbf{P}$ si et seulement si $h \circ f \circ h^{-1}$ est un automorphisme analytique de $\mathbf{D}$. Le théorème 13 permet alors de conclure. □

9 Le théorème de Riemann

9.1 Le théorème de Montel

[3]

Proposition 15. *Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{H}(U)$ telle qu'existe $M > 0$ vérifiant :*

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \forall z \in U,\ |f_n(z)| \leq M}$$

Soit $\overline{B(a,r)}$ une boule fermée contenue dans U. Alors il existe un $M_1 >$ [dépendant de M, a, r] tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \forall z \in \overline{B(a,r)},\ |f_n'(z)| \leq M_1}$$

On en déduit que, si K est un compact non vide contenu dans U, la suite f_n' est uniformément bornée sur K.

Démonstration. Soit F le fermé complémentaire de U. La distance $d = d(F, \overline{B(a,r)})$ est strictement positive donc il existe $\eta > 0$ tel que, si $\rho = r + \eta$, on ait $\overline{B(a,\rho)} \subset U$. On applique alors la **formule de Cauchy** pour f_n' sur le cercle $C(a,\rho)$. Soit $z \in \overline{B(a,r)}$:

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_n\left(a+\rho\,\mathrm{e}^{it}\right)\,\rho\,\mathrm{e}^{it}\ \mathrm{d}t}{\left(\rho\ \mathrm{e}^{it}+a-z\right)^2}$$

D'où :

$$\boxed{|f_n'(z)| \leq \frac{M\,\rho}{\eta^2}}$$

[3]Paul Antoine Aristide Montel (1876-1975) : Né à Nice, fut étudiant à l'Ens Ulm (1894), enseigna à la Faculté des Sciences de Paris, à l'Ecole Polytechnique et à l'Ecole nationale supérieure des Beaux-Arts. Parallèlement il était directeur de l'Ecole pratique des hautes études, président du Palais de la Découverte et membre de l'Académie des sciences depuis 1937

Soit K est un compact non vide contenu dans U, on peut le recouvrir par un nombre fini d'intérieurs de boules fermées du type précédent, on en déduit qu'existe $M_K > 0$ tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \forall z \in K,\ |f_n'(z)| \leq M_K}$$

□

Théorème 15. *Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{H}(U)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :*
- *Il existe $M > 0$ vérifiant :*

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \forall z \in U,\ |f_n(z)| \leq M}$$

- *Il existe une partie D, dense dans U telle que la suite (f_n) converge simplement sur D.*

Alors La suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction $f \in \mathcal{H}(U)$.

Démonstration. Soit K un compact non vide de U, $d > 0$ la distance de K au complémentaire de U. Posons $\delta = d/2$ et :

$$\boxed{K_1 = \{z \in \mathbf{C},\ /\ \mathrm{d}(z, K) \leq \delta\}}$$

K_1 est un compact inclus dans U tel que :

$$\boxed{K \subset \dot{K}_1 \ \text{ et } \ \forall a \in K,\ B_F(a, \delta) \subset K_1}$$

On vient de voir qu'existe $M_1 > 0$ tel que,

$$\forall z \in K_1,\ \forall n \in \mathbf{N},\ |f_n'(z)| \leq M_1$$

Soit r tel que

$$\boxed{0 < r < \eta = \min\left(\delta, \frac{\epsilon}{6\, M_1}\right)}$$

On extrait du recouvrement de K par les boules $(B(a, r))_{a \in K}$, un recouvrement fini. Donc K est recouvert par un système fini de boules fermées $B_i = B_F(a_i, r) \subset K_1$ où $a_1, \ldots, a_r$ appartiennent à K. Soit $z \in K$. Il existe i tel que $z \in B_i$, soit alors $d_i \in D \cap B_i$. Il existe n_i tel que :

$$\forall p, q \in \mathbf{N},\ p > n_i \ \text{ et } \ q > n_i \Rightarrow |f_p(d_i) - f_q(d_i)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Mais, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|f_p(d_i) - f_p(z)| \leq M_1\, |d_i - z| \leq 2\, r\, M_1 < \frac{\epsilon}{3}$$

De même pour $|f_q(d_i) - f_q(z)|$. Il en résulte que, pour p et q strictements supérieurs à $N = \max\{n_i,\ 1 \leq i \leq r\}$, et $z \in K$, il vient $|f_p(z) - f_q(z)| < \epsilon$. Conclusion à l'aide du critère de Cauchy uniforme et de la proposition 8 □

Théorème 16 (Montel). *Soit* (f_n) *une suite d'éléments de* $\mathcal{H}(U)$ *telle qu'existe* $M > 0$ *vérifiant :*

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \forall z \in U,\ |f_n(z)| \leq M}$$

Alors on peut extraire de la suite (f_n) *une suite convergeant uniformément sur tout compact de* U *vers une fonction* $f \in \mathcal{H}(U)$.

Démonstration. Soit $D = \{d_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ une partie dénombrable dense dans U. On extrait de la suite bornée $(f_n(d_0))$ une suite convergente $\left(f_{\phi_0(n)}(d_0)\right)$. Puis on construit, par récurrence sur p, des extractions $\phi_0, \dots, \phi_p$ telles que, pour tout $i \in [|0, p|]$, la suite $f_{\phi_0 \circ \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_i(n)(d_i)}$ converge. On pose ensuite $\phi(n) = \phi_0 \circ \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_n(n)$. ϕ est une extraction et la suite $\left(f_{\phi(n)}(d)\right)$ converge pour tout $d \in D$. On applique enfin le théorème précédent à la suite $\left(f_{\phi(n)}\right)$. □

9.2 Le théorème fondamental de la représentation conforme

Le but de cette section est d'établir le résultat suivant, énoncé par Riemann[4] :

Théorème 17. *Pour qu'un ouvert* $U \subset \mathbf{C}$ *soit conformément représentable par* $\mathbf{D}$ *il faut et il suffit qu'il soit non vide, connexe, simplement connexe et distinct de* $\mathbf{C}$.

Nous n'aurons besoin que de la forme "forte" suivante dont le théorème "faible" 17 se déduit [5]

Théorème 18. *Soit* $U \subset \mathbf{C}$, *un ouvert non vide, borné, connexe, simplement connexe et distinct de* $\mathbf{C}$. *Alors* U *est conformément représentable par* $\mathbf{D}$.

Démonstration. On notera :

- Si $\theta \in \mathbf{R}$, r_θ la rotation $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\, z$.
- Si $c \in]0,1[$, h_c l'homographie $z \mapsto \frac{c-z}{1-c\,z}$.

On rappelle *[cf théorème 13]* que r_θ et h_c sont des automorphismes analytiques de $\mathbf{D}$.
Quitte à remplacer U par $s(U)$ où s est une similitude directe à préciser, on peut supposer que $\boxed{0 \in U}$ et que $U \subset \mathbf{D}$.
Notons $\mathcal{H}$ l'ensemble des applications $g \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $g(U) \subset \mathbf{D}$.
- g est injective.
- $g(0) = 0$ et $g'(0)$ est un réel strictement positif.

$r_0 \in \mathcal{H} \neq \emptyset$.
Considérons :

$$\boxed{\lambda = \sup\{g'(0)\ /\ g \in \mathcal{H}\} \in [1, +\infty]}$$

[4] Riemann Georg Friedrich Bernhard (1826-1866) : Né à Breselenz (Allemagne), étudia à Göttingen et à Berlin. Succéda, en 1859 à Dirichlet dans la chaire de Mathématiques de l'Université de Göttingen. Visionnaire de génie.

[5] Pour le passage du "faible" au "fort", cf Jean Dieudonné : Eléments d'analyse tome I, exercice 3 page 286. La méthode suivie, due à Riesz et Fejer, résulte de la résolution de l'exercice 4 du même ouvrage.

[Si cet ensemble n'est pas majoré, on convient que sa borne supérieure vaut $+\infty$]. Soit (λ_n) une suite strictement croissante de réels > 0 qui tend vers λ, on peut trouver $g_n \in \mathcal{H}$ tel que $g_n'(0) > \lambda_n$. D'après le **théorème de Montel 16**, on peut extraire de la suite (g_n) une suite $(g_{\phi(n)})$ qui converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction $g \in \mathcal{H}(U)$. Prouvons que $g \in \mathcal{H}$ et que $g'(0) = \lambda$ qui sera donc fini.

Preuve de $g(0) = 0$ et $g(U) \subset \mathbf{D}$: $g(0) = 0$ et $g(U) \subset \overline{D}$ résultent des propriétés correspondantes de la suite (g_n) et de la convergence simple d'icelle. D'après le théorème 6, $g(U)$ est ouvert donc est contenu dans l'intérieur de $\overline{\mathbf{D}}$, à savoir $\mathbf{D}$.

Preuve de $\lambda = g'(0)$: D'après la proposition 8, la suite $(g_n'(0))$ converge vers $g'(0)$. Or, pour tout n, $\lambda_n < g_n'(0) \leq \lambda$. Il en résulte que $g'(0) = \lambda$ qui est donc fini.

Preuve de l'injectivité de g : D'après le théorème 7, g est injective ou constante ; ce dernier cas est impossible puisque $g'(0) = \lambda \geq 1$.

Prouvons maintenant que $g(U) = \mathbf{D}$: Supposons qu'existe $a \in \mathbf{D} - g(U)$. et soit θ un argument de a. Considérons

$$g_0 = r_{-\theta} \circ g \circ r_\theta$$

On vérifie immédiatement que :
- $g_0 \in \mathcal{H}$.
- $g_0'(0) = \lambda$.
- $c = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\, a$ est un réel appartenant à $]0, 1[$ et appartenant à $\mathbf{D} - g_0(U)$.

On va maintenant fabriquer, à partir de g_0, une fonction $g_1 \in \mathcal{H}$ telle que $g_1'(0) > \lambda$, ce qui amènera la contradiction voulue.
Observons d'abord que $\Omega = h_c \circ g_0(U)$ est un ouvert connexe, simplement connexe, contenu dans $\mathbf{D}$ et ne contenant pas 0. Comme $h_c \circ g_0(0) = c$, il existe sur Ω une unique **détermination de la racine carrée** ϕ telle que $\phi(c) = \sqrt{c}$. Comme, pour $z \in \Omega$, on a $\phi(z)^2 = z$, on en déduit que $\phi(z) \in \mathbf{D}$. De plus :

$$2\phi(z)\,\phi'(z) = 1 \;\text{ donc }\; \phi'(c) = \frac{1}{2\,\phi(c)} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

La fonction g_1, définie sur U par :

$$\boxed{g_1 = h_{\sqrt{c}} \circ \phi \circ h_c \circ g_0}$$

On vérifie immédiatement, par simple composition d'applications, que :
- $g_1 \in \mathcal{H}(U)$.
- $g_1(U) \subset D$.
- g_1 est injective dans U.
- $g_1(0) = 0$.

Reste à calculer :

$$\boxed{g_1'(0) = h_{\sqrt{c}}'\left(\sqrt{c}\right)\ \phi'(c)\, h_c'(0)\, g_0'(0) = \frac{c+1}{2\sqrt{c}}\,\lambda > \lambda}$$

ce qu'on voulait. □

10 Systèmes dynamiques polynômiaux

10.1 Itération polynômiale

Dans la suite $P \in \mathbf{C}[X]$ est un polynôme **de degré** $n \geq 2$. Définissons une suite (P_n) de fonctions polynômiales sur $\mathbf{C}$ par :

$$\boxed{P_0(z) = z \qquad P_{n+1}(z) = P \circ P_n(z)}$$

Définition 9 (Bassin d'attraction). On appelle **point fixe attractif de** P **un point** $a \in \mathbf{C}$ **tel que :**

$$\boxed{P(a) = a \quad \textbf{et} \quad |P'(a)| < 1}$$

et bassin d'attraction de z **l'ensemble** U_a **des points** z **tels que la suite** $(P_n(z))$ **converge vers** a**.**

Proposition 16. *Le bassin d'attraction* U_a *de* a *est un ouvert borné de* $\mathbf{C}$*, stable par* P*, qui contient* a*.*

Proposition 17. *la composante connexe* Ω_a *de* a *dans* U_a *est un ouvert tel que* $\boxed{P(\Omega_a) = \Omega_a}$.

Proposition 18. *La suite* (P_n) *converge uniformément sur tout compact de* Ω_a *vers le point fixe* a*.*

Démonstration. La convergence simple résulte de la définition de U_a. Soit $r > 0$ tel que $B_F(a, r) \subset \Omega_a$ et tel que, pour tout z de cette boule on ait $|P'(z)| \leq k = \frac{1+|P'(a)|}{2} < 1$. Pour $0 < \epsilon < r$ et $n \in \mathbf{N}$, considérons l'ouvert de Ω_a défini par :

$$\mathcal{O}_n(\epsilon) = \{z \in \Omega_a \ / \ |P_n(z) - a| < \epsilon\}$$

L'inégalité des accroissements finis assure la croissance des $\mathcal{O}_n(\epsilon)$ qui recouvrent Ω_a. Si K est un compact de Ω_a, K est recouvert par un nombre fini de ces ouverts donc est inclus dans l'un d'entre eux. □

Théorème 19. *Soit* a *un point fixe attractif du polynôme* P*, alors la composante connexe* Ω_a *de* a *dans le bassin d'attraction de* a *possède au moins un point critique de* P*.*

Démonstration. Supposons le contraire, si $z \in \Omega_a$:

$$P'_{n+1}(z) = P'(P_n(z)) \ P'_n(z)$$

Une récurrence immédiate assure alors que P_n n'a aucun point critique dans Ω_a et induit donc un revêtement de Ω_a sur lui même. Montrons d'abord que cela impose la simple connexité de Ω_a. Soit Γ un lacet de Ω_a et $r > 0$ tel que $B_F(a, r) \subset \Omega_a$. D'après la proposition 18, il existe un rang n tel que l'image du lacet $\gamma_n = P_n \circ \Gamma$ soit contenue dans la boule $B_F(a, r)$. Donc γ_n est homotope à un lacet constant b. En relevant cette homotopie par le revêtement P_n à partir

de Γ, on voit que Γ est homotope à un lacet Γ_1 qui se projette par P_n en le lacet constant b. Donc Γ_1 est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$ qui prend ses valeurs dans l'ensemble **fini** des racines du polynôme $P_n - b$; il s'ensuit que Γ_1 est un lacet constant ce qu'on voulait.
P définit donc un revêtement analytique de l'ouvert connexe et simplement connexe Ω_a par lui même. Le théorème 12 assure alors que c'est un automorphisme analytique de l'ouvert simplement connexe Ω_a.
Comme Ω_a est connexe, simplement connexe et distinct de $\mathbf{C}$, le **théorème de Riemann** assure l'existence d'une représentation conforme de Ω_a par $\mathbf{D}$. Soit $f : \mathbf{D} \to \Omega_a$ une telle représentation. Soit $g = f^{-1} \circ P \circ f$ le conjugué de P par f, [6] g est un automorphisme analytique de $\mathbf{D}$ donc une rotation admettant une infinité d'orbites non convergentes ce qui amène une contradiction. □

10.2 Application à l'ensemble de Mandelbrot

On choisit ici :

$$\boxed{P(z) = z^2 + c \quad c \in \mathbf{C}}$$

On lui associe la suite (P_n) comme précédemment. L'ensemble de Mandelbrot [7] est l'ensemble M des $c \in \mathbf{C}$ tels que la suite $P_n(0)$ soit bornée. Considérons l'ensemble C des c tels que P ait un point fixe attractif z.

$$\boxed{c \in C \Leftrightarrow \exists z \in B\left(0, \frac{1}{2}\right) \ / \ c = z - z^2}$$

C est "l'intérieur" de la cardioïde d'équation :

$$\boxed{c = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\theta}}{4}}$$

D'après le théorème 19, si $c \in \mathbf{C}$, le bassin d'attraction de z contient un point critique de P, à savoir 0 donc $c \in M$.

Table des matières

[6] Si on a compris quelque chose à la théorie des groupes on doit trouver cette idée parfaitement naturelle

[7] Benoît Mandelbrot : Ancien élève des lycées du parc, Louis-le-Grand puis de l'Ecole Polytechnique (44), conseiller IBM, inventeur et surtout vulgarisateur des fractals, fractaux et autres fractales qui alimentent, régulièrement l'imaginaire des chroniqueurs scientifiques. Intéressant entretien dans "les cahiers de science et vie" de décembre 2000.